ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Ömer ÖZBİLEN

SINIRLI DESTEK KÜMELİ MARSHALL-OLKIN TİPİ İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLAR

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA-2023

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI DESTEK KÜMELİ MARSHALL-OLKIN TİPİ İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLAR

Ömer ÖZBİLEN

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez .../.../2023 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……..…	……..……	……...
Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ	Prof. Dr. Güzin YÜKSEL	Prof. Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
……..….	……..	
Prof. Dr. Hamza EROL	Doç. Dr. Mustafa Çağatay KORKMAZ	
ÜYE	ÜYE	

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SINIRLI DESTEK KÜMELİ MARSHALL-OLKIN TİPİ İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLAR

Ömer ÖZBİLEN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2023, Sayfa:135
Jüri : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Doç. Dr. M. Çağatay KORKMAZ

İstatistiksel güvenilirlik teorisinde eşanlı olarak gerçekleşen olayları modellemek için çeşitli veri kümelerinin modellenmesinde uygun iki değişkenli dağılımlar önerilmiştir. Özel olarak Marshall-Olkin tipi iki değişkenli dağılımlar, sürekli ve singüler kısımlar içermesi bakımından hem eşitsizlik durumlarını hem de eşitlik durumlarını içeren iki değişkenli verileri modelleyebilir. Genellikle $(0,\infty)$ destek kümeli olarak tanımlanan Marshall-Olkin tipi iki değişkenli dağılımların sınırlı destek kümesine sahip genelleştirilmeleri, oransal verilerin modellenmesinde öneme sahiptir.

Bu tez çalışmasında sınırlı destek kümesine sahip dağılımlar sınıfında bulunan omega dağılımının özel bir durumunun Marshall-Olkin tipi iki değişkenli genelleştirimi tanımlanmıştır. Bu dağılımın parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiş ve parametre tahmini için bir EM algoritması ve bir Bayes tahmin yöntemi önerilmiştir. Dağılımın marjinal dağılımları, ortak sağkalım fonksiyonu ve çarpım momentleri gibi birçok özelliği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca önerilen dağılımın performansı, simülasyon çalışmaları ve gerçek veri analizleri ile incelenmiştir. Yeni dağılımın sınırlı destek kümeli bir dağılım olarak iki değişkenli oransal verileri modellemede faydalı bir dağılım olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Marshall-Olkin dağılımı, Omega dağılımı, İki değişkenli birim üstel yarı lojistik dağılım, En çok olabilirlik tahmini, EM algoritması, Oransal tehlike hızı modeli

ABSTRACT

PhD THESIS

MARSHALL-OLKIN TYPE BIVARIATE DISTRIBUTIONS WITH BOUNDED DOMAIN

Ömer ÖZBİLEN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2023, Pages: 135
Jury : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Assoc. Prof. Dr. M. Çağatay KORKMAZ

Bivariate distributions appropriate for modeling various data sets have been proposed to model simultaneous events in statistical reliability theory. In particular, Marshall-Olkin-type bivariate distributions can model bivariate data containing both inequality and equality cases in that they contain continuous and singular parts. Generalization of Marshall-Olkin type bivariate distributions, which are generally defined on $(0, \infty)$, to a bounded domain is important in modeling proportional data.

In this thesis, a Marshall-Olkin-type bivariate generalization of a special case of the omega distribution, which is in the class of distributions with a bounded domain, is defined. Maximum likelihood estimates of the parameters of this distribution are obtained and an EM algorithm and a Bayesian estimation method are proposed for parameter estimation. Several properties of the distribution, such as marginal distributions, joint survival function and product moments are analyzed in detail. Moreover, the performance of the estimators of the parameters from the proposed distribution is investigated through simulation studies and real data analyzes. The new distribution is found to be a useful alternative distribution for modeling bivariate proportional data.

KeyWords: Marshall-Olkin distribution, Omega distribution, Bivariate unit exponentiated half logistic distribution, Maximum likelihood estimation, EM algorithm, Proportional hazard rate model

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

İstatistikte çeşitli yöntemlerle klasik dağılımlara yeni parametrelerin eklenmesi ile yeni ve daha esnek dağılımlar elde edilebilir. Klasik dağılımların genelleştirilmiş versiyonları birçok uygulama alanına sahiptir. Bu bağlamda Marshall ve Olkin (1967) klasik dağılımlara yeni parametre eklemede özgün bir yöntem önermiş ve Marshall-Olkin (MO) dağılımlar ailesi ortaya çıkmıştır. MO dağılımlar ailesinde, ana dağılım olarak temel üretici bir dağılımın alınması söz konusudur. Literatürde birçok tek değişkenli dağılımın MO tipi genelleştirilmesi mevcuttur.

Weibull dağılımı üstel dağılımın daha esnek genelleştirilmiş bir şeklidir. Birçok uygulamalı alanda Weibull dağılımının kullanımı yaygındır. Fakat Weibull dağılımı küvet şekilli başarısızlık oranını modellemede başarısızdır. Bu nedenle literatürde Weibull dağılımının çeşitli genelleştirmeleri tanımlanmıştır.

MO tipi genelleştirilmiş dağılımların birçoğu $(0,\infty)$ destek kümeli dağılımlardır. Fakat gerçek yaşam verilerinin özellikleri göz önüne alındığında sınırlı destek kümeli dağılımlara da ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin modellenecek veri oranlardan oluştuğu zaman sınırlı destek kümesine sahip dağılımlar önem kazanmaktadır.

Kumaraswamy (1980), sınırlı destek kümeli bir dağılım olan beta dağılımına alternatif olarak bir dağılım geliştirmiş ve günlük yağış miktarı ve su akışı gibi hidrolojik değişkenleri modellemede kullanmıştır. Dombi vd. (2019) Weibull dağılımına sınırlı destek kümesine sahip bir alternatif olarak omega dağılımını önermiştir. Dombi vd. (2019) asimptotik omega dağılımının Weibull dağılımının özel bir formu olduğunu göstermiştir. Okorie ve Nadarajah (2019) omega dağılımına ait çeşitli dağılımsal özelliklerin kapalı formlarını bulmuştur. Ayrıca birim üstel yarı lojistik dağılım (Unit Exponentiated Half Logistic-UEHL) omega dağılımında parametrenin özel bir değerine karşılık gelmektedir (Özbilen ve Genç, 2022). Üstel yarı lojistik (Exponentiated Half Logistic-EHL) dağılımının

güvenilirlik teorisinde birçok uygulaması bulunmaktadır (Kang ve Seo, 2011; Rao ve Naudi, 2013; Rastogi ve Tripathi, 2014; Seo ve Kang, 2015).

Literatürde iki değişkenli veri kümelerinin modellenmesi için tek değişkenli dağılımların iki değişkenli genelleştirilmeleri önerilmiştir (Olkin ve Lui, 2003; Nadarajah ve Kotz, 2005; Nadarajah, 2006, 2007; Arnold ve Ng, 2011). Kumaraswamy dağılımının hidroloji ve benzeri alanlarda iyi bir performans göstermesi üzerine, Marshall ve Olkin'in (1967) çalışmasındaki düşünceye benzer bir fikir kullanarak Barreto-Souza ve Lemonte (2013) bu dağılımın iki değişkenli genelleştirilmesi olan iki değişkenli Kumaraswamy dağılımını önermiştir.

İstatistiksel güvenilirlik teorisinde iki değişkenli veri kümelerinin uygulama alanları bulunmaktadır. Bu tezde istatistiksel güvenilirlik teorisinde iki değişkenli veriyi modellemek için omega dağılımının iki değişkenli bir genelleştirilmesi olarak MO tipi iki değişkenli birim üstel yarı lojistik dağılım (Bivariate Unit Exponentiated Half Logistic-BUEHL) önerilmiştir. Önerilen BUEHL dağılımının özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. BUEHL dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri bulunmuştur. Buna ek olarak BUEHL modelinin parametre tahmini için bir EM algoritması ve bir Bayes tahmin yöntemi verilmiştir. Ayrıca elde edilen teorik sonuçların irdelenmesi amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmış, en çok olabilirlik, EM algoritması ve Bayes tahmin yöntemi uygulanarak elde edilen tahminler çeşitli kriterler kullanılarak karşılaştırılmıştır. BUEHL dağılımının gerçek yaşam verilerinde performansını göstermek amacıyla gerçek veri analizleri yapılmış ve BUEHL dağılımı ile Marshall-Olkin tipi iki değişkenli Kumaraswamy dağılımı ve Marshall-Olkin tipi iki değişkenli Topp-Leone dağılımı karşılaştırılmıştır. Analizler sonucunda elde edilen log-olabilirlik ve AIC (Akaike Information Criterion) değerleri göz önüne alınarak BUEHL dağılımının iki değişkenli Kumaraswamy ve iki değişkenli Topp-Leone dağılımlarına göre veri kümelerine daha iyi bir uyum sağladığı görülmüştür. Bu bağlamda BUEHL dağılımının sınırlı tipteki iki değişkenli veriler için kullanışlı bir model sunduğu sonucuna varılmıştır.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sürecinde bilgi ve görüşlerini paylaşarak yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ'e; tez izleme komitesi üyeleri hocalarım Sayın Prof. Dr. Güzin YÜKSEL'e ve Sayın Prof. Dr. Gülsen KIRAL'a; her zaman yanımda olan annem Yaşar ÖZBİLEN'e, abim Dr. Necdet ÖZBİLEN'e, eşim Yasemin ÖZBİLEN'e, kızlarım Cemre, Elif ve Güzide ÖZBİLEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ X
SİMGELER VE KISALTMALAR XII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. İKİ DEĞİŞKENLİ MO TİPİ KUMARASWAMY DAĞILIMI 7
3.1. İki Değişkenli Kumaraswamy Dağılımı 9
3.2. Çarpım Momentleri 16
3.3. Tahmin ve Bilgi Matrisi 19
3.3.1. En Çok Olabilirlik Tahminlerinin (MLE) Doğrudan Elde Edilmesi 19
3.3.2. EM Algoritması Yoluyla En Çok Olabilirlik Tahminlerinin Elde Edilmesi 22
3.4. BVK Dağılımından Meydana Gelen İki Değişkenli Modeller 27
3.4.1. İki Değişkenli Üstel Dağılım 29
3.4.2. İki Değişkenli Weibull Dağılımı 30
3.4.3. İki Değişkenli Pareto Dağılımı 30
3.4.4. İki Değişkenli Çift Genelleştirilmiş Üstel Dağılım 32
3.4.5. İki Değişkenli Üstel Frechet Dağılım 32
3.4.6. İki Değişkenli Gumbel Dağılım 33
3.5. Mutlak Sürekli BVK Dağılımı 33
4. İKİ DEĞİŞKENLİ MO TİPİ OMEGA DAĞILIMI 39
4.1. Tek Değişkenli Omega Dağılımı ve UEHL Dağılımı 39

4.2. İki Değişkenli Birim Üstel Yarı Lojistik Dağılım (BUEHL) 42
4.2.1. Ortak Sağkalım Fonksiyonu 43
4.2.2. Marjinal Dağılımlar 45
4.2.3. Marjinal Sağkalım Fonksiyonları 46
4.2.4. $\min(Z_1, Z_2)$ nin Dağılımı 46
4.2.5. Ortak Kümülatif Dağılım Fonksiyonu 47
4.2.6. Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 49
4.2.7. Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 56
4.2.8. Koşullu Sağkalım Fonksiyonu 59
4.2.9. BUEHL Dağılımının Kopula Yöntemi ile Tanımlanması 60
4.2.10. Marjinal ve Çarpım Momentleri 61
4.2.11. Rastgele Sayı Üretimi 66
4.3. Parametre Tahmini 67
4.3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi 67
4.3.1.1. Büyük Örneklem Özellikleri 71
4.3.2. EM Algoritması 75
4.3.3. Bayes Tahmini 80
4.3.3.1. λ_i lerin Bağımsız Olduğu Durum için Bayes Tahmini 83
4.3.3.2. λ_i lerin Bağımsız Olmadığı Durum için Bayes Tahmini 88
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI 93
5.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri İçin Simülasyon Çalışması 93
5.2. Bayes Tahmin Edicileri İçin Simülasyon Çalışması 95
6. GERÇEK VERİ ANALİZLERİ 97
6.1. NFL Verisi 97
6.2. Kilo Kaybı Veri Kümesi 103
7. SONUÇLAR 109
KAYNAKLAR 111
ÖZGEÇMİŞ 119
EKLER 120

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 4.1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve θ nın çeşitli değerleri için Z_1 ve Z_2 arasındaki korelasyonlar 66

Çizelge 5.1. $\theta = 1$ iken farklı λ değerleri için doğrudan log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu ve EM algoritmasının simülasyon çalışmasının sonuçları: tahminlerin ortalaması ve parantez içinde MSE değerleri 94

Çizelge 5.2. θ biliniyorken bağımsız λ_i ler için BUEHL dağılımının parametrelerinin Bayes tahminleri ve parantez içinde SELF değerleri ($\theta = 1$) 96

Çizelge 6.1. NFL veri kümesi 98

Çizelge 6.2. NFL veri kümesi için MLE'ler ve Anderson-Darling (AD) test istatistiğinin *p*-değeri 99

Çizelge 6.3. NFL veri kümesi için EM algoritması iterasyonları 100

Çizelge 6.4. NFL veri kümesi için BUEHL dağılımı, BVK dağılımı ve BTL dağılımının uydurulmuş modellerinin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik değerleri ve AIC değerleri (Parantez içindeki değerler standard hatalardır)..... 102

Çizelge 6.5. Kilo kaybı veri kümesi..... 103

Çizelge 6.6. Kilo kaybı veri kümesi için MLE'ler ve Anderson-Darling (AD) test istatistiğinin *p*-değeri 104

Çizelge 6.7. Kilo kaybı veri kümesi için EM algoritması iterasyonları 105

Çizelge 6.8. Kilo kaybı veri kümesi için BUEHL dağılımı, BVK dağılımı ve BTL dağılımının uydurulmuş modellerinin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik değerleri ve AIC değerleri (Parantez içindeki değerler standart hatalardır). 106

