ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Seda EREN

SOLENOİDAL UZAYLAR ÜZERİNDEKİ KOMPAKT GRUP ETKİLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOLENOİDAL UZAYLAR ÜZERİNDEKİ KOMPAKT GRUP ETKİLERİ

Seda EREN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……	**……**	**……**
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT	Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Prof. Dr. Erol YAŞAR
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
……	……..	
Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL	
ÜYE	ÜYE	

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2015-4402

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SOLENOİDAL UZAYLAR ÜZERİNDEKİ KOMPAKT GRUP ETKİLERİ

Seda EREN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2018, Sayfa: 49
Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Dr.Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

Bu çalışmada, Solenoidler üzerinde sonlu katlı örtü dönüşümleri, p-adic solenoidin çember grubu üzerindeki esas lif demeti yapısı incelenmiş ve Hilbert-Smith sanısına zıt yönden bakılıp , bazı koşullar altında, p-adic tamsayıların efektif etki ettiği sonlu boyutlu kompakt manifoldlar elde etmenin bir yolu gösterilmiştir. Henüz bu şekilde bir manifold bulunamadığından bu durum Hilbert- Smith sanısına bir aykırı örnek değildir. Öte yandan bu koşullar bazı ekivaryantlık koşulları ve yüksek homotopi grupları ile ilgili koşullardır. Hilbert- Smith sanısı 3 boyutlu manifoldlar için doğru olduğundan 3 boyut için sözü edilen koşulların bazıları sağlanmamaktadır. Bunun sonucu olarak da 3-küreler arasında $\mathbb{Z}_P$-ekivaryant bir dönüşümün olamayacağı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Solenoidal uzaylar, p-adic solenoid, Ekivaryant dönüşümler.

ABSTRACT

PhD THESIS

COMPACT GROUP ACTİONS ON SOLENOİDAL SPACES

Seda EREN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2018, Sayfa: 49
Jury : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

In this work we studied finite sheeted covering maps on the Solenoidal Spaces, principal fiber bundle structure of p-adic Solenoid over S^1 and looking in the opposite direction it was shown that, under certain conditions, one way to obtain compact finite dimensional manifolds with effective p-adic actions. Since such a manifold has not yet been found, this is not a counter example to the Hilbert-Smith conjecture. On the other hand these conditions are about equivariance and higher homotopy groups. However, using the fact that Hilbert-Smith conjecture is true for 3-dimensional case, it was shown that there is no $\mathbb{Z}_P$-equivariant map between 3-spheres.

Key Words: Solenoidal Spaces, p-adic Solenid, Equivariant Maps.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Tez çalışmamızda öncelikle bu çalışmada kullanılan bazı genel tanım ve teoremlerden bahsedilmiş daha sonra da Gumerov'un (On finite-sheeted covering mappings onto solenoids, (2003)) bir solenoidin kendi üzerine limit dönüşümlerini incelediği çalışması ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bir sonraki bölümde ise p-adic solenoidin çember grubu üzerinde lifleri ve yapı grubu p-adic tamsayılar grubu olan bir esas lif demeti olduğu gösterilmiştir.

En son bölümde efektif çember etkisiyle 2-bağlantılı kompakt manifoldun ekivaryant dönüşümlerinin bulunmadığını gözlemleyerek 3-küreler arasındaki bir dönüşümün efektif çember etkisi için ekivaryant olma koşulu incelenmiştir. Burada p-adic gruplarının efektif etki ettiği topolojik uzay inşa etmek Hilbert-Smith sanısının çalışılmasında önemli rol oynamaktadır. Genel şekli Hilbert-Smith sanısı olarak bilinen Hilbert'in 5. Problemi 1900'de Alman matematikçi David Hilbert tarafından yayınlanan, 23 problemden oluşan problem listesinin 5. problemidir ve Lie grupların karakterizasyonu ile ilgilidir.

Hilbert'in 5. Problemi: "Her yerel Öklidyen grup bir Lie grubuna izomorfiktir."

Bu problem kompakt gruplar için Von Neumann (1933) tarafından çözülmüştür. Ayrıca yerel kompakt gruplar için de Gleason (1932) ve Montgomery – Zippin (1952) tarafından çözülmüştür.

Öte yandan P.A. Smith (1941) " Bir yerel kompakt grup sonlu boyutlu bir manifold üzerine efektif etki ederse o grup bir Lie grubudur." sanısını ortaya atmıştır. Bu sanı Hilbert'in 5. Probleminin daha genel şeklidir ve Hilbert-Smith sanısı olarak da bilinir. Öte yandan Neumann ve Smith bir Non-Lie grup sonlu boyutlu bir manifold üzerine efektif etki ederse G'nin, $\mathbb{Z}_{(p)}$ (p-adic tamsayılar grubu) (bir p asalı için) alt grubuna izomorfik bir alt gruba sahip olduğunu gösterdiler.

Bunun sonucu olarak Raymond 1967'de Neumann ve Smith'in sonuçlarına dayanarak Hilbert-Smith sanısının aşağıdaki sanıya denk olduğunu ispatsız olarak söylemiştir.

Sanı : "Herhangi bir p-adic grup bağlantılı sonlu boyutlu manifold üzerine efektif etki edemez."

Bu iki sanının birbirine denk olduğunu gösteren bir çalışma J.S. Lee tarafından 1997 yılında yapılmıştır.

Aşağıdaki durumlarda Hilbert-Smith sanısının doğruluğu bilinmektedir.

- M diferansiyellenebilir bir manifold ve G'nin her elemanının, M üzerindeki etkisi diferansiyellenebilir ise, Montgomery ve Zippin (1955),
- G'nin her elemanı sonlu mertebeden ise, Newmann (1931), P.A.Smith (1942), Montgomery (1937),
- $n \leq 2$ ise, Montgomery ve Zippin (1955),
- $n \leq 3$ ve birimin bağlantılı bileşenleri tek nokta değilse, Montgomery ve Zippin (1955),
- Tüm orbitleri yerel bağlantılı ise, Montgomery ve Zippin (1955),
- En az bir orbitin boyutu $\geq n - 2$ ise, Bredon (1958);
- k maksimum boyutlu orbitin boyutunu göstermek üzere, G/M orbit uzayının boyutu $\leq n - k$ ise, Raymond (1961).
- Son olarak, 2013 yılında John Pardon, Hilbert-Smith sanısını 3 boyutlu manifoldlar için ispatlamıştır.

Görüldüğü gibi efektif p-adic uzayların inşaası, Hilbert-Smith sanısının çalışılmasında önemli role sahiptir. Çalışmamızda efektif p-adic grup etkisiyle bir kompakt uzay elde etmek için bir yöntem gösterilmiştir. Bu yöntemi, bazı ekivaryant özelliklere sahip bağlama dönüşümleriyle efektif S^1 uzaylarının ters

limitini alarak yapacağız. Çalışmamızda bir p-adic grubun hangi koşullarda sonlu boyutlu kompakt ve bağlantılı bir manifolda efektif etki edebileceği üzerinde çalışılmıştır. Bu amaçla kompakt grupların solenoidal uzaylar (bağlama dönüşümleri sonlu katlı örtü dönüşümleri olan sonlu boyutlu manifoldların projektif limiti) üzerindeki efektif etkisi araştırılmıştır.

Bunun için aşağıdaki sıralamayı takip ederek;

1. Bazı koşullar altında efektif dönüşüm gruplarının projektif limitinin yine bir efektif dönüşüm grubu belirlediği gösterilmiştir.
2. Bunun bir sonucu olarak kompakt bağlantılı bir X manifold üzerine bir efektif S^1 etkisinin yine bazı koşullar altında X üzerinde bir efektif p-adic grup etkisi belirleyebileceğini gözlemledik. Bu koşullar X üzerinde bazı topolojik ve ekivaryantlık koşullarıdır.
3. 1 ve 2'den görüldüğü gibi Hilbert-Smith sanısının doğru olmadığı birtakım koşullar belirlenmiş olup öte yandan 3-boyutlu manifoldlar için Hilbert-Smith sanısı doğru olduğu bilindiğinden bu belirlediğimiz koşulların 3-boyutlu manifoldlar üzerinde gerçekleşmediğine dair birtakım somut örnekler verilmiştir.

TEŞEKKÜR

Lisans yıllarımdan bu yana bilgi ve tecrübeleriyle desteğini esirgemeyen, eşine az rastlanır matematik sevgisini, yaptığı çalışmalarını örnek aldığım, aynı zamanda Doktora tezimi oluşturmamda desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Ali Özkurt'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Doğan Dönmez'e, Sayın Prof. Dr. Erol Yaşar'a verdikleri destek için teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma sürecimde bana her zaman destek olan değerli eşim Yakın Eren'e, anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca maddi destek veren Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine, bilgi ve çalışkanlığını takdir ettiğim arkadaşım Arş. Gör. Mehmet Onat'a ve tüm Ç.Ü. Matematik Bölümü personeline teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR VII
İÇİNDEKİLER VIII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 13
2.1. Solenoidler Üzerinde Sonlu Katlı Örtü Dönüşümleri Üzerine 13
3. p-ADIC SOLENOİDİN ESAS LİF DEMETİ 29
4. 3-KÜRELER ARASINDA S^1-EKİVARYANT DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE 37
4.1. 3 Boyutlu Manifoldlara Bir Uygulaması 42
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 49

1. GİRİŞ

Tanım 1.1 $\tilde{X}$ ve X topolojik uzaylar, $p: \tilde{X} \to X$ sürekli dönüşüm ve U, X'de bir açık küme olsun. Eğer $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} S_i$ ve $p|_{S_i} : S_i \to U$ homeomorfizm olacak şekilde açık kümelerin ikişer ikişer ayrık $\{S_i\}_{i \in I}$ ailesi varsa U 'ya p *tarafından düzgün örtülen (evenly covered) açık küme* denir.

Tanım 1.2 $\tilde{X}$ yol bağlantılı Hausdorff uzay, X Hausdorff uzay ve $p: \tilde{X} \to X$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için x'in p tarafından düzgün örtülen açık komşuluğu varsa $p: \tilde{X} \to X$ dönüşümüne bir *örtü dönüşümü* denir. $(\tilde{X}, p)$ ikilisine de X 'in bir *örtü uzayı* denir.

Tanım 1.3 $p: \tilde{X} \to X$ bir örtü dönüşümü olsun. $cov(\tilde{X}/X) = \{h: h: \tilde{X} \to \tilde{X}$ homeomorfizm ve $ph = p\}$ kümesi fonksiyon bileşkesi altında bir gruptur. Bu gruba *örtü dönüşümleri grubu* denir.

