TABAKALI KOMPOZİT PARABOLİK KEMERLERİN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE LAPLACE UZAYINDA DİNAMİK ANALİZİ

Ahmad Reshad NOORI[1], Timuçin Alp ASLAN[2] ve Beytullah TEMEL[3]
[1,2,3]İnşaat Mühendisliği Bölümü- Çukurova Üniversitesi, ADANA

ABSTRACT

In this study, the transient response of transverse isotropic and laminated composite parabolic arches subjected to in-plane dynamic loads is examined by the Complementary Functions Method (CFM) in the Laplace domain theoretically. The anisotropy of the material of the arch, effects of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. Material of the arches is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. The fifth-order Runge-Kutta (RK5) method has been employed in the solution process of initial value problems by the CFM in the Laplace domain and for this purpose a computer program is coded in FORTRAN. The solutions obtained in the Laplace domain are transformed to the time domain by using an appropriate numerical inverse Laplace transform method. Results of the present method are compared with those results obtained from ANSYS, a finite element software package. Comparisons show that an exact match is obtained by using a coarse time increment in the present method as opposed to much finer increment in ANSYS. As a result, the presented method is proved to be highly accurate and efficient compared to conventional step by step integration methods.

Keywords: Two-Point Boundary Value Problems; Complementary Functions Method (CFM); Inverse Laplace Transforms; Laminated Composite Arch.

ÖZET

Bu çalışmada enine izotrop ve tabakalı kompozit parabolik kemerlerin düzlem içi dinamik yükler etkisindeki zorlanmış titreşim davranışı Laplace uzayında Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile teorik olarak incelenmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Kemer malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik olarak kabul edilmiştir. TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin Laplace uzayındaki çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış ve bu amaçla Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümler, etkin bir sayısal ters Laplace tekniği ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Mevcut yöntemin sonuçları, sonlu eleman paket programı olan ANSYS'ın sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar neticesinde önerilen metod ile kaba zaman artım miktarları kullanılarak elde edilen sonuçların, ANSYS programı yardımıyla sık zaman artım miktarları kullanılarak elde edilen değerlerle örtüştüğü görülmüştür. Sonuç olarak; bu araştırmada önerilen metodun adım adım integrasyon metotlarına göre daha etkin ve üstün olduğu örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki Nokta Sınır Değer Problemleri; Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (CFM); Ters Laplace Dönüşümü; Tabakalı Kompozit Kemer.

GİRİŞ

Son yıllarda, eğri eksenli tabakalı kompozit çubuklar modern mühendislik yapılarında çok yaygın olarak kullanıldığından, statik ve dinamik davranışı birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır.