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 3.1. Çeşitli parametre değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği 9
Şekil 3.2. Çeşitli parametre değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının sağkalım fonksiyonunun grafiği 10
Şekil 3.3. BVK modelinin ortak sağkalım fonksiyonunun grafiği, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$: (a) (1.5,4.5,0.7,2.5), (b) (3.5,1.5,0.7,4), (c) (4.5,4.5,0.7,1.5) 11
Şekil 3.4. BVK modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$: (a) (1.5,4.5,0.7,2.5), (b) (3.5,1.5,0.7,4), (c) (4.5,4.5,0.7,1.5). 14
Şekil 4.1. λ ve θ parametrelerinin farklı değerleri için UEHL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği 41
Şekil 4.2. λ ve θ parametrelerinin çeşitli değerleri için UEHL dağılımının sağkalım fonksiyonunun grafiği 42
Şekil 4.3. Farklı $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ parametre değerleri için BUEHL modelinin ortak sağkalım fonksiyonunun grafiği: (a) (2.5,3.5,0.5,1.5), (b) (4.5,2.5,0.5,5) ve (c) (3.5,3.5,0.5,1) 45
Şekil 4.4. Farklı $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ parametre değerleri için BUEHL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği: (a) (2.5,3.5,0.5,1.5), (b) (4.5,2.5,0.5,5) ve (c) (3.5,3.5,0.5,1). 56
Şekil 6.1. NFL veri kümesi için EM algoritmasının iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği 100
Şekil 6.2. NFL veri kümesinde parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri için (a) BUEHL, (b) BVK ve (c) BTL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği 102

Şekil 6.3. Kilo kaybı veri kümesi için EM algoritmasının iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği 105
Şekil 6.4. Kilo kaybı veri kümesinde parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri için (a) BUEHL, (b) BVK ve (c) BTL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği..... 107

SİMGELER VE KISALTMALAR

MO : Marshall-Olkin

EHL : Exponentiated Half Logistic
(Üstel Yarı Lojistik)

UEHL : Unit Exponentiated Half Logistic
(Birim Üstel Yarı Lojistik)

BUEHL : Bivariate Unit Exponentiated Half Logistic
(İki Değişkenli Birim Üstel Yarı Lojistik)

BVK : Marshall-Olkin Bivariate Kumaraswamy
(Marshall-Olkin İki Değişkenli Kumaraswamy)

EM : Expectation Maximization
(Beklenti Maksimizasyon)

MLE : Maximum Likelihood Estimation
(En Çok Olabilirlik Tahmini)

DGE : Double Generalized Exponential
(Çift Genelleştirilmiş Üstel)

BVK_{ac} : Absolutely Continuous Bivariate Kumaraswamy
(Mutlak Sürekli İki Değişkenli Kumaraswamy)

MSE : Mean Squared Error
(Hata Kareler Ortalaması)

NFL : National Football League
(Ulusal Futbol Ligi)

AD : Anderson-Darling

BTL : Marshall-Olkin Bivariate Topp-Leone
(Marshall-Olkin İki Değişkenli Topp-Leone)

AIC : Akaike Information Criterion
(Akaike Bilgi Kriteri)

1. GİRİŞ

İstatistikte yeni ve modelleme yeteneği açısından daha esnek dağılımlar elde edilmesi için klasik dağılımlara yeni parametrelerin eklenmesi yoluna gidilebilir. Yaşam analizi ve finans gibi birçok uygulamalı alanda klasik dağılımların genelleştirilmiş formlarına ihtiyaç olduğu açıktır. Verilerin yüksek düzeyde çarpıklık veya basıklık göstermesi sebebiyle bu alanlardaki gerçek verileri modellemek için daha esnek dağılımlara ihtiyaç duyulur. Son zamanlardaki gelişmeler bu alanlarda yeni faydalı dağılımlar oluşturmak için yeni teknikler üzerinde yoğunlaşmıştır (Marshall ve Olkin, 1997; Eugene vd., 2002; Korkmaz ve Genç 2017). Özel olarak Marshall ve Olkin (1967) klasik dağılımlara yeni parametre eklemede özgün bir yöntem önermiş ve Marshall-Olkin (MO) dağılımlar ailesi ortaya çıkmıştır. Bu aile temel üretici bir dağılımı ana dağılım olarak alır ve çeşitli tipteki verilere modellemek için bazı dağılımlara daha fazla esneklik katar. MO dağılımlar ailesi oransal odds ailesi olarak da bilinir (Marshall ve Olkin, 2007).

Önemli bir değişkenli dağılımların MO tipi genelleştirmeleri literatürde yaygındır. Bu dağılımlara, üstel dağılım (Marshall ve Olkin, 1967) ve bunun genelleştirmeleri olan dağılımlar (Sarhan ve Balakrishnan, 2007; Kundu ve Gupta, 2009; Kundu ve Gupta, 2010), Weibull dağılımı (Kundu ve Dey, 2009), Kumaraswamy dağılımı (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013), ters Weibull dağılımı (Muhammed, 2016), Dagum dağılımı (Popović vd., 2018), genelleştirilmiş ters Kumaraswamy dağılımı (Muhammed, 2020) ve yarı lojistik dağılım (Alotaibi vd., 2021) örnek olarak verilebilir.

Weibull dağılımı üstel dağılımın bir şekil parametresi eklenerek elde edilen genelleştirilmiş bir şeklidir. Üstel dağılımdan daha esnek bir şekli vardır. Bu özellik Weibull dağılımının yaşam dağılımı modellenmesinde, ekonomik gözlemlerin modellenmesinde ve iş yönetiminde popüler hale gelmiştir (Murthy vd., 2004). Güvenilirlik yönetiminde, Weibull dağılımı hazard (tehlike) oranlarını

modellemede faydalıdır. Ancak küvet eğrisi şekilli başarısızlık oranları gibi monoton olmayan başarısızlık oranlarını modellemede uygun bir parametrik uyum modeli vermeyebilir (Wang, 2000). Weibull dağılımının küvet şekli başarısızlık oranını modellemedeki eksikliğini gidermek için çeşitli genelleştirmeleri ve modifikasyonları literatürde tanımlanmıştır (Lai, 2013; Almalki ve Nadarajah, 2014).

MO tipi genelleştirilmiş modellerin çoğunun oluşturulması $(0,\infty)$ destek kümeli dağılımlar kullanılarak yapılmıştır. $(0,1)$ destek kümeli dağılımlar kullanılarak çok az sayıda çalışma yapılmıştır. Yukarıda verilen Kumaraswamy dağılımı buna örnektir. Modellenecek veri oranlardan oluştuğu zaman sınırlı destek kümesine sahip dağılımların kullanılması uygundur. Ayrıca bir araştırmacı elindeki veri miktarı kısıtlı olduğu zaman önsel olarak sınırlı destek kümeli modelleri tercih edebilir. Bu gibi durumlarda sınırlı destek kümesine sahip dağılımların kullanımı önem kazanmaktadır.

Weibull dağılımına bir alternatif olarak, Dombi vd. (2019) omega dağılımı adında $(0,1)$ destek kümeli dağılımlar sınıfında yeni bir olasılık dağılımı önermiş ve güvenilirlik teorisindeki uygulamalarını tartışmıştır. Dombi vd. (2019) asimptotik omega tehlike hızı fonksiyonunun Weibull tehlike hızı fonksiyonu olduğunu göstermiştir. Yani, asimptotik omega dağılımı Weibull dağılımının özel bir formudur. Ayrıca Okorie ve Nadarajah (2019) dağılıma ait çeşitli istatistiksel ölçülerin kapalı formlarını bulmuştur.

Birim üstel yarı lojistik dağılım (Unit Exponentiated Half Logistic-UEHL), Dombi vd. (2019) tarafından önerilen omega dağılımında parametrenin özel bir değerine karşılık gelmektedir. UEHL dağılımı bir başka faydalı olasılık dağılımıdır ve güvenilirlik teorisinde birçok uygulaması vardır (Kang ve Seo, 2011; Rao ve Naudi, 2013; Rastogi ve Tripathi, 2014; Seo ve Kang, 2015).

Bu çalışmada Bölüm 2'de literatürde bulunan önceki çalışmalara değinilmiştir. Bölüm 3'te MO tipi iki değişkenli Kumaraswamy dağılımı tanıtılmış ve çeşitli istatistiksel özelliklerine değinilmiştir. Bölüm 4'te MO tipi iki değişkenli

omega dağılımı (Bivariate Unit Exponentiated Half Logistic-BUEHL) elde edilmiş ve marjinal dağılımı, ortak sağkalım fonksiyonu ve çarpım momentleri gibi özellikleri incelenmiştir. BUEHL dağılımının en çok olabilirlik yaklaşımıyla parametre tahminleri ele alınmıştır. Ayrıca parametre tahmini için bir EM algoritması ve bir Bayes tahmin yöntemi önerilmiştir. Bölüm 5'te tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılması ve elde edilen teorik sonuçların irdelenmesi amacıyla bir simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Bölüm 6'da BUEHL dağılımının pratikte uygulanabilirliğini göstermek için gerçek veri analizleri yapılmıştır. Bölüm 7'de tez çalışmasının bulguları irdelenerek çalışma sonlandırılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürdeki birçok çalışmada Marshall Olkin tipi yeni dağılımlar önerilmiş ve bu dağılımların farklı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ghitany ve Kotz (2007), lineer başarısızlık oranı (lineer üstel) dağılımını kullanarak MO dağılımlar ailesinin bir üyesi olarak genelleştirilmiş lineer başarısızlık oranı dağılımını önermiş ve özelliklerini incelemiştir. Zhang ve Xie (2007), MO dağılımlar ailesine genişletilmiş Weibull dağılımını eklemiş ve Weibull olasılık grafiğine dayalı olarak model karakterizasyonu yapmıştır. Ayrıca büyük bir sistemin alan takibi çalışmasından bir cihazlar örneklemi için analiz yapmış ve dağılımın en çok olabilirlik tahminlerini, standart hatalarını ve tahminlerin %95'lik güven aralıklarını elde etmiştir. Sonuç olarak genişletilmiş Weibull dağılımı, iki parametreli klasik Weibull dağılımına göre veri kümesini daha iyi modellemiştir. Jayakumar ve Mathew (2008), Burr tip XII dağılımını göz önüne alarak MO yarı Burr dağılımını ve MO Burr dağılımını önermiştir. Dağılımın güvenilirlik analizindeki çeşitli karakteristiklerini elde etmiştir. Ayrıca zaman serileri analizindeki uygulamalarını incelemiştir. Jose vd. (2011), MO Frechet dağılımını önermiş ve bir ürünün bu dağılıma uyan yaşam süresi için bir kabul örneklemesi planı geliştirmiştir. Dağılıma dayalı olarak elde ettiği sonuçları simülasyon çalışmasıyla doğrulamıştır. Gui (2013), log-lojistik dağılımı kullanarak MO dağılımlar ailesinin yeni bir üyesi olarak MO log-lojistik dağılımı önermiş ve dağılımın özelliklerini incelemiştir. Önerilen model yardımıyla bir minifikasyon süreci oluşturmuş ve bunun kovaryans yapısını incelemiştir. Opone ve Iwerumor (2021), Topp Leone dağılımının sağkalım fonksiyonunu kullanarak MO genelleştirilmiş Topp Leone dağılımını önermiş ve matematiksel özelliklerini incelemiştir. Dağılımın parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerinin asimptotik özelliklerini incelemek için bir simülasyon çalışması yapmıştır. Ayrıca petrol rezervi veri kümesini kullanarak söz konusu dağılımla Kumaraswamy ve beta dağılımını karşılaştırmıştır.

Marshall ve Olkin (1967) üstel dağılımın çok değişkenli bir genelleştirilmesi olarak MO üstel dağılımı önermiştir. Bu dağılım çok değişkenli hafızasızlık özelliği sebebi ile ön plana çıkmaktadır. MO üstel dağılım üstel marjinal dağılımlara sahip olduğundan, iki değişkenli veriler tek modlu marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna uyum gösteriyorsa veya sabit olmayan tehlike hızı fonksiyonuna işaret ediyorsa MO üstel dağılım uygun olmayabilir (Kundu ve Dey, 2009). Bu kısıtları göz önüne alarak Marshall ve Olkin (1967), marjinal dağılımların Weibull dağılımları olduğu ve MO üstel dağılım modeliyle aynı yoldan elde edilebilen iki değişkenli Weibull dağılımını önermiştir. MO iki değişkenli Weibull dağılımı, modele kattığı yeni şekil parametresi nedeniyle daha esnek bir dağılımdır. Ayrıca, iki değişkenli veriler tek modlu marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna veya sabit olmayan tehlike hızı fonksiyonuna uyuyorsa, bu model oldukça etkili bir şekilde kullanılabilir. MO dağılımının en iyi bilinen iki değişkenli genelleştirilmesi MO Weibull dağılımıdır. Bu dağılım dışında da MO dağılımının iki değişkenli genelleştirmeleri bulunmaktadır. Jose ve Sebastian (2013), MO Morgenstern iki değişkenli Weibull dağılımı adı verilen yeni bir iki değişkenli dağılım önermiş ve özelliklerini incelemiştir. Bileşenlerin seri veya paralel olmasına göre gerilme-kuvvet analizi altında güvenilirlik ifadelerini elde etmiştir. Thomas ve Jose (2004), MO iki değişkenli Semi-Pareto ve MO iki değişkenli Pareto dağılımlarını çalışmıştır. MO iki değişkenli Semi-Pareto dağılımı durağan marjinal dağılıma sahip küçültme yapısı ile AR(1) ve AR(k) zaman serisi modellerini geliştirmiştir. Barreto-Souza ve Lemonte (2013) marjinal dağılımları Kumaraswamy dağılımı olan ve Marshall ve Olkin yaşam kopulasından elde edilebilen iki değişkenli Kumaraswamy dağılımını önermiştir. Yazarlar bu dağılımın marjinal ve koşullu dağılımları, çarpım momentleri ve koşullu momentlerini bulmuş, dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmiş ve parametre tahmini için bir EM algoritması önermiştir. Ayrıca, yalnızca mutlak sürekli bir kısma sahip olan bir BVK dağılımı tanıtmış ve özelliklerini incelemiştir.