Tanım 1.4 $p: \tilde{X} \to X$ bir örtü dönüşümü olsun. Eğer her $x \in X$ için $cov(\tilde{X}/X)$ örtü dönüşümleri grubu $p^{-1}(x)$ üzerine geçişmeli etki ediyor ise (yani, $x_0', x_0 \in p^{-1}(x)$ iken $h(x_0) = x_0'$ olacak şekilde bir $h \in cov(\tilde{X}/X)$ varsa) bu örtü dönüşümüne *regüler örtü dönüşümü* denir.

Tanım 1.5 Bir X topolojik uzayında $\alpha, \beta: [0,1] \to X$ a ile b arasında iki eğri olsun. Eğer $0 \leq s \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ için

$$F(s,0) = \alpha(s)$$
$$F(s,1) = \beta(s)$$
$$F(0,t) = a$$
$$F(1,t) = b$$

şartlarını sağlayan sürekli bir

$$F: [0,1] \times [0,1] \to X$$

fonksiyonu varsa α ve β eğrileri uç noktalarını sabit bırakacak şekilde *homotopik* denir ve $\alpha \simeq \beta \; rel\{0,1\}$ ile gösterilir. Böyle bir F fonksiyonuna da α ile β eğrileri arasında bir relatif *homotopi* denir.

Teorem 1.6 Bir X topolojik uzayındaki eğriler üzerinde uç noktalarını sabit bırakacak şekilde homotopik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısına göre bir α eğrisinin denklik sınıfına α eğrisinin *relatif homotopi sınıfı* denir ve $[\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 1.7 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. X uzayında x_0 noktasındaki tüm kapalı eğrilerin kümesini göz önüne alalım. α, x_0'da bir kapalı eğri ise α'ya relatif homotopik olan x_0'da bütün eğrilerin sınıfını $[\alpha]$ ile göstereceğiz. İki sınıfın çarpımını

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

ile tanımlayacağız.

Tanım 1.8 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. X uzayında x_0 noktasındaki tüm kapalı eğrilerin relatif homotopi sınıflarının kümesi $\pi_1(X, x_0)$ olsun. $\pi_1(X, x_0)$ kümesi

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \;\; ,$$
$$([\alpha], [\beta]) \to [\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

işlemi ile bir gruptur. Bu gruba X topolojik uzayının x_0 tabanlı *esas grubu* denir.

Tanım 1.9 X bir topolojik uzay, $I = [0,1]$ olmak üzere X^I , X içindeki tüm yolların kümesi olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere $\Omega_{X,x_0} = \Omega_{x_0}$, üzerindeki kompakt-açık

topoloji ile X^I'nın x_0 noktasındaki tüm kapalı eğrilerini içeren alt uzaydır. C, x_0 da sabit eğri olsun. (X, x_0)' ın yüksek homotopi grupları tümevarımla

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}\left(\Omega_{x_0}, C\right),\ n \geq 2$$

olarak tanımlanır. $[f] \in \pi_1\left(\Omega_{x_0}, C\right)$, C' de bir kapalı eğri ise $\bar{f}(s,t) = f(s)(t)$ ile tanımlı $\bar{f}$, I^2'nin X'de x_0 noktasındaki tüm koşulları sağlayan bir dönüşümdür.

Aksine, $\bar{f}$ verilsin. Bu eşitlik C'de bir f kapalı eğri tanımlamaktadır. g, C'de başka bir kapalı eğri ve $f \simeq g$, $rel\{0,1\}$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{f} \simeq \bar{g}$, $rel\ \{\partial I^2\}$.

Dolayısıyla $\pi_2(X, x_0)$, $(S^2, s_0) \to (X, x_0)$ dönüşümlerin homotopi sınıfları olarak düşünülebilir.

Genel olarak S^n, n-küre s_0 seçili bir nokta olsun. $\pi_n(X, x_0)$, $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$ dönüşümlerin relatif homotopi sınıfları olduğu görülebilir.

α, x_0'dan x_1'e bir yol ise α, her n için

$$(\alpha_*)_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$$

morfizmini belirler.

$$f : (X, x_0) \to (X', {x_0}')$$

dönüşümü verilsin.

$$\Omega(\mathrm{f}) : (\Omega_{x_0}, C) \to (\Omega_{x_0'}, C')$$
$$\Omega(\mathrm{f})(\sigma) = f \circ \sigma \text{ olmak üzere}$$
$$(f_*)_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X', {x_0}')$$
$$(f_*)_n = (\Omega(\mathrm{f})_*)_{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse

- $(1_*)_n = 1$
- $((gf)_*)_n = (g_*)_n(f_*)_n$

olduğu kolayca görülür.

Ayrıca $f \simeq g$, $rel\{0,1\}$ ise her n için $(f_*)_n = (g_*)_n$ olur.

Her $n \geq 0$ için $s_n = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktasını S^n'in taban noktası olarak alalım.

Her noktalı uzay (X, x_0) ve $n \geq 0$ için

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_n), (X, x_0)]$$

olduğu da görülür.

X yol bağlantılı ise $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ için $x_0 \in X$ noktasının seçiminden bağımsızdır. Bu durumda

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X)$$

ile gösterebiliriz.

Teorem 1.10 $(\tilde{X}, p)$, X 'in bir örtü uzayı olmak üzere

$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$$

bir injeksiyon olup $(\tilde{X}, p)$, X 'in bir regüler örtü uzayı olması için gerek ve yeter koşul $p_*\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})$'ın $\pi_1(X, x_0)$'ın bir normal alt grubu olmasıdır.

Tanım 1.11 $(I,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $i,i'\in I$ için $i\leq i'',\ i'\leq i''$ olacak şekilde bir i'' varsa $(I,\leq)$ kümesine *yönlendirilmiş küme* denir.

Tanım 1.12 I yönlendirilmiş küme ve her α elemanı için X_α topolojik uzay olsun. Ayrıca $\alpha,\beta\in I$ ve $\alpha\leq\beta$ olmak üzere $f_\alpha^\beta: X_\beta\to X_\alpha$ sürekli dönüşümü olsun öyle ki herhangi $\alpha,\beta,\gamma\in I$ ve $\gamma\leq\alpha\leq\beta$ için $f_\gamma^\alpha f_\alpha^\beta=f_\gamma^\beta$ sağlansın ve ayrıca her $\alpha\in I$ için $f_\alpha^\alpha: X_\alpha\to X_\alpha$ birim dönüşüm olsun. Bu durumda $S=\{X_\alpha,f_\alpha^\beta,I\}$ ailesine X_α topolojik uzaylarının bir *ters sistemi* denir.

f_α^β dönüşümlerine bu, S ters sisteminin *bağlama dönüşümleri* denir.

Tanım 1.13 $S=\{X_\alpha,f_\alpha^\beta,I\}$ bir ters sistem ve $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ olsun. Eğer $\alpha\leq\beta$ iken $x_\alpha=f_\alpha^\beta(x_\beta)$ oluyorsa $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ elemanına S'nin bir *zinciri* denir.

Tanım 1.14 S'nin tüm zincirlerinden oluşan $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$' nın alt uzayına $S=\left\{X_\alpha,f_\alpha^\beta,I\right\}$ ters sisteminin *ters limiti* denir ve $\lim_{\leftarrow}S$ veya $\lim_{\leftarrow}X_\alpha$ ile gösterilir. Her $\beta\in I$ için $\pi_\beta:\lim_{\leftarrow}X_\alpha\to X_\beta$,

$\prod_{\alpha\in I}X_\alpha\to X_\beta$ kanonik projeksiyonunun kısıtlamasını düşünürsek, herhangi $\alpha,\beta\in I$ öyle ki $\alpha\leq\beta$ için π_α ve π_β projeksiyonları

$$\pi_\alpha=f_\alpha^\beta\pi_\beta$$

eşitliğini sağlarlar.

Tanım 1.15 $P=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asal sayıların bir dizisi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $G_n=S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ alışıldık torus grubu ve her $n\in\mathbb{N}$ ve $z\in S^1$ için

$$f_n^{n+1}: G_{n+1}\to G_n\ ,$$
$$f_n^{n+1}(z)=z^{p_n}$$

olarak tanımlayalım. $S = \{G_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\}$ ters sistemin ters limitine *P-adic solenoid* denir ve $\Sigma_P$ile gösterilir.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p$ ise Σ_P=Σ_p' ye p-adic solenoid*;* eğer özel olarak $p_n = 2$ ise *dyadic solenoid* denir. *P*-adic solenoid hiç bir noktada yerel yol bağlantılı olmayan bir metrik, kompakt, bağlantılı gruptur. Solenoidler, kompakt abelyen grupların bağlantılı fakat yol bağlantılı olmayan örneklerinden biridir.

Tanım 1.16 X yol bağlantılı bir topolojik uzay olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için $\pi_i(X) \simeq \{0\}$ ve $\pi_{n+1}(X) \neq \{0\}$ ise X 'e *n-bağlantılı* denir.

Tanım 1.17 G bir grup ve X bir topolojik uzay olsun. Eğer $G \times X \to X$ sürekli dönüşümü her $x \in X$ ve $g, h \in G$ için $(g, x) \to gx$ şeklinde tanımlı öyle ki

$$1x = x \text{ (1, G nin birimi)}$$
$$\text{ve } (gh)x = g(hx)$$

oluyorsa G, X üzerine *etkir* denir. O zaman X'e bir G*-uzayı* denir.

Tanım 1.18 X bir G-uzayı ve $x \in X$ ise $G(x) = \{gx \in X : g \in G\}$ alt uzayına x'in *yörüngesi (orbiti)* denir. Elemanları yörüngeler olan kümeyi X/G ile göstereceğiz. X/G'ye üzerindeki $\pi: X \to {}^{X}/_{G}$ kanonik dönüşümü ile belirli bölüm topolojisi ile, X'in *orbit uzayı* denir.

Tanım 1.19 Her $x \in X$ için $G(x) = X$ oluyorsa G'nin X üzerindeki etkisine *geçişken*, eğer herhangi $g \neq 1$ ve $g \in G$ için $gx \neq x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa G'nin X üzerindeki etkisine *efektif etki* denir.

Tanım 1.20 X bir G-uzayı , Y bir H-uzayı ve $\varphi: G \to H$ sürekli grup homomorfizmi olsun. Eğer her $g \in G$ ve $x \in X$ için

$$f(gx) = \varphi(g) f(x)$$

oluyorsa $f: X \to Y$ sürekli dönüşümüne φ*-ekivaryant* denir.