Teh ve Huang [1], genel ortotropik konsol kirişlerin doğal titreşim frekanslarını hesaplamak için sonlu eleman metodunu kullanmıştır. Tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim davranışını incelemek için Chandrashekhara ve Bangera [2], tarafından yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Abramovich ve Livshits [3], Timoshenko kiriş teorisi kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmıştır. Khedeir ve Reddy [4] tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini ele almıştır. Rao ve Ganesan [5] , değişken kesitli kompozit kirişlerin harmonik davranışını sonlu elemanlar ile incelemiştir. Yıldırım ve ark. [6] taşıma matrisi yöntemini kullanarak simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış Bernoulli-Euler ve Timoshenko kirişlerin düzlemi içinde ve düzlemine dik serbest titreşimini araştırmıştır. Yıldırım ve Kıral [7], tabakalı kompozit kirişlerin düzlemine dik serbest titreşimlerini araştırmıştır. Çalım [8], zamanla değişen yükler altında izotropik-anizotropik ve elastik-viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların dinamik davranışını incelemiştir. Temel ve ark. [9], kompozit silindirik helisel çubukların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda; çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Saatcı [10] tabakalı kirişleri analitik olarak ve sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir.
Qatu and. Elsharkawy [11] tabakalı kompozit kemerlerin titreşim davranışını Ritz yöntemi ile incelemiştir. Tseng ve ark. [12] eğri eksenli tabakalı kompozit Timoshenko kirişlerin serbest titreşimini araştırmış, dinamik rijitlik matrisi ve seri çözümlerine dayalı olarak bir analitik yöntem geliştirmiştir. Malekzadeh ve arkd. [13] tabaklı kalın dairesel kemelerin serbest titreşimini iki boyutlu elastisite teorisine dayalı olarak ele almıştır. Kameswara ve ark. [14] tabaklı kompozit kirişlerin doğal titreşim frekansların bulunması için yüksek dereceli karma yöntemleri kullanarak analitik bir çözüm metodu geliştirmiştir. İnce [15] tabakalı kompozit düzlemsel eğri çubukların düzlem içi ve düzleme dik serbest titreşim analizini taşıma matrisi yöntemi ile teorik olarak hesaplamıştır. Jun ve ark. [16] tabaklı eğri eksenli basık kirişlerin serbest titreşim davranışını dinamik rijitlik metoduyla elde etmiştir. Mantari ve Canales [17] tabaklı kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerinin kesin çözümlerinin elde edilmesi için iyileştirilmiş ve genel kayma deformasyon teorisini kullanmıştır. Tiangui ve ark. [18] değişken eğrilik yarı çapına sahip eğri eksenli tabaklı kompozit kalın kirişlerin serbest titreşimini ele almıştır. Kıraç [19] kompozit doğru eksenli çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir.
Literatürde kompozit eğri eksenli çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma bulunmasına karşın zamanla değişen yükler altındaki zorlanmış titreşimi ile ilgili sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmaktadır. Yazarların bilgisine göre, tabakalı kompozit düzlemsel eğri eksenli çubukların zamana bağlı dinamik yüklemeler altındaki zorlanmış titreşim davranışını TFY ile Laplace uzayında inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanamamıştır.
Tabakalı parabolik kemerlerin zorlanmış titreşimi, ilk defa bu çalışmada TFY ile Laplace uzayında analiz edilmiştir. Bu araştırmada Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için etkin bir sayısal ters Laplace metodu uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçların elde edilebileceği görülmüştür. Hareketi idare eden denklemleri Newmark metodu ile çözen sonlu elemanlar paket programı olan ANSYS'ın [20] sonuçları ile karşılaştırılmış ve önerilen metodun etkinliği örnekler üzerinde gösterilmiştir.

MATERYAL VE METOT

Kompozit tabakadan oluşan eğri eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden 6 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\overline{U}_t}{d\phi} = \overline{U}_n + rT_t A'_{11} \tag{1}$$

$$\frac{d\overline{U}_n}{d\phi} = -\overline{U}_t + r\overline{\Omega}_b + rT_n \alpha_n A'_{22} \tag{2}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_b}{d\phi} = r\overline{M}_b D'_{33} \tag{3}$$

$$\frac{d\overline{T}_t}{d\phi} = rs^2 \widetilde{A}\overline{U}_t + \overline{T}_n - r\overline{p}_t \tag{4}$$

$$\frac{d\overline{T}_n}{d\phi} = rs^2 \widetilde{A}\overline{U}_n - \overline{T}_t - r\overline{p}_n \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{M}_b}{d\phi} = rs^2 \widetilde{I}_b \overline{\Omega}_b - r\overline{T}_n - r\overline{m}_b \tag{6}$$

Kompozit çubuklarla ile ilgili bünye denklemleri ve çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini gösteren **A'** ve **D'** matrislerinin elemanları Çalım [8]'da verilmektedir.

Yukarıdaki denklemlerde $\widetilde{I}_b$ kütlesel ataleti göstermektedir. Dikdörtgen kesit için

$$\widetilde{I}_b = \sum_{k=1}^{N} \rho^{(k)} (I_b)^{(k)}$$

ve

$$\widetilde{A} = \sum_{k=1}^{N} \left[\rho^{(k)} (A)^{(k)} \right]$$

olarak hesaplanmaktadır. (1 – 6) denklemleri aşağıdaki tariflerden yararlanarak Laplace uzayında elde edilmiştir.

Zamana bağlı bir *f(t)* fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$L\left[f(t)\right] = \overline{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Zamana bağlı birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$L\left[\dot{f}(t)\right] = s\overline{F}(s) - f(0) \tag{8}$$

$$L\left[\ddot{f}(t)\right] = s^2\overline{F}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \tag{9}$$

Burada $f(0)$ başlangıç yer değiştirmesi ve $\dot{f}(0$ başlangıç hızı olup, bu çalışmada sıfır olarak alınmaktadır.