3. İKİ DEĞİŞKENLİ MO TİPİ KUMARASWAMY DAĞILIMI

Beta dağılımı, istatistiksel teori ve pratikte yüz yılı aşkın bir süredir yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Beta dağılımı, parametrelerinin değerlerine bağlı olarak şaşırtıcı derecede çeşitli şekiller alabildiğinden sınırlı aralıklarda değerler alabilen verileri modellemek için oldukça esnektir. Pratikte karşımıza çıkan çoğu sınırlı aralığa sahip rastgele değişken kolaylıkla standart beta dağılımına sahip bir rastgele değişkene dönüştürülebilir. Örneğin ekonometride çeşitli veri türleri sınırlı destek kümeli dağılımlarla modellenmektedir. Kullanılan aralık, standart birim aralık (0,1) olduğunda verilerin oran olarak yorumlanabilmesi uygulamayı daha ilginç bir hale getirebilir. Kumaraswamy (1980), beta dağılımının günlük yağış miktarı ve su akışı gibi hidrolojik değişkenleri modellemede iyi olmadığını savunmuş, beta dağılımına alternatif olarak Kumaraswamy dağılımını geliştirmiştir. Nadarajah (2008)'a göre hidroloji literatüründeki birçok çalışmada bu dağılım kullanılmıştır. Çünkü Kumaraswamy dağılımı, beta dağılımına daha iyi bir alternatif olarak kabul edilmiştir.

Kumaraswamy dağılımı aynı zamanda "minimax" dağılım ve birinci tip beta dağılımı olarak da bilinir. Kumaraswamy dağılımının geçmişi ve özellikleri son zamanlarda Jones (2009) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Yazar, Kumaraswamy ve beta dağılımlarının bazı benzerlik ve farklılıklarını ortaya koymuştur. Dahası Kumaraswamy dağılımının beta dağılımına oranla birçok avantajını ortaya çıkarmıştır. Örneğin, Kumaraswamy dağılımının normalleştirme sabiti, kümülatif dağılımı ve kantil fonksiyonu herhangi bir özel fonksiyon içermemesi, bu dağılımın beta dağılımına göre üstün olduğu yönleri arasındadır. Öte yandan Jones (2009)'a göre beta dağılımının Kumaraswamy dağılımına göre şu avantajları vardır:

- Moment çıkaran fonksiyonları daha basit formüller ile ifade edilebilir.
- Simetrik dağılımın tek parametreli alt ailesini içerir.

3. İKİ DEĞİŞKENLİ MO TİPİ KUMARASWAMY DAĞILIMI Ömer ÖZBİLEN

Son zamanlarda iki değişkenli beta dağılımı Olkin ve Lui (2003), Nadarajah ve Kotz (2005), Nadarajah (2006, 2007), Arnold ve Ng (2011) tarafından önerilmiştir. Merkezi olmayan iki değişkenli beta dağılımı ise Gupta vd. (2011) tarafından önerilmiştir. Bu dağılımlar, bir karışımdaki maddelerin oranlarının modellenmesinde, marka paylarında, iki adaylı seçimlerde oy oranlarında ve iki toprak dayanımının parametresi arasındaki bağın hesaplanmasında uygulanmıştır (Gupta vd., 2011). Tek değişkenli Kumaraswamy dağılımının hidroloji ve benzeri alanlarda dikkat çekici katkısını (Sundar ve Subbiah, 1989; Koutsoyiannis ve Xanthopoulos, 1989; Fletcher ve Ponnambalam, 1996; Seifi vd., 2000; Ponnambalam vd., 2001; Ganji vd., 2006; Lemonte, 2011) göz önüne alarak, Marshall ve Olkin'in (1967) çalışmasındaki fikre benzer bir fikir kullanarak Barreto-Souza ve Lemonte (2013) bu dağılımın çok değişkenli versiyonu olan iki değişkenli Kumaraswamy dağılımını önermiştir.

Marshall ve Olkin'in (1967) marjinal dağılımları üstel dağılım olan çok değişkenli üstel dağılımı ortaya koymuşlar ve iki değişkenli Weibull dağılımını önermişlerdir. Söz konusu çalışmada rastgele bir (X, Y) vektörünün MO dağılımına sahip olması için gerek ve yeter koşulun $X = \min(U, W)$, $Y = \min(V, W)$ olacak şekilde bağımsız üstel U, V, W rastgele değişkenlerinin var olması gerektiği gösterilmiştir. Bu ifadeye dayanarak Sarhan ve Balakrishnan (2007) iki değişkenli üstel dağılımdan daha esnek olan iki değişkenli bir dağılımı önermiştir. Bu dağılım Kundu ve Gupta (2010) tarafından genelleştirilmiştir. Son zamanlarda Kundu ve Dey (2009), MO iki değişkenli Weibull dağılımının model parametrelerinin en çok olabilirlik tahminini EM algoritması yoluyla elde etmiştir. MO şemasında minimum yerine maksimum değer kullanan Kundu ve Gupta (2009, 2010) ve Sarhan vd. (2011) sırasıyla iki değişkenli genelleştirilmiş üstel, iki değişkenli ters orantılı hazard (oransal ters tehlike) ve iki değişkenli genelleştirilmiş doğrusal hata oranı dağılımlarını (lineer tükeniş hızı dağılımı) ortaya koymuştur.

3.1. İki Değişkenli Kumaraswamy Dağılımı

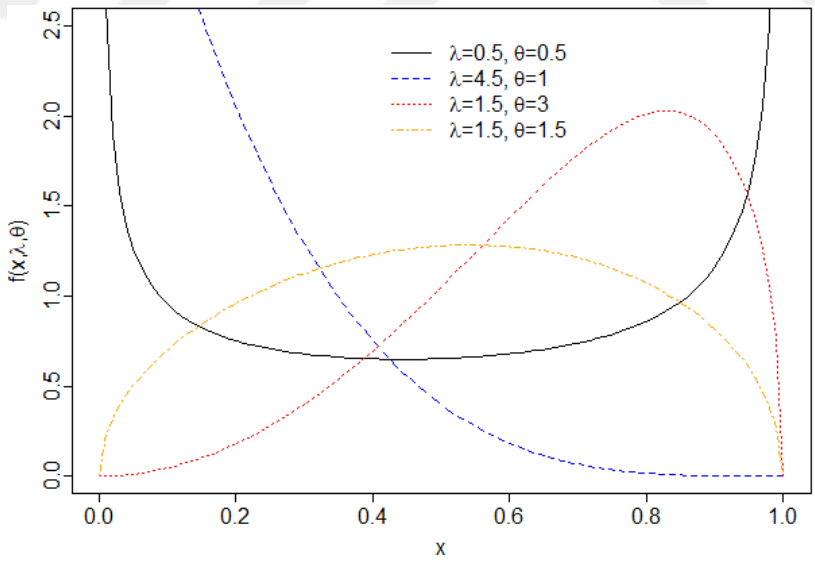
X rastgele değişkeni $\lambda > 0$ ve $\theta > 0$ şekil parametreli bir değişkenli Kumaraswamy dağılımına sahip olsun. X in dağılım fonksiyonu

$$F_k(x;\lambda,\theta) = 1 - \left(1 - x^{\theta}\right)^{\lambda},\ 0 < x < 1$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_k(x;\lambda,\theta) = \lambda\theta x^{\theta-1}\left(1 - x^{\theta}\right)^{\lambda-1},\ 0 < x < 1 \qquad (3.1)$$

olarak verilir ve $X \sim K\ (\lambda,\theta)$ notasyonu ile gösterilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). λ ve θ parametrelerinin farklı değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1'de verilmiştir.

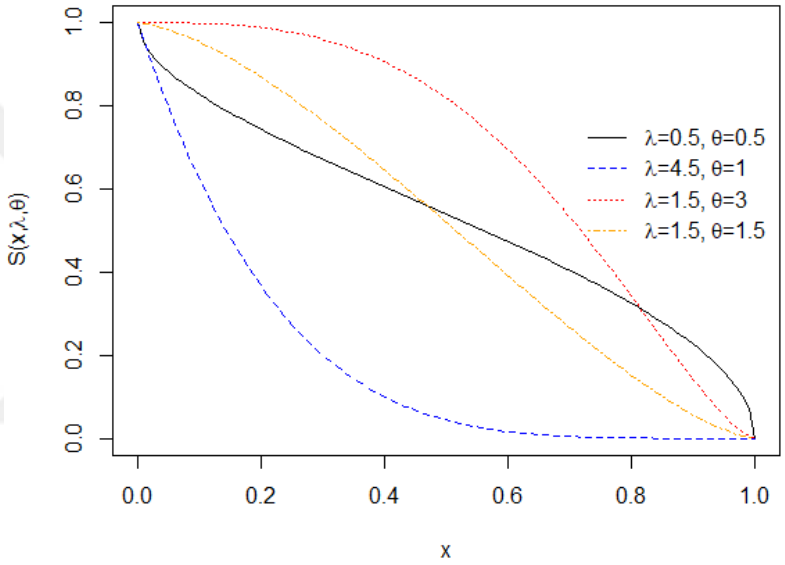


Şekil 3.1. Çeşitli parametre değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

Eşitlik (3.1)'in sağkalım fonksiyonu

$$S_k(x;\lambda,\theta) = 1 - F_k(x;\lambda,\theta) = \left(1 - x^{\theta}\right)^{\lambda},\ 0 < x < 1$$

olarak elde edilir. λ ve θ parametrelerinin çeşitli değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının sağkalım fonksiyonunun grafiği Şekil 3.2'de verilmiştir.



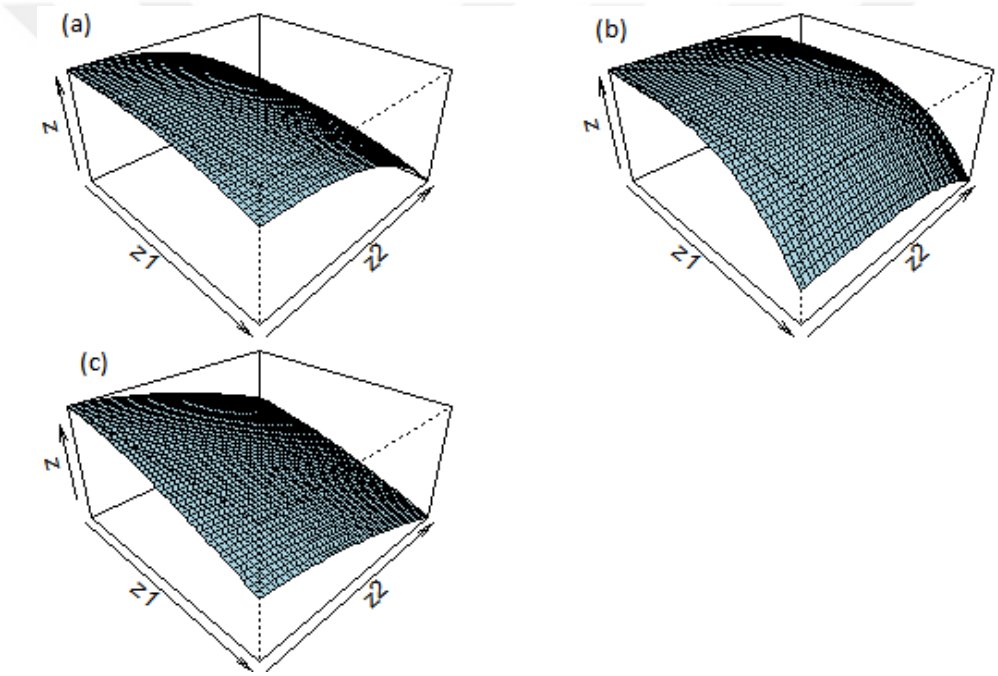
Şekil 3.2. Çeşitli parametre değerleri için bir değişkenli Kumaraswamy dağılımının sağkalım fonksiyonunun grafiği

X_1, X_2, X_3 bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere $X_i \sim K(\lambda_i, \theta),\ \theta > 0$ ve $\lambda_i > 0, i = 1,2,3$ için $Z_1 = \min(X_1, X_3)$ ve $Z_2 = \min(X_2, X_3)$ ise (Z_1, Z_2) iki değişkenli Kumaraswamy (Bivariate Kumaraswamy-BVK) dağılımına sahiptir ve $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ olarak gösterilir. (Z_1, Z_2) nin sağkalım fonksiyonu

$$S_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = P(Z_1 > z_1\ ,\ Z_2 > z_2)$$

$$= P(\min(x_1, x_3) > z_1\,,\ \min(x_2, x_3) > z_2)$$
$$= P(x_1 > z_1, x_3 > z_1,\ x_2 > z_2,\ x_3 > z_2)$$
$$= P(x_1 > z_1,\ x_2 > z_2,\ x_3 > w)$$
$$= S_k(z_1; \lambda_1, \theta) S_k(z_2; \lambda_2, \theta) S_k(w; \lambda_3, \theta)$$
$$= \left(1 - {z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1} \left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_2} \left(1 - w^{\theta}\right)^{\lambda_3}, (z_1, z_2) \in (0,1)^2 \qquad (3.2)$$

olup burada $w = \max(z_1, z_2)$ dir.



Şekil 3.3. BVK modelinin ortak sağkalım fonksiyonunun grafiği, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$: (a) (1.5,4.5,0.7,2.5), (b) (3.5,1.5,0.7,4), (c) (4.5,4.5,0.7,1.5).

