ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dünya KARAPINAR

LİNEER REGRESYON MODELİNDE AĞIRLIKLI TAHMİN EDİCİLER

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2017

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER REGRESYON MODELİNDE AĞIRLIKLI TAHMİN EDİCİLER

Dünya KARAPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2017 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oy birliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….	…….
Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR DANIŞMAN	Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU ÜYE

……
Doç. Dr. Tayfun SERVİ
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER REGRESYON MODELİNDE AĞIRLIKLI TAHMİN EDİCİLER

Dünya KARAPINAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl: 2017, Pages:75
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Doç. Dr. Tayfun SERVİ

Hatalara ilişkin varsayımların sağlanmamasına neden olan değişen varyans ve otokorelasyonlu lineer regresyon modellerinde "Genelleştirilmiş / Ağırlıklı En Küçük Kareler " metodu ile model uydurulabilir. Bu çalışmada öncelikle ağırlıklı en küçük kareler tahmin yöntemi incelenmiştir. Daha sonra, örneklem bilgisi ve parametreler hakkında yardımcı bilgi olduğunda kullanılan karma tahmin ediciler incelenmiştir.

Ayrıca X matrislerinin tam olmaması durumunda literatürde yer alan ağırlıklı karma tahmin edici ele alınmıştır. Ek olarak , ağırlıklı karma ridge tahmin edici ve ağırlıklı karma Liu tahmin ediciler başta olmak üzere bunlara bağlı olarak tanımlanmış diğer ağırlıklı tahmin ediciler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değişen Varyans, Otokorelasyon, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, Ağırlıklı En Küçük Kareler, Ağırlıklı Karma Tahmin Edici

ABSTRACT

MSc THESIS

WEIGHTED ESTIMATORS IN THE LINEAR REGRESSION MODEL

Dünya KARAPINAR

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year: 2017, Pages:75
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Assoc. Prof. Dr.Tayfun SERVİ

In linear regression model with heteroskedasticity, autocorrelation which violate assumptions about the errors, model may be adapted by Generalized/ Weighted Least Squares metod. In this study, weighted least squares metod are examined. Later, when sample and prior information on parameters simultaneously are given, mixed estimator are examined.

Furthermore, in case of incomplete X –matrix, weighted mixed estimator are examined. In addition, weighted mixed ridge estimators and weighted mixed Liu estimators and other mixed estimators which defined by related with these are examined.

Key Words: Heteroscedasticity, Autocorrelation, Generalized Least Squares, Weighted Least Squares ,Weighted Mixed Estimator

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Regresyon, değişkenler arasındaki ilişki ve bağıntıların incelenmesini sağlayan önemli bir istatistiksel metottur. Regresyon kuramı günümüzde birbirinden farklı birçok alanda kullanılabilmektedir. Regresyon analizi, değişkenler arasındaki bağıntının en iyi şekilde açıklandığı bir modele dayalıdır.

İkinci bölümde, en küçük kareler (EKK) yöntemi açıklanmıştır. EKK tekniği, regresyon analizinde sabit varyans (homoscedasticity) varsayımının sağlanması durumunda kullanılması uygun olan ve en çok kullanılan yöntemlerden biridir, ancak uygulamalarda hataların değişen varyanslı (heteroscedasticity) olması durumu ile karşılaşılabilir. **Değişen varyansın ortaya çıkmasının çeşitli nedenleri şöyle sıralanabilir:**

1. Önemli açıklayıcı değişkenlerin model dışında tutulması,
2. Yatay kesit verilerinin kullanılması
3. Mevsimsellik gösteren zaman serisinin modelde yanıt değişken olarak kullanılması,
4. Yanıt değişkenin ölçümünün veya tanımının yanlış yapılması ve bu hatanın yanıt değişken(ler)e göre değişmesi,

Çoklu doğrusal regresyon modelinde değişen varyans problemi olduğunda genelleştirilmiş en küçük kareler tekniği (GEKK), EKK tekniğine alternatif olarak geliştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, karma tahmin ediciler anlatılmıştır. Uygulamalarda örneklem bilgisine ek olarak yardımcı bilgi de aynı anda görülebilmektedir. Örneklem ve yardımcı bilgiyi aynı anda kullanarak elde edilen yeni bir tahmin edici ilk olarak Durbin (1953) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963), örneklem ve yardımcı bilgiyi birleştirerek karma tahmin tekniğini geliştirmişlerdir.

Dördüncü bölümde, yanıt değişkende kayıp veri olması durumunda ve ayrıca X matrisinin tam olmaması durumunda tahmin yöntemleri incelenecektir.

Beşinci bölümde, öncelikle Schaffrin ve Toutenburg (1990) tarafından tanımlanan ağırlıklı karma tahmin edici (WME) ve bu tahmin ediciye bağlı olarak tanımlanmış yeni tahmin edicileri ve onların karşılaştırılmalarını inceleyeceğiz.

Altıncı bölüm sonuç ve öneriler bölümüdür. Bu çalışmada öncelikli olarak ağırlıklı tahmin yöntemleri ele alınmıştır. Daha sonra bilinen bazı tahmin yöntemlerinin birleştirilmesiyle tanımlanan yeni bazı tahmin ediciler, ağırlıklı karma Liu tahmin edici, ağırlıklı karma Ridge tahmin edici, ağırlıklı karma hemen hemen yansız Ridge tahmin edici ve ağırlıklı karma hemen hemen yansız Liu tahmin ediciler ve çeşitli kriterlere göre bunların karşılaştırılması incelenmiştir. Sonraki çalışmalarda benzer tahmin edicilerin tanımlanması ve özelliklerinin incelenmesi düşünülmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yapıcı ve yönlendirici fikirleriyle bana yol gösteren , değerli zamanını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan danışman hocam Sayın Prof.Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca varlığından güç aldığım, umut veren sözleriyle beni destekleyen , her zaman gurur duyduğum canım anneme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
SİMGELER VE KISALTMALAR VIII
1.GİRİŞ 1
2. LİNEER REGRESYON MODELLERİ VE TAHMİN YÖNTEMLERİ 3
2.1. En Küçük Kareler Yönteminin Varsayımları 3
2.2.En Küçük Kareler Yöntemi 4
2.3.Özdeş Olmayan Kovaryans Matrisli Genel Lineer Model 5
2.4. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi 6
2.5.Değişen Varyans 8
2.6.Değişen Varyans Altında GEKK Tahmin Edicisi 9
2.7.Otokorelasyon 11
2.8.Birinci Dereceden Hareketli Ortalamalı Hatalar 15
2.9.Otokorelasyon Katsayısının Tahmini 17
3. KARMATAHMİN EDİCİ 21
3.1.Karma Tahmin Edici 21
3.2.Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar 24
3.2.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$'nin $\hat{\beta}_G$ Üzerine Üstünlüğü 25
3.2.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}_G$'nin $\hat{\beta}(R)$ Üzerine Üstünlüğü 26
3.2.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$'nin $\hat{\beta}_G$ Üzerine Üstünlüğü 27
3.2.4. $\hat{\beta}(R)$ ve $\hat{\beta}_G$ için MSE-III Karşılaştırması 28
4. TAM OLMAYAN VERİ KÜMELERİNDE TAHMİN 31

4.1.Yanıt Değişkende Kayıp Olması Durumu 31
4.1.1. Tamamlanmış Veri İçin En Küçük Kareler Analizi- Yates Metodu ... 32
4.1.2. Varyansın Tahmini 33
4.1.3. X Matrisindeki Kayıp Değerler ..... .34
4.1.4. Genel Model 35
4.2.Tam Olmayan X Matrisleri İçin Tahmin Yöntemleri 36
4.2.1. Maksimum Olabilirlik Yöntemi 36
4.2.2. Sıfırıncı Mertebeden Regresyon 38
4.2.3.Birinci Mertebeden Regresyon ..... .40
4.2.4. Karma Ağırlıklandırılmış Tahmin Ediciler 43
4.2.5. w Parametresinin Seçimi 46
5. AĞIRLIKLI KARMA TAHMİN EDİCİ VE BU TAHMİN EDİCİYE DAYANAN YENİ TAHMİN YÖNTEMLERİ 51
5.1. Tahmin Edicilerin Kuadratik Yanlılığa Göre Karşılaştırılması 58
5.1.1. AURE ve WMAURE'nin Kuadrik Yanlılığının Karşılaştırılması 58
5.1.2. WMRE ve WMAURE'nin Kuadrik Yanlılığının Karşılaştırılması 59
5.2.Tahmin edicilerin Hata Kareler Ortalamasının Karşılaştırılması 60
5.3. Tahmin Edicilerin Kuadratik Yanlılığa Göre Karşılaştırılması 64
5.4. Tahmin Edicilerin Varyansa Göre Karşılaştırılması 66
6.. SONUÇ VE ÖNERİLER 69
KAYNAKLAR 71
ÖZGEÇMİŞ 75

SİMGELER VE KISALTMALAR

EKK : En Küçük Kareler

GEKK : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler

MSE : Hata Kareler Ortalaması (Mean Squared Error)

WME : Ağırlıklı Karma Tahmin Edici

WMLE : Ağırlıklı Karma Liu Tahmin Edici

AURE : Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edicisini

WMRE : Ağırlıklandırılmış Karma Ridge Tahmin Edicisini

WMAURE : Ağırlıklandırılmış Karma Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici

AULE : Hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini

ZOR :Sıfırıncı Mertebeden Regresyon

FOR : Birinci Mertebeden Regresyon

1.GİRİŞ

Regresyon, değişkenler arasındaki ilişki ve bağıntıların incelenmesini sağlayan önemli bir istatistiksel metottur. Regresyon kuramı günümüzde birbirinden farklı birçok alanda kullanılabilmektedir. Regresyon analizi, değişkenler arasındaki bağıntının en iyi şekilde açıklandığı bir modele dayalıdır. Çok sayıda faktöre bağlı olarak değişim gösteren sosyal, psikolojik ve ekonomik olayların gerisindeki sebep-sonuç ilişkisini ortaya çıkarabilmek için kullanılan istatistiksel yaklaşımlardan biri, çoklu regresyon analizidir. Bu yaklaşımda, bir veya daha çok açıklayıcı değişken bir yanıt değişken ile birlikte seçilerek, yanıt değişkenin gerçek ölçümleri ile açıklayıcı değişkenler yardımıyla elde edilen tahmini ölçümleri arasındaki mesafeyi minimum kılan en küçük kareler yöntemi (EKK) ile regresyon katsayıları tahmin edilir. Örneklemden elde edilen bu regresyon denklemi ile değişkenler arasında var olan sebep-sonuç ilişkisini belirlemenin yanında geleceğin tahmini de daha güvenli bir şekilde yapılabilmektedir. EKK tekniği, regresyon analizinde sabit varyans (homoscedasticity) varsayımının sağlanması durumunda kullanılması uygun olan ve en çok kullanılan yöntemlerden biridir, ancak uygulamalarda hataların değişen varyanslı (heteroscedasticity) olması durumu ile karşılaşılabilir.

Çoklu doğrusal regresyon modelinde değişen varyans problemi olduğunda genelleştirilmiş en küçük kareler tekniği (GEKK), EKK tekniğine alternatif olarak geliştirilmiştir. Değişen varyans durumunda EKK tahminleri yansız olmakta, ancak varyans ve kovaryans tahminleri etkinliğini (minimum varyanslı) yitirdiğinden istatistiksel hipotez testleri geçerliliğini kaybetmektedir. Benzer sorunlar hataların ilişkisiz varsayımının ihlaline dayanan ve otokorelasyon olarak adlandırılan problemde de ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada değişen varyans ve otokorelasyonlu lineer regresyon modellerinde öncelikle genelleştirilmiş / ağırlıklı en küçük kareler tahmin

yöntemleri incelenmiştir. Daha sonra, örneklem bilgisi ve parametreler hakkında yardımcı bilgi olduğunda kullanılan karma tahmin ediciler incelenmiştir.

Ayrıca X matrisinin tam olmaması durumunda literatürde yer alan ağırlıklı karma tahmin edici ele alınmıştır. Bunlara ek olarak , ağırlıklı karma ridge tahmin edici ve ağırlıklı karma Liu tahmin ediciler başta olmak üzere bunlara bağlı olarak tanımlanmış diğer ağırlıklı tahmin ediciler incelenmiştir.

2. LİNEER REGRESYON MODELLERİ VE TAHMİN YÖNTEMLERİ

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

çoklu lineer regresyon modeli verilmiş olsun. Burada y, $n\times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü, X, $n\times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, β, $p\times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon parametrelerinin vektörü, ε, $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I_n)$ olan $n\times 1$ tipinde rasgele hataların vektörüdür.

2.1. EKK Yönteminin Varsayımları

EKK tekniğinin gerek değişkenler gerekse hata terimine ait bir takım varsayımları bulunmaktadır. Bunlar temel varsayımlar ve ek varsayımlar olarak iki grupta incelenebilir.

Temel varsayımlar,

(i) X, $n\times p$ tipinde $p<n$ ile stokastik olmayan bir matristir.

(ii) X matrisinin rankı p'dir yani, tam kolon ranklıdır.

(iii) $n\times 1$ tipindeki y vektörü, elemanları gözlemlenebilen rasgele vektördür.

(iv) $n\times 1$ tipindeki ε vektörünün elemanları gözlenemeyen rasgele değişkenlerdir öyle ki, $E(\varepsilon)=0$ ve $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 I_n$ dir.