Tanım 1.21 E, B, F topolojik uzaylar ve $\pi: E \to B$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer B'nin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ açık örtüsü ve her $\alpha \in I$ için

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$$

homeomorfizmleri var ve

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\approx}{\rightarrow}} & \\ \pi^{-1}(U_\alpha) & & U_\alpha \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U_\alpha & \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise (E, B, π, F)' ye bir *lif demeti*, E'ye bu lif demetinin *total uzayı*, B'ye *baz uzayı*, F'ye de *lifi* denir.

Tanım 1.22 G bir topolojik grup $G \to E \overset{\pi}{\to} B$ bir lif demeti olsun. Eğer G'nin E üzerinde bir etkisi

i) Her $b \in B$ için G, $\pi^{-1}(b)$ üzerinde kısıtlama etkisi geçişmeli etkidir.

ii) Her $b \in B$ için

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \\ \pi^{-1}(U) & & U \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow & proj \\ U & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde b'nin bir U açık komşuluğu ve ekivaryant φ homeomorfizmi vardır.

Koşulları sağlanıyor ise (E, B, π, G) bir *esas G-lif demetidir* denir.

Teorem 1.23 (Hurewicz İzomorfizma Teoremi): $n \in \mathbb{N}$ ve X yol bağlantılı ve $x_0 \in X$, $n > 1$ olmak üzere

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_2(X, x_0) = \cdots = \pi_{n-1}(X, x_0) = \{0\} \text{ ise}$$

$$\pi_n(X, x_0) \to H_n(X, \mathbb{Z})$$

Hurewich homomorfizması izomorfizmadır ve

$$H_1(X) = H_2(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0 \text{ dır.}$$

Teorem 1.24 (n=1 bir durumu) X bir topolojik uzay $x_0 \in X$ olsun. X yol bağlantılı ise bir

$$\chi: \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$$

örten homomorfizması vardır ki

$ker\chi = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ (komütatör alt grubu) olur.

Dolayısıyla 1. izomorfizma teoreminden

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]}$$

olur.

Tanım 1.25 X bir n-manifold ve $x \in X$ olsun. $H_n(X, X - \{x\}, R) \simeq R$ grubunun bir α_x doğurayına X manifoldunun x noktasında bir *yerel R-yönlendirmesi* denir.

Tanım 1.26 X bir n-manifold olsun. α_x: x'in bir yerel R-yönlendirmesi olsun. U, X'in bir açık alt kümesi olsun. $x \in U$ ve her $y \in U$ için

$$J_y^U: H_n(X, X - U) \to H_n(X, X - \{y\})$$

izomorfizmi olmak üzere

$$\alpha_U = (J_X^U)^{-1}(\alpha_x) \in H_n(X, X-U)$$

sınıfına X'in U boyunca (veya U'da) bir *yerel R-yönlendirmesi* denir.

Tanım 1.27 X bir n-manifold olsun.

1. $X = \cup U_i$
2. Her $i \in I$ için $\alpha_i \in H_n(X, X-U_i)$, X' in U_i boyunca bir yerel R-yönlendirmesi (yani her $y \in U_i$ için
   $J_y^{U_i}: H_n(X, X-U_i) \to H_n(X, X-\{y\})$ izomorfizm
   $J_y^{U_i}(\alpha_i) = \alpha_y$: X' in $y \in X$' de bir R-yerel yönlendirmesi)
3. $x \in U_i \cap U_j$ ise $J_x^{U_i}(\alpha_i) = J_y^{U_j}(\alpha_j)$
   koşullarını sağlayan $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i\in I}$ topluluğuna X' in bir *global R-yönlendirme sistemi* denir.

Tanım 1.28 X bir topolojik n-manifold olsun. Eğer X'in bir global R-yönlendirme sistemi varsa X' e *R-yönlendirilebilir bir (topolojik) manifold* denir.

$R = \mathbb{Z}$ ise R-yönlendirilebilir yerine *yönlendirilebilir* denir.

Tanım 1.29 Y^X, $f: X \to Y$ sürekli dönüşümlerin kümesi olsun. Y^X, kompakt-açık topoloji ile elde edilen dönüşüm uzayıdır. Eğer $(Y,*)$ bir noktalı uzay ve $X = S^1$ olarak alınırsa, taban noktası çember üzerinden seçilebilir ve noktalı dönüşümlerin uzayı $(Y,*)^{(S^1,*)}$ oluşturulabilir. Bu uzaya Y'nin *ilmek uzayı* denir ve ΩY ile gösterilir.

Tanım 1.30 Bir küre üzerinde sonlu devirli grubun bir serbest lineer etkisinin yörünge uzayına *lens uzayı* denir. Yani;
her $i = 1,2,\dots,d$ için m, l_i doğal sayılar olsun öyle ki $(l_i, m) = 1$.

Lens uzayı $L(m, l_1, l_2, \dots, l_d)$, $S^{2d-1} = S(\mathbb{C}^d)$ küresi üzerinde devirli grup

$$\mathbb{Z}_m\text{'nin } (z_1, \dots, z_d) \to (z_1.e^{2\pi i l_1/m}, \dots, z_d.e^{2\pi i l_d/m})$$

ile verilen serbest etkisinin yörünge uzayıdır.

Teorem 1.31 (Poincare Dualite) X bir R-yönlendirilmiş n-manifold ise $D: H_c^p(X) \to H_{n-p}(X)$ homomorfizmi bir izomorfizmdir.

Teorem 1.32 X, Y kompakt, bağlantılı, yönlü manifold ve $f: X \to Y$ bir m-katlı örtü uzayı olsun. f yönlendirmeyi koruyan dönüşüm ise

$$\begin{array}{ccc} H^q(X) & \xrightarrow[D]{} & H_{n-q}(X) \\ H^q(f) \uparrow & & \downarrow H_{n-q}(f) \\ H^q(Y) & \xrightarrow[mD]{} & H_{n-q}(Y) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Tanım 1.33 Sonlu üretilmiş homolojiyle bir X uzayının *Euler karakteristiği*;

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i rank H_i(X; R)$$

Tanım 1.34 X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere

$$CX = X \times I \,/\, (\{x_0\} \times I \cup X \times \{1\})$$

bölüm uzayına X üzerindeki *koni* denir.

Özel olarak I yerine $S^1 = {}^{I}/_{\partial I}$ alırsak

$$\Sigma X = X \times S^1 \,/\, (\{x_0\} \times S^1 \cup X \times \{1\})$$

uzayına *X*'in *süspansiyonu* denir.

Tanım 1.35 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ abelyen grupların bir projektif sistemi olsun.

$$\pi_i: A_{i+1} \to A_i$$
$$\overline{a_{i+1}} = \pi_i(a_{i+1})$$

bağlama dönüşümü olmak üzere

$$\triangle: \prod_{n=0}^{+\infty} A_n \to \prod_{n=0}^{+\infty} A_n$$
$$\triangle\,(a_1, \dots, a_n, \dots) = (\dots, a_i - \overline{a_{i+1}}, \dots, a_1 - \overline{a_2}, a_0 - \overline{a_1})$$

olarak tanımlansın.

$$lim^1_{\leftarrow} A_i \quad = Coker \triangle$$

olarak tanımlanır. Burada $lim^1_{\leftarrow} A_i$ 'ye Abelyen grupların $\{A_i, f_i^{i+1}\}$ ters dizisinin *birinci türetilmiş funktoru* denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Solenoidler Üzerinde Sonlu Katlı Örtü Dönüşümleri Üzerine

Bu bölümde Gumerov'un 2003 yılında yapmış olduğu bir çalışmayı inceledik. Gumerov bu çalışmasında bir solenoidin kendi üzerine limit dönüşümlerini incelemiştir. Ayrıca bağlantılı topolojik uzaylardan bir solenoid üzerine sonlu katlı örtü dönüşümlerinin her bir denklik sınıfının bir limit dönüşümü tarafından belirlendiğini gözlemleyeceğiz. Ek olarak da limit dönüşümlerinin periyodik noktalarının özellikleri üzerinde çalışacağız.

Bunun için öncelikle P ve Q asal sayıların iki dizisini düşünelim ve bazı tanımlar yapalım.

P ve Q asal sayıların iki dizisi olmak üzere her bir diziden sonlu sayıda terim silinerek, her asal sayıdan her iki dizide de aynı sayıda bulunması sağlanıyorsa P ve Q dizileri *denktir* denir ve $P \sim Q$ şeklinde gösterilir. Σ_P ve Σ_Q solenoidlerin homeomorfik olması için gerek ve yeter koşul $P \sim Q$ olmasıdır. (R.H. Bing 1960, M.C. mcCord 1965, J.M. Aartsand 1991)

Solenoid $(1,1,\dots)$ birimi ile koordinat çarpımı altında bir kompakt abelyen gruptur. Ayrıca $P \sim Q$ koşulu, Σ_P ve Σ_Q topolojik grupları arasında topolojik izomorfizmin varlığı için de bir kriterdir. (R.H. Bing 1960)

$k \in \mathbb{N}$ verilsin. $h_P^k: \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ limit dönüşümü aşağıda belirtildiği gibi projektif sistemlerin iki kopyası arasındaki $\{h_n^k: n \in \mathbb{N}\}$ dönüşümleri tarafından belirlensin.

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \overset{f_1^2}{\leftarrow} & S^1 & & \\ h_1^k \downarrow & & \downarrow & h_2^k & \dots \\ S^1 & \underset{f_1^2}{\leftarrow} & S^1 & & \end{array} \qquad (1)$$

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in S^1$ için $h_n^k(z)=z^k$ dır.

X bir topolojik uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$f \circ f \circ ... \circ f \text{ (n defa)}$$

bileşkesine f'nin n-inci *iterasyonu* (tekrarlama) denir ve f^n $(f^1 = f)$ ile gösterilir. Eğer $f^n(x) = x$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ varsa $x \in X$ noktasına bir *periyodik nokta* ve n'ye x*'in* f *altında periyodu* denir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için dyadic solenoidin $h_{(2,2,...)}^k$limit dönüşümü bir örtü dönüşümü olup $h_{(2,2,...)}^k$ nın periyodik noktalarının kümesi $\Sigma_{(2,2,...)}$de yoğundur. (Zhou Youcheng 2000, J.J. Charatonik ve P.P Covarrubias 2002)

Burada Gumerov yukarıdaki $h_{(2,2,...)}^k$ile ilgili sonucu rastgele bir *P*-adic solenoidin h_P^k limit dönüşümüne genişletmeyi amaçlamaktadır.

Öncelikle kullanılan notasyonları belirtelim.

- Genellikle $\mathbb{N}$, pozitif tam sayılar kümesini ifade etmektedir.
- $z \in \mathbb{C}$ bir kompleks sayı ve $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt[n]{z}$, z 'nin n-inci dereceden köklerinin kümesini belirtir.
- İki uzay arasındaki dönüşüm daima sürekli fonksiyon anlamına geliyor.
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{X_n, \pi_n^{n+1}\}$ ve $\{Y_n, \rho_n^{n+1}\}$, X_n ve Y_n uzaylarının ters limit dizileri olsun.