Eşitlik (3.2)'de elde edilen (Z_1, Z_2) nin ortak sağkalım fonksiyonuna karşılık gelen grafik Şekil 3.3'te görülmektedir. Bundan sonraki kısımda marjinal dağılımlar, BVK dağılımının ortak kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık

yoğunluk fonksiyonu verilecektir. Aynı zamanda $\min(Z_1, Z_2)$ rastgele değişkeninin dağılımı da verilecektir.

Önerme 3.1. $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip olsun.

i) $Z_1 \sim K\ (\lambda_1 + \lambda_3, \theta)$ ve $Z_2 \sim K\ (\lambda_2 + \lambda_3, \theta)$

ii) $\min(Z_1, Z_2) \sim K(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$

geçerlidir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.2. $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ iken (Z_1, Z_2) nin kümülatif dağılım fonksiyonu, $(z_1, z_2) \in (0,1)^2$ olmak üzere

$$F_{z_1,z_2}(Z_1, Z_2) = \begin{cases} F_k(z_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - F_k(z_1; \lambda_1, \theta)[1 - F_k(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)], & z_1 < z_2 \\ F_k(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - F_k(z_2; \lambda_2, \theta)[1 - F_k(z_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta)], & z_1 > z_2 \\ 1 - F_k(z; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\ , \theta), & z_1 = z_2 = z_3 \end{cases}$$

olarak bulunur. Burada üçüncü durum singülerlik durumunu temsil etmektedir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.3. $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ iken (Z_1, Z_2) nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $(z_1, z_2) \in (0,1)^2$ olmak üzere

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \begin{cases} f_1(z_1, z_2), & z_1 < z_2 \\ f_2(z_1, z_2), & z_1 > z_2 \\ f_0(z), & z_1 = z_2 = z \end{cases}$$

olup burada

$$f_1(z_1, z_2) = f_k(z_1; \lambda_1, \theta) f_k(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$
$$f_2(z_1, z_2) = f_k(z_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f_k(z_2; \lambda_2, \theta)$$
$$f_0(z) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_k(z; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

olarak verilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

BVK dağılımının Marshall ve Olkin (1967)'de belirtilen iki değişkenli üstel dağılıma, Sarhan ve Balakrisnan (2007)'ın önerdiği iki değişkenli modellere, Kundu ve Gupta (2009)'nın belirttiği iki değişkenli üstel dağılıma ve Kundu ve Gupta (2010)'nın belirttiği modifiye edilmiş Sarhan-Balakrishnan iki değişkenli dağılımına benzer bir şekilde hem sürekli hem de singüler (tekil) durumları bulunmaktadır. BVK dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun ilk iki terimi, iki boyutlu Lebesque ölçümüne göre elde edilen yoğunluk fonksiyonu gibi anlaşılabilir. Ancak üçüncü terim tek boyutlu Lebesque ölçümüne göre bir yoğunluk fonksiyonudur (Bemis vd., 1972).

(Z_1, Z_2) nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ile singüler bir fonksiyonun karışımı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_a(z_1, z_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_s(z)$$

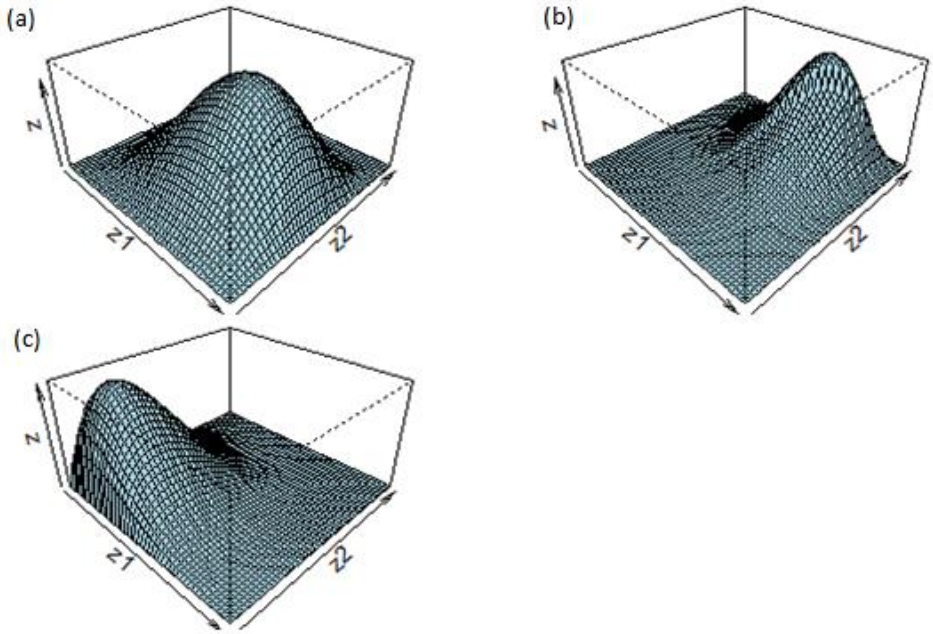
burada

$$f_a(z_1, z_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{cases} f_k(z_1; \lambda_1, \theta) f_k(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta), z_1 < z_2 \\ f_k(z_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f_k(z_2; \lambda_2, \theta), z_1 > z_2 \end{cases}$$

ve

$$f_s(z) = f_k(z; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta), z = z_1 = z_2.$$

Eğer $\theta > 1$ ise BVK yoğunluk fonksiyonunun sürekli parçaları $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerine bağlı olarak unimodal (tek tepeli) olabilir.



Şekil 3.4. BVK modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$:
(a) (1.5,4.5,0.7,2.5), (b) (3.5,1.5,0.7,4), (c) (4.5,4.5,0.7,1.5).

(Z_1, Z_2) nin sürekli kısmının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlu yüzey grafiği Şekil 3.4'te gösterilmiştir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, parametrik değerlere bağlı olarak çeşitli şekiller alabilir.

BVK dağılımından rastgele değişkenler üretmek oldukça kolaydır. BVK$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımından (Z_1, Z_2) yi üretmek için aşağıdaki basit algoritmayı verelim.

Algoritma 3.1. BVK$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımından rastgele sayı üretilmesi

1.Adım: $U(0,1)$ den U_1, U_2, U_3 üret.

2.Adım: $x_1 = \left(1 - {U_1}^{1/\lambda_1}\right)^{1/\theta}, x_2 = \left(1 - {U_2}^{1/\lambda_2}\right)^{1/\theta}, x_3 = \left(1 - {U_3}^{1/\lambda_3}\right)^{1/\theta}$.

3.Adım: $Z_1 = \min(X_1, X_3)$ ve $Z_2 = \min(X_2, X_3)$ elde et.

Aşağıda önerme BVK modelinin koşullu dağılımını gösterir.

Önerme 3.4. Eğer $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahipse

i) $Z_2 = z_2$ verilmişken Z_1 in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Z_1|Z_2=z_2}(z_1) = P_2 f_a(z_1|\, z_2) + (1 - P_2) f_s(z_1|\, z_2)$$

olarak verilir. Burada

$$P_2 = 1 - \lambda_3\left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_1}/(\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$f_a(z_1|\, z_2) =$$

$$\frac{1}{P_2} \cdot \begin{cases} \lambda_1 \theta {z_1}^{\theta-1}\left(1 - {z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1 - 1}, & z_1 < z_2 \\ \dfrac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1}\left(1 - {z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(\lambda_2 + \lambda_3)(1 - {z_2}^{\theta})^{\lambda_3}} - \dfrac{\lambda_3\left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_1}}{\lambda_2 + \lambda_3}, & z_1 > z_2 \end{cases}$$

ve

$$f_s(z_1|\, z_2) = \begin{cases} 0, & z_1 < z_2 \\ 1, & z_1 > z_2 \end{cases}$$

olarak verilir.

ii) $Z_2 = z_2$ verilmişken Z_1 in koşullu sağkalım fonksiyonu

$$S_{Z_1|Z_2\geq z_2}(z_1) = P_r(Z_1 > z_1|Z_2 \geq z_2)$$
$$= \begin{cases} \left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1}, & z_1 < z_2 \\ \left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}\left(1-{z_2}^{\theta}\right)^{-\lambda_3}, & z_1 \geq z_2 \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

BVK dağılımının kopulalar yoluyla nasıl elde edilebileceği gösterilecektir. H; sürekli marjinal dağılımları F ve G olan iki değişkenli dağılım fonksiyonu olsun. Ayrıca $\bar{H}, \bar{F}, \bar{G}$ sırasıyla H, F, G'ye bağlı sağkalım fonksiyonu olsun. Sklar'ın teoremine göre (Sklar, 1959) kopula ile ifade edilen $H(x,y) = C(F(x), G(y))$ şeklinde $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ özgün fonksiyonu elde edilir. Sklar teoremine benzer bir şekilde $\bar{H}(x,y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)$ şeklinde sağkalım kopulası adı verilen bir $\hat{C} = [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ özgün fonksiyonu ortaya çıkar.

Marshall ve Olkin sağkalım kopulası, $\beta_1 \in (0,1)$ ve $\beta_2 \in (0,1)$ parametreleriyle ilişkili olarak,$(x,y) \in [0,1]^2$ için, $\hat{C}(x,y) = xy \min\{ x^{-\beta_1}, y^{-\beta_2}\}$ şeklindedir. Yani MO sağkalım kopulasından BVK modeli elde edilebileceği ve aşağıdaki ilişkiyi sağladığı görülmektedir.

$$S_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \hat{C}\left(S_k(z_1;\lambda_1+\lambda_3,\theta), S_k(z_2;\lambda_2+\lambda_3,\theta)\right),$$
$$\beta_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3} \text{ ve } \beta_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} \text{ iken.}$$

3.2. Çarpım Momentleri

İki değişkenli vektör (Z_1, Z_2) nin marjinal dağılımları Kumaraswamy dağılımları olduğu için Z_1 ve Z_2 nin momentleri doğrudan aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(Z_1^r) = (\lambda_1+\lambda_3)\cdot B(1+\frac{r}{\theta}, \lambda_1+\lambda_3)$$

$$E(Z_2^r) = (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot B(1 + \frac{r}{\theta}, \lambda_2 + \lambda_3),$$

$B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonu iken. Şimdi BVK dağılımın çarpımın momentleri ve koşullu momentleri verilecektir.

Önerme 3.5. $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ iken

i) Çarpımın momentleri:

$$E({Z_1}^r {Z_2}^r) = \lambda_3 B\left(\frac{r+s}{\theta} + 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right) + (\lambda_2 + \lambda_3)\theta\Gamma(\lambda_1 + 1)g(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, \theta) + \lambda_2\theta\Gamma(\lambda_1 + \lambda_3 + 1)\left\{B\left(\frac{S}{\theta} + 1, \lambda_2\right)g(\lambda_1 + \lambda_3, 0, \theta) - g(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2, \theta)\right\},$$

$$g(\lambda, 0, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(r + \theta(j+1)\right)^{-1}}{\Gamma(\lambda - j)j!}$$

ve

$$g(\lambda, \gamma, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (r + \theta(j+1))^{-1}}{\Gamma(\lambda - j)j!} B\left(\frac{r+s}{\theta} + j, + 2 + \gamma\right),$$

$$\gamma > 0.$$

Bu formül tamsayı olmayan gerçel sayı $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ için geçerlidir. λ_1, λ_2 ve λ_3 tamsayı ise birinci toplam $\lambda_1 - 1$ 'de durur ve diğer toplam $\lambda_2 - 1$ 'de durur. Burada $\Gamma(\cdot)$, gamma fonksiyonunu belirtir.

ii) $(V_1, V_2) = (1 - {Z_1}^{\theta}, 1 - {Z_2}^{\theta})$ verilmişken çarpımın momenti

$$E({V_1}^{r}{V_2}^{r}) = \frac{1}{r + s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\left\{\lambda_3 + \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{s + \lambda_2 + \lambda_3}, \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{r + \lambda_1 + \lambda_3}\right\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 3.6. $(Z_1, Z_2) \sim$ BVK $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ iken, $Z_2 = z_2$ verilmişken Z_1in koşullu momenti

$$E({Z_1}^{r}|Z_2 = z_2) = \theta\Gamma(\lambda_1 + 1)h_0(z_2; \lambda_1, \theta) + \frac{\lambda_2\theta\Gamma(\lambda_1 + \lambda_3 + 1)}{\lambda_2 + \lambda_3}h_1(z_2; \lambda_1, \lambda_3, \theta),$$

$$h_0(z_2; \lambda_1, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(\lambda_1 - j)j!} \cdot \frac{{z_2}^{\theta(j+1)+r}}{\theta(j+1) + r}$$

ve

$$h_1(z_2; \lambda_1, \lambda_3, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{-\lambda_3}}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_3 - j)j!} \cdot \frac{\left(1 - {z_2}^{\theta(j+1)+r}\right)}{\theta(j+1) + r}$$

tamsayı olmayan gerçel sayı λ_1 ve λ_3 için. Eğer λ_1 ve λ_3 tamsayı olursa, birinci ve ikinci toplamlar sırasıyla $\lambda_1 - 1$ ve $\lambda_1 + \lambda_3 - 1$ de durur.

3.3. Tahmin ve Bilgi Matrisi

3.3.1. En Çok Olabilirlik Tahminlerinin (MLE) Doğrudan Elde Edilmesi

Bu bölümde BVK dağılımının bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin (MLE) hesaplanması problemi ele alınmaktadır. $(z_{1i}, z_{2i}), \dots, (z_{1n}, z_{2n})$, BVK$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımının rastgele örneklerini ifade etsin. Aşağıdaki gösterimler kullanılır.

$$I_0 = \{i: z_{1i} = z_{2i} = z_i\},\ I_1 = \{i: z_{1i} < z_{2i}\},\ I_2 = \{i: z_{1i} > z_{2i}\},$$
$$I = I_0 \cup I_1 \cup I_2,\ n_0 = |I_0|,\ n_1 = |I_1|,\ n_2 = |I_2|,\ n = n_0 + n_1 + n_2$$

Burada, $|I_j|,\ j = 0,1,2$ için I_j kümesinin kardinalitesini belirtir.
Parametre vektörü $\boldsymbol{\beta} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)^T$ için toplam log-olabilirlik fonksiyonu

$$l = l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i \in I_1} \log f_1(z_{1i}, z_{2i}) + \sum_{i \in I_2} \log f_2(z_{1i}, z_{2i}) + \sum_{i \in I_0} \log f_0(z_i)$$

olarak bulunur. $U(\boldsymbol{\beta}) = (\frac{\partial l}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial l}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial l}{\partial \lambda_3}, \frac{\partial l}{\partial \theta})^T$ ile ilgili skor fonksiyonu aşağıdaki bileşenlere sahiptir.