Ek varsayım,

(v) ε vektörü n değişkenli normal dağılır.

Temel varsayımlara ilaveten ek varsayım da sağlanıyorsa bu model "Klasik Lineer Regresyon Modeli" olarak adlandırılır.

2.2. En Küçük Kareler Yöntemi

Bilinmeyen parametre vektörü β'nın EKK tahmin edicisi hata kareler toplamını minimum yaparak bulunur. $\varepsilon = y - X\beta$ olmak üzere hata kareler toplamı;

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon$$
$$= (y - X\beta)'(y - X\beta) = (y' - \beta' X')(y - X\beta)$$
$$= y'y - y'X\beta - \beta' X' y + \beta' X' X\beta$$

olarak elde edilir. Buna göre hata kareler toplamı;

$$\varepsilon'\varepsilon = y'y - 2\beta' X' y + \beta' X' X\beta$$

olur. O halde

$$\frac{\partial(\varepsilon'\varepsilon)}{\partial\beta} = -2X'y + 2X'X\beta = 0$$

$$X'X\beta = X'y$$

normal denklemi elde edilir. Buradan β'nın EKK tahmini edicisi

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

olarak elde edilir. $\hat{b}$'nın ortalaması ve kovaryansı aşağıda verilmiştir:

$$E(\hat{b}) = \beta$$

ve

$$Cov(\hat{b}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}. \qquad (2.2)$$

EKK tahmin edicisi Gaus Markov teoremi gereğince en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE).

(2.1) modeli için ε hata vektörünün özdeş varyanslı ve elemanlarının ilişkisiz olduğunu temel varsayımlardan biliyoruz. Bu varsayım bazı durumlarda sağlanamayabilir. Burada hata vektörü $E[\varepsilon\varepsilon'] = \Phi = \sigma^2 V$ şeklinde ifade edilebilir. Burada V, bilinen pozitif tanımlı simetrik bir matristir.

2.3. Özdeş Olmayan Kovaryans Matrisli Genel Lineer Model

$$y = X\beta + e \tag{2.3}$$

çoklu lineer regresyon modeli verilmiş olsun. Burada, y, $n\times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü, X, $n\times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, β, $p\times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon parametrelerinin vektörü, e, $n\times 1$ tipinde $E[e]=0$ ortalamalı ve $E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$ kovaryans matrisli rasgele hata vektörüdür ($e \sim N(0, \sigma^2 V)$). Ayrıca V, $n\times n$ tipinde pozitif tanımlı simetrik bir matris ve σ^2, bilinmeyen skalerdir. (2.3) modelindeki hata terimleri (2.1)'de verilen modelin hata terimlerinden farklı yapıdadır, yani $\sigma^2 I_n$ varsayımı $\sigma^2 V$ varsayımı olarak değişmektedir. e_i rastgele değişkenlerinin varyansı özdeş değildir ve $i \neq j$ için e_i ve e_j arasındaki kovaryans sıfır olmayabilir.

$E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının geçersiz yani $E[ee'] = \sigma^2 V$ olduğu zaman β'nın en iyi yansız tahmini incelenecektir. Bunun için yapılan ilk adım (2.3) modeli üzerinde dönüşümler yapmaktır. $n\times n$ tipindeki V matrisinin bilindiğini

varsayalım. V pozitif tanımlı olduğundan dolayı $P'P = V^{-1}$ yani $PVP' = I_n$ eşitliklerinin sağlayan bir P matrisi her zaman vardır.

Dönüştürülmüş model

$$Py = PX\beta + Pe$$

ya da

$$y_* = X_*\beta + e_* \qquad (2.4)$$

olarak yazılabilir. Burada $y_* = Py$, $X_* = PX$ ve $e_* = Pe$'dir. Dönüştürülmüş model için hata yapısının ortalaması,

$$E[e_*] = E[Pe] = P\,E[e] = 0$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(e_*) &= E[e_* e_*'] = E[Pee'P'] \\ &= P\,E[ee']P' \\ &= P\sigma^2 V P' \\ &= \sigma^2 PVP' = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece dönüştürülmüş model EKK yönteminin varsayımlarını sağlamış olur.

2.4.Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

(2.4) dönüştürülmüş modele uygulanan EKK yöntemi genelleştirilmiş en küçük kareler (ağırlıklı en küçük kareler) yöntemi olarak adlandırılır (GEKK).

GEKK tahmin edicisi, EKK da olduğu gibi, hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde elde edilir.

$$e_* = y_* - X_*\beta$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_{*i}^2 = e_*'e_*$$

$$= (Py - PX\beta)'(Py - PX\beta) = (y' - \beta' X')V^{-1}(y - X\beta)$$

$$= y'V^{-1}y - y'V^{-1}X\beta - \beta' X'V^{-1}y + \beta' X'V^{-1}X\beta$$

dir. Buna göre hata kareler toplamı;

$$e_*'e_* = y'V^{-1}y - 2\beta' X'V^{-1}y + \beta' X'V^{-1}X\beta$$

olur. β'nın tahmin edicisi $e_*'e_*$'ı minimum yapar. O halde normal denklemleri,

$$\frac{\partial(e_*'e_*)}{\partial\beta} = -2X'V^{-1}y + 2X'V^{-1}X\beta = 0$$

$$X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$$

olup buradan β'nın GEKK tahmini

$$\hat{\beta}_G = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

olarak elde edilir. GEKK tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}_G) = \beta$$

kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\beta}_G) = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} \qquad (2.5)$$

olup (2.4) modeli altında GEKK tahmin edicisinin BLUE olduğu görülür.

2.5. Değişen Varyans

(2.3) genel lineer istatistiksel model için,

$$E(e) = 0 \text{ ve } E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$$

olduğunda V'nin köşegen elemanlarının özdeş olmadığı durum "Değişen Varyans" olarak adlandırılır.

Değişen varyansın ortaya çıkmasının çeşitli nedenleri şöyle sıralanabilir:

Önemli açıklayıcı değişkenlerin model dışında tutulması,

Yatay kesit verilerinin kullanılması

Mevsimsellik gösteren zaman serisinin modelde yanıt değişken olarak kullanılması,

Yanıt değişkenin ölçümünün veya tanımının yanlış yapılması ve bu hatanın yanıt değişken(ler)e göre değişmesi,

Değişen Varyansın Yol Açtığı Sorunlar

Sabit varyans varsayımının modelin anlamlılığı veya her bir regresyon katsayısının anlamlılığı testlerini yapabilmek ve güven aralıklarını oluşturmak için gerekli olduğunu biliyoruz. Değişen varyans durumunda EKK tahminleri yansızlık (unbiased) ve tutarlılık (consistent) özelliğini korumakta, fakat minimum varyanslı veya etkinlik (efficient) olarak bilinen özelliklerini kaybetmektedir. Bu durumda $Var(\hat{\beta}_j)$ güvenilir olmayan istatistiksel testlere neden olmaktadır. Regresyon katsayılarının tahminlerinin standart hataları $Se(\hat{\beta}_j)$ doğrudan bu varyanslardan

elde edildiği için, değişen varyans durumu varsa t istatistikleri ve genel F testleri güvenilirliklerini kaybetmektedir. Ayrıca geliştirilen modelle gerçekleştirilen öngörüler güvenilir olmamaktadır, (Söküt,2011).

2.6. Değişen Varyans Altında GEKK Tahmin Edicisi

(2.3) modelinde genel kovaryans yapısının sadece değişen varyanstan kaynaklandığını düşünelim. Yani,

$$E[ee'] = \Phi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2)$$

σ_t^2, $t = (1,2,...,n)$ ve dolayısıyla Φ biliniyorsa β'nın en iyi yansız tahmin edicisi olan GEKK tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_A = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y$$

olarak elde edilir. Bu tahmin edici $\Phi = \sigma^2 V$ olduğundan dolayı daha önce verilen $\hat{\beta}_G = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ tahmin edicisi ile aynıdır:

$$(X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y = \left(\frac{X'V^{-1}X}{\sigma^2}\right)^{-1}\frac{X'V^{-1}y}{\sigma^2} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y.$$

Sonuç olarak hata kovaryans matrisini bir sabitle çarpmak GEKK tahmin edicisini değiştirmeyecektir. $P'P = \Phi^{-1}$ olacak şekilde bir P matrisinin olduğunu biliyoruz.

$$\hat{\beta}_A = (X'P'PX)^{-1}X'P'Py$$
$$= (X_*'X_*)^{-1}X_*'y_*$$

olarak yazılır. Burada uygun P matrisi,

$$P = diag(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, ..., \sigma_n^{-1})$$

olur ve bu durumda dönüştürülmüş gözlemler,

$$y_* = \begin{pmatrix} y_{1*} \\ y_{2*} \\ \vdots \\ y_{n*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1/\sigma_1 \\ y_2/\sigma_2 \\ \vdots \\ y_n/\sigma_n \end{pmatrix}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{1*}' \\ X_{2*}' \\ \\ X_{n*}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'/\sigma_1 \\ X_2'/\sigma_2 \\ \vdots \\ X_n'/\sigma_n \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada X_{t*}' ve X_t' sırası ile dönüştürülmüş ve orijinal açıklayıcı değişkenlerin $(1\times p)$ tipinde olan t-inci satır vektörleridir. Dönüştürülmüş model için t-inci gözlem,

$$\frac{y_t}{\sigma_t} = \frac{X_t'}{\sigma_t}\beta + \frac{e_t}{\sigma_t}$$
$$y_{t*} = X_{t*}'\beta + e_{t*}$$

olarak yazılır. Yani hata kovaryans matrisi köşegen formda değişen varyanslı olduğu zaman yanıt ve açıklayıcı değişken hatanın standart sapmasına bölünerek sabit varyanslı forma dönüştürülür. Dönüştürülmüş gözlemlere bilinen EKK uygulanır. Bu prosedür hata standart sapmasının tersi ile ağırlıklandırıldığından dolayı "Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (AEKK)" olarak adlandırılır.

$e_{t*} = \frac{e_t}{\sigma_t}$ dönüştürülmüş hatanın varyansı,

$$E[e_{t*}{}^2] = E\left[\left(\frac{e_t}{\sigma_t}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma_t^2} E[e_t^2] = 1$$

olur ve görüldüğü üzere, dönüştürülmüş hatanın varyansı bir ile sabittir. AEKK tahmin edicisi, $\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{e_t}{\sigma_t}\right)^2 = (y - X\beta)'\Phi^{-1}(y - X\beta)$ 'yi minimum yapar. Buradan AEKK tahmin edicisinin bir diğer formu,

$$\hat{\beta}_A = \left(\sum_{t=1}^{n} \sigma_t^{-2} X_t X_t^{'}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sigma_t^{-2} X_t y_t$$

olarak yazılabilir. $\hat{\beta}_A$ 'nın kovaryansı,

$$Cov(\hat{\beta}_A) = (X^{*}{}' X^{*})^{-1} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1} = \left(\sum_{t=1}^{n} \sigma_t^{-2} X_t X_t^{'}\right)^{-1}$$

olarak elde edilir.

2.7. Otokorelasyon

$$y = X\beta + e \quad , \qquad E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$$

genel lineer istatistiksel modeli verilmiş olsun. Bu kısımda $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının sağlanmadığı otokorelasyon altında tahmin ele alınacaktır.
Otokorelasyona neden olan bazı durumlar aşağıdaki gibidir:

Zaman serileriyle, özellikle trend içeren zaman serileriyle tahmin yapılması

Denklemde bulunması gerektiği halde bulunmayan açıklayıcı değişkenlerin varlığı

Modelin yanlış belirlenmesi

Yanıt değişkende sistematik, yani rassal olmayan ölçme hatalarının bulunması

Yapısal değişikliğin varlığı

Birinci Dereceden Otoregresif Hatalar

Otokorelasyonun bazı olası formları vardır ve her biri hata kovaryans matrisi için farklı yapılara yol açar. Otokorelasyonun en bilindik formu olarak 1. dereceden otoregresif prosesin (AR(1)) dir. Genel lineer model, $t = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$y_t = x_t'\beta + e_t \qquad (2.6)$$

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t \qquad u_t \sim N(0, \sigma_u{}^2 I_n) \qquad (2.7)$$

olarak verilir. Burada y_t, t zamanındaki yanıt değişkenin gözlemi, x_t', $x_t' = (x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tp})$, $1 \times p$ tipinde p tane stokastik olmayan açıklayıcı değişkendeki t-inci gözlemi ve β, $p \times 1$ tipinde tahmin edilecek parametre vektörüdür. ρ ve β bilinmemektedir. (2.7)'den görüldüğü üzere, e_t hata denklemi önceki hata değerlerine dayanır. (2.7) modelindeki diğer hata terimi u_t: akgürültü serisidir:

$$E(u_t)=0,\ E[u_t^2]=\sigma_u^{\ 2} \text{ ve } E[u_s,u_t]=0,\ s\neq t.$$

$u'=(u_1,u_2,...,u_n)$ ise u akgürültü hataların özellikleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$E(u)=0 \text{ ve } E[uu']=\sigma_u^{\ 2}I_n.$$

(2.7) modeli için diğer önemli iki varsayımdan birincisi, $|\rho|<1$ ve $e_1 \sim N(0,\sigma^2/(1-\rho^2))$ koşulunun sağlanmasıdır. Bu varsayım durağan proses için gereklidir (Koopmans, 1942). Yani bu koşul sağlandığında e_t hataların ortalaması, varyans ve kovaryansı zaman içinde değişmemektedir.