Laplace dönüşüm uzayında elde edilen birinci mertebeden 6 adet adi diferansiyel denklem takımı matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\left\{\overline{Y}(\phi,s)\right\}}{d\phi} = \left[\overline{A}(\phi,s)\right]\left\{\overline{Y}(\phi,s)\right\} + \left\{\overline{F}(\phi,s)\right\} \tag{10}$$

Burada ϕ, bağımsız değişken ve s ise Laplace parametresidir.

TFY, başlangıç şartları yardımıyla (10) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. TFY ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. Denklemin genel çözümü ise,

$$\left\{Y(\phi,s)\right\} = \sum_{m=1}^{n} C_m\left[\overline{U}^{(m)}(\phi,s)\right] + \left\{\overline{V}(\phi,s)\right\} \tag{21}$$

şeklindedir. $[U^{(m)}(\varphi)]$ m'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $[V(\varphi)]$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabitleri sınır şartlarından elde edilmektedir.

SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, kompozit malzemeden yapılmış parabolik kemerin zamana bağlı yükler altında dinamik analizini yapan FORTRAN dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine (TFY) dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için RK5 algoritması uygulanmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına dönüşüm için Durbin [21] ve Temel [22] tarafından verilen Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace metodu kullanılmıştır.

İki Ucu Ankastre Parabolik Kemerin Dinamik Analizi

İki ucu ankastre mesnetli ve ortasından tekil yüklü (P_0= 1000 N) bir kompozit parabolik kemer (Şekil 1) göz önüne alınmıştır. Kemerin adım tipi dinamik yükleme altında (Şekil 1) zorlanmış titreşimi incelenmiştir.

Parabolik kemer ile ilgili geometrik özellikleri,

$$y = \frac{4fx}{L^2}, r_0 = \frac{L^2}{8f}, \quad r = \frac{r_0}{Cos^3(\phi)}$$

$\alpha_n = 1.20$, $r_0 = 10m$, $h=0.75$ m, $b = 0.5$ m, $\phi_0 = \pi/4$, $h_{tabaka}=0.25$ m, $L = 20m$, $f = 5m$

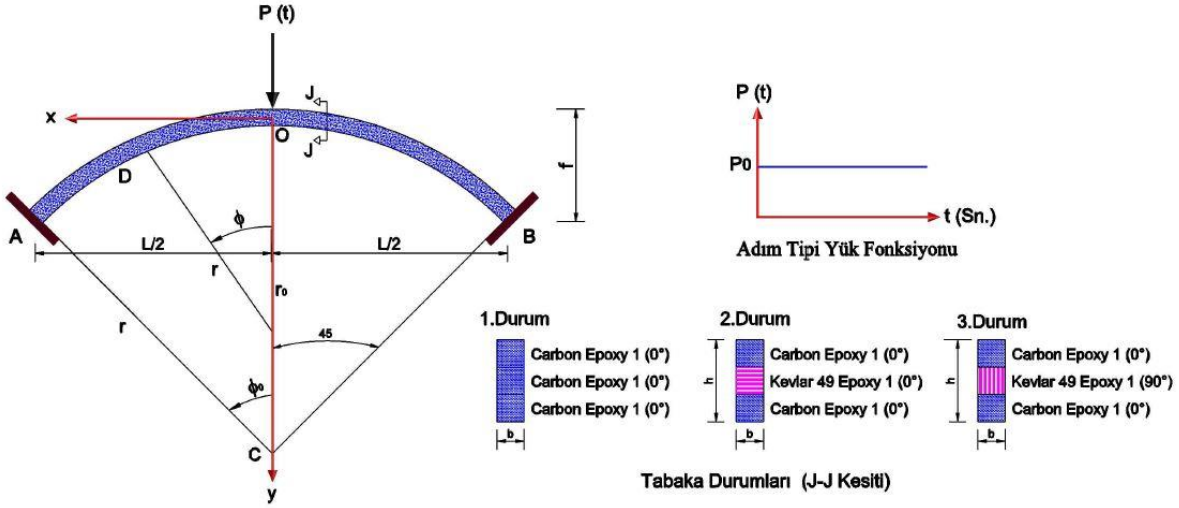
simetri noktası ve ankastre ucu ile ilgili sınır şartları

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ \Omega_b = 0 \\ T_n = -P/2 \end{cases} \qquad \phi = \phi_0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ U_n = 0 \\ \Omega_b = 0 \end{cases}$$

ve tabaka malzeme özellikleri Çizelge 1.'de verilmiştir.