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} + \sum_{i \in I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right),$$
$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_2} = \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_2} + \sum_{i \in I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right),$$
$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_3} = \frac{n_0}{\lambda_3} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} + \sum_{i \in I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) + \sum_{i \in I_1} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) + \sum_{i \in I_2} \log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n_0}{\theta} + \frac{2(n_1+n_2)}{\theta} + \sum_{i\in I_0} \log z_i + \sum_{i\in I_1\cup I_2} [\log z_{1i} + \log z_{2i}]$$
$$- (\lambda_1 - 1)\sum_{i\in I_1} \frac{{z_{1i}}^{\theta}\log z_{1i}}{1-{z_{1i}}^{\theta}} - (\lambda_2 - 1)\sum_{i\in I_2} \frac{{z_{2i}}^{\theta}\log z_{2i}}{1-{z_{2i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_1 + \lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_2} \frac{{z_{1i}}^{\theta}\log z_{1i}}{1-{z_{1i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_2 + \lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_1} \frac{{z_{2i}}^{\theta}\log z_{2i}}{1-{z_{2i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_0} \frac{{z_i}^{\theta}\log z_i}{1-{z_i}^{\theta}}.$$

$\boldsymbol{\beta} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)^T$ nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\theta})^T$ olarak gösterilir ve $U(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$ lineer olmayan denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir. Şimdi Fisher bilgi matrisini elde ederek dört parametreli BVK dağılımına dair çıkarımlar tartışılacaktır. Beklenen bilgi matrisi $K(\boldsymbol{\beta})$ aşağıdaki formdadır:

$$K(\boldsymbol{\beta}) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\begin{bmatrix} K_{\lambda_1\lambda_1} & 0 & K_{\lambda_1\lambda_3} & K_{\lambda_1\theta} \\ 0 & K_{\lambda_2\lambda_2} & K_{\lambda_2\lambda_3} & K_{\lambda_2\theta} \\ K_{\lambda_1\lambda_3} & K_{\lambda_2\lambda_3} & K_{\lambda_3\lambda_3} & K_{\lambda_3\theta} \\ K_{\lambda_1\theta} & K_{\lambda_2\theta} & K_{\lambda_3\theta} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$K_{\lambda_1\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_3)^2},$$

$$K_{\lambda_2\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2+\lambda_3)^2},$$

$$K_{\lambda_3\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2+\lambda_3)^2} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_3)^2},$$

$$
\begin{aligned}
K_{\theta\theta} = \theta^{-2}\{&\left[{\lambda_1}^2(\lambda_1-1)+{\lambda_2}^2(\lambda_2-1)+{\lambda_3}^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)\right.\\
&-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3-1)\\
&\left.-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3-1)\right]J(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3-1)\,J(\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_3-1)\,J(\lambda_1+\lambda_3)+2(\lambda_1+\lambda_2)\\
&+\lambda_3\},\\
K_{\lambda_1\theta} = \theta^{-1}\{&\left[{\lambda_1}^2+{\lambda_3}^2-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\right]I(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)I(\lambda_1+\lambda_3)\},\\
K_{\lambda_2\theta} = \theta^{-1}\{&\left[{\lambda_2}^2+{\lambda_3}^2-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\right]I(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)I(\lambda_2+\lambda_3)\},\\
K_{\lambda_3\theta} = \theta^{-1}\{&\left[{\lambda_3}^2-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\right]I(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)I(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)I(\lambda_1+\lambda_3)\}.
\end{aligned}
$$

$I(\lambda)=\int_0^1 \log(u)u(1-u)^{\lambda-2}\,du$, $J(\lambda)=\int_0^1 \log^2(u)u(1-u)^{\lambda-3}\,du$ ve $\lambda>0$ iken. Bu integrallerin λ nın değerine bağlı olarak açık ifadesi elde edilebilir. Örneğin

$$\lambda>1 \text{ iken } I(\lambda)=\frac{1-\gamma-\varphi(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}$$

$$\lambda>2 \text{ iken } J(\lambda)=\frac{2\varphi'(\lambda)^2-\varphi'(\lambda)-\varphi(\lambda)^2-1+\frac{\pi^2}{6}+(1-\gamma)^2}{(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$\varphi(x)=d\log\frac{\Gamma(x)}{dx},\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx} \text{ ve } \gamma\approx 0.577215$$

olarak alınır. γ, Euler-Mascheroni sabitidir. Bu sabit, harmonik seri ile doğal logaritma arasındaki farkın limitidir. Euler-Mascheroni sabiti

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)dx \approx 0.5772156649$$

olarak verilir. $K(\boldsymbol{\beta})^{-1}$, $K(\boldsymbol{\beta})$ nın tersi olduğundan $n \to \infty$ iken $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N_4(\mathbf{0}, K(\boldsymbol{\beta})^{-1})$, standart büyük örneklem teorisini takip eder. $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ nın asimptotik dağılımı, BVK dağılımının parametreleri için güven aralıkları oluşturmakta kullanılabilir.

3.3.2. EM Algoritması Yoluyla En Çok Olabilirlik Tahminlerinin Elde Edilmesi

Şimdi log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimize edilmesine alternatif olarak model parametrelerini en çok olabilirlik tahminlerini bulmak için EM algoritması önerilmektedir. Kundu ve Dey (2009) ve Kundu ve Gupta (2009, 2010)'nın çalışmalarından yola çıkarak, problem kayıp değer problemi olarak ele alınmaktadır. BVK dağılımının parametrelerinin tahmininin kayıp veri problemi olarak görülebileceğini göstermek kolaydır. Bir BVK dağılımını takip eden rastgele bir (Z_1, Z_2) vektörü için, aşağıdaki (Δ_1, Δ_2) ilişkili vektörü tanımlanmaktadır.

$$\Delta_1 = \begin{cases} 1, & X_1 < X_3 \\ 3, & X_1 > X_3 \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \begin{cases} 2, & X_2 < X_3 \\ 3, & X_2 > X_3 \end{cases}.$$

Böylece $Z_1 = Z_2$ iken $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$ ancak $Z_1 < Z_2$ veya $Z_1 > Z_2$ ise (Δ_1, Δ_2) kayıp veridir. Şimdi eğer $(z_{1i}, z_{2i}) \in I_1$ ise o zaman (Δ_1, Δ_2) nin muhtemel değeri $(1,3)$ veya $(1,2)$ dir. Öte yandan eğer $(z_{1i}, z_{2i}) \in I_2$ sıfırdan farklı olasılıklara sahipse (Δ_1, Δ_2) nin muhtemel değerinin, $(3,2)$ veya $(1,2)$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi EM algoritmasının "E" ve "M" basamakları sunulacaktır. "E" basamağında (Δ_1, Δ_2) nin karşılığı tamamen bilindiğinden, I_0 a ait gözlemler tamamlanmış gözlemler olarak ele alınmaktadır. Gözlemler I_1 veya I_2 ye aitse kayıp veri olarak kabul edilir. Eğer $(z_1, z_2) \in I_1$ ise psüdo gözlem Kundu (2004) ile benzer şekilde oluşturulur. Daha açık ifade ile (z_1, z_2), $(z_1, z_2, u_1(\boldsymbol{\beta}))$ ve $(z_1, z_2, u_2(\boldsymbol{\beta}))$ iki kısmen tam olan psüdo gözlemlere bölünür. Burada psüdo gözlemlere atanan $u_1(\boldsymbol{\beta})$ ve $u_2(\boldsymbol{\beta})$, $Z_1 < Z_2$ verilmişken (Δ_1, Δ_2) nin sırasıyla $(1,3)$ veya $(1,2)$ değerini aldığı koşullu olasılıklardır. Benzer şekilde $(z_1, z_2) \in I_2$ ise psüdo gözlemler $(z_1, z_2, v_1(\boldsymbol{\beta}))$ ve $(z_1, z_2, v_2(\boldsymbol{\beta}))$ şeklinde oluşturulur. Burada $v_1(\boldsymbol{\beta})$ ve $v_2(\boldsymbol{\beta})$, $Z_1 > Z_2$ verilmişken (Δ_1, Δ_2) nin sırasıyla $(3,2)$ veya $(1,2)$ değerini aldığı koşullu olasılıklardır. Birkaç işlemden sonra şu eşitlik elde edilmiştir:

$$P(X_1 < X_3 < X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2+\lambda_3)},$$

$$P(X_1 < X_2 < X_3) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2+\lambda_3)}$$

öyleyse

$$u_1 \equiv u_1(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} \text{ ve } u_2 \equiv u_2(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}$$

benzer şekilde

$$P(X_2 < X_3 < X_1) = \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)},$$
$$P(X_2 < X_1 < X_3) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$$

ve bundan dolayı

$$v_1 \equiv v_1(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3} \text{ ve } v_2 \equiv v_2(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}.$$

Sadeleştirmelerden sonra psüdo log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta}) = {} & (n_0 + 2n_1 + 2n_2)\log\theta + (n_1 + v_2 n_2)\log\lambda_1 \\ & + (n_2 + u_2 n_1)\log\lambda_2 \\ & + (\theta - 1)\left(\sum_{i\in I_0}\log z_i + \sum_{i\in I_1\cup I_2}[\log z_{1i} + \log z_{2i}]\right) \\ & + (\lambda_1 + \lambda_2+\lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_0}\log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) \\ & + (\lambda_1 - 1)\sum_{i\in I_1}\log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right) \\ & + (\lambda_2 - 1)\sum_{i\in I_2}\log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) + (n_0 + u_1 n_1 \\ & + v_1 n_2)\log\lambda_3 + (\lambda_2+\lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_1}\log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) \\ & + (\lambda_1+\lambda_3 - 1)\sum_{i\in I_2}\log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right). \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. “M” basamağı ise $l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta})$ nın bilinmeyen parametrelere göre maksimizasyonunu içerir. Sabit θ için $l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta})$ nın maksimizasyonu

$$\hat{\lambda}_1(\theta) = -\left(\frac{n_1 + v_2 n_2}{\sum_{i\in I_0}\log(1-{z_i}^{\theta}) + \sum_{i\in I_1\cup I_2}\log(1-{z_{1i}}^{\theta})}\right),$$

$$\hat{\lambda}_2(\theta) = -\left(\frac{n_2 + v_2 n_1}{\sum_{i\in I_0}\log(1-{z_i}^{\theta}) + \sum_{i\in I_1\cup I_2}\log(1-{z_{2i}}^{\theta})}\right),$$

$$\hat{\lambda}_3(\theta) = -\left(\frac{n_0 + v_1 n_1 + v_1 n_2}{\sum_{i\in I_0}\log(1-{z_i}^{\theta}) + \sum_{i\in I_1}\log(1-{z_{2i}}^{\theta}) + \sum_{i\in I_2}\log(1-{z_{1i}}^{\theta})}\right).$$

$l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta})$ daki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ile $\hat{\lambda}_1(\theta), \hat{\lambda}_2(\theta), \hat{\lambda}_3(\theta)$ yer değiştirildiğinde sabit nokta iterasyonunu kullanarak denklem sistemini çözerek $l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta})$ yı maksimize eden $\hat{\theta}$ elde edilebilir. Daha açık bir ifadeyle

$$g(\theta) = \theta \tag{3.3}$$

$$g(\theta) = \frac{n_0 + 2n_1 + 2n_2}{h(\theta)}$$

$$\begin{aligned} h(\theta) = -\left(\sum_{i\in I_0}\log z_i + \sum_{i\in I_1\cup I_2}[\log z_{1i} + \log z_{2i}]\right) \\ + \left(\hat{\lambda}_1(\theta) + \hat{\lambda}_2(\theta) + \hat{\lambda}_3(\theta) - 1\right)\sum_{i\in I_0}\frac{{z_i}^{\theta}\log z_i}{1-{z_i}^{\theta}} \\ + \left(\hat{\lambda}_1(\theta) - 1\right)\sum_{i\in I_1}\frac{{z_{1i}}^{\theta}\log z_{1i}}{1-{z_{1i}}^{\theta}} \\ + \left(\hat{\lambda}_2(\theta) - 1\right)\sum_{i\in I_2}\frac{{z_{2i}}^{\theta}\log z_{2i}}{1-{z_{2i}}^{\theta}} \end{aligned}$$

$$+\left(\hat{\lambda}_2(\theta)+\hat{\lambda}_3(\theta)-1\right)\sum_{i\in I_1}\frac{{z_{2i}}^{\theta}\log z_{2i}}{1-{z_{2i}}^{\theta}}$$

$$+\left(\hat{\lambda}_1(\theta)+\hat{\lambda}_3(\theta)-1\right)\sum_{i\in I_2}\frac{{z_{1i}}^{\theta}\log z_{1i}}{1-{z_{1i}}^{\theta}}.$$

Şimdi EM algoritmasının r. adımından $(r+1)$. adımını elde etmek için Algoritma 3.2 verilsin.

Algoritma 3.2. EM algoritmasının adımları.

1.Adım: r. adımda $r=0,1\ldots$ için $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\theta$ nın ${\lambda_1}^{(r)},{\lambda_2}^{(r)},{\lambda_3}^{(r)},\theta^{(r)}$ olduğu düşünülsün.