Diğer önemli koşul ise $|\rho|\leq 1$ ve e_1 sabittir (ya da keyfi dağılımlı $u_2,..u_n$ den bağımsızdır). Yani keyfi bir dağılım izleyen e_1'e izin vererek durağan olmayan prosesi göz önüne almaktır (Dufour, 1990).

Bir çok yazar bu model için çıkarım yöntemlerini çalışmışlardır. Özellikle, alternatif tahmin yöntemlerinin etkilerinin karşılaştırılması ele alınmıştır.

$E[ee']=\Phi$'nın köşegen elemanları için $Var(e_t)$'nin bulunması gerekmektedir. Proses durağan olduğundan ve varyansı zaman içinde değişmeyeceğinden dolayı (2.7) eşitliğinin her iki tarafının varyansını alarak yazalım.

$$Var(e_t)=\rho^2 Var(e_{t-1})+Var(u_t)$$

ya da

$$\sigma_e^{\ 2}=\rho^2\sigma_e^{\ 2}+\sigma_u^{\ 2}$$

buradan $\sigma_e^{\ 2}$'yi çekersek,

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Bir dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$E[e_t e_{t-1}] = \rho E[e_{t-1}^2] + E[e_{t-1}u_t]$$
$$= \rho\sigma_e^2 = \frac{\rho\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

iki dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$E[e_t e_{t-2}] = \rho E[e_{t-1}e_{t-2}] + E[e_{t-2}u_t]$$
$$= \rho^2\sigma_e^2 = \frac{\rho^2\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

ve s dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans

$$E[e_t e_{t-S}] = \rho^S\sigma_e^2 = \frac{\rho^S\sigma_u^2}{1-\rho^2} \tag{2.9}$$

olarak elde edilir. s dönem aralığında iki hata denklemi arasındaki ilişkiyi (korelasyonu) bulmak için (2.9) eşitliğini (2.8) eşitliğine böleriz:

$$\frac{E[e_t e_{t-S}]}{\left\{E(e_t^2)E(e_{t-S}^2)\right\}^{1/2}} = \frac{\rho^S\sigma_u^2/(1-\rho^2)}{\sigma_u^2/(1-\rho^2)} = \rho^S \tag{2.10}$$

Hata kovaryans matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E[ee'] = \Phi = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_1e_2 & e_2^2 & \dots & e_2e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_ne_1 & e_ne_2 & \dots & e_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Daha önce $\Phi = \sigma^2 V$ olarak tanımlamıştık. Bu bölümde σ_u^2'yi σ^2 skaler gibi iyileştirmek için aşağıdaki yapı uygun olacaktır.

$$\Phi = \sigma_u^2 V$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$V = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

2.8. Birinci Dereceden Hareketli Ortalamalı Hatalar

Otokorelasyona alternatif yollardan biri 1. dereceden hareketli ortalama (MA(1)) modelidir. (2.6) eşiliğinde verilen modeli göz önüne alalım. Hatalar MA(1) yapısında ise hatalar

$$e_t = u_t + \tau u_{t-1}, \quad |\tau| < 1 \tag{2.11}$$

olarak formüle edilebilir. Burada $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ dir ve τ bilinmemektedir. (2.11) eşitliğinden faydalanarak e_t 'nin varyansı

$$\begin{aligned} Var(e_t) &= Var(u_t) + \tau^2 Var(u_{t-1}) \\ \sigma_e^2 &= \sigma_u^2 + \tau^2 \sigma_u^2 \\ \sigma_e^2 &= \sigma_u^2 (1+\tau^2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir. Bir dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned} E[e_t e_{t-1}] &= \tau E[u_{t-1}^2] \\ &= \tau \sigma_u^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

iki ve s dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$E[e_t e_{t-2}] = 0, \; E[e_t e_{t-S}] = 0$$

olur. (2.12) ve (2.13) eşitliklerini kullanarak MA(1) hatalarına ilişkin kovaryans matrisi

$$E[ee'] = \Phi = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & \dots & e_1 e_n \\ e_1 e_2 & e_2^2 & \dots & e_2 e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n e_1 & e_n e_2 & \dots & e_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. (2.11) eşitliğinden dolayı

$$E[ee'] = \frac{\sigma_e^{\,2}}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda V matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V = \frac{1}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

2.9. Otokorelasyon Katsayısının Tahmini

Otokokerasyon katsayısı ρ ve τ genelde bilinmez. Tahmin edilmiş GEKK yöntemi, (2.5)'de verilen dönüştürülmüş modele V bilinmediğinden dolayı $\hat{\rho}$ tahminin kullanılması ile elde edilen $\hat{V}$ tahminini kullanarak uygulanan yöntemi ifade etmektedir:

$$\hat{\hat{\beta}}_G = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}y \qquad (2.14)$$

Buradaki problem ρ'yu tahmin etmektir. Bunun için e_t hataları biliniyorsa (2.7) modelinden ρ model katsayısı gibi düşünülür. e_t hataları bilinmiyorsa, (2.6) modelinden EKK rezidüsü olan $\hat{e}_t = y_t - x_t'\hat{b}$ ile güncellenerek $\hat{e}_t = \rho\hat{e}_{t-1} + \hat{u}_t$ olarak

ρ yazılabilir ve ρ 'nun tahmini için uygun bir model elde edilir. Bu modelden ρ için EKK tahmin edicisi şu şekilde elde edilir.

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \hat{e}_t \hat{e}_{t+1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{e}_t^2} \tag{2.15}$$

Otokorelasyon Altında Hata Kovaryans Yapısı

Uygulamalarda genelde V bilinmez bu durumlarda V tahmin edilir. V matrisinin tahminlerinin bazıları Trenkler (1984), Firinguetti (1989) ve Bayhan ve Bayhan (1998) tarafından verilmiştir.

Trenkler'in (1984) önerdiği V matrisi;

$$V = \frac{1}{1+\tau^2} \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

olup burada hata vektörünün elamanları $e_i = u_i + \tau u_{i-1}$ $|\tau| < 1$ yapısına yani MA(1) yapısına sahiptir.

Firinguetti'nin (1989) önerdiği V matrisi;

$$V = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

burada hata vektörünün elemanları $e_i = \rho e_{i-1} + u_i$, $|\rho| < 1$ yapısına yani AR(1) yapısına sahiptir. u_i hata terimleri $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ olan normal dağılımdan gelmektedir. Ayrıca $E(u_i u_j) = 0$, $\forall i \neq j$ varsayımını sağlamaktadır.

Bayhan ve Bayhan'ın (1998) önerdiği Toeplitz formdaki V matrisi;

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

olup burada ρ_i

$\hat{C}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-i}(\hat{e}_j - \bar{e})(\hat{e}_{j+i} - \bar{e})$, $i = 0,1,...,n-1$ olmak üzere $\hat{\rho}_i = \frac{\hat{C}_i}{\hat{C}_0}$ eşitliği kullanılarak tahmin edilen i-nci gecikme otokorelasyon katsayını ifade etmektedir.

2.LİNEER REGRESYON MODELLERİ VE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Dünya KARAPINAR

3. KARMA TAHMİN EDİCİ

Uygulamalarda örneklem bilgisine ek olarak yardımcı bilgi de aynı anda görülebilmektedir. Örneklem ve yardımcı bilgiyi aynı anda kullanarak elde edilen yeni bir tahmin edici ilk olarak Durbin (1953) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963), örneklem ve yardımcı bilgiyi birleştirerek karma tahmin tekniğini geliştirmişlerdir. Özonur (2011) tarafından karma tahmin tekniği incelenmiştir.

3.1. Karma Tahmin Edici

Pratik uygulamalarda, (y, X) matrisinin örneklem bilgilerine ek olarak çoğu zaman,

$$r = R\beta + \phi, \qquad \phi \sim (0, \sigma^2 V) \tag{3.1}$$

tipinde ifade edilen bir lineer stokastik kısıt bilgisi de bulunur. Burada $r : m \times 1$ ve $R : m \times p$ tipinde matrisler, $rank(R) = m$' dir. Ayrıca R ve V'nin bilindiği kabul edilmektedir. $V > 0$ olsun. r vektörü $E(r) = R\beta$ beklenen değeri ile bir rasgele değişken olarak yorumlanabilir. Böylece (3.1) kısıtlaması bu anlamda tam olarak sağlanmaz. r'nin bilindiği kabul edilirse bütün beklenen değerler r'ye bağlı $E(\hat{\beta} \setminus r)$ gibi koşullu beklenen değerler olur. Durbin (1953) örneklem bilgilerini ve yardımcı (ek) bilgiyi aynı anda kullanarak, parametrelerin stepwise

(aşamalı, kademeli) tahmin edicisini tanımlayan ilk kişidir. Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) örneklem bilgilerini ve ön bilgiyi,

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

ortak modelinde birleştirerek karma tahmin tekniğini ortaya koymuşlardır. Burada hatalar arasında korelasyon olmadığı kabul edilmektedir. Yani;

$$E\left(\varepsilon\phi'\right) = 0 \tag{3.3}$$

dır. Daha önceki varsayımların aksine burada genel regresyon modeli kabul edilir ve $E\left(\varepsilon\varepsilon'\right) = \sigma^2 W$ olur. (3.3) kullanılarak varyans-kovaryans matrisi;

$$E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix}(\varepsilon, \phi)'\right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Karma model,

$$\tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} \sim \left(0, \sigma^2 \tilde{W}\right) \tag{3.4}$$

olarak yazılır. Burada,

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}, \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix}, \qquad \tilde{W} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} > 0$$

dır. $rank\left(\tilde{X}\right) = rank\left(X\right) = p$ olduğundan (3.4) modeli, genelleştirilmiş lineer model gibi görünür. $S = X'W^{-1}X$ olmak üzere aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1. (3.2) karma modelinde β için en iyi lineer yansız tahmin edici;

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(R) &= \left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1}\left(X'W^{-1}y + R'V^{-1}r\right)\\ &= \hat{b} + S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

dir ve $\hat{\beta}(R)$'nin varyans-kovaryans matrisi;

$$COV\left(\hat{\beta}(R)\right) = \sigma^2\left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1} \tag{3.6}$$

dir. $\hat{\beta}(R)$ tahmin edicisi β'nın karma tahmin edicisi olarak adlandırılır.

$\hat{\beta}(R)$ ile GEKK' nin Karşılaştırılması:

Karma tahmin edicisi yansızdır ve GEKK den daha küçük bir varyans-kovaryans matrisine sahiptir, yani

$$COV\left(\hat{\beta}_G\right) - COV\left(\hat{\beta}(R)\right) = \sigma^2 S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1} \geq 0$$

dır. Karma tahmin edicisinin daha küçük varyansa sahip olması $E(r) = R\beta$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmamasından bağımsızdır.

3.2. Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar

(3.1) modelinde, $E(\phi\phi') = \sigma^2 V$ kabul edilmiştir. Pratikte bu gösterim yeterli olmayabilir. Dolayısıyla, bazen $E(\phi\phi') = V$ gösterimi daha gerçekçi olabilir. Bilinmeyen σ^2'yi içeren karma tahmin edici,

$$\hat{\beta}(R, \sigma^2) = (\sigma^{-2} S + R' V^{-1} R)^{-1} (\sigma^{-2} X' W^{-1} y + R' V^{-1} r)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\hat{\beta}(R, \sigma^2)$'deki σ^2'yi Tahmin Etmek için, Örneklem Varyansı s^2'nin Kullanılması

s^2'nin σ^2'yi tahmin etmek için kullanılması Theil (1963) tarafından önerilmiştir. Genelde $\hat{\beta}(R, s^2)$ tahmin edicisi yansız değildir. Belirli koşullar sağlanırsa $\hat{\beta}(R, s^2)$ asimptotik olarak yansız ve asimptotik olarak $\hat{\beta}(R, s^2)$ ile aynı varyans-kovaryans matrisine sahiptir. Bu tahmin edicinin özelliklerini inceleyenler arasında, Giles ve Srivastava (1991), Kakwani (1968, 1974), Mehta ve Swamy (1970), Nagar ve Kakwani (1964), Srivastava ve Chandra (1985), Srivastava ve Upadhyaya (1975), Swamy ve Mehta (1969) gösterilebilir.

Tanım 3.1. $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$, β'nın iki tahmini olsun. $MSEM(\hat{\beta}, \beta) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$ hata kareler ortalaması (MSE) matrisi olmak üzere;

i. $\Delta(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = MSEM(\hat{\beta}_1, \beta) - MSEM(\hat{\beta}_2, \beta) \geq 0$ ise o zaman $\hat{\beta}_2$,

MSE- I (MSEM) kriterine göre $\hat{\beta}_1$'dan üstündür denir.

ii. $E\left[(\hat{\beta}_1 - \beta)'(\hat{\beta}_1 - \beta)\right] - E\left[(\hat{\beta}_2 - \beta)'(\hat{\beta}_2 - \beta)\right] = tr\left\{\Delta(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\right\} \geq 0$ ise o zaman

$\hat{\beta}_2$, MSE- II kriterine göre $\hat{\beta}_1$'dan üstündür denir.

iii.

$$E\left[(X\hat{\beta}_1 - X\beta)'(X\hat{\beta}_1 - X\beta)\right] - E\left[(X\hat{\beta}_2 - X\beta)'(X\hat{\beta}_2 - X\beta)\right] =$$
$$E\left[(\hat{\beta}_1 - \beta)'S(\hat{\beta}_1 - \beta)\right] - E\left[(\hat{\beta}_2 - \beta)'S(\hat{\beta}_2 - \beta)\right] = tr\left\{S\Delta(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\right\} \geq 0$$

ise o zaman; $\hat{\beta}_2$, MSE- III kriterine göre $\hat{\beta}_1$'dan üstündür denir.