Buradan $\{X_n, \pi_n^{n+1}\}$ ve $\{Y_n, \rho_n^{n+1}\}$ 'nin ters limit uzayları X_∞ ve Y_∞ ile gösterilecek.

- Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_n \circ \pi_n^{n+1} = \rho_n^{n+1} \circ \sigma_{n+1}$$

ise $\{\sigma_n: X_n \to Y_n\ , n \in \mathbb{N}\}$ dönüşümlerin dizisine $\{X_n, \pi_n^{n+1}\}$ ve $\{Y_n, \rho_n^{n+1}\}$ ters dizileri arasında bir *dönüşüm* denir.

Bu durumda

$$\sigma_\infty: X_\infty \to Y_\infty\ ;\ (x_1, x_2, \dots) \to (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \dots)$$

dönüşümü vardır. Bu dönüşüme $\{\sigma_n: n \in \mathbb{N}\}$ tarafından belirlenen *limit dönüşümü* denir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $X_n = S^1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ için $f_m^n: S^1 \to S^1\ , z \to z^{n-m}$ olmak üzere $\{X_n, f_m^n\}$ ters sistem belirler. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için f_n^n dönüşümü S^1 'de birim dönüşüm ve her $l, m, n \in \mathbb{N}$ için $l \leq m \leq n$ olmak üzere

$$f_l^n = f_l^m \circ f_m^n \text{ dir.}$$

$f: X \to Y$ örten dönüşüm olsun. Eğer her $y \in Y$ için card$[f^{-1}(y)] = k$ ise f'ye k-to-1 dir denir. k-katlı bir örtü dönüşümü k-to-1 dir yani her $y \in Y$ noktasında $W^{açık} \subset Y$ komşuluğu vardır öyle ki $f^{-1}(W)$ ters görüntüsü, her biri f altında *W*'ya homeomorf olan k tane ayrık açık kümeden oluşmaktadır.

Yukarıdaki tanımdaki k sayısına dönüşümün *derecesi* denir.

- $P = (p_1, p_2, \dots)$ asal sayıların bir dizisi ve sonsuz tane p_n terimi için $p = p_n$ ise *p* asal sayısı *P* de *sonsuz tanedir* denir.
- $S(P)$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$'in P dizisinde sonsuz tane olmayan tüm asal sayıları içeren bir alt kümesidir. Başka bir deyişle $q \in S(P) \Leftrightarrow q > 1$ bir asal sayıdır öyle ki bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq m$ iken $p_n \neq q$ olur.

Önerme 2.1 Her $k \in \mathbb{N}$ için $h_P^k: \Sigma_P \to \Sigma_P$ limit dönüşümü bir sonlu katlı örtü dönşümüdür ve derecesi en fazla *k* dır.

İspat: (G.T. Whyburn 1942, J.J. Charatonik ve P.P Covarrubias (2002)) Sabit bir $m \leq k$ için h_P^k m-to-1, örten ve açık dönüşümdür. S^1 kompakt ve (1) deki her h_n^k dönüşümü örten olduğundan limit dönüşümü h_P^k da örtendir. Dolayısıyla h_P^k bir açık dönüşüm ve her $y \in \Sigma_P$ için

$$\text{card}\left(h_P^k\right)^{-1}(y) = \text{card}\left(h_P^k\right)^{-1}(e) \ ,$$

Ayrıca

$$(x_1, x_2, \dots) \in \left(h_P^k\right)^{-1}(e)$$

ise $x_n \in \sqrt[k]{1}$ olduğundan h_P^k, m-to-1 dönüşümdür.

Önerme 2.2 *k, P* dizisinde sonsuz kere bulunan bir asal sayı ise $h_P^k: \Sigma_P \to \Sigma_P$ limit dönüşümü bir homeomorfizmadır.

İspat: iddia: $\left(h_P^k\right)^{-1}(e)$ kümesi bir tek e noktasını içerir.

Varsayalım ki

$$z = (z_1, z_2, \dots) \in \left(h_P^k\right)^{-1}(e)$$

olsun. $z_n^k = 1$ her $n \in \mathbb{N}$ için olur. Varsayımdan $n \in \mathbb{N}$ için, $m \geq n$ tamsayısı vardır öyle ki

$$z_n = f_n^m\left(f_m^{m+1}(z_{m+1})\right) = f_n^m\left(z_{m+1}^k\right) = f_n^m(1) = 1.$$

Bu eşitlikler her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Buradan

$$z = e$$

olur. O halde

$$\text{card}\left(h_P^k\right)^{-1}(e) = 1$$

ve önerme 2.1'den limit dönüşümü h_P^k bir homeomorfizmdir.

Sıradaki lemmanın doğruluğu açıktır. (J.J. Charatonik ve P.P Covarrubias (2002))

Lemma 2.3 $l, m \in \mathbb{N}$ için $k = l.m$ ise $h_P^k = h_P^l \circ h_P^m$.

Lemma 2.3 ve Önerme 2.2'den aşağıdaki önermeyi söyleyebiliriz.

Önerme 2.4 $k \in \mathbb{N}$ nin her asal böleni P dizisinde sonsuz defa bulunuyorsa, $h_P^k: \Sigma_P \to \Sigma_P$ bir homeomorfizmadır.

Şimdi $n \in \mathbb{N}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$$\xi_n = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}$$

olsun.

$$\sqrt[n]{1} = \left\{1, {\xi_n}, {\xi_n}^2, \dots, {\xi_n}^{n-1}\right\},$$

ξ_n tarafından üretilen çarpımsal devirli bir gruptur.

$m \in \mathbb{N}$ ve $j \in \{1,2, \dots n\}$ olmak üzere

$$\psi_m: \sqrt[n]{1} \to \sqrt[n]{1} \ ,$$
$$\psi_m\left({\xi_n}^j\right) = {\xi_n}^{j.m}$$

şeklinde bir homomorfizm tanımlayalım. *n* ve *m* aralarında asal olsun. Bu durumda ψ_m injektif olur. Ayrıca ψ_m örten olduğundan bir otomorfizmdir. ψ_m'in tersini;

$$\phi_m: \sqrt[n]{1} \to \sqrt[n]{1}$$

ile gösterelim. Başka bir deyişle her $a \in \sqrt[n]{1}$ için $\sqrt[n]{1}$ grubunun m-inci kuvveti a 'ya eşit olan sadece bir b elemanı vardır.

Önerme 2.5 $k \in S(P)$ ise $h_P^k: \Sigma_P \to \Sigma_P$ bir k-katlı örtü dönüşümüdür.

İspat : $m = min\{l: k \neq p_n\ , n \geq l\}$ olsun.

$m = 1$ ise; k, P dizisinin bir terimi değildir. O zaman her $p_n \in P$ için p_n ve k aralarında asaldır.

$$\psi_{p_n}: \sqrt[k]{1} \to \sqrt[k]{1}\ ,$$
$$z \to z^{p_n}\ ,$$

otomorfizm ve $\phi_n = (\psi_{p_n})^{-1}$ olsun.

$(\phi_{p_n}(z))^{p_n} = z\ ,\ z \in S^1$ olur.

$j \in \{1,2, \dots, k\}$ olmak üzere ξ_k^j biriminin her k −ıncı kökü için

$$(\xi_k^j\ , \phi_{p_1}(\xi_k^j)\ , \phi_{p_2} \circ \phi_{p_1}(\xi_k^j)\ , \dots)$$

elemanı $(h_p^k)^{-1}(e)$ kümesinde bulunur. O halde $(h_p^k)^{-1}(e)$ lifinin ayrık k noktasını elde edebiliriz. Buradan

$$card(h_p^k)^{-1}(e) \geq k$$

olur.

Diğer yandan Önerme 2.1'den

$$card(h_p^k)^{-1}(e) \leq k$$

idi.

O halde

$$card(h_P^k)^{-1}(e) = k$$

olur.

$m > 1\ ise;\ Q = (p_m, p_{m+1}, \dots)$ dizisini düşünelim. Q , P' ye denk olur. O zaman $\rho: \Sigma_P \to \Sigma_Q$ topolojik grupların bir izomorfizmi vardır. $(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_P$ olmak üzere

$$\rho\big((x_1, x_2, \dots)\big) = (x_m, x_{m+1}, \dots)$$

olup $\rho^{-1} = \tau$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\rho}{\to} & \\ \Sigma_P & & \Sigma_Q \\ h_P^k \downarrow & & \downarrow h_Q^k \\ & \overset{\rho}{\to} & \\ \Sigma_P & & \Sigma_Q \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. $\rho \circ h_P^k = h_Q^k \circ \rho$.

İspatın ilk bölümünden h_Q^k k-katlı örtü dönüşümüdür. Diyagramın değişmeliliğinden

$$(h_P^k)^{-1}(e) = (h_P^k)^{-1}\big(\tau(e)\big) = \tau((h_Q^k)^{-1}(e)).$$

Fakat τ dönüşümü injektif ve

$$card(h_P^k)^{-1}(e) = k$$

olduğundan Önerme 2.1'den h_P^k k-katlı örtü dönüşümüdür.

Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.6 $k \in \mathbb{N}$ verilsin. P-adic solenoidin, h_P^k formunda k-katlı örtü dönüşümünün olması için gerek ve yeter koşul k' nin P dizisinde sonsuz çoklukta bulunan bir asal böleninin olmamasıdır.

İspat : h_P^k k-katlı örtü dönüşümü olsun. k' nin P dizisinde sonsuz çoklukta bulunan bir asal böleninin olmadığını gözlemleyelim:

l, k' nın P dizisinde sonsuz defa bulunan bir asal böleni olsun.
$k = l.m$ olmak üzere

$$h_P^k = h_P^l \circ h_P^m$$

ve h_P^k k-katlı olup $h_P^l: \Sigma_P \to \Sigma_P$ homeomorfizm olduğundan

$$h_P^m = \left(h_P^l\right)^{-1}\left(h_P^k\right)$$

k-katlı örtü dönüşümü olur. h_P^m en fazla m-katlı olabilir. O halde $k \leq m$ dir.
k'nın tüm asal bölenleri $S(P)$'nin elemanı olsunlar o zaman h_P^k dönüşümünün k-katlı olduğunu gözlemleyelim:

$$k = q_1.q_2.\ldots.q_r$$

olmak üzere

$h_P^{q_1}$ q_1-katlı,
$h_P^{q_2}$ q_2-katlı,
... ,
$h_P^{q_r}$ q_r-katlı

olup

$$h_P^k = \left(h_P^{q_1}\right) \circ \left(h_P^{q_2}\right) \circ \ldots \circ \left(h_P^{q_r}\right) \qquad h_P^k q_1 . q_2 . \ldots q_r\text{-katlı}$$

yani,

$$h_P^k \quad k\text{-katlı}$$

olur.