2.Adım: ${\lambda_1}^{(r)},{\lambda_2}^{(r)},{\lambda_3}^{(r)}$ kullanılarak u_1,u_2,v_1,v_2 hesaplansın.

3.Adım: Kundu ve Gupta (2006)'da açıklandığı gibi sabit nokta iterasyonu ile Eşitlik(3.3)'ü çözerek $\theta^{(r+1)}$ bulunsun.

4.Adım: $\theta^{(r+1)}$ i bulduktan sonra ${\lambda_1}^{(r+1)}=\hat{\lambda}_1(\theta^{(r+1)})$, ${\lambda_2}^{(r+1)}=\hat{\lambda}_2(\theta^{(r+1)})$ ve ${\lambda_3}^{(r+1)}=\hat{\lambda}_3(\theta^{(r+1)})$ hesaplansın.

Yakınsama gerçekleşene kadar iterasyonlara devam edilir. EM algoritmasının bu versiyonu, beklenti-koşullu maksimizasyon algoritması olarak bilinir. Algoritma 3.2'nin 3.adımındaki $\theta^{(r+1)}$ i elde etmek için Kundu ve Gupta (2006)'nın yaptığı şekilde ilerlenebilir. Yani $\theta^{(r+1)}$, $\theta^{(r+1)}=g(\theta^{(r)})$ gibi basit bir yinelemeli prosedür kullanarak elde edilebilir. Yinelemeli prosedür $\theta^{(r)}$ ve $\theta^{(r+1)}$ arasındaki mutlak fark yeterince küçük olduğunda durdurulmalıdır. Örneğin $\left|\theta^{(r)}-\theta^{(r+1)}\right|<\varepsilon$ iken ε nun önceden belirlenmiş tolerans seviyesi $\varepsilon=10^{-5}$ olarak alınabilir.

3.4. BVK Dağılımından Meydana Gelen İki Değişkenli Modeller

BVK modelinden iki değişkenli dağılımlar üretilebilir. Bunun için aşağıda açıklanan yöntem kullanılabilir. G, destek kümesi $A \subseteq R$ olan sürekli rastgele bir değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonu olsun. Böylece aşağıdaki ortak sağkalım fonksiyonunu tanımlayarak yeni bir iki değişkenli dağılımlar sınıfı elde edilebilir:

$$S^*(x,y) = S_{Z_1,Z_2}\big(G(x), G(y)\big), \quad (x,y) \in A^2.$$

Burada $S_{Z_1,Z_2}(\cdot,\cdot)$ Eşitlik (3.2)'de verilen BVK dağılımının sağkalım fonksiyonudur. Eğer (Z_1, Z_2) BVK dağılımına sahipse, o zaman $((G^{-1}(Z_1), G^{-1}(Z_2))$ nin sağkalım fonksiyonu S^* dır. Özel olarak $G(x) = x,\ x \in (0,1)$ alındığında S^*, BVK dağılımının sağkalım fonksiyonu olur. S^* sağkalım fonksiyonu aşağıdaki şekilde açıkça ifade edilebilir:

$$S^*(x,y) = \big(1 - G(x)^\theta\big)^{\lambda_1}\big(1 - G(y)^\theta\big)^{\lambda_2}\big(1 - G(w)^\theta\big)^{\lambda_3}, (x,y) \in A^2. \quad (3.4)$$

Eşitlik (3.4)'e bağlı olarak kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F^*(x,y) = F_{Z_1,Z_2}\big(G(x), G(y)\big), (x,y) \in A^2$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f^*(x,y) = \begin{cases} g(x)g(y)f_1(G(x), G(y)), & x < y \\ g(x)g(y)f_2\big(G(x), G(y)\big), & x > y \\ g(w)f_0\big(G(w)\big), & w = x = y \end{cases}$$

olarak elde edilir. Önerme 3.2'de verilen BVK dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu, $F_{Z_1,Z_2}(\cdot,\cdot)$ iken, $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}$. Önerme 3.3'te tanımlanan $G(x), f_1(\cdot,\cdot)$, $f_2(\cdot,\cdot)$ ve $f_0(\cdot)$ fonksiyonları ile bağlantılı olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Şimdi bu yeni iki değişkenli dağılımlar sınıfı ile ilgili marjinal ve koşullu dağılımlar ve çarpım momentleri gibi genel sonuçlar verilecektir.

Önerme 3.7. (X,Y) rastgele vektörü Eşitlik (3.4)'te verilen ortak sağkalım fonksiyonuna sahipse, X ve Y nin marjinal sağkalımları

$$S^*(x)=(1-G(x)^\theta)^{\lambda_1+\lambda_3},\ x\in A$$
$$S^*(y)=(1-G(y)^\theta)^{\lambda_2+\lambda_3},\ y\in A.$$

Önerme 3.8. (X,Y) rastgele vektörü Eşitlik (3.4)'de verilen ortak sağkalım fonksiyonuna sahipse

i) $Y=y$ verilmişken X in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f^*_{X|Y=y}(x)=\begin{cases}\lambda_1\theta g(x)G(x)^{\theta-1}\left(1-G(x)^\theta\right)^{\lambda_1-1}, & x<y\\ \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)\theta g(x)G(x)^{\theta-1}\left(1-G(x)^\theta\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(\lambda_2+\lambda_3)(1-G(y)^\theta)^{\lambda_3}}, & x>y\\ \dfrac{\lambda_2\left(1-G(y)^\theta\right)^{\lambda_1}}{(\lambda_2+\lambda_3)}, & x=y\end{cases}$$

ii) $Y\geq y$ verilmişken X in koşullu sağkalım fonksiyonu

$$S^*_{X|Y\geq y}(x)=P_r(X>x|Y\geq y)$$
$$=\begin{cases}\left(1-G(x)^\theta\right)^{\lambda_1}, & x\leq y\\ \left(1-G(x)^\theta\right)^{\lambda_1+\lambda_3}\left(1-G(y)^\theta\right)^{-\lambda_3}, & x>y\end{cases}$$

$X = x$ verildiğinde Y nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu ile $X \geq x$ verildiğinde Y nin sağkalım fonksiyonu benzer bir şekilde elde edilebilir.

Önerme 3.9. (X, Y) rastgele vektörü Eşitlik (3.4)'te verilen ortak sağkalım fonksiyonuna sahipse çarpım momentleri

$$E(X^r Y^s) = E(G^{-1}(Z_1)^r E(G^{-1}(Z_2)^s)$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 G^{-1}(z_1)^r G^{-1}(z_2)^s f_{z_1,z_2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

olarak elde edilir.

Şimdi önerilecek yöntemle elde edilen birkaç özel iki değişkenli dağılım sunulacaktır. Bunların dışında iki değişkenli dağılımlar da önerilebilir ve elde edilen genel sonuçlar bu dağılımlara uygulanabilir. Bundan sonra (X, Y) rastgele vektörünün Eşitlik (3.4)'te verilen sağkalım fonksiyonuna sahip olduğu varsayılacaktır.

3.4.1. İki Değişkenli Üstel Dağılım

$G(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$ standart üstel rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. Eşitlik (3.4)'te verilen sağkalım fonksiyonu $\theta = 1$ için

$$S^*(x, y) = \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 w), \qquad x, y > 0$$

ifadesine indirgenir. $S^*(x, y)$ nin Marshall ve Olkin (1967)'in önerdiği iki değişkenli üstel dağılımın sağkalım fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. X ve Y nin marjinal dağılımları, $\lambda_1 + \lambda_3$ ve $\lambda_2 + \lambda_3$ ile tek değişkenli üstel dağılımlardır.

3.4.2. İki Değişkenli Weibull Dağılımı

Standart Weibull dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu olan $G(x) = 1 - e^{-x^{\gamma}},\ x > 0$ alınarak

$$S^*(x,y) = \left(1 - \left(1 - e^{-x^{\gamma}}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_1} \left(1 - \left(1 - e^{-y^{\gamma}}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_2} \left(1 - \left(1 - e^{-w^{\gamma}}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_3}$$

$x, y > 0$ için elde edilir. Bu sağkalım fonksiyonuna karşılık gelen marjinal dağılımlar tek değişkenli üstel Weibull dağılımıdır (Mudholkar vd., 1995). $\theta = 1$ için

$$S^*(x,y) = \exp(-\lambda_1 x^{\gamma} - \lambda_2 x^{\gamma} - \lambda_3 w^{\gamma}), \qquad x, y > 0$$

olup $X \sim \text{Weibull}\,(\lambda_1 + \lambda_3, \gamma)$ ve $Y \sim \text{Weibull}\,(\lambda_2 + \lambda_3, \gamma)$ ile iki değişkenli (X, Y) üstel Weibull dağılımına karşılık gelir (Marshall ve Olkin, 1967; Kundu ve Dey, 2009). Ayrıca $\gamma = 1$ için tek değişkenli üstel dağılımın elde edileceği açıktır.

3.4.3. İki Değişkenli Pareto Dağılımı

G, μ ve γ alt sınır ve şekil parametreli bir Pareto dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu olsun. $G(x) = 1 - (\mu/x)^{\gamma}, x > \mu$ ve $\mu, \gamma > 0$ olarak yazılır. (X, Y) verilmişken iki değişkenli Pareto dağılımının ortak sağkalım fonksiyonu

$$S^*(x,y) = \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\mu}{x}\right)^{\gamma}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_1} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\mu}{y}\right)^{\gamma}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_2}$$

$$\left(1-\left(1-\left(\frac{\mu}{w}\right)^{\gamma}\right)^{\theta}\right)^{\lambda_3}, \qquad x,\gamma>\mu$$

ve marjinal sağkalım fonksiyonları

$$S^*(x)=\left(1-(1-(\mu/x)^{\gamma})^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}, \qquad x>\mu, y>\mu$$

$$S^*(y)=\left(1-(1-(\mu/y)^{\gamma})^{\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}, \qquad x>\mu, y>\mu$$

olarak verilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). Böylece marjinal dağılımlar pozitif kuvvete sahip üstel Pareto dağılımının sağkalım fonksiyonları olarak elde edilen tek değişkenli üstel Pareto dağılımlarıdır. Üstel Pareto dağılımı Nadarajah (2005) tarafından önerilmiştir. Yukarıda sağkalım fonksiyonu verilen iki değişkenli rastgele vektörün, iki değişkenli üstel Pareto dağılımına sahip olduğu söylenebilir.

$\theta=1$ ve $\gamma=1$ için sağkalım fonksiyonu

$$S^*(x,y)=\frac{\mu^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}{x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}w^{\lambda_3}}, \qquad x,y>\mu$$

şeklinde verilen iki değişkenli Pareto dağılımı tanıtılmıştır. Marjinal dağılımları μ sınır parametresi, $\lambda_1+\lambda_3$ ve $\lambda_2+\lambda_3$ şekil parametreleriyle $x>\mu$ ve $y>\mu$ için sırayla

$$S^*(x)=(\mu/x)^{\lambda_1+\lambda_3}$$

$$S^*(y)=(\mu/y)^{\lambda_2+\lambda_3}$$

olarak verilen Pareto dağılımlarıdır.

3.4.4. İki Değişkenli Çift Genelleştirilmiş Üstel Dağılım

$G(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$ alınarak Barreto-Souza vd. (2010) tarafından önerilen iki değişkenli çift genelleştirilmiş üstel dağılım (Doubly Generalized Exponential-DGE) elde edilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). Burada (X, Y) nin ortak sağkalım fonksiyonu

$$S^*(x,y) = \left(1 - (1 - e^{-x})^{\theta}\right)^{\lambda_1}\left(1 - (1 - e^{-y})^{\theta}\right)^{\lambda_2}\left(1 - (1 - e^{-w})^{\theta}\right)^{\lambda_3}$$

$x, y > 0$ için olup

$$S^*(x) = \left(1 - (1 - e^{-x})^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}, \qquad x > 0$$

$$S^*(y) = \left(1 - (1 - e^{-y})^{\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}, \qquad y > 0$$

marjinal sağkalım fonksiyonları elde edilir. Dolayısıyla X ve Y standart DGE dağılımlarına sahiptir.

3.4.5. İki Değişkenli Üstel Frechet Dağılım

$G(x) = e^{-1/x^{\lambda}}$, $x > 0$ ve $\lambda > 0$ alınarak iki değişkenli üstel Frechet dağılımı önerilmiştir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). Ortak sağkalım fonksiyonu

$$S^*(x,y) = (1 - e^{-\theta/x^{\lambda}})^{\lambda_1}(1 - e^{-\theta/y^{\lambda}})^{\lambda_2}(1 - e^{-\theta/w^{\lambda}})^{\lambda_3}, \qquad x, y > 0$$

olup marjinal fonksiyonları

$$S^*(x) = \left(1 - e^{-\theta/x^{\lambda}}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}$$

$$S^*(y) = \left(1 - e^{-\theta/y^{\lambda}}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}$$

olarak verilen üstel Frechet dağılımlarıdır.

3.4.6. İki Değişkenli Gumbel Dağılım

Son olarak $\mu \in$ R konum parametreli $G(x) = 1 - \exp(-\exp(x-\mu))$, $x \in$ R fonksiyonu ele alınsın. (X, Y) verilmişken ortak sağkalım fonksiyonu

$$S^*(x,y) = (1-(1-\exp(-e^{x-\mu}))^{\theta})^{\lambda_1}(1-(1-\exp(-e^{y-\mu}))^{\theta})^{\lambda_2}$$
$$(1-(1-\exp(-e^{w-\mu}))^{\theta})^{\lambda_3}, \qquad x, y \in \mathrm{R}^2$$

olarak bulunur (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). Marjinal sağkalım fonksiyonları

$$S^*(x) = (1-(1-\exp(-e^{x-\mu}))^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3},$$

$$S^*(y) = (1-(1-\exp(-e^{y-\mu}))^{\theta})^{\lambda_2+\lambda_3}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonlar üstel Gumbel dağılımının sağkalım fonksiyonlarıdır. $\theta = 1$ için marjinaller μ konum parametresi ve $\lambda_1 + \lambda_3$, $\lambda_2 + \lambda_3$ ölçek parametreleri ile Gumbel dağılımına indirgenir.