3.2.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$'nin $\hat{\beta}_G$ Üzerine Üstünlüğü

D; varyans-kovaryans matrislerinin farkı olmak üzere,

$$COV\left(\hat{\beta}_G\right) - COV\left(\hat{\beta}(R)\right) = D$$
$$= \sigma^2 S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \geq 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$bias\left(\hat{\beta}(R), \beta\right) = S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}\delta$$
$$= Dd \quad (3.8)$$

dir. Burada, $R^{+}=R'\left(RR'\right)^{-1}$ ve $\delta=E(r)-R\beta$ olmak üzere, $d=SR^{+}\delta\sigma^{-2}$, dir. Bu nedenle, $bias\left(\hat{\beta}(R),\beta\right)\in\Re(D)$'dir ve aşağıdaki teorem verilebilir. $\Re(D)$, D nin kolon uzayını göstermektedir.

Teorem 3.2. Yanlı tahmin edici'nin MSE-I kriterine göre GEKK $\hat{\beta}_G$'den daha üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\lambda=\sigma^{-2}\delta'\left(V+RS^{-1}R'\right)^{-1}\delta\leq 1 \tag{3.9}$$

olmasıdır. ε ve ϕ bağımsız olarak normal dağılıma sahiplerse λ,

$$F=\frac{1}{ms^{2}}\left(r-R\hat{\beta}_G\right)'\left(V+RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r-R\hat{\beta}_G\right) \tag{3.10}$$

istatistiğinin merkezi olmama parametresidir. Burada merkezi olmayan $F_{\mathrm{m,n}-p}(\lambda)$ dağılımı $H_0:\lambda\leq 1$ hipotezi altında bulunur.

3.2.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{\beta}_G$'nin $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ Üzerine Üstünlüğü

MSE matrisleri farkının n.n.d. yani,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\hat{\beta}(R),\hat{\beta}_G\right)&=MSEM\left(\hat{\beta}(R),\beta\right)-COV\left(\hat{\beta}_G\right)\\&=-\sigma^{2}S^{-1}R'\left(V+RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}\\&\quad+bias\left(\hat{\beta}(R),\beta\right)bias\left(\hat{\beta}(R),\beta\right)'\geq 0\end{aligned}$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$-I_J + \left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1/2} \delta\delta' \left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1/2} \geq 0 \qquad (3.11)$$

olmasıdır.

3.2.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{\beta}(R)$'nin $\hat{\beta}_G$ Üzerine Üstünlüğü

Karma tahmin edici $\hat{\beta}(R)$,

$$tr\left\{\Delta\left(\hat{\beta}_G, \hat{\beta}(R)\right)\right\}$$
$$= tr\left\{COV\left(\hat{\beta}_G\right) - COV\left(\hat{\beta}(R)\right)\right\} - bias\left(\hat{\beta}(R), \beta\right)' bias\left(\hat{\beta}(R), \beta\right) \geq 0 \qquad (3.12)$$

ise MSE-II kriterine göre GLSE $\hat{\beta}_G$'dan daha iyidir. (3.7) ile (3.8) formüllerinin uygulanması ve $A = V + RS^{-1}R'$ notasyonunun kullanılmasıyla (3.12),

$$Q(\delta) = \sigma^{-2}\delta' A^{-1}RS^{-1}S^{-1}R'A^{-1}\delta \leq tr\left(S^{-1}R'A^{-1}RS^{-1}\right) \qquad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu koşul, $Q(\delta)$ merkezi olmama parametreli bir istatistik yoksa test edilemez. Bu eşitliğin sağlanması için yeter koşul, Wallace'ın (1972) düşüncesine dayalı olarak aranır.

$$\sigma^{-2}\delta' A^{-1}RS^{-1}GS^{-1}R'A^{-1}\delta = \sigma^{-2}\delta' A^{-1}\delta = \lambda$$

olacak şekilde $p \times p$ tipinde bir G simetrik matrisi olduğu kabul edilsin. $R^{+} = R'\left(RR'\right)^{-1}$ için, $G = S + SR^{+}VR^{+'}S$ 'dir. Buradan da $RS^{-1}GS^{-1}R' = A$ olur. Böylece;

$$\lambda_{\min}\left(G\right) \leq \frac{\sigma^{-2}\delta' A^{-1}RS^{-1}GS^{-1}R'A^{-1}\delta}{Q\left(\delta\right)} = \frac{\lambda}{Q\left(\delta\right)}$$

veya denk olarak,

$$Q\left(\delta\right) \leq \frac{\lambda}{\lambda_{\min}\left(G\right)}$$

dir. Böylece,

$$\lambda \leq \lambda_{\min}\left(G\right) tr\left(S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}\right) = \lambda_2 \qquad (3.14)$$

koşulunun, (3.13) formülünün sağlanması için yeterli koşul olduğu söylenebilir.

3.2.4. $\hat{\beta}\left(R\right)$ ve $\hat{\beta}_G$ için MSE-III Karşılaştırması

MSE-III kriteri tanımına göre, $A = V + RS^{-1}R'$ olmak üzere,

$$tr\left\{S\Delta\left(\hat{\beta}_G, \hat{\beta}\left(R\right)\right)\right\} = \sigma^2 tr\left\{A^{-1}RS^{-1}R'\right\} - \delta' A^{-1}RS^{-1}R'A^{-1}\delta \geq 0 \qquad (3.15)$$

ise veya denk olarak $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0$ olmak üzere,

$$\sigma^{-2}\delta' A^{-1}RS^{-1}R'A^{-1}\delta \le m - tr\left(A^{-1}V\right)$$
$$= m - \sum_{j=1}^{m}\left(1+\lambda_j\right)^{-1} \qquad (3.16)$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(1+\lambda_j\right)^{-1}$$

ise $\hat{\beta}(R)$ tahmin edicisi MSE-III kriterine göre $\hat{\beta}_G$'den daha iyidir. Burada λ_i'ler $V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}$ matrisinin özdeğerleridir. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$tr\left(A^{-1}V\right) = tr\left(V^{1/2}A^{-1}V^{1/2}\right) = tr\left(\left(V^{-1/2}AV^{-1/2}\right)^{-1}\right)$$
$$= tr\left\{\left(I + V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}\right)^{-1}\right\} = tr\left\{\left(I+\Lambda\right)^{-1}\right\} = \sum_{j=1}^{m}\left(1+\lambda_j\right)^{-1}.$$

(3.16) denkleminin sol yanı, (3.9)'da tanımlanan λ ile aşağıdaki şekilde sınırlanır:

$$\sigma^{-2}\delta' A^{-1}\left(RS^{-1}R' + V - V\right)A^{-1}\delta$$
$$= \sigma^{-2}\delta' A^{-1}\delta - \sigma^{-2}\delta' A^{-1}VA^{-1}\delta$$
$$\le \sigma^{-2}\delta' A^{-1}\delta = \lambda.$$

$$\lambda \le \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(1+\lambda_j\right)^{-1} = \lambda_3. \qquad (3.17)$$

4. TAM OLMAYAN VERİ KÜMELERİNDE TAHMİN

Bölüm 2 ve 3 te lineer regresyon modelinde hatalara ilişkin varsayımların sağlanmaması durumunda kullanılan "Ağırlıklı En Küçük Kareler" yöntemi incelenmiştir. Daha sonra, örneklem bilgisi ve parametreler hakkında yardımcı bilgi olduğunda kullanılan karma tahmin ediciler incelenmiştir.

Burada yanıt değişkende kayıp veri olması durumunda ve ayrıca X matrislerinin tam olmaması durumunda tahmin yöntemleri Rao ve ark.(2008) 'dan yararlanarak incelenecektir.

4.1. Yanıt Değişkende Kayıp Olması Durumu

Y, yanıt değişkeni, X , $n \times p$ tipinde matris,

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{4.1}$$

biçiminde lineer regresyon modeli olsun. β'nın en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

ve σ^2 'nin yansız tahmin edicisi

$$s^2 = (y - Xb)'(y - Xb)(\mathrm{n} - p)^{-1}$$
$$= = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 / (\mathrm{n} - p)$$

olduğunu biliyoruz. Yanıt değişkende kayıp veri olması durumunda aşağıdaki metot Yates (1933) tarafından önerilmiştir.

4.1.1.Tamamlanmış Veri İçin En Küçük Kareler Analizi –Yates Metodu

Y 'de $t_* = n - t_c$ tane yanıt değişkeninin kayıp olduğunu varsayalım. Veri matrisi yeniden düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} y_{obs} \\ y_{mis} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_* \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_* \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır. Burada c tam kısmı, * modelin kısmen tam olmayan kısmını gösterir. Bu durumda X_* tamamen gözlenmiştir. * indisi gözlenmemiş yanıtlarla bağlantılı olan veriyi gösterir. β'nın tam durum tahmin edicisi

$$b_c = (X_c' X_c)^{-1} X_c' y_{obs} \tag{4.3}$$

şeklinde verilir. Burada X_c, $t_c \times p$ boyutlu matris, y_{obs} gözlenmiş yanıtları gösterir.(n - t_c) tipindeki y_{mis} vektörünün öngörüsü

$$\hat{y}_{mis} = X_* b_c$$

dir.

Tamamlanmış modelde β' yı tahmin etmek ve y_{mis} için (4.2) modelinde bu tahmin ediciyi yerleştirmek β ya göre aşağıdaki fonksiyonu minimum yapma ile denktir.

$$S(\beta) = \left\{ \begin{pmatrix} y_{obs} \\ \hat{y}_{mis} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_c \\ X_* \end{pmatrix} \beta \right\}' \left\{ \begin{pmatrix} y_{obs} \\ \hat{y}_{mis} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_c \\ X_* \end{pmatrix} \beta \right\}$$

$$= \sum_{t=1}^{t_c} (y_t - x_t'\beta)^2 + \sum_{t=t_c+1}^{n} (\hat{y}_t - x_t'\beta)^2$$

Birinci toplam (4.3) de verilen b_c ile minimum yapılır , b_c nin ikinci toplamda β ' nın yerine yerleştirilmesiyle bu toplam 0'a eşitlenmiş olur. Bu yüzden b_c tamamlanmış modelde β'nın EKK tahmin edicisidir.

4.1.2. Varyansın Tahmini

Eğer veri tam ise ; σ^2 'nin tahmin edicisi

$$s^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 / (\mathrm{n} - p)$$

dir.

Eğer t-t_c tane durum tam değilse ; yani y_{mis} gözlemleri kayıp ise $\boldsymbol{\sigma^2}$ varyansı

$$\hat{\sigma}_c^{\,2} = \frac{\sum_{t=1}^{t_c} (y_t - \hat{y}_t)^2}{(t_c - p)}$$

kullanarak tahmin edilebilir. Diğer yandan , eğer kayıp veri Yates in metoduna göre tamamlanırsa bu durumda

$$\hat{\sigma}^2_{Yates} = \frac{1}{(\mathrm{n}-p)}\left\{\sum_{t=1}^{t_c}(y_t-\hat{y}_t)^2+\sum_{t=t_c+1}^{n}(\hat{y}_t-\hat{y}_t)^2\right\}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{t_c}(y_t-\hat{y}_t)^2}{(\mathrm{n}-p)}$$

tahmin edici kullanılır.

4.1.3. X Matrisindeki Kayıp Değerler

Biyoloji veya eczacılıktaki deneysel tasarım matrislerinden farklı olarak, ekonometrik modellerde X matrisi sabit bir tasarıma sahip olmayabilir. Bazı verilerin kaybolma olasılığı vardır. Genel olarak verinin aşağıdaki yapıya sahip olduğunu varsayabiliriz.

$$\begin{pmatrix} y_{obs} \\ y_{mis} \\ y_{obs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{obs} \\ X_{obs} \\ X_{mis} \end{pmatrix}\beta+\varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I\ )$$

y_{mis}'in tahmini öngörü problemine karşılık gelir. X_{obs}'nin kullanılmasıyla y_{mis}'in öngörüsü Yates metoduna denktir.

4.1.4. Genel Model

Yukarıdaki bilgileri kullanarak ; (y_{mis} , X_{obs}) durumunun çıkarılmasıyla modelimiz aşağıdaki yapıya indirgenir.

$$y_{obs} = \begin{pmatrix} X_{obs} \\ X_{mis} \end{pmatrix} \beta + \varepsilon$$

notasyonu aşağıdaki gibi değiştirelim.