Teoremi yeniden ifade etmeye çalışalım. Bunu yapmak için bazı gerçekleri hatırlamalıyız. $\Sigma_P \to S^1$ 'e tüm sürekli homomorfizleri içeren, Σ_P'nin karakter grubu, P-adic rasyonellerinin F_P ayrık (discrete) grubuna topolojik olarak izomorfiktir. O halde Pontryagin Dualiteden Σ_P ve Σ_Q solenoidlerinin topolojik izomorfik olması için gerek ve yeter koşul F_P ve F_Q toplamsal gruplarının izomorfik olmasıdır. G, bir toplamsal abelyen grup olsun. Eğer her $g \in G$ için bir $g' \in G$ vardır öyle ki $ng' = g$ oluyorsa G'ye *n-bölünebilir* denir. Sayılar Teorisin'den; bir p asal sayısı için F_P'nin p-bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul p'nin P'de sonsuz çoklukta bulunmasıdır.

O halde teoremin başka bir ifadesi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 2.7 $k \in \mathbb{N}$ verilsin. P-adic solenoidin h_P^k formunda bir k-katlı örtü dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul P-adic rasyoneller grubu q-bölünebilir olacak şekilde k'nın bir asal q böleni olmamasıdır.

Teorem 2.8 $k \in \mathbb{N}$ ve P de asal sayıların bir dizisi olsun. k, P'de sonsuz defa bulunan bazı asal sayıların bir çarpımı ise Σ_P, P-adic solenoidin k-katlı bağlantılı örtüsü yoktur. Aksi halde h_P^k limit dönüşümü bir k-katlı bağlantılı örtüdür ve Σ_P'nin her bağlantılı k-katlı örtüsü h_P^k'ya denktir.

İspat : $m_1, m_2, \ldots, m_n$ P'de sonsuz defa bulunan asal sayılar ve

$$k = m_1 . m_2 . \ldots . m_n$$

olsun.

$$h_p^k = h_p^{m_1} \circ h_p^{m_2} \circ \dots \circ h_p^{m_n}$$

olur.

h_p^k , k-katlı örtü dönüşümü olsun.

$$h_P^{m_1}: \Sigma_P \to \Sigma_P$$

homeomorfizm olup,

$$h_P^{m_2} \circ \dots \circ h_P^{m_n} = \left(h_P^{m_1}\right)^{-1}\left(h_P^k\right)$$

k-katlı

örtü dönüşümü olur.

$h_P^{m_2} \circ \dots \circ h_P^{m_n}$ en fazla $\frac{k}{m_1} = m_2.m_3 \dots . m_n$–katlı

dönüşüm olabilir. O halde $k \leq \frac{k}{m_1}$ olur ve bu bir çelişkidir.

Not 2.9 Σ_P'nin her sonlu katlı bağlantılı örtüsü, bazı h_P^k limit dönüşümlerine izomorfiktir.

İspat : $f: X \to \Sigma_P$ k-katlı bağlantılı örtü olsun. O zaman $\{X_n, g_n^{n+1}\}$ ters dizisi ve $\{X_n, g_n^{n+1}\}$ ile

$$S^1 \xleftarrow{f_1^2} S^1 \xleftarrow{f_2^3} S^1 \xleftarrow{f_3^4} \dots$$

ters dizileri arasında $\{\sigma_n: X_n \to S^1 | n \in \mathbb{N}\}$ dönüşümü vardır öyle ki aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için X_n uzayı bağlantılı ve $\sigma_n: X_n \to S^1$ k-katlı örtü dönüşümüdür.
2. f, k-katlı örtü dönüşümü $\{\sigma_n: X_n \to S^1\}$ tarafından belirlenen $\sigma_\infty: X_\infty \to \Sigma_P$ dönüşümüne izomorfiktir.
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X_n$ vardır öyle ki $g_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ ve $\sigma_n(x_n) = 1$ dolayısıyla klasik örtü uzayı teorisi kullanılarak (W. S. Massey, Bölüm V, Sonuç 6.4) homeomorfizmlerin $\{\Phi_n: S^1 \to X_n\}$ bir dizisi oluşturulabilir öyle ki $\Phi_n(1) = x_n$ ve $\sigma_n \circ \Phi_n = h_n^k$.

Yükseltmenin tekliğinden (W. S. Massey, Bölüm V, Lemma 3.2) ; $\{\Phi_n: n \in \mathbb{N}\}$,

$$S^1 \xleftarrow{f_1^2} S^1 \xleftarrow{f_2^3} S^1 \xleftarrow{f_3^4} \dots$$

ve $\{X_n, g_n^{n+1}\}$ ters dizileri arasında bir dönüşüm olduğu görülür. Her

$$\Phi_n: S^1 \to X_n$$

dönüşümü homeomorfizm olduğundan

$$\Phi_\infty: \Sigma_P \to X_\infty;$$

$\{\Phi_n: n \in \mathbb{N}\}$ tarafından belirlenen limit dönüşümü de homeomorfizm olur (R. Engelking, önerme 2.5.10).

O zaman

$$\sigma_\infty \circ \Phi_\infty = h_P^k \, .$$

Başka bir deyişle; σ_∞ ve h_P^k limit dönüşümleri izomorfiktir.

$$f: X \to \Sigma_P$$

örtü dönüşümü

$$\sigma_\infty: X_\infty \to \Sigma_P$$

dönüşümüne izomorfik olduğundan

$$h_P^k: \Sigma_P \to \Sigma_P$$

limit dönüşümüne de izomorfiktir.

Şimdi h_P^k limit dönüşümlerinin periyodik noktalarını

1. $S(P) = \emptyset$
2. $S(P)$ bir sonsuz küme

durumları için inceleyeceğiz.

Öncelikle asal sayıların bir P dizisi için h_P^1 limit dönüşümleri, Σ_P üzerinde bir birim olduğunu dolayısıyla h_P^1'in periyodik noktalarının kümesinin tüm Σ_P uzayı olduğunu gözlemleyelim.

Önerme 2.10 $P = (p_1, p_2, \dots)$ asal sayıların bir dizisi olsun öyle ki her asal sayı P de sonsuz defa bulunsun. O zaman her $k \geq 2$ için, P-adic solenoid'in birimi e, h_P^k limit dönüşümünün tek periyodik noktasıdır.

İspat : Sabit bir $k \geq 2$ ve $z = (z_1, z_2, \dots)$ Σ_P'in bir periyodik noktası varsayalım. Dolayısıyla bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$(h_P^k)^m(z) = h_P^{k^m}(z) = z \text{ olur.}$$

O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$z_n^{k^m-1} = 1 \ , \ k^m \geq 2.$$
$$z = e \ , k^m = 2 \text{ ise.}$$

$k^m \geq 3$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için, $l \geq n$ seçelim öyle ki P'nin terimlerinin $p_n p_{n+1} \dots p_{l-1}$ çarpımı $k^m - 1$'in bir katıdır.
O zaman

$$z_n = f_n^l(z_l) = z_l^{p_n p_{n+1} \dots p_{l-1}} = 1.$$

Bu her $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığından $z = e$ olur.

Sıradaki önerme (J. J. Charatonik and P. P. Covarrubias, Önerme 40, Zhou Youcheng, Önerme 9) üzerine kurulmuştur.

Öncelikle Euler'in Teoremi'ni hatırlayalım.

Farklı pozitif asal sayılar a ve m için $a^{\varphi(m)} - 1$ m-bölünebilirdir. $\varphi(m)$ =Euler fonksiyonunun m'deki değeridir. $\varphi(1) = 1$ve $m > 1$ için

m'nin kanonik çarpanları $q_1, q_2, \dots, q_n \geq 2$ (ayrık) asal sayılar ve $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$m = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_n^{l_n}$$

olmak üzere

$$\varphi(m) = q_1^{l_1-1} q_2^{l_2-1} \dots q_n^{l_n-1}(q_1 - 1)(q_2 - 1) \dots (q_n - 1)$$

olur.

Önerme 2.11 $P = (p_1, p_2, \dots)$ asal sayıların bir dizisi ve öyle ki S(P) sonsuz küme olsun. O zaman, her $k \in \mathbb{N}$ için, h_P^k limit dönüşümlerinin tüm periyodik noktalarının kümesi Σ_P'de yoğundur.

İspat : $k > 1$ verilsin. $q > k$ olacak şekilde $q \in S(P)$ seçelim.

$$\pi_n : \Sigma_P \to S^1 : (z_1, z_2, \dots) \to z_n,$$

olmak üzere

$$S^1 \xleftarrow{f_1^2} S^1 \xleftarrow{f_2^3} S^1 \xleftarrow{f_3^4} \dots$$

ters dizisinin n-inci projeksiyon dönüşümüdür. U, Σ_P'nin bir temel açık alt kümesi olsun. Yani $l \in \mathbb{N}$ ve $V_l \subseteq S^1$ açık alt kümesi için, $U = \pi_l^{-1}(V_l)$ dır.
$n \geq l$ için, π_n ve π_l projeksiyon dönüşümleri

$$\pi_l = f_l^n \circ \pi_n$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca her $n \geq l$ için $V_n = (f_l^n)^{-1}(V_l)$ olmak üzere

$$U = \pi_l^{-1}(V_l) = \pi_n^{-1}(V_n) \text{ olur.}$$

$q \in S(P)$ olduğundan $j \geq n$ için $p_j \neq q$ olacak şekilde $n \geq l$ seçebiliriz.

Böyle bir sabit n alalım. Bir $m \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki $z_n^{q^m} = 1$ olacak şekilde bir $z_n \in V_n$ noktası vardır ve $j \geq n$ için p_j ve q^m sayıları aralarında asaldır.

$$\psi_{p_j}: \sqrt[q^m]{1} \to \sqrt[q^m]{1} : z \to z_n^{p_j}$$

otomorfizmini ve tersi Φ_{p_j}'yi düşünelim.

$$\left(\Phi_{p_j}(z)\right)^{p_j} = z$$

Her $z \in \sqrt[q^m]{1}$ için

$$\zeta = (z_n{}^{p_1 p_2 \dots p_{n-1}}, \dots, z_n{}^{p_{n-1}}, z_n, \Phi_{p_n}(z_n), \Phi_{p_{n+1}} \circ \Phi_{p_n}(z_n), \dots) .$$

ζ noktası Σ_P'ye aittir. Ayrıca U'ya da ait olur.