3.5. Mutlak Sürekli BVK Dağılımı

Block ve Basu (1974), Block ve Basu üstel dağılımı olarak bilinen mutlak sürekli iki değişkenli üstel dağılımı elde etmiştir. Bu dağılım, MO iki değişkenli

üstel dağılımdan, singüler kısmı çıkarıp sadece mutlak sürekli kısmı hesaba katılarak ortaya çıkmıştır. Kundu ve Gupta (2010), MO iki değişkenli Weibull dağılımındaki singüler kısmı çıkararak elde edilen buradaki Block ve Basu iki değişkenli Weibull dağılımını çalışmışlardır. Mutlak sürekli iki değişkenli genelleştirilmiş üstel dağılım Kundu ve Gupta (2011) tarafından çalışılmış ve ortaya konulmuştur.

Block ve Basu (1974)'nun çalışmasına dayanarak, Barreto-Souza ve Lemonte (2013) mutlak sürekli BVK (BVK_{ac}) dağılımını önermiştir. Bu bölümde söz konusu dağılım ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

$(Y_1, Y_2) \sim \text{BVK}_{\text{ac}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ olsun. $(y_1, y_2) \in (0,1)^2$ için karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{y_1,y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} cf_k(y_1; \lambda_1, \theta) f_k(y_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta), & z_1 < z_2 \\ cf_k(y_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f_k(y_2; \lambda_2, \theta), & z_1 > z_2 \end{cases} \qquad (3.5)$$

olarak verilir. Burada $c = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ bir normalleştirme sabitidir. Eğer (Z_1, Z_2), BVK dağılımına sahipse $Z_1 \neq Z_2$ verilmişken (Z_1, Z_2), BVK_{ac} dağılımına sahiptir. Böylece BVK_{ac} dağılımından rastgele sayı üretmek için Algoritma 3.3 verilmiştir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Algoritma 3.3. BVK_{ac} dağılımından rastgele sayı üretilmesi.

1.Adım: $(Z_1, Z_2) \sim \text{BVK}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ türet.

2.Adım: Eğer $Z_1 = Z_2$ ise 1. adıma geri dön. Değilse (Z_1, Z_2) yi BVK_{ac} dağılımından rastgele bir sayı olarak al.

Şimdi Eşitlik (3.5) ile ilişkili olarak sağkalım fonksiyonu, marjinal ve koşullu dağılımları, çarpım momentleri incelenecektir.

Önerme 3.10. (Y_1, Y_2) Eşitlik (3.5)'te verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rastgele bir vektör olsun. İlgili sağkalım fonksiyonu

$$S_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y_1; \lambda_1, \theta) S_K(y_2; \lambda_2, \theta) S_K(y; \lambda_3, \theta) - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta).$$

$y = \max(y_1, y_2)$ iken marjinal sağkalım fonksiyonları ise

$$S_{Y_1}(y_1) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y_1; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

ve

$$S_{Y_2}(y_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} S_K(y_2; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

olarak hesaplanır (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.11. Önerme 3.10'daki sağkalım fonksiyonları ile ilişkili olan marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$f_{Y_1}(y_1) = c f_k(y_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - \frac{c\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_k(y_1; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

$y_1 \in (0,1)$ için ve

$$f_{Y_2}(y_2) = cf_k(y_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - \frac{c\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_k(y_2; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

$y_2 \in (0,1)$ için olarak verilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.12. $(Y_1, Y_2) \sim \text{BVK}_{\text{ac}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ olsun. $Y_2 = y_2$ verilmişken Y_1 in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_1|Y_2=y_2}(y_1) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3(1-(1-{y_2}^{\theta})^{\lambda_1})} f_k(y_1; \lambda_1, \theta), & z_1 < z_2 \\ \dfrac{\lambda_2(1-{y_2}^{\theta})^{-\lambda_3}}{\lambda_2 + \lambda_3(1-(1-{y_2}^{\theta})^{\lambda_1})} f_k(y_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta), & z_1 > z_2 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.13. (Y_1, Y_2), BVK_{ac} dağılımına sahip rastgele bir vektör olsun.

i) $\min(Y_1, Y_2) \sim K(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$,
ii) $Y_1|\{Y_1 < Y_2\} \sim K(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$,
iii) $Y_2|\{Y_2 < Y_1\} \sim K(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$,
iv) $P(Y_1 < Y_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

eşitlikleri geçerlidir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Önerme 3.14. $(Y_1, Y_2) \sim \text{BVK}_{\text{ac}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ rastgele değişkeninin çarpım momenti

$$E({Y_1}^r {Y_2}^s) = c(\lambda_2+\lambda_3)\theta\Gamma(\lambda_1+1)g(\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3,\theta) + c\lambda_2\theta\Gamma(\lambda_1+\lambda_3+1)g\left\{B\left(\frac{S}{\theta}+1,\lambda_2\right)g(\lambda_1+\lambda_3,0,\theta) - g(\lambda_1+\lambda_3,\lambda_2,\theta)\right\}$$

ve Y_1 ve Y_2 nin marjinal momentleri

$$E({Y_1}^r) = c\left\{(\lambda_1+\lambda_3)B\left(\frac{r}{\theta}+1,\lambda_1+\lambda_3\right) - \lambda_3 B\left(\frac{r}{\theta}+1,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)\right\}$$

ve

$$E({Y_2}^s) = c\left\{(\lambda_2+\lambda_3)B\left(\frac{S}{\theta}+1,\lambda_2+\lambda_3\right) - \lambda_3 B\left(\frac{S}{\theta}+1,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)\right\}$$

olarak verilir (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013).

Şimdi bir BVK_{ac} dağılımından bir mutlak sürekli iki değişkenli dağılımlar sınıfının nasıl elde edilebileceği tartışılacaktır. G, Bölüm 3.4'te tanımlanmış kümülatif dağılım fonksiyonu olsun.

$$S^t(t_1,t_2) = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}S_k(G(t_1);\lambda_1,\theta)S_k(G(t_2);\lambda_2,\theta)S_k(G(t_1);\lambda_3,\theta) - \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}S_k(G(t);\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\theta),$$
$$t = \max(t_1,t_2) \text{ ve } (t_1,t_2) \in A^2$$

sağkalım fonksiyonundan yeni bir iki değişkenli dağılım sınıfı elde edilebilir. Örneğin, $G(x) = 1-e^{-x^\gamma},\ x>0$ ve $\theta = 1$ iken

$$S^t(t_1,t_2)=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 {t_1}^{\gamma}-\lambda_2 {t_2}^{\gamma}-\lambda_3 t^{\gamma}}-\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t^{\gamma}}$$

sağkalım fonksiyonu bulunur. Bu sağkalım fonksiyonu Block ve Basu iki değişkenli Weibull dağılımının sağkalım fonksiyonuna tekabül eder. Bu dağılım Kundu ve Gupta (2010) tarafından çalışılmıştır. $\gamma=1$ durumu ise Block ve Basu iki değişkenli üstel dağılıma karşılık gelir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ MO TİPİ OMEGA DAĞILIMI

4.1. Tek Değişkenli Omega Dağılımı ve UEHL Dağılımı

İstatistikte yaşam süresi verilerini ve monoton tehlike hızını modellemede Weibull dağılımının yaygın bir kullanım alanı vardır. Ancak Weibull dağılımı küvet eğrisi tipindeki tehlike hızı modellemesinde kullanım için uygun değildir. Bu bağlamda Dombi vd. (2019) tarafından önerilen tek değişkenli omega dağılımı küvet eğrisi tipindeki tehlike hızı modellemesinde kullanıma uygundur.

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ d > 0 \text{ ve } \omega^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(\frac{d^{\beta}+x^{\beta}}{d^{\beta}-x^{\beta}}\right)^{\alpha d^{\beta}/2}$$

olmak üzere omega dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}\frac{d^{2\beta}}{d^{2\beta}-x^{2\beta}}\,\omega^{(-\alpha,\beta)}(x), \qquad 0 < x < d$$

ve kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - \omega^{(-\alpha,\beta)}(x), \qquad 0 < x < d$$

olarak verilir. Bu formüller özel bir fonksiyon içermemesi bakımından basit formüllerdir. Bunlar ayrıca herhangi bir üstel terim içermemektedir. Bu özellikler parametre tahmini gibi hesaplama prosedürlerinde dağılıma önemli bir avantaj sağlamaktadır. Buradaki α ve β parametreleri Weibull dağılımının parametrelerine benzer şekilde yorumlanabilir. d parametresinin dağılımın tanım kümesini belirlediği görülmektedir. Dağılımın tehlike hızı fonksiyonu monoton, sabit ve küvet şekillerine sahip olabilir. Dombi vd. (2019) asimptotik omega tehlike hızı

fonksiyonunun Weibull tehlike hızı fonksiyonu olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla asimptotik omega dağılımı Weibull dağılımının özel bir formudur. Daha sonra Okorie ve Nadarajah (2019) dağılımın ortalama, mod, medyan, varyans, r. moment, kantil fonksiyonları, çarpıklık ve basıklık ölçülerinin kapalı formda ifadelerini elde etmiştir.

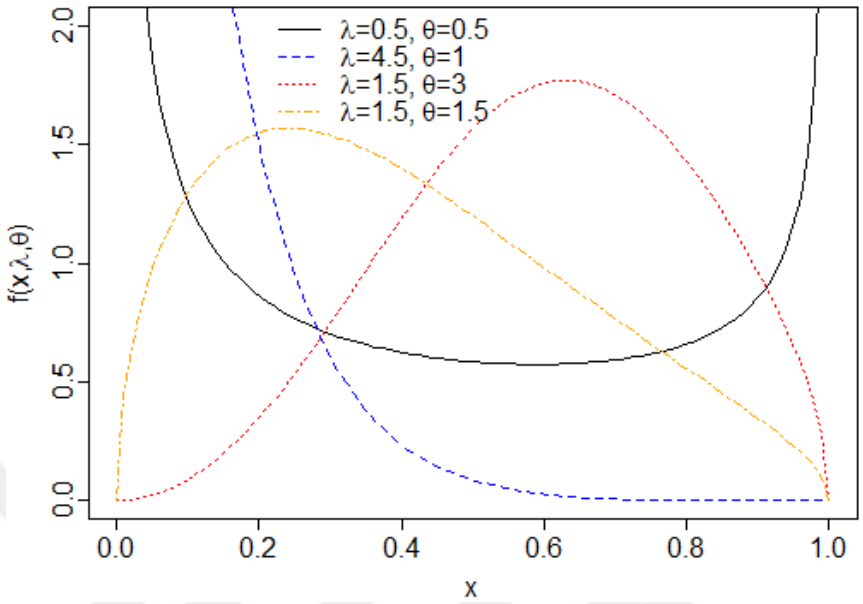
$$K(x;\beta) = \left(1 - \frac{2x^{\beta}}{x^{\beta} - d^{\beta}}\right)^{-d^{\beta}/2} , \qquad 0 < x < d$$

olmak üzere dağılımın sağkalım fonksiyonu $S(x;\alpha,\beta) = [K(x;\beta)]^{\alpha}$ formunda olduğu için omega dağılımı üstel, Pareto, Lomax ve Burr Tip XII gibi iyi bilinen sağkalım modellerini de içeren oransal tehlike hızı modellerinin sınıfına aittir (Popović vd., 2020).

Ayrıca $d = 1$ iken omega dağılımı birim üstel yarı lojistik dağılımdır (Unit Exponentiated Half Logistic-UEHL). Yani, X rastgele değişkeni üstel yarı lojistik dağılıma sahip iken $Z = e^{-X}$ in dağılımıdır. Üstel yarı lojistik dağılım bir başka faydalı olasılık dağılımıdır ve güvenilirlik teorisinde birçok uygulaması vardır (Kang ve Seo, 2011; Rao ve Naudi, 2013; Rastogi ve Tripathi, 2014; Seo ve Kang, 2015). UEHL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\lambda,\theta) = 2\lambda\theta x^{\theta-1}\frac{(1-x^{\theta})^{\lambda-1}}{(1+x^{\theta})^{\lambda+1}} , \qquad 0 < x < 1 \qquad (4.1)$$

biçimindedir. Bu dağılım UEHL(λ,θ) ile gösterilir. Çeşitli λ ve θ parametre değerleri için UEHL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1. λ ve θ parametrelerinin farklı değerleri için UEHL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

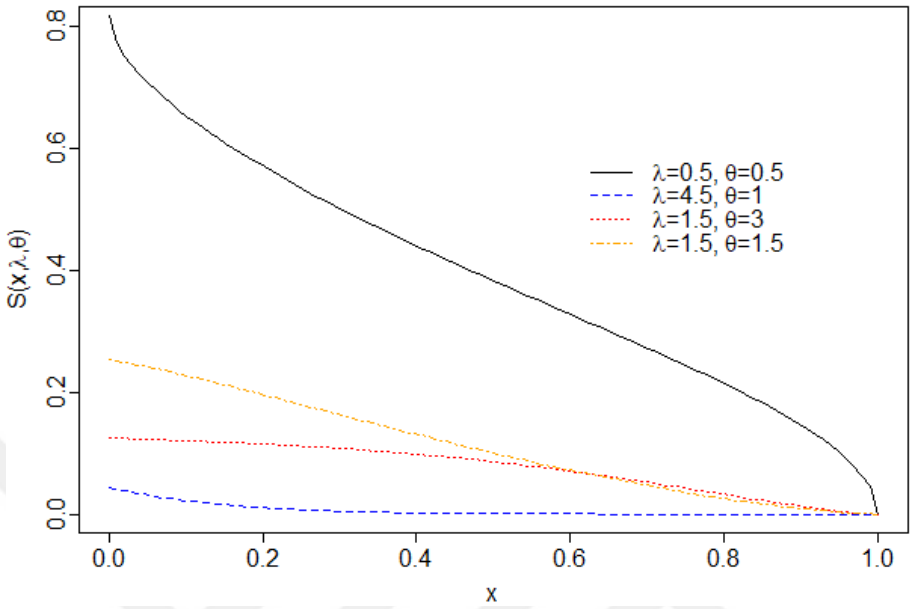
UEHL dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F(x;\lambda,\theta) = 1 - \left(\frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{\lambda}, \qquad 0 < x < 1 \tag{4.2}$$

ve sağkalım fonksiyonu

$$S(x;\lambda,\theta) = \left(\frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{\lambda}, \qquad 0 < x < 1 \tag{4.3}$$

olarak verilir. UEHL dağılımının çeşitli dağılım parametre değerlerine karşılık gelen sağkalım fonksiyonunun grafiği Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. λ ve θ parametrelerinin çeşitli değerleri için UEHL dağılımının sağkalım fonksiyonunun grafiği