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_* \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_* \end{pmatrix} \sim (0, \sigma^2 I \ ) \tag{4.4}$$

alt model

$$y_c = X_c \beta + \varepsilon_c \tag{4.5}$$

tamamen gözlenmiş verileri gösterir. Burada $y_c : t_c \times 1 \quad X_c : t_c \times p$ tipinde ve $rank(X_c) = p$. Ayrıca X stokastik olmadığı varsayılmıştır. (4.4)'in geri kalan parçası ; yani

$$y_* = X_* \beta + \varepsilon_*$$

dır. y_* vektörü tamamen gözlemlenmiştir. X_* tam olmayan kısmı gösterir. (4.4) modele karma tahmin edici yöntemi uygulanırsa (4.6) elde edilir.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(X_*) &= (X_c'X_c + X_*'X_*)^{-1}(X_c'y_c + X_*'y_*) \\ &= b_c + S_c^{-1}X_*'(I_{t_*} + X_*S_c^{-1}X')^{-1}(y_* - X_*b_c)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Burada $b_c = (X_c'X_c)^{-1}X_c'y_c$ (4.5) deki β'nın EKK tahmin edicisi ve $S_c = X_c'X_c$ dir. $\hat{\beta}(X_*)$, β için yansızdır ve aşağıdaki varyans-kovaryans matrisine sahiptir.

$$V(\hat{\beta}(X_*)) = \sigma^2(S_c + S_*)^{-1}$$

burada $S_* = X_*'X_*$ dır.

4.2. Tam Olmayan X Matrisleri İçin Tahmin Yöntemleri

4.2.1. Maksimum Olabilirlik Yöntemi

Hataların normal dağıldığını varsayalım.(($\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$)) . Bu durumda (4.4) modelin olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\beta, \sigma^2, X_*) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y_c - X_c\beta, y_* - X_*\beta)'\begin{pmatrix} y_c - X_c\beta \\ y_* - X_*\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir

β, σ^2 ve X^*'a göre türevleri alınırsa

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{2\sigma^2}\{X_c'(y_c - X_c\beta) + X_*'(y_* - X_*\beta)\ \} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} =$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left\{-n + \frac{1}{\sigma^2}(y_c - X_c\beta)'(y_c - X_c\beta) + \frac{1}{\sigma^2}(y_* - X_*\beta)'(y_* - X_*\beta)\right\} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial X_*} = \frac{1}{2\sigma^2}(y_* - X_*\beta)\beta' = 0$$

olur.

β ve σ^2 için çözülmesiyle

$$\hat{\beta} = b_c = S_c^{-1}X_c'y_c,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}(y_c - X_c b_c)'.(y_c - X_c b_c)$$

maksimum olabilirlik tahmin edicileri elde edilir.

$\hat{X}_*$ maksimum olabilirlik tahmini

$$y^* = \hat{X}_* b_c$$

denkleminin çözümüdür. p = 1 için çözüm tektir.

$$\hat{x}_* = \frac{y_*}{b_c}$$

Burada $b_c = (x_c' x_c)^{-1} x_c' y_c$ (cf.Kmenta,1971).

Herhangi bir $\hat{X}_*$ çözümünü karma modeldeki X_* yerine yazarsak , yani

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_* \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_* \end{pmatrix},$$

o zaman aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}\left(\hat{X}_*\right) &= \left(S_c + \hat{X}_*'\hat{X}_*\right)^{-1}\left(X_c' y_c + \hat{X}_*' y_*\right) \\ &= \left(S_c + \hat{X}_*'\hat{X}_*\right)^{-1}\left(S_c\beta + X_c'\varepsilon_c + \hat{X}_*'\hat{X}_*\beta + \hat{X}_*'\hat{X}_* S_c^{-1} X_c'\varepsilon_c\right) \\ &= \beta + \left(S_c + \hat{X}_*'\hat{X}_*\right)^{-1}\left(S_c + \hat{X}_*'\hat{X}_*\right) S_c^{-1} X_c'\varepsilon_c \\ &= \beta + S_c^{-1} X_c'\varepsilon_c \\ &= b_c \end{aligned}$$

4.2.2. Sıfırıncı Mertebeden Regresyon

Sıfırıncı mertebeden regresyon (ZOR) metodu Wilks (1938) tarafından bulunmuştur. Ayrıca bu metod örneklem ortalamaları metodu olarak adlandırılır.

m. değişken X_j 'nin x_{ij} değeri kayıpsa , X_j nin gözlenen değerlerinin ortalaması bu değerin yerine yerleştirilir.

$$\phi_j = \{i : x_{ij} \ kayıp\} \tag{4.7}$$

X_j nin kayıp değerlerinin kümesinin indeksini göstersin ve m_j, ϕ_j deki elemanların sayısı olsun. Bu durumda sabit j için X_* daki herhangi kayıp değer için x_{ij} yerine tüm mevcut durumların kullanılmasıyla

$$\hat{x}_{ij} = \bar{x}_j = \frac{1}{n - m_j} \sum_{i \in \phi_j} x_{ij}$$

veya sadece tam durumların kullanılmasıyla

$$\hat{x}_{ij} = \bar{x}_j = \frac{1}{n - t_c} \sum_{i=1}^{t_c} x_{ij}$$

yerleştirilir.

j. kolonun , m_j bilinmeyen ortlaması için örneklem ortalamasının iyi bir tahmin edici olması beklendiğinden bu metod tavsiye edilir. Diğer yandan j. kolondaki veri bir trende veya eğrisel şekle sahipse $\bar{x}_j$ iyi bir tahmin edici değildir ve bunun kullanımı yanlılığa neden olur.

X_* matrisindeki tüm kayıp değerler yerine , karşılık gelen kolonun ortalamaları $\overline{x}_j$ yerleştirilirse bu tamamlanmış matris $X_{(1)}$ verir . Böylece (4.4) karma modelin uygulanabilir versiyonu

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_{(1)} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_{(1)} \end{pmatrix},$$

şeklinde olur.

Hatalar vektörü

$$\varepsilon_{(1)} = (X_* - X_{(1)})\beta + \varepsilon_*$$

şeklindedir ve

$$\varepsilon_{(1)} \sim \{ \ (X_* - X_{(1)})\beta, \sigma^2 I_{t_*} \ \}$$

$dir. Burada \quad t_* = t - t_c \quad dir.$

4.2.3. Birinci Mertebeden Regresyon

Birinci Mertebeden Regresyon (FOR) X matrisinin ilişkili yapısını kullanışlı hale getirmek için kullanılan bir metotlar kümesidir. (4.7) daki ϕ_j indeks

kümelerine bağlı olarak herhangi bir X_j kolonunun geri kalan kolonlarla bağımlılığı ek regresyonlarla modellenir. Yani,

$$x_{ij} = \theta_{0j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{p} x_{il}\theta_{1j} + u_{ij,} \quad i \notin \phi = \bigcup_{j=1}^{p} \phi_j = t_c + 1, ..., \mathrm{n}$$

dir. X_* 'ın x_{ij} kayıp değerleri aşağıdaki gibi tahmin edilir.

$$\hat{x}_{ij} = \hat{\theta}_{0j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{p} x_{il}\hat{\theta}_{1j}$$

Örnek. (indislerin ϕ_j ayrık kümeleri)

X_c $t_c \times p$ boyutlu ve X_* $2 \times p$ boyutlu matris aşağıdaki gibi olsun.

$$X_* = \begin{pmatrix} * & x_{t_c+1,2} & x_{t_c+1,3} \cdots\cdots x_{t_c+1,K} \\ x_{t_c+2,1} & * & x_{t_c+2,3} \cdots\cdots x_{t_c+2,K} \end{pmatrix}$$

Buradaki "*" kayıp değerleri göstermektedir. Karşılık gelen indeks kümeleri

$$\Phi_1 = \{t_c + 1\}, \Phi_2 = \{t_c + 2\}, \Phi_3 = ...\Phi_K = \varnothing$$

$$\phi = \bigcup_{j=1}^{p} \phi_J = \{t_c + 1, t_c + 2\}$$

şeklindedir. O halde aşağıdaki regresyon denklemlerine sahip oluruz.

$$x_{1i} = \theta_{01} + \sum_{l=2}^{p} x_{il}\theta_{l1} + u_{i1,} \quad i = 1, ..., t_c$$

$$x_{2i} = \theta_{02} + x_{1i}\theta_{12} \sum_{l=3}^{p} x_{li}\theta_{l2} + u_{2i,} \quad i = 1, ..., t_c$$

Yukarıdaki iki denklemdeki parametrelere karşılık gelen $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ EKK tahmin edicileriyle tahmin edilir ve sırasıyla x_{1i} ve x_{2i} aşağıdaki gibi tahmin edilir.

$$\hat{x}_{t_c+1,1} = \hat{\theta}_{01} + \sum_{l=2}^{p} x_{t_c+1,l}\hat{\theta}_{l1}$$

$$\hat{x}_{t_c+2,2} = \hat{\theta}_{02} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq 2}}^{p} x_{t_c+2,l}\ \hat{\theta}_{l2}$$

Bu işlem aşağıdaki $\hat{X}_*$ matrisi verir.

$$\hat{X}_* = \begin{pmatrix} \hat{x}_{t_c+1,1} & x_{t_c+1,2} \cdots\cdots x_{t_c+1,K} \\ \hat{x}_{t_c+2,1} & x_{t_c+2,2} \cdots\cdots x_{t_c+2,K} \end{pmatrix} = X_{(2)}$$

Böylece işlevselleştirilmiş karma model

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_{(2)} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_{(2)} \end{pmatrix}$$

dir. Burada hata vektörü

$$\varepsilon_{(2)} = (X_* - X_{(2)})\beta + \varepsilon_*$$

$$= \begin{pmatrix} x_{t_c+1,1} - \hat{x}_{t_c+1,1} & 0 \cdots\cdots & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & x_{t_c+2,2} - \hat{x}_{t_c+2,2} \cdots\cdots & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \beta + \varepsilon_*$$

$$= \begin{pmatrix} \left(x_{t_c+1,1} - \hat{x}_{t_c+1,1}\right)\beta_1 \\ \left(x_{t_c+2,2} - \hat{x}_{t_c+2,2}\right)\beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t_c+1} \\ \varepsilon_{t_c+2} \end{pmatrix}$$

dir.

4.2.4. Karma Ağırlıklandırılmış Tahmin Ediciler

Herhangi bir durumda X_* daki kayıp değerler için , ZOR model için $X_{(1)}$, FOR model için $X_{(2)}$ ve ML için $\hat{X}_*$ tamamlanmış matrislerini X_R ile gösterelim. Bu durumda uygulanabilir karma model aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ X_R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_R \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Burada $\varepsilon_R = (X_* - X_R)\beta + \varepsilon_*$ dir. $\delta = (X_* - X_R)\beta$ olsun. Genel olarak $\delta \neq 0$ olamasını bekleriz. (4.8) modelindeki β'nın en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{\beta}(X_R) = (S_c + S_R)^{-1}(X_c' y_c + X_R' y_*)$$

karma tahmin edicisi ile verilir. Burada $S_c = X_c' X_c$ ve $S_R = X_R' X_R$ olmak üzere

$$\min_\beta S(\beta) = \min_\beta \{(y_c - X_c\beta)'(y_c - X_c\beta) + (y_* - X_R\beta)'(y_* - X_R\beta)\}$$

minimizasyon probleminin çözümüdür. Karma tahmin edicinin beklenen değeri

$$E\left(\hat{\beta}(X_R)\right) = \beta + (S_c + S_R)^{-1} X_R' \delta$$

ve eğer $\delta \neq 0$ ise $\hat{\beta}(X_R)$ yanlıdır.

Yanlı tahmin ediciler ile yansız tahmin edicileri karşılaştırmak için skaler MSE-2 ve MSE-3 kriterini kullanırız. β' yı tahmin etmek için gözlenemeyen X_R matrisini gözlenen X_c matrisinden (yada örneklemden elde edilen X_c matrisinden) farklı bir ağırlık vererek çözmek Toutenburg (1989) ve Toutenburg ve Schaffrin (1989) tarafından aşağıdaki gibi önerilmiştir. Yani, w bir skaler faktör olmak üzere

$$\min_{\beta}\{(y_c - X_c\beta)'(y_c - X_c\beta) + w(y_* - X_R\beta)'(y_* - X_R\beta)\} \qquad (4.9)$$

(4.9) nın β 'ya göre türevi alınırsa ve sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki normal denklemi verir.

$$\left(S_c + wS_R\right)\beta - (X_C'y_c + wX_R'y_*) = 0$$

Bu çözüm

$$b(w) = \left(S_c + wS_R\right)^{-1}(x_c'y_c + wX_R'y_*) \qquad (4.10)$$

dir ve bu ağırlıklandırılmış karma tahmin edici (WMRE) olarak adlandırılır. Bu tahmin edici bilinen karma tahmin edici olarak yorumlanabilir. Bu durumda model aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{pmatrix} y \\ \sqrt{w}y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ \sqrt{w}X_R \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \sqrt{w}\vartheta_* \end{pmatrix}.$$

Eğer $Z = Z(w) = (S_c + wS_R)$ ve $\delta = (X_* - X_R)\beta$ ise

$$\begin{aligned} b(w) &= Z^{-1}(X_C'X_C\beta + X_C'\varepsilon_C + WX_R'X_*\beta + wX_R'\varepsilon_*) \\ &= \beta + WZ^{-1}X_R'(X_* - X_R)\beta + Z^{-1}(X_C'\varepsilon_C + wX_R'\varepsilon_*) \end{aligned}$$

dir .

$$Bias(b(w)) = wZ^{-1}X_R'\delta \qquad (4.11)$$

ve varyans-kovaryans matrisi

$$COV(b(w)) = \sigma^2 Z^{-1}(S_c + \lambda^2 S_R)Z^{-1} \tag{4.12}$$

dir.