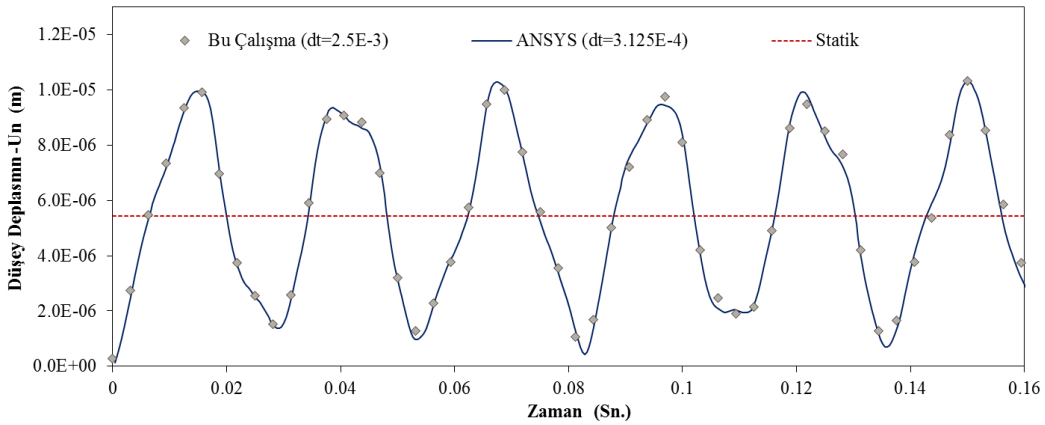
Çizelge 1. Tabaka Malzeme Özellikleri

	E_1 (N/m^2)	$E_2 = E_3$ (N/m^2)	$G_{12} = G_{13}$ (N/m^2)	G_{23} (N/m^2)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}	ρ (kg/m^3)
Kevlar 49 Epoxy 1	76×10^9	5.56×10^9	2.3×10^9	1.618×10^9	0.34	0.718	1460.00
Carbon Epoxy 1	144.8×10^9	9.54×10^9	4.14×10^9	3.45×10^9	0.30	0.399	1389.23