ζ , h_p^k'nın bir periyodik noktası olduğunu iddia ediyoruz:

ζ dizisinin her terimi 1'in q^m-inci kökü olduğundan $\zeta^{q^m} = e$. k ve q^m aralarında asal olduğundan, Euler'in Teorem'inden $k^{q^{m-1}(q-1)} - 1$, q^m bölünebilirdir. $\zeta^{k^{q^{m-1}(q-1)}-1} = e$ ve $(h_P^k)^{q^{m-1}(q-1)}(\zeta) = \zeta^{k^{q^{m-1}(q-1)}} = \zeta$.

Diğer bir deyişle ζ, h_P^k altında $q^{m-1}(q-1)$ periyotlu bir noktasıdır.

$\zeta \in U$ ve U'nun Σ_P'nin rastgele bir açık alt kümesi olmasından ispat tamamlanır.

3. p-ADIC SOLENOİDİN ESAS LİF DEMETİ

Bu bölümde amacımız p-adic solenoidin çember grubu üzerinde lifi $\mathbb{Z}_{(p)}$ (p-adic tamsayılar grubu) olan esas lif demeti olduğunu göstermektir. Bunun için Denklemi buraya yazın.esas lif demeti olmanın koşullarını adım adım inceleyeceğiz. $f_1: \Sigma_p \to S^1$, $f_1(x_1, x_2, \dots) = x_1$ olmak üzere

Teorem 3.1 $(\Sigma_p, f_1, S^1, \mathbb{Z}_{(p)})$ bir esas $\mathbb{Z}_{(p)}$-lif demetidir.

İspat: $S^1 = \{z: |z| = 1\}$ (kompleks düzlemde birim çember) ve

$$f_1^{n+1}: S^1 \longrightarrow S^1$$
$$f_1^{n+1}(z) = z^{p^n}$$

olsun. (S^1, f_1^{n+1}) bir ters limit dizisidir ve Σ_p, bu ters limit dizisinin ters limitidir.

$$F_1 = \pi_1(S^1) = \mathrm{Z}$$

olmak üzere

$$F_k = (f_1^k)_*\left(\pi_1(S^1)\right)$$

olarak tanımlayalım.

$Q_n = {}^{F_1}/_{F_n}$ olarak tanımlayalım. O zaman her $n \geq 2$ için

$$\Phi_n: Q_n \to \mathrm{Z}_{p^{n-1}}$$

izomorfizmini ve

$$v_n^{n+1}: {}^{F_1}\!/_{F_{n+1}} = {}^{\mathrm{Z}}\!/_{p^n\mathrm{Z}} \longrightarrow {}^{\mathrm{Z}}\!/_{p^{n-1}\mathrm{Z}} = {}^{F_1}\!/_{F_n}$$

homomorfizmini göstermek üzere;

$$\mu_n^{n+1}: \mathrm{Z}_{p^n} \longrightarrow \mathrm{Z}_{p^{n-1}}$$
$$\mu_n^{n+1} = \Phi_n v_n^{n+1} \Phi_{n+1}^{-1}$$

olarak tanımlayalım. Dolayısıyla

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}_{p^n} & \overset{\mu_n^{n+1}}{\dashrightarrow} & \mathrm{Z}_{p^{n-1}} \\ \Phi_{n+1} \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \Phi_n \\ {}^{F_1}\!/_{F_{n+1}} & \overset{v_n^{n+1}}{\longrightarrow} & {}^{F_1}\!/_{F_n} \end{array}$$

değişmeli diyagramını elde ederiz.

$\{\mathrm{Z}_{p^{n-1}}, \mu_n^{n+1}\}$ ters sisteminin ters limiti $\mathbb{Z}_{(p)}$ (p-adic grup) olur. $\mathbb{Z}_{(p)} \trianglelefteq \Sigma_p$ olduğundan Σ_p'nin kendi üzerine etkisinin kısıtlama (efektif) etkisini düşünelim.

$$\mathbb{Z}_{(p)} \times \Sigma_p \longrightarrow \Sigma_p \ ,$$
$$(g, h) \longrightarrow gh$$

Bu etkinin her $z \in S^1$ için $f_1^{-1}(z)$'ye kısıtı

$$\mathrm{Z}_{(p)} \times f_1^{-1}(z) \to f_1^{-1}(z)$$

geçişmeli etkidir. Gerçekten eğer $x = (x_1, x_2, \dots)$ ve $x' = (x_1', x_2', \dots)$ ve

$$z = f_1(\mathrm{x}) = f_1(\mathrm{x}')$$

her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_1^n(x_n) = f_1^n(x_n') \ .$$

f_1^n, regüler örtü dönüşümü olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in Z_{p^n}$ vardır öyle ki

$$g_n f_n^{n+1}(x_{n+1}) = g_n(x_n) = x_n' = f_n^{n+1}(x_{n+1}') = f_n^{n+1} g_{n+1}(x_{n+1})$$

dolayısıyla

$$g_n = \mu_n^{n+1}(g_{n+1}) \ ,$$

$g = (g_1, g_2, \dots) \in \mathrm{Z}_{(p)}$ olup

$$gx = x'$$

olur.

$\left(\Sigma_p \ , f_1, S^1\right)$'in lif'i $\mathbb{Z}_{(p)}$ olan esas $\mathbb{Z}_{(p)}$ −lif demeti olduğunu gösterelim.

$$p_1 \colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \quad , \quad x \longrightarrow e^{2\pi i x}$$

$$p_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \quad , \quad x \longrightarrow e^{2\pi i \frac{1}{p} x}$$

$$p_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \quad , \quad x \longrightarrow e^{2\pi i \frac{1}{p^2} x}$$

$$\dots$$

$$p_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \quad , \quad x \longrightarrow e^{2\pi i \frac{1}{p^{n-1}} x}$$

.
.
.

ve $R = \varprojlim\{R, 1\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overset{1}{\leftarrow} & & \overset{1}{\leftarrow} & \\ R: & \cdots & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & \\ \downarrow & p_\infty & & \downarrow & p_{n-1} & \downarrow & p_n \\ \varprojlim S^1 = T_p & \cdots & \overset{\leftarrow}{f_{n-2}^{n-1}} & S^1 & \overset{\leftarrow}{f_{n-1}^{n}} & S^1 & \end{array}$$

olduğundan

$$p_\infty : \mathbb{R} \longrightarrow \varprojlim S^1 = \Sigma_p \,,$$
$$x \to (p_1(x), p_2(x), \dots)$$

dönüşümü belirler.

$p_1 : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ örtü dönüşümü olduğundan her $z \in S^1$ için z'yi içeren bir V açık kümesi ve $p_1 /_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow V$ homeomorfizm olacak şekilde bir $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ açık kümesi vardır. (Örneğin $z \in S^1 - \{1\}$ ise $z = e^{2\pi i x}$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. $[\![x]\!]$: x'in tam değeri olmak üzere $n = [\![x]\!]$ ve $\tilde{V} = (n, n+1)$ ise

$$p_1 /_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow p_1(\tilde{V}) = V$$

homeomorfizmdir.)

$$q = (p_1 /_{\tilde{V}})^{-1} : V \longrightarrow \tilde{V}$$

homeomorfizmi olsun.

$$P_\infty : \mathbb{Z}_{(p)} \times \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma_p \ ,$$
$$(g, x) = g.p_\infty(x)$$

olarak tanımlayalım.

Öncelikle $P_\infty\left(\mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V}\right) = f_1^{-1}(V)$ olduğunu gösterelim:

$x \in f_1^{-1}(V)$ ve

$$f_1(x) = x_1 \in V = p_1(\tilde{v})$$

olacak şekilde bir tek $\tilde{v} \in \tilde{V}$ vardır.

$$x_1 = f_1 p_\infty(\tilde{v}) = f_1(x)$$

olduğundan $\exists g \in \mathrm{Z}_{(p)}$ vardır öyle ki

$$g p_\infty(\tilde{v}) = x$$

Dolayısıyla $x \in P_\infty\left(\mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V}\right)$ olup

$$f_1^{-1}(V) \subseteq P_\infty\left(\mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V}\right)$$

olur. Ayrıca

$$P_\infty\left(\mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V}\right) \subset f_1^{-1}(V) \text{ olduğu açıktır.}$$

O halde

$$P_\infty \,/_{\mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V}} : \mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V} \longrightarrow f_1^{-1}(V)$$

örten dönüşümünün homeomorfizm olduğunu gösterelim.

$\boldsymbol{i}$) $P_\infty /_{\mathbb{Z}_{(p)}\times\tilde{V}} : \mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V} \longrightarrow f_1^{-1}(V)$ bire-birdir.

$P_\infty(g,\tilde{v}) = P_\infty(h,\tilde{w})$ olsun. Bu durumda $p_1(\tilde{v}) = p_1(\tilde{w})$ ve p_1, $\tilde{V}$ üzerinde bire-bir olduğundan $\tilde{v} = \tilde{w}$ elde edilir. Öte yandan $f_1 P_\infty(g,\tilde{v}) = f_1 P_\infty(h,\tilde{w})$ olduğundan $g = h$ elde edilir.

$\boldsymbol{ii}$) $P_\infty : \mathbb{Z}_{(p)} \times \mathbb{R} \longrightarrow T_p$ açık dönüşümdür.

$$\mu_n : \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathrm{Z}_{p^n}$$
$$f_n : \Sigma_p \to S^1$$

limit dönüşümleri olmak üzere;

$$\mathcal{B} = \{\mu_n^{-1}(g_n) \times \tilde{V} : g_n \in \mathrm{Z}_{p^n}\}$$

ailesi $\mathbb{Z}_{(p)} \times \mathbb{R}$ için bir baz olduğundan $P_\infty(\mu_n^{-1}(g_n) \times \tilde{V})$ nin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

İddia: $P_\infty(\mu_n^{-1}(g_n) \times \tilde{V}) = f_n^{-1}(g_n p_n(\tilde{V}))$

$$P_\infty(\mu_n^{-1}(g_n) \times \tilde{V}) \subseteq f_n^{-1}(g_n p_n(\tilde{V}))$$

olduğu açıktır.

Şimdi $x \in f_n^{-1}(g_n p_n(\tilde{V}))$ alalım. $f_n(x) = x_n = g_n p_n(\tilde{v})$ olacak şekilde $\tilde{v} \in \tilde{V}$ vardır. Öte yandan

$$x_1 = f_1^n\big(g_n p_n(\tilde{v})\big) = p_1(\tilde{v})$$

olduğundan

$$x = h.p_\infty(\tilde{v}) = P_\infty(h,\tilde{v})$$

olacak şekilde bir tek $h \in \mathbb{Z}_{(p)}$ vardır. Dolayısıyla $h_n p_n(\tilde{v}) = x_n = g_n p_n(\tilde{v})$ olup $h_n = g_n$ elde edilir. Buradan $h \in \mu_n^{-1}(g_n)$, yani $x \in P_\infty(\mu_n^{-1}(g_n) \times \tilde{V})$ elde edilir.