4.2.5. w Parametresinin Seçimi

$$\tilde{y} = \tilde{x}'\beta + \tilde{\varepsilon},\ \ \tilde{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2)$$

olsun. Regresyon modelinin gözlenemeyen herhangi bir değeri

$$p = \tilde{x}'b(w)$$

ile öngörülebilir. Bu durumda p'nin MDEP'si (öngörüden sapmaların hataların ortalaması)

$$\begin{aligned} E(p - \tilde{y})^2 &= E(\tilde{x}'(b(w) - \beta) - \tilde{\varepsilon})^2 \\ &= (\tilde{x}'Bias(b(w)))^2 + (\tilde{x}'V(b(w))\tilde{x} + \sigma^2 \end{aligned}$$

dir. (4.11) ve (4.12) kullanılarak

$$E(p-\tilde{y})^2 = g(w)$$
$$= w^2(\tilde{x}'Z^{-1}X_R'\delta\delta'X_RZ^{-1}\tilde{x}) + \sigma^2\tilde{x}'Z^{-1}(S_c + w^2S_R)Z^{-1}\tilde{x} + \sigma^2 \quad (4.13)$$

elde edilir.

Aşağıdaki ilişkiler kullanılarak

$$\frac{\partial trAZ^{-1}}{\partial w} = tr\frac{\partial trAZ^{-1}}{\partial Z^{-1}}\frac{\partial Z^{-1}}{\partial w},$$
$$\frac{\partial trAZ^{-1}}{\partial Z^{-1}} = A',$$
$$\frac{\partial Z^{-1}}{\partial W} = -Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial W}Z^{-1}$$

Bu sonuç

$$\frac{\partial}{\partial w}trAZ^{-1} = -trZ^{-1}A'Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial w}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi Z= Z(w) için

$$\frac{\partial Z}{\partial w} = S_R$$

olur.

w'ya göre (4.13) deki g(w) türevinin alınmasıyla ve sıfıra eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial g(w)}{\partial w} &= w(\tilde{x}'Z^{-1}X_R'\delta)^2 - w^2\tilde{x}'Z^{-1}S_RZ^{-1}X_R'\delta\delta'X_RZ^{-1}\tilde{x} \\ &\quad +\sigma^2 w\tilde{x}'Z^{-1}S_RZ^{-1}\tilde{x} - \sigma^2\tilde{x}'Z^{-1}S_RZ^{-1}(S_c + w^2S_R)Z^{-1}\tilde{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$w = \frac{1}{1+\sigma^{-2}\rho_1(w)\rho_2^{-1}(w)}, \quad 0 \le w \le 1$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\rho_1(w) &= \tilde{x}'Z^{-1}S_cZ^{-1}X_R'\delta\delta'X_RZ^{-1}\tilde{x}, \\ \rho_2(w) &= \tilde{x}'Z^{-1}S_RZ^{-1}S_cZ^{-1}\tilde{x}\end{aligned}$$

dir.

Böylece gözlenemeyen matris sadece bir satırdan oluşuyorsa , yani $t_* = 1$ ise, problemin çözümü daha basit olacaktır.

$$y_* = x_*\beta + \varepsilon_*,\ \ \varepsilon_* \sim (0, \sigma^2).$$

O halde $S_R = x_R x_R'$, $\delta = (x_*' - x_R')\beta$ (skaler) olmak üzere

$$\rho_1(w) = (\tilde{x}' Z^{-1} S_c Z^{-1} x_R)(x_R' Z^{-1} \tilde{x})\delta^2$$
$$\rho_2(w) = (\tilde{x}' Z^{-1} x_R)(\tilde{x}' Z^{-1} S_c Z^{-1} \tilde{x})$$

olur. Böylece

$$w = \frac{1}{1 + \sigma^{-2}\delta^2}$$

bulunur.

Herhangi bir şekilde X matrisinde kayıp değerler olması durumunda ağırlıklı karma tahmin edici (WME)'nin Toutenburg (1989) ve Toutenburg ve Schaffrin (1989) tarafından (4.10) daki gibi verildiğini gördük. Bu düşüncenin genişletilmesiyle, X matrisi tam iken, Schaffrin ve Toutenburg (1990) tarafından ağırlıklı karma regresyon metodu tanımlanmıştır.

5. AĞIRLIKLI KARMA TAHMİN EDİCİ VE BU TAHMİN EDİCİYE DAYANAN YENİ TAHMİN YÖNTEMLERİ

(2.1) lineer regresyon modelini ve (3.1) stokastik lineer kısıtını ele alalım. (2.1) ile verilen örneklem bilgisi ve (3.1) ile verilen ön bilgi eşit ağırlığa sahip değilken, Schaffin ve Toutenburg (1990) tarafından ağırlıklı mixed (karma) tahmin edici (WME)

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{WME}(w) &= (S + wR'V^{-1}R)^{-1}(X'y + wR'V^{-1}r) \\ &= \hat{\beta} + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) \quad 0 \le w \le 1\end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $S = X'X$ ve w, stokastik olmayan skaler bir ağırlıktır. Bu bölümde karma tahmin edici (WME) ve bu tahmin ediciye bağlı olarak tanımlanmış yeni tahmin edicileri ve onların karşılaştırılmalarını inceleyeceğiz.

Ayrıca, model (2.1) için, Liu(1993) tarafından tanımlanan Liu tahmin edici

$$\hat{\beta}_{LE}(d) = (\mathrm{S}+ I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}),\ 0 < \mathrm{d} < 1 \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (5.1)'de $\hat{\beta}$ yerine (5.2)'de tanımlanan Liu tahmin edici yerleştirilerek elde edilen ağırlıklı karma Liu tahmin edici (WMLE);

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{WMLE}(w,d) &= \hat{\beta}_{LE}(d) + wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}(r-R\hat{\beta}_{LE}(d)) \\ &= S^{-1}F_dX'y + wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}(r-RS^{-1}F_dX'y) \\ &= (S^{-1}-wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})(F_dX'y+wR'V^{-1}r) \\ &= (S+wR'V^{-1}R)^{-1}(F_dX'y+wR'V^{-1}r)\end{aligned}$$

Yang ve ark.(2009) tarafından önerilmiştir. Burada $F_d = (S+I)^{-1}(S+dI)$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}MSEM(\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)) &= \sigma^2 A(F_dSF_d'+w^2R'V^{-1}R)A+b_1b_1' \\ MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) &= \sigma^2 A(S+w^2R'V^{-1}R)A \\ MSEM(\hat{\beta}_{LE}(d)) &= \sigma^2 F_dS^{-1}F_d'+b_2b_2'\end{aligned}$$

şeklindedir.Burada, $A=(S+wR'V^{-1}R)^{-1}$,
$b_1 = Bias(\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)) = A(F_d-I)S\beta$, $b_2 = Bias(\hat{\beta}_{LE}(d)) = (F_d-I)\beta$ dır.

$\hat{\beta}_{WME}(w)$ **ve** $\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)$ **'nin Karşılaştırılması** (Yang ve ark.(2009)):

$$\begin{aligned}&MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)) \\ &= \sigma^2 A(S+w^2R'V^{-1}R)A - \sigma^2 A(F_dSF_d'+w^2R'V^{-1}R)A+b_1b_1' \\ &= \sigma^2 D_1 - b_1b_1'\end{aligned}$$

olup burada $D_1 = A(S-F_dSF_d')A$ şeklindedir.

Teorem 5.1. MSE-I kriterine göre $\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)$'nin $\hat{\beta}_{WME}(w)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul, $b_1'D_1^{-1}b_1 \le \sigma^2$ olmasıdır.

$\hat{\beta}_{LE}(d)$ ve $\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)$'nin Karşılaştırılması:

$$MSE(\hat{\beta}_{LE}(d)) - MSE(\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)) = \sigma^2 F_d S^{-1} F_d' + b_2 b_2' - (\sigma^2 A(F_d S F_d' + w^2 R' V^{-1} R)A + b_1 b_1'$$

olup burada $D_2 = (F_d S^{-1} F_d' - A(F_d S F_d' + w^2 R' V^{-1} R)A$ şeklindedir.

Teorem 5.2. MSE-I kriterine göre $\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)$'nin $\hat{\beta}_{LE}(d)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul $b_1'(\sigma^2 D_2 + b_2 b_2')^{-1} \le 1$ olmasıdır.

Bununla birlikte, model (2.1) için, ridge tahmin edici Hoerl ve Kennard (1970) tarafından

$$\hat{\beta}_{RE}(k) = (S + kI)^{-1} X'y = S_k^{-1} X'y, \quad \mathrm{k} > 0 \qquad (5.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $S_k = \mathrm{S} + kI$ dır. $T_k = (I + k\,\mathrm{S}^{-1})^{-1} = \mathrm{S}_k^{-1} S = S\,\mathrm{S}_k^{-1}$ ve T_k ve S^{-1} değişmeli olduğundan $\hat{\beta}_{RE}(k) = T_k \hat{\beta} = T_k S^{-1} X'y$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (5.1)'de $\hat{\beta}$ yerine (5.4)'de tanımlanan ridge tahmin edici yerleştirilerek elde edilen ağırlıklı karma ridge tahmin edici (WMRE);

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{WMRE}(w,k) &= \hat{\beta}_{RE}(k) + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}_{RE}(k)) \\
&= S^{-1}T_k X'y + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - RS^{-1}T_k X'y) \\
&= S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})T_k X'y + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}r \\
&= (S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})(T_k X'y + wR'V^{-1}r) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Li ve Yang (2011) tarafından önerilmiştir.

$$E(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = (\mathrm{S}+ wR'V^{-1}R)^{-1}(T_kS + wR'V^{-1}R)\beta = \beta + A(T_k - I)S\beta$$
$$COV(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = \sigma^2(\mathrm{S}+ wR'V^{-1}R)^{-1}(T_kST_k + wR'V^{-1}R)(\mathrm{S}+ R'V^{-1}R)^{-1}$$
$$= \sigma^2 A(T_kST_k + w^2R'V^{-1}R)A$$

Burada

$$A = (\mathrm{S}+ wR'V^{-1}R)^{-1}$$

dir. Böylece,

$$MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) = \sigma^2 A(S + w^2R'V^{-1}R)A,$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{RE}(k)) = \sigma^2 T_kS^{-1}T_k + b_2b_2',$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{MRE}(k)) = \sigma^2 T_kA_1T_k + b_2b_2',$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = \sigma^2 A(T_kST_k + w^2R'V^{-1}R)A + b_1b_1'.$$

olur. Burada

$$b_1 = Bias(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = A(T_k - I)S\beta,$$
$$b_2 = (T_k - I)\beta,$$
$$A_1 = (S + R'V^{-1}R)^{-1}$$

dir.

$$\Delta_1 = MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k))$$
$$= \sigma^2 A(S + w^2R'V^{-1}R)A - (\sigma^2 A(T_kST_k + w^2R'V^{-1}R)A + b_1b_1')$$
$$= \sigma^2 D_1 - b_1b_1',$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= MSEM(\hat{\beta}_{RE}(k)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) \\ &= \sigma^2 T_k S^{-1} T_k + b_2 b_2' - (\sigma^2 A(T_k S T_k + w^2 R' V^{-1} R)A + b_1 b_1') \\ &= \sigma^2 D_2 + b_2 b_2' - b_1 b_1', \\ \Delta_3 &= MSEM(\hat{\beta}_{MRE}(k)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) \\ &= \sigma^2 T_k A_1 T_k + b_2 b_2' - (\sigma^2 A(T_k S T_k + w^2 R' V^{-1} R)A + b_1 b_1') \\ &= \sigma^2 D_3 + b_2 b_2' - b_1 b_1'.\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}D_1 &= A(S - T_k S T_k)A \\ D_2 &= T_k S^{-1} T_k - A(T_k S T_k + w^2 R' V^{-1} R)A \\ D_3 &= T_k A_1 T_k - A(T_k S T_k + w^2 R' V^{-1} R)A\end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.3. MSE-I kriterine göre $\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)$ tahmin edicisinin $\hat{\beta}_{WME}(w)$ tahmin edicisinden üstün olması için, $0 \le \Delta_1$ olması için, gerek ve yeter koşul $b_1' D_1^{-1} b_1 \le \sigma^2$ olmasıdır.

Teorem 5.4. $\lambda_1(A(T_k S T_k + w^2 R' V^{-1} R)A(T_k S^{-1} T_k)^{-1} < 1$ olsun. MSE-I kriterine göre yeni stokastik WMRE $\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)$ ridge tahmin edicisinin $\hat{\beta}_{RE}(k)$ dan üstün olması için, $0 \le \Delta_2$ olması için, gerek ve yeter koşul $b_1'(\sigma^2 D_2 + b_2 b_2')^{-1} b_1 \le 1$ olmasıdır.

Li ve Yang (2011) ağırlıklandırılmış karma tahmin prosedüründe en küçük kareler tahmin edici yerine ridge tahmin edicisini yerleştirerek ağırlıklandırılmış karma ridge tahmin edicisini önermiştir (WMRE).

Akdeniz ve Erol(2003) hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini (AURE)

$$\hat{\beta}_{AURE}(k) = (I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{LS} = (I + kS_k^{-1})T_k\hat{\beta}_{LS} \tag{5.6}$$

elde etmiştir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} &(S + wR'V^{-1}R)^{-1} = S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')RS^{-1}, \\ &(S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')RS^{-1})wR'V^{-1}r = wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}r \end{aligned} \tag{5.7}$$

dir.