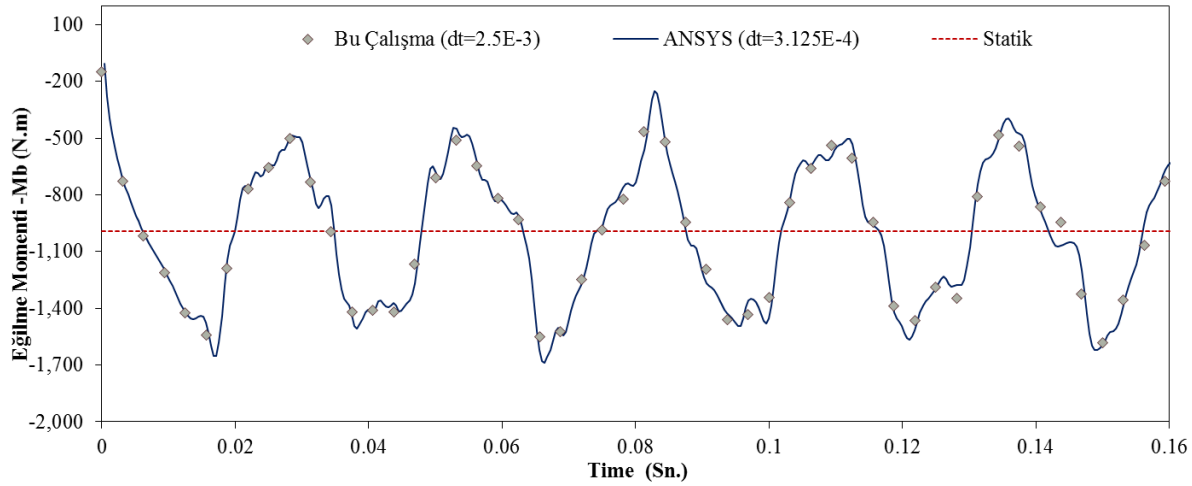


Şekil 1. Parabolik Kompozit Kemer ve Dinamik Yük Fonksiyonu ile Enkesitleri

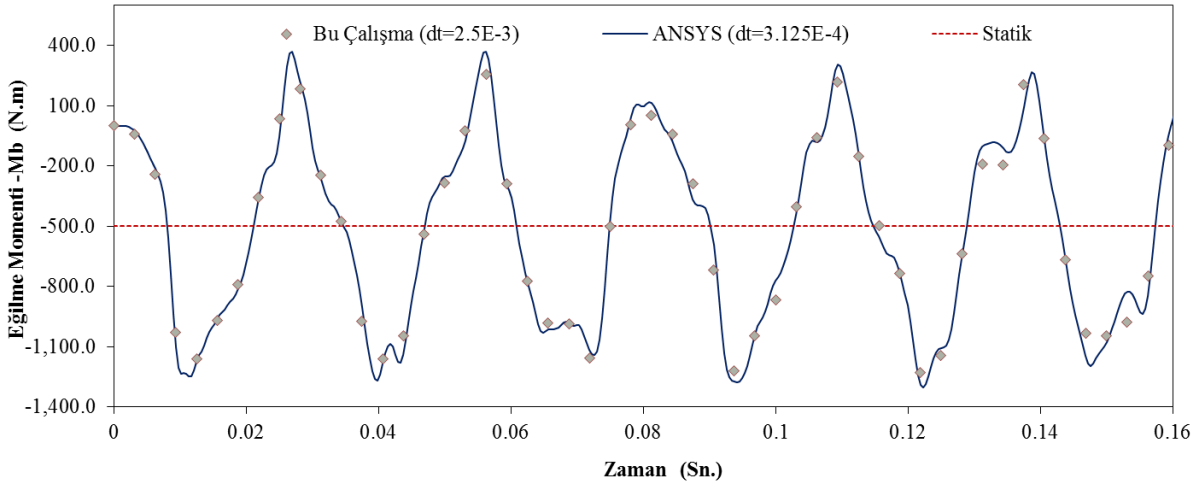
Laplace uzayında kaba zaman artımı kullanılarak elde edilen değerler ile, çok sık zaman artımı alınarak ANSYS programından elde edilen, deplasman ve moment değerlerinin birbiri ile örtüştüğü daha önceki çalışmada gösterilmiştir (Temel ve ark. [23]'e bakınız). Bu sonuçlar, önerilen metodun etkinliğini ve üstünlüğünü göstermektedir. Geleneksel adım adım integrasyon yöntemlerinin doğruluğu ise, zaman artım miktarının doğru seçilmesine bağlıdır. Bu nedenle, kabul edilebilir sonuçların elde edilebilmesi için fazla sayıda adım ve hassas bir zaman artımı kullanılmalıdır. Tabaklanma durumu 3. durumdaki gibi kabul edilen parabolik kompozit kemerin dinamik davranışı bu çalışmada önerilen metot ile 0.0025 Sn. ve ANSYS ile 0.0003125 Sn. zaman artım miktarı alınarak karşılaştırılmıştır (Şekil 2 – 4). ANSYS ile yapılan çözümlerde Timoshenko kiriş teorisine dayanan ve her düğümünde üç serbestlik derecesi bulunan uygun bir kuadratik eleman kullanılmıştır.



Şekil 2. Parabolik kemerin ortasındaki düşey deplasmanın (U_n) karşılaştırılması.



Şekil 3. Parabolik kemerin ortasındaki eğilme momentinin (M_b) karşılaştırılması.



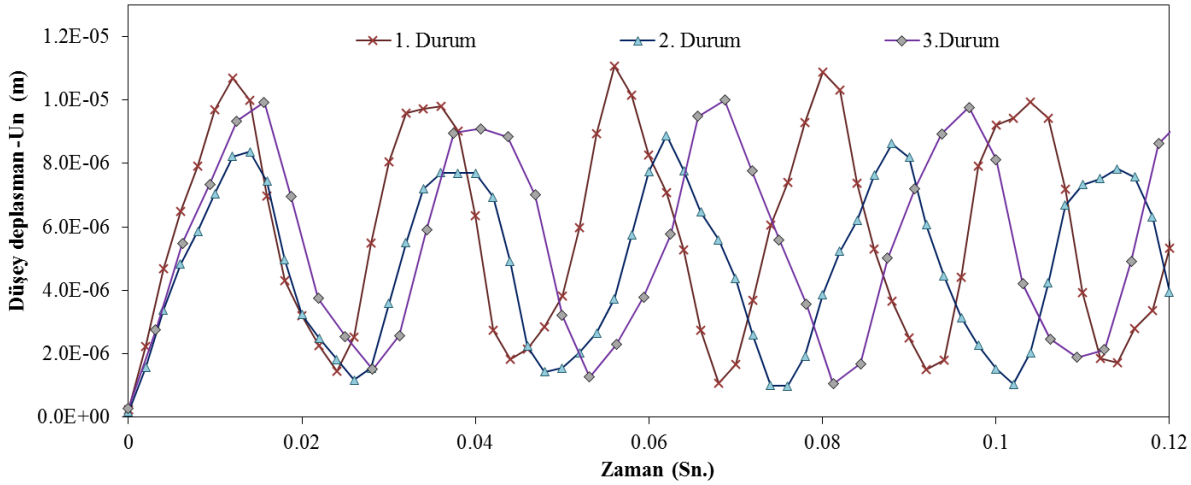
Şekil 4. Parabolik kemerin ankastre mesnedindeki eğilme momentinin (M_b) karşılaştırılması.