Dolayısıyla

$$\Phi: \mathbb{Z}_{(p)} \times V \underset{\approx}{\overset{1\times q}{\longrightarrow}} \mathbb{Z}_{(p)} \times \tilde{V} \underset{\approx}{\overset{P_\infty /_{\mathbb{Z}_{(p)}\times\tilde{V}}}{\longrightarrow}} f_1^{-1}(V)$$

$(g, v) \longrightarrow \big(g, q(v)\big) \longrightarrow P_\infty\big(g, q(v)\big) = g.(p_\infty q(v))$ homeomorfizm olup;

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\Phi}{\underset{\approx}{\longrightarrow}} & \\ \mathbb{Z}_{(p)} \times V & & f_1^{-1}(V) \\ \pi_2 \searrow & & \swarrow f_1 \\ & V & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Ayrıca $g, g' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ ve $v \in V$ olsun.

$$\Phi(gg', v) = P_\infty(gg', q(v))$$
$$\Phi(gg', v) = gg'(p_\infty q(v))$$
$$\Phi(gg', v) = g(g' p_\infty q(v))$$
$$\Phi(gg', v) = g\Phi(g', v)$$

olup Φ ekivaryanttır.

Dolayısıyla $\big(\Sigma_p, f_1, S^1\big)$ lif'i $\mathbb{Z}_{(p)}$ olan esas $\mathbb{Z}_{(p)}$ −lif demeti olur.

4. 3-KÜRELER ARASINDA S^1-EKİVARYANT DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

Bu bölümde bir efektif çember etkisiyle 2-bağlantılı kompakt 3-manifoldun ekivaryant dönüşümlerinin bazı koşullar altında bulunmadığını gözlemleyeceğiz. Bu bölümün motivasyonu Hilbert-Smith sanısıdır.

Sanı (Hilbert-Smith Sanısı): "Bir yerel kompakt grup, sonlu boyutlu bir manifold üzerine efektif etki ederse bir Lie gruptur." Bu sanı aşağıdaki sanıya denktir.

Sanı (P.A. Smith): " Bir p-adic grup bir bağlantılı sonlu boyutlu manifold üzerine efektif etki edemez."

Görüldüğü gibi efektif p-adic uzayların inşaası, Hilbert Smith sanısının çalışılmasında önemli role sahiptir.

Biz, bazı ekivaryant özelliklere sahip bağlama dönüşümleriyle efektif S^1 uzaylarının ters limitini alarak bir efektif kompakt p-adic uzayı elde edeceğiz.

Bu bölümde bize gerekli olan ters sistem ve ters sistemin limiti tanımları 1. bölümde verilmiş olup bunlara ek olarak ters sistemle ilgili aşağıdaki bilgileri hatırlayalım:

Teorem 4.1 (R. Engelking, General topology, sy.99) $i \leq 3\frac{1}{2}$ için T_i-uzaylarının ters sisteminin limiti bir T_i-uzayıdır.

Teorem 4.2(R. Engelking, General topology, sy.355) Kompakt ve bağlantılı uzayların ters sisteminin ters limiti kompakt ve bağlantılıdır.

I bir yönlendirilmiş küme, $\alpha \in I$ olmak üzere G_α topolojik gruplar olsun. f_α^β sürekli grup homomorfizmleri olmak üzere $S = \{G_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$ topolojik grupların bir ters sistemi ise $\lim_{\leftarrow} G_\alpha$ da $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ nın alt uzay topolojisi ve $(g_\alpha)(h_\alpha) \to (g_\alpha h_\alpha)$ grup operasyonu ile bir topolojik grup olur. Ayrıca ters sistemdeki her G_α grubu kompakt ise ters limit de kompakt gruptur. (Karl H. Hofmann, 1998)

Tanım 4.3 X bir G-uzayı, Y bir H-uzayı ve $\varphi: G \to H$ sürekli grup homomorfizmi olsun. Eğer her $g \in G$ ve $x \in X$ için

$$f(gx) = \varphi(g)f(x)$$

oluyorsa $f: X \to Y$ sürekli dönüşümüne *φ-ekivaryant* denir.

Eğer $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$, topolojik uzayların bir ters sistemi ve $\{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\}$, topolojik grupların bir ters sistemi öyle ki her $\alpha \in I$ için X_α bir G_α-uzayı ve her bir bağlama dönüşümü f_α^β, φ_α^β-ekivaryant ise, bu durumda f_α^β dönüşümleri

$$\overline{f_\alpha^\beta}: X_\beta/G_\beta \to X_\alpha/G_\alpha$$

orbit uzayları arasında dönüşüm belirler.

O zaman orbit uzaylarına geçerek topolojik uzayların başka bir ters sistemini $\{X_\alpha/G_\alpha, \overline{f_\alpha^\beta}, I\}$ elde ederiz. Ayrıca yukarıdaki şartlar altında
$(g_\alpha) \in \lim_{\leftarrow} G_\alpha$ ve $(x_\alpha) \in \lim_{\leftarrow} X_\alpha$ için

$$(g_\alpha)(x_\alpha) = (g_\alpha x_\alpha)$$

etkisi ile $\lim_{\leftarrow} X_\alpha$, bir $\lim_{\leftarrow} G_\alpha$-uzayıdır. Singh, (2011) belli koşullar altında $(\lim_{\leftarrow} X_\alpha)/(\lim_{\leftarrow} G_\alpha)$, orbit uzayının $\lim_{\leftarrow}(X_\alpha/G_\alpha)$ ya homeomorfik olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla bu şartlar altında, her bir X_α geçişmeli G_α-uzayı ise $\lim_{\leftarrow} X_\alpha$bir geçişmeli $\lim_{\leftarrow} G_\alpha$uzayıdır.

Buradan aşağıdaki soruyu düşünelim.

Problem 4.4 Yukarıdaki tartışmada, "efektif", "geçişmeli" yerine geçebilir mi?

Problemden önce, sıralı kümelerle ilgili bazı gerçekleri hatırlayalım. I bir küme ve $\leq$, Xüzerinde bir sıralama bağıntısı ve $a < b$ (yani $a \leq b \; ve \; a \neq b$) ise (a, b) notasyonunu $\{x \in X: a < x < b\}$ kümesi için kullanabiliriz. Buna X'in bir

açık aralığı denir. Eğer bu küme boş küme ise, a, b'nin *öncülüdür* ve b de a'nın *ardılıdır* denir.

Lemma 4.5 I üzerinde $\leq$ kısmi sıralama olan boştan farklı ve her elemanının öncülü ve ardılı olan bir küme ve ayrıca $\alpha, \beta \in I$ ve $\alpha \leq \beta$ ise

$$\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n = \beta$$

olacak şekilde sonlu bir $\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ ardıl dizisi var olsun. $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$ Hausdorff topolojik uzaylarının, $\{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\}$ topolojik grupların ters sistemleri ve her bir X_α bir efektif G_α-uzayı, her bir bağlama dönüşümü f_α^β, φ_α^β-ekivaryant ve örten olsun. Bu durumda $X = \lim_{\leftarrow} X_\alpha$ bir efektif $G = \lim_{\leftarrow} G_\alpha$-uzayıdır.

İspat: Varsayalım ki G'nin X üzerindeki etkisi efektif olmasın. O zaman, bir $g = (g_\alpha) \in G\backslash\{1\}$ elemanı vardır öyle ki her $x = (x_\alpha) \in X$ için $gx = x$ olur.

$g = (g_\alpha) \in G\backslash\{1\}$ olduğundan, en az bir $\alpha' \in I$ elemanı vardır öyle ki

$p_{\alpha'}(g) = g_{\alpha'} \in G_{\alpha'}\backslash\{1\}$ öyle ki $p_{\alpha'}: \lim_{\leftarrow} G_\alpha \to G_{\alpha'}$ kanonik izdüşümü gösteririr. y , $X_{\alpha'}$ nün rastgele bir noktası olsun. Her bir f_α^β bağlama dönüşümü örten olduğundan $z = (x_\alpha) \in \pi_{\alpha'}^{-1}(y)$ $(\pi_{\alpha'}: \lim_{\leftarrow} X_\alpha \to X_{\alpha'}$ kanonik izdüşüm) öyle ki

i) $f_\lambda^\gamma\left(\pi_\gamma(z)\right) = \pi_\lambda(z)$ $\alpha' \leq \lambda$, λ nın ardılı γ için

ii) $f_\beta^\theta\left(\pi_\theta(z)\right) = \pi_\beta(z)$ $\theta \leq \alpha'$, θ nın öncülü β için

$gz = z$ olduğundan $g_{\alpha'}y = y$ olur. O zaman $X_{\alpha'}$ efektif olmayan $G_{\alpha'}$-uzaydır. Bu ise bir çelişkidir.

Örnek 4.6 p bir asal sayı olsun. $G_n = S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ küme ve

$$\varphi_n^{n+1}: G_{n+1} \to G_n$$
$$\varphi_n^{n+1}(z) = z^p$$

$X_n = D = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ kümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n^{n+1}: X_{n+1} \to X_n$$
$$f_n^{n+1}(w) = w^p$$

tanımlayalım. G_n'in X_n üzerindeki efektif etkisini çarpma etkisi olarak düşünelim. Açıktır ki her bir f_n^{n+1} bağlama dönüşümü φ_n^{n+1}-ekivaryant olur. O zaman $\{X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\}$ ters sisteminin ters limiti bir efektif kompakt $\lim_{\leftarrow} G_n = T_p$-uzaydır. p-adic grup, $\mathbb{Z}_{(p)}$, Σ_p'nin alt grubu olduğundan $\lim_{\leftarrow} X_n$ efektif $\mathbb{Z}_{(p)}$-uzaydır.

Şimdi aşağıdaki koşulları varsayalım.

X bir kompakt ve 2-bağlantılı (yani $\pi_i(X) = \{0\}$, $i \leq 2$ için) manifold ve $q: X \to Y$ bir kompakt Y manifoldu üzerinde bir sonlu katlı örtü dönüşümü olsun. $f: X \to X$, $qf = q$ olacak şekilde sürekli dönüşüm ve p bir asal sayı olmak üzere $\varphi: S^1 \to S^1$, $\varphi(z) = z^p$ olsun.