Ağırlıklandırılmış karma tahmin edici ve hemen hemen yansız ridge tahmin edicinin kullanılmasıyla, ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız ridge tahmin edici

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{WMAURE}(w,k) &= \hat{\beta}_{AURE}(k) + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1} \times (r - R\hat{\beta}_{AURE}(k)) \\ &= (I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{LS} + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1} \times (r - R(I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{LS}) \\ &= (S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}) \times (I - k^2 S_k^{-2})X'y + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}r, \end{aligned} \tag{5.8}$$

şeklinde Liu, Yang ve Wu,(2013) tarafından tanımlanmıştır.

(5.7) ve (5.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k) &= (S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}) \\ &\quad \times (I - k^2 S_k^{-2})X'y + wR'V^{-1}r) \\ &= (S + wR'V^{-1}R)^{-1}((I - k^2 S_k^{-2})X'y + wR'V^{-1}r).\end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Özel olarak,

$$\hat{\beta}_{WMAURE}(w,0) = \hat{\beta}_{WME}(w),$$
$$\hat{\beta}_{WMAURE}(0,0) = \hat{\beta}_{LS},$$

ve eğer R=0 ise,

$$\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k) = \hat{\beta}_{AURE}(w,k) \text{ dir.}$$

LS,WME,WMRE,AURE, ve WMAURE nin beklenen değer ve kovaryans matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_{LS}) &= \beta, \\ COV(\hat{\beta}_{LS}) &= \sigma^2 S^{-1}, \\ E(\hat{\beta}_{WME}(w)) &= \beta, \\ COV(\hat{\beta}_{WME}(w)) &= \sigma^2 A(S + w^2 R'V^{-1}R)A, \\ E(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) &= \beta + A(T_k - I)S\beta, \\ COV(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) &= \sigma^2 A(T_k S T_k + w^2 R'V^{-1}R)A, \\ E(\hat{\beta}_{AURE}(k)) &= (I - k^2 S_k^{-2})\beta = (I + kS_k^{-1})T_k\beta, \\ COV(\hat{\beta}_{AURE}(k)) &= \sigma^2 (I - k^2 S_k^{-2})S^{-1}(I - k^2 S_k^{-2}) \\ &= \sigma^2 (I + kS_k^{-1})T_k S^{-1} T_k (I + kS_k^{-1}), \\ E(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) &= \beta - k^2 A S_k^{-2} S\beta, \\ COV(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) &= \sigma^2 A((I - k^2 S_k^{-2})S(I - k^2 S_k^{-2}) + w^2 R'V^{-1}R)A,\end{aligned}$$

dir. Burada $A=(S+wR'V^{-1}R)^{-1}$ dir.

5.1. Tahmin Edicilerin Kuadratik Yanlılığa Göre Karşılaştırılması

$$\begin{aligned} QB(\hat{\beta}_{AURE}(k)) &= Bias(\hat{\beta}_{AURE}(k))'Bias(\hat{\beta}_{AURE}(k)) \\ &= k^4\beta' S_k^{-4}\beta, \\ QB(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) &= Bias(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k))'Bias(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) \\ &= k^2\beta' S S_k^{-1}A^2 S_k^{-1}S\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QB(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) &= Bias(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))'Bias(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) \\ &= k^4\beta' S S_k^{-2}A^2 S_k^{-2}S\beta. \end{aligned}$$

5.1.1. AURE ve WMAURE'nin Kuadrik Yanlılığının Karşılaştırılması

AURE ve WMAURE'nin kuadrik yanlılığının karşılaştırılmasını inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= QB(\hat{\beta}_{AURE}(k)) - QB(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) \\ &= k^4\beta' S_k^{-4}\beta - k^4\beta' S S_k^{-2}A^2 S_k^{-2}S\beta \\ &= k^4\beta' S_k^{-4}\beta - k^4\beta' S_k^{-2}SA^2 S S_k^{-2}\beta \\ &= k^4\beta' S_k^{-4}(I - SA^2S)S_k^{-2}\beta. \end{aligned}$$

olsun**.** Öncelikle $I-SA^2S$ matrisini düşünelim. $(I-SA^2S)'=I-SA^2S$ dir ve

$$I - SA^2S = SS^{-2}S - SA^2S$$
$$= S(S^{-2} - A^2)S.$$

dir. $A^{-2} - S^2 = (S + wR'V^{-1}R)^2 - S^2 > 0,$ yani $A^{-2} > S^2$ dir. Böylece,

$$S^{-2} - A^2 > 0$$

dir. Böylece $\Delta_1 > 0$ dır.

Teorem 5.5. Kuadratik yanlılık kriterine göre,WMAURE AURE'den daha iyidir.

5.1.2.WMRE ve WMAURE'nin Kuadratik Yanlılığa Göre Karşılaştırılması

Benzer şekilde WMRE VE WMAURE'nin kuadratik yanlılığa göre karşılaştırılmasını inceleyeceğiz.

$$\Delta_2 = QB(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) - QB(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= k^2\beta' SS_k^{-1}A^2S_k^{-1}S\beta - k^4\beta' SS_k^{-2}A^2S_k^{-2}S\beta$$
$$= k^2\beta' SS_k^{-1}(A^2 - k^2S_k^{-1}A^2S_k^{-1})S_k^{-1}S\beta$$

dir. Böylece $\Delta_2 > 0$ dir.

Teorem 5.6. Kuadratik yanlılık kriterine göre,WMAURE WMRE'den her zaman daha iyidir.

5.2. Tahmin Edicilerin Hata Kareler Ortalamasının Karşılaştırılması

WME,WMRE,AURE VE WMAURE 'nin hata kareler ortalaması matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$MSEM(\hat{\beta}_{LS}) = \sigma^2 S^{-1},$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) = \sigma^2 A(S + w^2 R'V^{-1}R)A,$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = \sigma^2 A(T_k S T_k + w^2 R'V^{-1}R)A + b_1 b_1',$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{AURE}(k)) = \sigma^2 (I + kS_k^{-1})T_k S^{-1} T_k (I + kS_k^{-1}) + b_2 b_2',$$
$$MSEM(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) = \sigma A^2((I + kS_k^{-1})T_k S^{-1} T_k (I + kS_k^{-1}) + w^2 R'V^{-1}R) \times A + b_3 b_3'.$$

Burada,

$$b_1 = A(T_k - I)S\beta,$$
$$b_2 = -k^2 S_k^{-2}\beta$$
$$b_3 = -k^2 A S_k^{-2} S\beta$$

dir.

$$M(\hat{\beta}_{WME}(w), \hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) = MSEM(\hat{\beta}_{WME}(w)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= \sigma^2 D_1 - b_3 b_3'$$

Teorem 5.7. MSE-I kriterine göre,WMAURE $\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)$, WME $\hat{\beta}_{WME}(w)$ 'den daha iyidir. Yani, $M(\hat{\beta}_{WME}(w), \hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $b_3' D_1^{-1} b_3 \leq \sigma^2$ olmasıdır. Burada,

$$M(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k),\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) = MSEM(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) - MSEM(\hat{\beta}_{WMRE}(w,k))$$
$$= \sigma^2 D_2 + b_3 b_3' - b_1 b_1'$$

Teorem 5.8. MSE-I kriterine göre,WMAURE $\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)$, WMRE $\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)$ 'den daha iyidir. Yani, $M(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k),\hat{\beta}_{WMRE}(w,k)) < 0$ olması için gerek ve yeter şart $b_1'(\sigma^2 D_2 + b_3 b_3')^{-1} > 1$ olmasıdır.

$$M(\hat{\beta}_{AURE}(k),\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= MSEM(\hat{\beta}_{AURE}(k) - MSEM(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= \sigma^2 D_3 + b_2 b_2' - b_3 b_3'$$

Teorem5.9.

$\lambda_1(A((I+kS_k^{-1})T_k S T_k (I+kS_k^{-1}) + w^2 R' V^{-1} R) A((I+kS_k^{-1})T_k S T_k (I+kS_k^{-1}))^{-1} < 1$

olduğunda, MSE-I kriterine göre WMAURE AURE'den üstündür. Yani, $M(\hat{\beta}_{AURE}(k),\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $b_3'(\sigma^2 D_3 + b_2 b_2')^{-1} b_3 \leq 1$ olmasıdır.

$$M(\hat{\beta}_{LS},\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= MSEM(\hat{\beta}_{LS}) - MSEM(\hat{\beta}_{WMAURE}(w,k))$$
$$= (\sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 A) + (\sigma^2 A - \sigma^2 A(S + w^2 R' V^{-1} R)A) + \sigma^2 D_1 - b_3 b_3'$$

Teorem 5.10. MSE-I kriterine göre, WMAURE LS'den üstündür. Yani, $M(\hat{\beta}_{LS}, \hat{\beta}_{WMAURE}(w,k)) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $b_3'(\sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 A((I+kS_k^{-1})T_k S T_k (I+kS_k^{-1}) + w^2 R'V^{-1}R)A)b_3 \leq 0$ olmasıdır.

Akdeniz ve Erol(2003) tarafından tanımlanan hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini (AURE) (5.6) ile vermiştik. Ayrıca Akdeniz ve Erol(2003) hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini (AULE) şu şekilde tanımlamıştır:

$$\hat{\beta}_{AULE}(d) = (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2})\hat{\beta}_{LS}. \tag{5.8}$$

Karma tahmin edici (ME) Theil(1963) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\hat{\beta}_{ME} = (S + R'V^{-1}R)^{-1}(X'y + R'V^{-1}r).$$

Stokastik ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız ridge tahmin edici $\tilde{\beta}_R(w,k)$ ve stokastik ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız Liu tahmin edici $\tilde{\beta}_L(w,d)$ aşağıdaki şekilde Liu ve ark.(2014) tarafından önerilmiştir:

$$\tilde{\beta}_R(w,k) = (I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{WME}(w),$$
$$\tilde{\beta}_L(w,d) = (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2})\hat{\beta}_{WME}(w).$$

Ayrıca,

$$(S+wR'V^{-1}R)^{-1}=S^{-1}-wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1},$$
$$(S^{-1}-wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})wR'V^{-1}r=wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}r$$

dır. (5.1) ile verilen ağırlıklı karma tahmin edici(WME) yeniden yazılırsa

$$\hat{\beta}_{WME}(w)=\hat{\beta}_{LS}+wS^{-1}R'(V+wRS^{-1}R')^{-1}(r-R\hat{\beta}_{LS})$$

olur.

Ayrıca, bazı özel durumlarda,

$$\tilde{\beta}_R(0,w)=\hat{\beta}_{WME}(w)=\hat{\beta}_L(1,w),$$
$$\tilde{\beta}_R(0,1)=\hat{\beta}_{OME}=\hat{\beta}_L(1,1),$$
$$\tilde{\beta}_R(0,0)=\hat{\beta}_{LS}=\hat{\beta}_L(1,0),$$
$$\tilde{\beta}_R(k,0)=\hat{\beta}_{AURE}(k),$$
$$\tilde{\beta}_L(d,0)=\hat{\beta}_{AULE}(d).$$

dır. Bazı işlemlerle WME,AURE,AULE,SRRE,SRLE, $\tilde{\beta}_R(k,w)$ ve $\tilde{\beta}_L(d,w)$ tahmin edicilerinin yanlılık vektörleri ve kovaryans matrisleri hesaplanabilir. Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$Bias(\hat{\beta}_{WME}(w))=E(\hat{\beta}_{WME}(w))-\beta=0,$$
$$COV(\hat{\beta}_{WME}(w))=\sigma^2\tilde{A}(S+w^2R'V^{-1}R)\tilde{A},$$
$$Bias(\hat{\beta}_{AURE}(k))=E(\hat{\beta}_{AURE}(k))-\beta=-k^2S_k^{-2}\beta,$$
$$COV(\hat{\beta}_{AURE}(k))=\sigma^2(I-k^2S_k^{-2})S^{-1}(I-k^2S_k^{-2}),$$
$$Bias(\hat{\beta}_{AULE}(d))=E(\hat{\beta}_{AULE}(d))-\beta=-(1-d)^2(S+I)^{-2}\beta,$$

$$COV(\hat{\beta}_{AULE}(d)) = \sigma^2(I-(1-d)^2(S+I)^{-2})S^{-1}\times(I-(1-d)^2(S+I)^{-2}),$$
$$Bias(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) = E(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) - \beta = -kS_k^{-1}\beta,$$
$$COV(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) = \sigma^2 T_k A T_k,$$
$$Bias(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) = E(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) - \beta = -(1-d)(S+I)^{-1}\beta,$$
$$COV(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) = \sigma^2 F_d A F_d,$$
$$Bias(\tilde{\beta}_R(k,w)) = E(\tilde{\beta}_R(k,w)) - \beta = -k^2 S_k^{-2}\beta,$$
$$COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) = \sigma^2(I-k^2S_k^{-2})\tilde{A}(S+w^2R'V^{-1}R)\tilde{A}(I-k^2S_k^{-2}),$$
$$Bias(\tilde{\beta}_L(d,w)) = E(\tilde{\beta}_L(d,w)) - \beta = -(1-d)^2(S+I)^{-2}\beta,$$
$$COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) = \sigma^2(I-(1-d)^2(S+I)^{-2})\tilde{A}(S+w^2R'V^{-1}R)\times\tilde{A}(I-(1-d)^2(S+I)^{-2}).$$

dir. Burada $A=(S+R'V^{-1}R)^{-1}$ ve $\tilde{A}=(S+wR'V^{-1}R)^{-1}$ dir.