Laplace uzayında kaba zaman artımı (0.0025 Sn.) kullanılarak elde edilen değerler ile, çok sık zaman artımı (0.0003125 Sn.) artımı alınarak ANSYS programından elde edilen deplasman ve momentlerin birbiri ile örtüştüğü görülmektedir. Bu sonuçlar, önerilen metodun etkinliğini ve üstünlüğünü göstermektedir. Geleneksel adım adım integrasyon yöntemlerinin doğruluğu ise, zaman artım miktarının doğru seçilmesine bağlıdır.

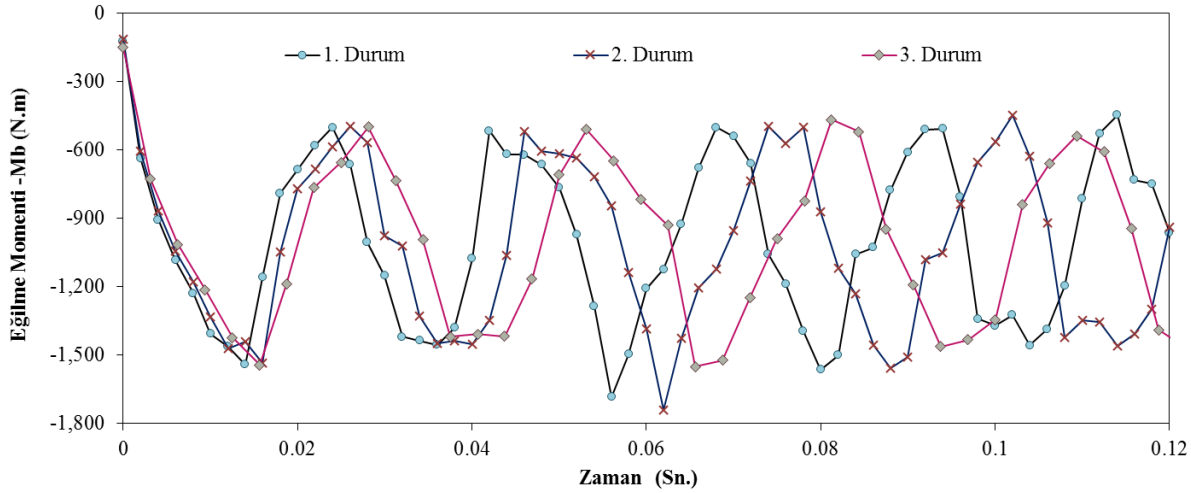
Ayrıca, Şekil 1'de gösterilen üç farklı tabaklanma durumu için bu çalışmada önerilen metot ile problemin zorlanmış titreşim analizi ile ilgili yapılan parametrik çalışmalar Şekil (5 -8)'de grafik formunda verilmiştir.

Verilen grafiklerde görüldüğü üzere, tabaka sayısı ve açısı kompozit kemerlerin dinamik davranışlarını etkilemektedir. 1. Durumda enine izotrop kemer ele alınmıştır. 2. ve 3.