Teorem 4.7 X üzerinde, f'yi φ-ekivaryant yapan bir S^1 efektif etkisi varsa p-adic solenoid dolayısıyla p-adic tamsayıları X üzerinde efektif etkir.

İspat : Varsayalım ki X üzerinde efektif S^1 etkisi ve f dönüşümü φ-ekivaryant olsun.(Yani $f(zx) = z^p f(x)$ her $z \in S^1$ ve $x \in X$ için olsun).

$$X_f = \lim_{\leftarrow}(X, f) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}: f(x_{i+1}) = x_i\}$$
$$\text{ve } \Sigma_p = \lim_{\leftarrow}(S^1, \varphi) = \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}}: \varphi(z_{i+1}) = {z_{i+1}}^p = z_i\}$$

Diğer yandan Cohen (1973) bir Z Hausdorff uzayından, $\{X_\alpha\}$ Hausdorff uzaylarının bağlama dönüşümleri örtü homotopi özelliğini sağlayan ters limitine dönüşümlerin homotopi sınıfları için noktalı kümeler (pointed sets) kategorisinde

$$0 \to \lim_{\leftarrow}{}^1[SZ, X_\alpha] \to [Z, \lim_{\leftarrow} X_\alpha] \to \lim_{\leftarrow}[Z, X_\alpha] \to 0$$

kısa tam dizisinin varlığını göstermiştir.

Burada SZ , Z'nin suspansiyonu ve $[Z,W]$ Z'den W'ya dönüşümlerin homotopi sınıflarını göstermektedir.

ΩW , W'nın ilmek uzayı olmak üzere $[SZ,W]=[Z,\Omega W]$ olduğu açıktır. Bizim durumumuzda, S^1 den ters limite dönüşümlerin homotopi sınıflarını düşünelim. X_f, $\{X,f\}$ ters sisteminin $\pi_1(X)=\{0\}$ olduğundan

$$\lim_{\leftarrow}[S^1,X_\alpha]=\lim_{\leftarrow}\pi_1(X)=0$$

olduğundan

$$[Z,\lim_{\leftarrow}X_\alpha]=\pi_1(X_f)$$

ve

$$\lim_{\leftarrow}{}^1[SZ,X_\alpha]=\lim_{\leftarrow}{}^1[SS^1,X]$$

olduğundan

$$\pi_1(X_f)=\lim_{\leftarrow}{}^1[SS^1,X].$$

Bizim durumumuzda

$$\lim_{\leftarrow}{}^1[SS^1,X]=coker\psi\ ,$$

$$\psi\colon[SS^1,X]^{\mathbb{N}}\to[SS^1,X]^{\mathbb{N}}\ ,$$

$$\psi\big((x_n)\big)=(x_n-Sf(x_{n+1})$$

$(Sf\colon[SS^1,X]\to[SS^1,X]\ f$ tarafından belirli)

$$[SS^1,X]=[S^1,\Omega X]=\pi_2(\mathrm{X})\ =\{0\}$$

olduğundan $\pi_1(X_f) = 0$. Şimdi Y'yi $\{Y, 1\}$ ters sisteminin ters limiti ile özdeşleştirelim. $qf = q$ olduğundan $g: X_f \to Y$

$$g\big((x_n)\big) = (q(x_n)).$$

O zaman Matijevic'in 2003'teki çalışmasından (Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces)

g , Y üzerinde sonlu katlı örtü dönüşümü olur.

Ancak X_f basit bağlantılı olduğundan, Y nin üniversal örtüsüdür. Ayrıca üniversal örtünün tekliğinden $X_f = X$. Lemma 4.5'ten X üzerinde bir efektif Σ_p-etkisi dolayısıyla da p-adic tamsayılar grup etkisi vardır.

4.1. 3 Boyutlu Manifoldlara Bir Uygulaması

Bilindiği gibi esas grup 3-boyutlu manifoldları sınıflandırmada en önemli argümanlardan biridir.

Eğer X basit bağlantılı kompakt 3-manifold ise Poincare dualiteden

$$H_1(X, R) = H_2(X, R) = \{0\}$$
$$H_0(X, R) = H_3(X, R) \simeq R$$

olup X bir homoloji 3-küredir. Dolayısıyla Hurewicz teoreminden X, S^3' e homotopi denktir. Dolayısıyla Prelman (2003) tarafından ispatlanan Poincare sanısından $X = S^3$ olur.

Tanım 4.8 X, 3 boyutlu kompakt manifold olsun. S^3, 3 boyutlu küreyi göstermek üzere S^3 üzerinde $SO(4)$' ün bir Γ alt grubunun serbest etkisi için $X = S^3/\Gamma$ oluyorsa X'e *küresel manifold* denir. Thurston'un 2003'te Perelman (G. Perelman (2003)) tarafından ispatlanan sanısı sonlu esas gruba sahip her kapalı 3-manifoldun küresel olduğunu belirtir. Buna göre $q: S^3 \to Y$ bir sonlu katlı örtü

dönüşümü ise bu örtü dönüşümünün transformasyon grubu ve dolayısıyla $\pi_1(Y)$ sonlu olduğundan bu durumda Y küresel 3-manifold olur. Diğer taraftan Γ devirli grup veya dihedral, tetrahedral, octahedral veya icosahedral grupların merkezi genişlemelerinden biridir. Küresel 3-manifoldlara en temel verebileceğimiz örnekler Lens uzaylarıdır (devirli grup durumu).

J.Pardon (2013) "bir p-adic grubun herhangi bir bağlantılı 3-manifold üzerine efektif etkisinin olmadığını ispatlamıştır. Bu sonuca göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.9 Γ, S^3 üzerinde dönmelerle serbest etki eden tanım 4.8. deki belirtilen sınıflardan bir grup ve S^3 üzerinde φ-ekivaryant $f: S^3 \to S^3$ dönüşümüne izin veren bir efektif S^1 etkisi olsun. Bu durumda $f(x) \notin \Gamma(x)$ olacak şekilde bir $x \in S^3$ vardır.

İspat : $f(x) \in \Gamma(x)$ her bir $x \in S^3$ için. O zaman $q: S^3 \to S^3/\Gamma$ kanonik, sonlu katlı örtü dönüşümü olmak üzere $qf = q$ olur. Bu durumda teorem 4.8 den, S^3 üzerinde bir p-adic grup etkisi vardır. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.10 S^3 üzerinde φ-ekivaryant dönüşüm olarak antipodal dönüşümleri kabul eden S^1 efektif etkisi yoktur.

KAYNAKLAR

J.S. LEE, Totally disconnected groups, p-adic group sand the Hilbert-Smith conjecture, Comm Korean Math Soc 12 (1997) , 691 – 699.

R.H. Bing, A simpleclosedcurve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc, Canad. J. Math. 12 (1960) , 209 – 230.

M.C. Mc Cord, Inverse limit sequences with covering maps, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) , 197 – 209.

J. M. Aarts and R. J. Fokkink, The classification of solenoids, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991) , 1161 – 1163.

Zhou Youcheng, Covering mapping on solenoid sand their dynamical properties, Chinese Sci. Bull. 45 (2000) , 1066 – 1070.

J. J. Charatonik and P. P. Covarrubias, On covering mappings on solenoids, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) , 2145 – 2154.

G. T. Whyburn, Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28, Providence, 1942.

W. S. Massey , Algebraic topology: An Introduction, Harcout Brace Jovanovich, New York, 1967.

R. Engelking, General topology, Monografie Matematyczne, Vol. 60, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

Karl H. Hofmann, Sidney A. Marris, The Structure of Compact Groups, 1998.

M. Singh, A Note on the commutativity of inverse limit and orbit map, Math Slovaca 61 (2011), 653-656.

J.M. Cohen, The homotopy groups of inverse limits, Proc London Math Soc 27 (1973), 159-177

V. Matijevic, Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces, Revista Mat Comput 16 (2003), 311-327.

G. Perelman, Ricciflow with surgery on three manifolds, http://arxiv.org/pdf/math/0303109.pdf (2003)

G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricciflow on certain three-manifolds, http://arxiv.org/pdf/math/0307245.pdf (2003)

J. Pardon, TheHilbert-Smith conjecture for three manifolds, J Amer Math Soc 26 (2013), 879-899.

G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, http://arxiv.org/pdf/math/0211159v1.pdf (2002)

M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, London, Benjamin / Cummings publishing Company, (1981), 162

Hidehiko Yamabe. On the conjecture of Iwasawa and Gleason. Ann. Of Math.(2), 58: 48-54, 1953.

Hidehiko Yamabe. A generalization of a theorem of Gleason. Ann. Of Math. (2) , 58: 351-365, 1953

Deane Montgomery and Leo Zippin. Topological transformation groups. Interscience Publishers, New York-London, 1955.

M. H. A. Newman. A theorem on periodic transformations of spaces. Quart. J. Math., os-2(1):1–8, 1931.

P. A. Smith. Transformations of finite period. III. Newman's theorem. Ann. of Math. (2), 42:446–458, 1941.

Deane Montgomery and Leo Zippin. Small subgroups of finite-dimensional groups. Ann. of Math. (2), 56:213–241, 1952.

Glen E. Bredon, Some Theorems on Transformation Groups, Ann. of Math. 67 (1958), 104-118.

Frank Raymond, The orbit spaces of Totally Disconnected Groups of Transformations on Manifolds, Proc. Amer. Math. Soc.12 (1961) 1-7.

J. Birman, Poincar´e's conjecture and the homotopy group of a closed, orientable 2-manifold, J. Austral. Math. Soc. 17 (1974), 214–221.

R. N. Gumerov, On Finite-Sheeted Covering Mappings Onto Solenoids, arXiv:math/0312288v1 [math.GN], (2003)

J. von Neumann, Die Einführung Analytischer Parameter in Topologischen Gruppen. Ann. Math. (2) (1933),170-190

A. Gleason, Groups without small subgroups. Ann. Math. (2) 56 (1932), 193-212

D. Montgomery, L. Zippin, Small groups of finite-dimensional groups. Ann. Math. (2) 56 (1952), 213-241

P.A. Smith, Periodic and nearly periodic transformations. Lectures in Topology, R. Wilder and W. Ayres (Eds.) University of Michigan Press, Ann Arbor, MI. 1941, 159-190

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tarsus'ta tamamladı. 2003 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Orta Öğretim Alan Öğretmenliği'nde (Matematik) yüksek lisansa başladı ve 2008 yılında tamamladı. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı ve 2011 yılında mezun olup aynı yıl yine Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora eğitimine başladı. Doktora Eğitimi sırasında 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Özel Çukurova Bilfen Okulları'nda Matematik Öğretmeni olarak ve 2014-2018 yılları arasında Özel Mersin Beyazkalem Akademi'de Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi uzmanı olarak çalıştı.