5.3. Tahmin Edicilerin Kuadratik Yanlılığa Göre Karşılaştırılması

$$\begin{aligned} QB(\hat{\beta}_{AURE}(k)) &= Bias(\hat{\beta}_{AURE}(k))'Bias(\hat{\beta}_{AURE}(k)) \\ &= k^4\beta' S_k^{-4}\beta, \\ QB(\hat{\beta}_{AULE}(d)) &= Bias(\hat{\beta}_{AULE}(d))'Bias(\hat{\beta}_{AULE}(d)) \\ &= (1-d)^4\beta'(S+I)^{-4}\beta, \\ QB(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) &= Bias(\hat{\beta}_{SRRE}(k))'Bias(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) \\ &= k^2\beta' S_k^{-2}\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QB(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) &= Bias(\hat{\beta}_{SRLE}(d))'Bias(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) \\ &= (1-d)^2\beta'(S+I)^{-2}\beta, \end{aligned}$$

$$QB(\tilde{\beta}_R(k,w)) = Bias(\tilde{\beta}_R(k,w))' Bias(\tilde{\beta}_R(k,w))$$
$$= k^4 \beta' S_k^{-4} \beta,$$
$$QB(\tilde{\beta}_L(d,w)) = Bias(\tilde{\beta}_L(d,w))' Bias(\tilde{\beta}_L(d,w))$$
$$= (1-d)^4 \beta' (S+I)^{-4} \beta.$$

SRRE ve $\tilde{\beta}_R(k,w)$ **nin** karşılaştırılması aşağıdaki şekildedir:

$$\Delta_1(\hat{\beta}_{SRRE}(k), \tilde{\beta}_R(k,w)) = QB(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) - QB(\tilde{\beta}_R(k,w))$$
$$= k^2 \beta' S_k^{-2} \beta - k^4 \beta' S_k^{-4} \beta$$
$$= k^2 \beta' S_k^{-1} (I - k^2 S_k^{-2}) S_k^{-1} \beta.$$

Teorem5.11. Kuadratik yanlılık kriterine göre, $\tilde{\beta}_R(k,w)$ $\hat{\beta}_{SRRE}(k)$'den daha üstündür. Yani, $\Delta_1(\hat{\beta}_{SRRE}(k), \tilde{\beta}_R(k,w)) \geq 0$ dır.

SRLE ve $\tilde{\beta}_L(d,w)$ karşılaştırılması aşağıdaki şekildedir:

$$\Delta_2(\hat{\beta}_{SRLE}(d), \tilde{\beta}_L(d,w)) = QB(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) - QB(\tilde{\beta}_L(d,w))$$
$$= QB(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) - QB(\tilde{\beta}_L(d,w))$$
$$= (1-d)^2 \beta' (S+I)^{-2} \beta - (1-d)^4 \beta' (S+I)^{-4} \beta$$
$$= (1-d)^2 \beta' (S+I)^{-1} (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2}) (S+I)^{-1} \beta.$$

Teorem5.12. Kuadratik yanlılık kriterine göre $\tilde{\beta}_L(d,w)$, $\hat{\beta}_{SRLE}(d)$'den daha üstündür. Yani, $\Delta_2(\hat{\beta}_{SRLE}(d), \tilde{\beta}_L(d,w)) \geq 0$ dır.

5.4. Tahmin Edicilerin Varyansa Göre Karşılaştırması

WME ve $\tilde{\beta}_R(k,w)$ arasındaki varyans-kovaryans matrisinin farkı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= COV(\hat{\beta}_{WME}(w)) - COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) \\ &= \sigma^2 D_w - \sigma^2 (I - k^2 S_k^{-2}) D_w (I - k^2 S_k^{-2}) \\ &= \sigma^2 D_1.\end{aligned}$$

Burada $D_w = \tilde{A}(S + w^2 R' V^{-1} R)\tilde{A}$ ve $D_1 = D_w - (I - k^2 S_k^{-2}) D_w (I - k^2 S_k^{-2})$ dir. Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $D_1 \geq 0$ olduğu görülür. Yani,

$COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) < COV(\hat{\beta}_{WME}(w))$ olduğu görülür.

WME ve $\tilde{\beta}_L(d,w)$ nin varyans-kovaryans matris farkı

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= COV(\hat{\beta}_{WME}(w)) - COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) \\ &= \sigma^2 D_w - \sigma^2 (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2} D_w \times (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2}) \\ &= \sigma^2 D_2.\end{aligned}$$

dır.

Burada $D_2 = D_w - (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2} D_w (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2})$ dir.

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $D_2 \geq 0$ olduğu görülür. Yani, $COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) < COV(\hat{\beta}_{WME}(w))$ olduğu görülür.

AURE ve $\tilde{\beta}_R(k,w)$ nin varyans-kovaryans matris farkı

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= COV(\hat{\beta}_{AURE}(k)) - COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) \\ &= \sigma^2(I-k^2S_k^{-2})S^{-1}(I-k^2S_k^{-2}) - \sigma^2(I-k^2S_k^{-2})D_w(I-k^2S_k^{-2}) \\ &= \sigma^2(I-k^2S_k^{-2})(S^{-1}-D_w)(I-k^2S_k^{-2}).\end{aligned}$$

dır.

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\Delta_3 > 0$ olduğu görülür. Yani, $COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) < COV(\hat{\beta}_{AURE}(k))$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, WME ve $\tilde{\beta}_L(d,w)$ için

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= COV(\hat{\beta}_{AULE}(d)) - COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) \\ &= \sigma^2(I-(1-d)^2(S+I)^{-2})S^{-1}(I-(1-d)^2(S+I)^{-2}) \\ &\quad -\sigma^2(I-(1-d)^2(S+I)^{-2}D_w \times (I-(1-d)^2(S+I)^{-2}) \\ &= \sigma^2(I-(1-d)^2(S+I)^{-2})(S^{-1}-D_w) \times (I-(1-d)^2(S+I)^{-2}).\end{aligned}$$

dir.

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\Delta_4 > 0$ olduğu görülür. Yani, $COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) < COV(\hat{\beta}_{AULE}(d))$ olduğu görülür.

SRRE ve $\tilde{\beta}_R(k,w)$ arasındaki varyans-kovaryans matrisinin farkı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}\Delta_5 &= COV(\hat{\beta}_{SRRE}(k)) - COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) \\ &= \sigma^2 T_k A T_k - \sigma^2 (I - k^2 S_k^{-2}) D_w (I - k^2 S_k^{-2}) \\ &= \sigma^2 D_3.\end{aligned}$$

Burada $D_3 = T_k A T_k - (I - k^2 S_k^{-2}) D_w (I - k^2 S_k^{-2})$ dir.

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $D_3 > 0$ olduğu görülür. Yani, $COV(\tilde{\beta}_R(k,w)) < COV(\hat{\beta}_{SRRE}(k))$ olduğu görülür.

SRLE ve $\tilde{\beta}_L(d,w)$ için,

$$\begin{aligned}\Delta_6 &= COV(\hat{\beta}_{SRLE}(d)) - COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) \\ &= \sigma^2 F_d A F_d - \sigma^2 (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2} D_w \times (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2}) \\ &= \sigma^2 D_4.\end{aligned}$$

dır.

Burada $D_4 = F_d A F_d - (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2} D_w (I - (1-d)^2 (S+I)^{-2})$ dir.

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $D_4 > 0$. Yani, $COV(\tilde{\beta}_L(d,w)) < COV(\hat{\beta}_{SRLE}(d))$ olduğu görülür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikli olarak ağırlıklı tahmin yöntemleri ele alınmıştır. Daha sonra bilinen bazı tahmin yöntemlerinin birleştirilmesiyle tanımlanan yeni bazı tahmin ediciler, ağırlıklı karma Liu tahmin edici, ağırlıklı karma Ridge tahmin edici, ağırlıklı karma hemen hemen yansız Ridge tahmin edici ve ağırlıklı karma hemen hemen yansız Liu tahmin ediciler ve çeşitli kriterlere göre bunların karşılaştırılması incelenmiştir. Sonraki çalışmalarda benzer tahmin edicilerin tanımlanması ve özelliklerinin incelenmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Akdeniz, F., and Erol,H.,2003. Mean Squared Error Matrix Comparisons of Some Biased Estimators in Linear Regression. Communications in Statistics. Theory and methods, 32(12) 2389-2413

Bayhan, G. M., and Bayhan, M., 1998. Forecasting Using Autocorrelated Errors and Multicollinear Predictor Variables, Computers and Industrial Engineering, 34 , 413-421.

Dufour, J. M., 1990. Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors, Econometrica 58, 475- 494.

Durbın, J., 1953. A Note on Regression When There is Extraneous Information About One of The Coefficients. J Am Stat Assoc 48:799-808.

Firinguetti, L., 1989. A Simulation Study of Ridge Regression Estimators with Autocorrelated Errors, Communications in Statistics - simulation and computation, 18 (2), 673-702.

Giles, D.E.A, and Srivastava, V.K., 1991. An Unbiased Estimator of the Covariance Matrix of the Mixed Regression Estimator. J. Amer. Statist. Assoc., 86:441-444.

Hoerl, A. E., and Kennard, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Non-Orthogonal Problems. Technometrics. 12 : 55-67.

Kakwani, N.C., 1968. Note on the Unbiasedness of Mixed Regression Estimation. Econometrics, 36:610-611

Kakwani, N.C., 1974. A Note on Nagar-Kakwani Approximation to Variance of Mixed Regression Estimator. The Indian Economic Journal, 22:105-107.

Kmenta, J.,1971. Elements Of Econometrics, Macmillan, New York.

Koopmans, T. C., 1942. Serial Correlation and Quadratic Forms in Normal Variables, Annals of Mathematical Statistics, 13, 14-33.

Li, Y., and Yang, H.,2011. A New Ridge-Type Estimator İn Stochastic Restricted Linear Regression. Statistics, 45(2):123-130.

Liu, C., Yang, H., and Wu, J.,2013. On the Weighted Mixed Almost Unbiased Ridge Estimator in Stochastic Restricted Linear Regression. Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics,2013:10 pages.

Liu, C., Jiang, H., Shi, X., and Liu,D.,2014. Two Kinds of Weigted Biased Estimator in Stochastic Restricted Regression model. Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics,2014:10 pages.

Liu, K., 1993. A New Class of Biased Estimate in Linear Regression Commun Statist. Theor. Meth. 22:393-402.

Mehta, J.S., and Swamy, P.A.V.B., 1970. The Finite Sample Distribution of Theil's Mixed Regression Estimator and a Related Problem Rev. Int. Statist. Inst., 38:202-209.

Nagar, L., and Kakwani, N.C., 1964. The Bias and Moment Matrix of a Mixed Regression Estimator. Econometrica, 32:174-182.

Özonur, D., 2011. Karma Regresyon Tahmin Edicileri. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi.107pp.

Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh, H. C., & Schomaker, M. (2008). Linear models and generalizations. Least Squares and Alternatives (3rd edition) Springer, Berlin Heidelberg New York.

Schaffrin, B., and Toutenburg, H., 1990 . Weighted Mixed Regression. Zeitchrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 70:735-738

Söküt, T., 2011. Değişen Varyanslı ve Otokorelasyonlu Hataya Sahip Lineer Regresyon Modellerinde Hata Yapılarının ve Yanlı Tahmin Edicilerin İncelenmesi. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi.118pp.

Srivastava, V.K., and Chandra, R., 1985. Properties of the Mixed Regression Estimator when Disturbances are not Necessarily Normal .J. Statist.Planning and Inference. 11:11-15.

Srivastava, V.K., and Upadhyaya, S., 1975. Small-Disturbance. and LargeSample Approximation in Mixed Regression Estimation EasternEconomic J., 2:261-265.

Swamy, P.A.V.B., and Mehta, J.S., 1969. On Theil's Mixed Regression Estimator. J. Amer. Statists. Assoc., 66:273-276.

Theil, H., 1963. On the Use of İncomplete Prior İnformation in Regression Analysis. J Am Stat Assoc 58:401-414.

Theil, H., and Goldberger, A. S., 1961. On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics Intern Econ Rev 2:65-78.

Trenkler, G., 1984. On The Performance of Biased Estimators in The Linear Regression Model With Correlated or Heteroscedastic Errors, Journal Of Econometrics, 25, 179-190.

Toutenburg, H., 1989. Mean Square Error Comparisns Between Restricted Least SquresMixed and Weigted Mixed Estimators. Forschungsbericht 89/12 Universitat Dortmund ,Germany

Toutenburg, H. and Schaffrin, B. 1989. Biased Mixed Estimation and Related Problems, Technical Report, Universitat Stuttgart, Germany.

Wallace, T.D., 1972. .Weaker criteria and tests for linear restrictions inregression. Econometrica, 40:689-698.

Wilks, S.S., 1938. The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses, annals of mathematical statistics 9:60-62

Yang, H., Chang, X., and Liu, D., 2009.. Improvement of the Liu Estimator in Weighted.Mixed. Regression. .Communications in Statistics Theory and Methods.38 (2): 285-292.

Yates, F., 1933. The Analysis of Replicated Experiments when the Field Results are Incomplete, Empire Journal of Experimental Agricultue 1:129-142.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında doğdu. 2006 yılında ATO Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Fakülte ve Bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı zamanda 2010 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nden çift-anadal diploması alarak mezun oldu.2012 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalından tezli yüksek lisans diploması alarak mezun oldu. Ayrıca Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinden Pedagojik Formasyon aldı. Daha sonra, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalından tezli yüksek lisansa başladı.