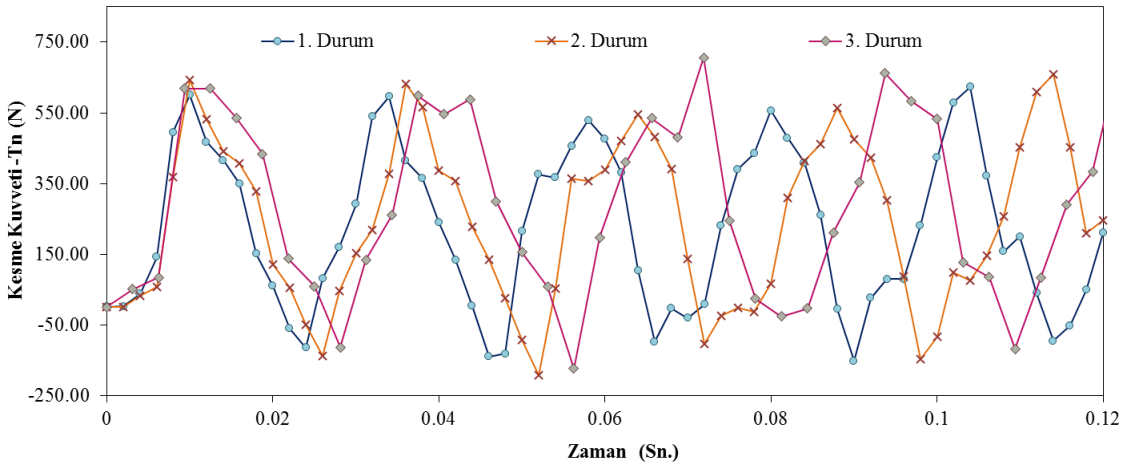
durumlar incelendiğinde, orta tabakasının elyaf açısının zorlanmış titreşim üzerindeki etkisi görülebilir. Şöyle ki, geometrisi ve yükleme aynı kaldığı halde kesiti 2. durumdaki gibi tabaklanmış kompozit kemer daha rijittir. Kesitin esnekliği azaldıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları azalmaktadır.



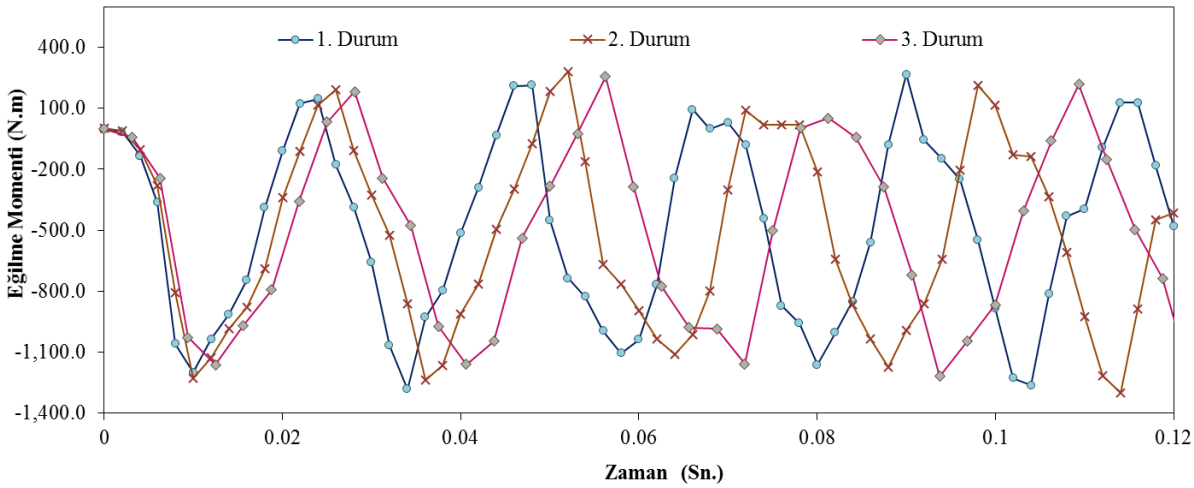
Şekil 5. Parabolik kemerin ortasındaki düşey deplasmanın (U_n) zamanla değişimleri.



Şekil 6. Parabolik kemerin ortasındaki eğilme momentinin (M_b) zamanla değişimleri.



Şekil 8. Parabolik kemerin mesnedindeki kesme kuvveti (T_n) zamanla değişimleri.



Şekil 9. Parabolik kemerin ankastre mesnedindeki eğilme momentinin (M_b) zamanla değişimleri.

SONUÇLAR

Bu çalışmada enine izotrop ve tabakalı kompozit parabolik kemerlerin düzlem içi dinamik yükler etkisindeki zorlanmış titreşim davranışı Laplace uzayında Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile teorik olarak incelenmiştir. TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin Laplace uzayındaki çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış ve bu amaçla Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Yapılan çalışmalar neticesinde önerilen metod ile kaba zaman artım miktarları kullanılarak elde edilen sonuçların, ANSYS programı- Sonlu elemanlar ve Newmark metodunu birlikte kullanan-yardımıyla sık zaman artım miktarları kullanılarak elde edilen değerler ile örtüştüğü görülmüştür. Sonuç olarak; bu araştırmada önerilen metodun adım adım zaman integrasyon metotlarına göre daha etkin ve üstün olduğu örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Yapılan karşılaştırmalar göre tabaka sayısı ve açısı kompozit kemerlerin dinamik davranışları belirgin bir şekilde etkilemektedir.

KAYNAKLAR

[1] K. K. The C. C. Huang, The Vibrations of Generally Orthotropic Beams, A Finite Element Approach. *Journal of Sound and Vibration*, 62(2)(1979) 195-206.

[2]K. Chandrashekhara, K. M. Bangera, free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element. *Computer and Structures*, 43(4)(1992): 719-727.

[3]H. Abramovich, A. Livshits, Free vibrations of Non-Symmetric cross-ply laminated composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 176(5)(1994) 597-612.

[4]A. A. Khedeir, J. N. Reddy, Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *International Journal of Engineering Science,* 32(12)(1994) 1971-1980

[5]S. R. Rao, N. Ganesan, Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 200(5)(1997) 563-577.

[6]V. Yıldırım, E. Sancaktar, E. Kıral, Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15(1999) 651-660.

[7]V. Yıldırım, E. Kıral, investigation of the rotary inertia and shear deformation effects on the out-of-plane bending and torsional natural frequenciesof laminated beams. *Composite Structures*, 49(2000) 313-320.

[8]F.F. Çalim, *Viskoelastik, anizotropik, eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizi.* Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2003.

[9]B.Temel, F. F. Çalım, N. Tütüncü, Forced Vibration of Composite Cylindrical Helical Rods. *International Journal of Mechanical Sciences,* 47(2005) 998-1022.

[10]S.Saatcı, *Analytical and finite element investigation of layered beams.* Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2001.

[11]M. S. Qatu, A. A. Elsharkawy Qatu and. Elsharkawy Vibration of laminated composite arches with deep curvature and arbitrary boundaries. *Computer and Structures***,** 4(2) (1993) 305-311.

[12]Y.P. Tseng, C.S. Huang, M.S. Kao, In-plane vibration of laminated curved beams with variable curvature by dynamic stifness analysis. *Computer and Structures***,** 50(2000) 113-114.

[13]P. Malekzadeh,A.R. Setoodeh, E. Barmshouri, A hybrid layer wise and differential quadrature method for in-plane free vibration of laminated thick circular arches. *Journal of Sound and Vibrations.* 315 (2008) 212–225

[14]M.S Kameswara Rao, Y.M. Desai, M.R.Chitnis. Free vibrations of laminated beams used mixed theory. *Computer and Structures***,** 52(2001) 149-160.

[15]N. İnce, *Düzlemsel eğri eksenli ve değişken kesitli tabakalı kompozit çubukların düzlem içi ve düzleme dik serbest titreşiminin sayısal analizi*. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2000.

[16]Li Jun , Ren Guangwei , Pan Jin , Li Xiaobin Wu Weiguo. Free vibration analysis of a laminated shallow curved beam based on trigonometric shear deformation theory http://www.tandfonline.com/loi/lmbd20 doi 10.1080/15397734.2013.846224

[17]J.L. Mantari, F.G Canales, Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalizerd boundary conditions, *Computer and structures*. S0263-8223(16)30552-9 http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.037

[18]Y. Tiangui, J. Guoyong, S. Zhu, A spectral-sampling surface method for the vibration of 2-D laminated curved beams with variable curvatures and general restraints, *International Journal of Mechanical Sciences,* http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.02.012

[19]M. Kiraç, *Doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizi.* Yüksek Lisans Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay, 2007.

[20]ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA15342 1300,USA.

[21]F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Comput. J.*, 17(1974) 371 – 376.

[22] B. Temel, Transient analysis of viscoelastic helical rods subjectto time-dependent loads, *International J. of Solids and Structures,* 41(2004) 1605 –1624.

[23]B. Temel, T.A. Aslan, A.R. Noori, An Efficient Dynamic Analysis of Planar Arches, *European Mechanical Science,* 1 (3) (2017) 82 – 88.