4.2. İki Değişkenli Birim Üstel Yarı Lojistik Dağılım (BUEHL)

İstatistiksel güvenilirlik teorisinde sadece tek değişkenli veri kümelerine değil iki değişkenli veri kümelerine de rastlanmaktadır. Buna yaşam zamanları (X,Y) olan bağımlı iki bileşenden oluşan bir sistem örnek olarak verilebilir. Bu bölümde iki değişkenli veriyi modellemek için omega dağılımının $d = 1$ iken iki değişkenli versiyonu önerilmiştir. Bu dağılım MO tipi iki değişkenli birim üstel yarı lojistik dağılım olarak adlandırılmıştır (BUEHL). İki değişkenli dağılımı oluşturmak için çeşitli yöntemler bulunmaktadır (Balakrishnan ve Lai, 2009). Ancak kümülatif dağılım fonksiyonunun formu MO yönteminin kullanılmasının uygun olduğunu göstermektedir. Bu şekilde tanımlanan iki değişkenli dağılım, iki tane sürekli kısma ve bir tane singüler kısma sahiptir. Singüler kısım veri kümesinde eşit değerler olduğu zaman kullanılabilir. Örneğin, iki atık havuzunun ve üç bağımsız borunun olduğunu varsayalım. Borulardan birisi her iki havuzu da

doldurmak için kullanılsın. O zaman boruların havuza aktardığı minimum atık miktarı gözlemlenebilir. Başka bir örnek olarak bir hatta üç bağımsız radyo vericisi ve aralarında bazı mahalle sakinleri bulunduğunu varsayalım. Mahalle sakinleri tarafından vericiler arasında alınan minimum sinyaller ilgi çekici olabilir.

Önemli bir değişkenli dağılımların MO tipi iki değişkenli genelleştirmeleri literatürde yaygındır. Bu dağılımlara, üstel dağılım (Marshall ve Olkin, 1967) ve bunun genelleştirmeleri (Sarhan ve Balakrishnan, 2007; Kundu ve Gupta, 2009; Kundu ve Gupta, 2010), Weibull dağılımı (Kundu ve Dey, 2009), Kumaraswamy dağılımı (Barreto-Souza ve Lemonte, 2013), ters Weibull dağılımı (Muhammed, 2016), Dagum dağılımı (Popović vd., 2018), yarı lojistik dağılım (Alotaibi vd., 2021) ve genelleştirilmiş ters Kumaraswamy dağılımı (Muhammed, 2020) örnek olarak verilebilir.

MO tipi iki değişkenli modellerin çoğunun oluşturulması $(0,\infty)$ destek kümeli dağılımlar kullanılarak yapılmıştır. Destek kümesi $(0,1)$ olan dağılımlar kullanılarak çok az çalışma yapılmıştır. Bölüm 3'te verilen Kumaraswamy dağılımı buna örnektir. Modellenecek veri oranlardan oluştuğu zaman sınırlı destek kümesine sahip dağılımlar önem kazanmaktadır. Ayrıca bir araştırmacı elindeki veri miktarı sınırlı olduğu zaman önsel olarak bilgi sahibi olduğu sınırlı destek kümeli modelleri tercih edebilir. Böylece BUEHL dağılımı iki değişkenli hızları ve oranları modellemede diğer modellere alternatif olarak kullanılabilir.

Bu bölümde MO tipi BUEHL dağılımı tanımlanmış ve marjinal dağılımı, ortak sağkalım fonksiyonu ve çarpım momentleri gibi özellikleri incelenmiştir.

4.2.1. Ortak Sağkalım Fonksiyonu

Tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\lambda,\theta)$ nın sağkalım fonksiyonu Eşitlik 4.3'te verilmiştir. Şimdi $X_1, X_2, X_3 \sim UEHL(\lambda_i;\theta)$, $i = 1,2,3$ olsun. $Z_1 = \min(X_1, X_3)$ ve $Z_2 = \min(X_2, X_3)$ olarak tanımlansın. Ayrıca

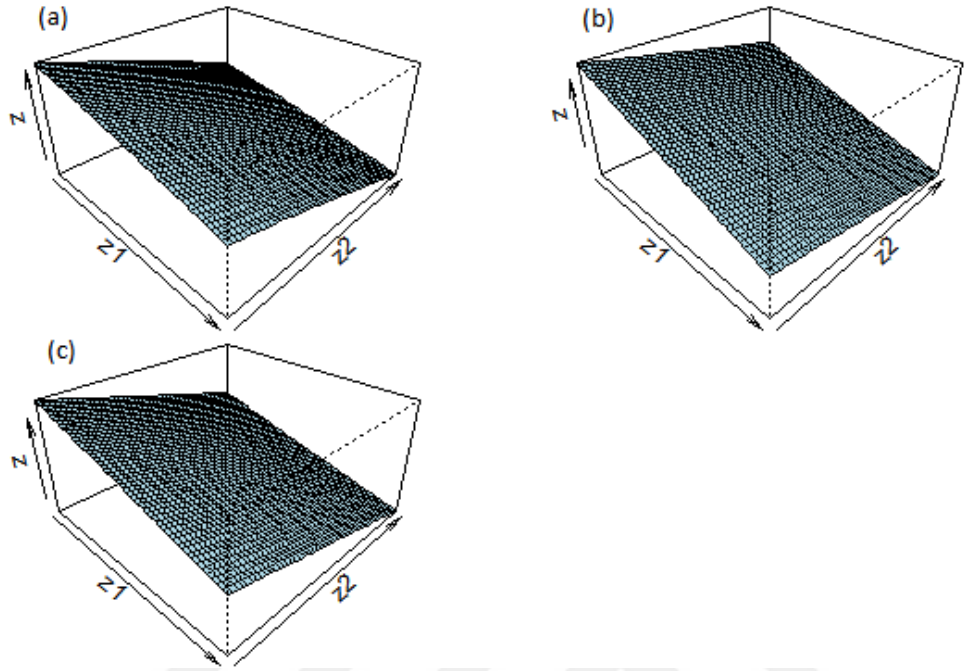
$w = \max(Z_1, Z_2)$ olsun. $(Z_1, Z_2) \sim \text{BUEHL}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ olmak üzere (Z_1, Z_2) nin sağkalım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} S_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) &= P(Z_1 > z_1, Z_1 > z_2) \\ &= P(\min(x_1, x_3) > z_1, \min(x_2, x_3) > z_2) \\ &= P(x_1 > z_1, x_3 > z_1, x_2 > z_2, x_3 > z_2) \\ &= P(x_1 > z_1, x_2 > z_2, x_3 > w) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} S_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) &= S_u(z_1; \lambda_1, \theta) S_u(z_2; \lambda_2, \theta) S_u(w; \lambda_3, \theta) \\ &= \left(\frac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1 - {z_2}^{\theta}}{1 + {z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{1 - w^{\theta}}{1 + w^{\theta}}\right)^{\lambda_3}, \; z_1, z_2 \in (0,1)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Şekil 4.3'te BUEHL dağılımının ortak sağkalım fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Şekil 4.3. Farklı $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ parametre değerleri için BUEHL modelinin ortak sağkalım fonksiyonunun grafiği:
(a) (2.5,3.5,0.5,1.5), (b) (4.5,2.5,0.5,5) ve (c) (3.5,3.5,0.5,1).

4.2.2. Marjinal Dağılımlar

$(Z_1, Z_2) \sim$ BUEHL $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip olsun. Z_1 rastgele değişkenine karşılık gelen marjinal dağılım

$$\lim_{z_2 \to 0^+} S_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2)$$

$$= \lim_{z_2 \to 0^+} \left(\frac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1 - {z_2}^{\theta}}{1 + {z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{1 - w^{\theta}}{1 + w^{\theta}}\right)^{\lambda_3}$$

$$= \left(\frac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3}, \quad Z_1 \sim \text{UEHL}(\lambda_1 + \lambda_3, \theta)$$

olarak elde edilir. Ayrıca Z_2 rastgele değişkenine karşılık gelen marjinal dağılım

$$\lim_{z_1\to 0^+} S_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \lim_{z_1\to 0^+} \left(\frac{1-{z_1}^{\theta}}{1+{z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{1-w^{\theta}}{1+w^{\theta}}\right)^{\lambda_3}$$

$$= \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}, \quad Z_2 \sim \mathrm{UEHL}(\lambda_2+\lambda_3,\theta)$$

bulunur.

4.2.3. Marjinal Sağkalım Fonksiyonları

Z_1 rastgele değişkenine karşılık gelen marjinal sağkalım fonksiyonu

$$S_{Z_1}(z_1) = \lim_{z_2\to 0^+} S_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \left(\frac{1-{z_1}^{\theta}}{1+{z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}$$

ve Z_2 rastgele değişkenine karşılık gelen marjinal sağkalım fonksiyonu

$$S_{Z_2}(z_2) = \lim_{z_1\to 0^+} S_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.4. $\min(Z_1, Z_2)$ nin Dağılımı

$Z^* = \min(Z_1, Z_2)$ nin sağkalım fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
S_{Z^*} = P(\min(Z_1, Z_2) > y) &= P(Z_1 > y, Z_2 > y) \\
&= P(\min(X_1, X_3) > y, \min(X_2, X_3) > y) \\
&= P(X_1 > y, X_3 > y, X_2 > y, X_3 > y) \\
&= P(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y) \\
&= P(X_1 > y)P(X_2 > y)P(X_3 > y) \\
&= \left(\frac{1 - y^\theta}{1 + y^\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \qquad y \in (0,1)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Söz konusu sağ kalım fonksiyonu dağılım için tek olduğundan $\min(Z_1, Z_2) \sim \text{UEHL}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip olduğu görülür.

4.2.5. Ortak Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Teorem 4.1. (Z_1, Z_2), BUEHL dağılımına sahip iki değişkenli rastgele değişken olsun. (Z_1, Z_2) nin kümülatif dağılım fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
&F_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) \\
&= \begin{cases} F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - F(z_1;\ \lambda_1, \theta)[1 - F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta)], & 0 < z_1 < z_2 < 1 \\ F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - F(z_2;\ \lambda_2, \theta)[1 - F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta)], & 0 < z_2 < z_1 < 1 \\ F(z;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta), & 0 < z = z_1 = z_2 < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

İspat: $(Z_1, Z_2) \sim \text{BUEHL}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip iken (Z_1, Z_2) nin kümülatif dağılım fonksiyonu için

$$\begin{aligned} P(Z_1 > z_1) &= P(\min(x_1, x_3) < Z_1) \\ &= 1 - P(\min(x_1, x_3) > Z_1) \\ &= 1 - P(\min(x_1 > Z_1\,, x_3 > Z_1)) \\ &= 1 - \left(1 - F_{\lambda_1+\lambda_3}\right) = F_{\lambda_1+\lambda_3} \end{aligned}$$

eşitliğini kullanacağız.

1. Durum: $z_1 < z_2$ iken,

$$\begin{aligned} F_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) &= P(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2) + P(Z_1 < z_1) + P(Z_2 < z_2) - 1 \\ &= [1 - F(z_1;\ \lambda_1, \theta)][1 - F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta)] \\ &+ F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) + F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - 1 \\ &= 1 - F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - F(z_1;\ \lambda_1, \theta) \\ &+ F(z_1;\ \lambda_1, \theta)F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) + F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) \\ &+ F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - 1 \\ &= F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - F(z_1;\ \lambda_1, \theta) \\ &+ F(z_1;\ \lambda_1, \theta)F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \\ &= F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) \\ &- F(z_1;\ \lambda_1, \theta)[1 - F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. Durum: $z_1 > z_2$ iken,

$$
\begin{aligned}
F_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) &= P(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2) + P(Z_1 < z_1) + P(Z_2 < z_2) - 1 \\
&= [1 - F(z_2;\ \lambda_2, \theta)][1 - F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta)] \\
&+ F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) + F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - 1 \\
&= 1 - F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) - F(z_2;\ \lambda_2, \theta) \\
&+ F(z_2;\ \lambda_2, \theta)F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) + F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \\
&+ F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) + 1 \\
&= F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) - F(z_2;\ \lambda_2, \theta) \\
&+ F(z_2;\ \lambda_2, \theta)F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) \\
&= F(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \\
&- F(z_2;\ \lambda_2, \theta)[1 - F(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta)]
\end{aligned}
$$

bulunur.

3. Durum: $z_1 = z_2 = z$ durumu aşikardır.

4.2.6. Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Teorem 4.2. (Z_1, Z_2), BUEHL dağılımına sahip iken, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$
f_{z_1,z_2}(z_1,z_2) = \begin{cases} f_1(z_1,z_2), & 0 < z_1 < z_2 < 1 \\ f_2(z_1,z_2), & 0 < z_2 < z_1 < 1 \\ f_0(z), & 0 < z = z_1 = z_2 < 1 \end{cases}
$$

olup burada

$$
\begin{aligned}
f_1(z_1,z_2) &= f(z_1;\ \lambda_1, \theta) f(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \\
f_2(z_1,z_2) &= f(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f(z_2;\ \lambda_2, \theta) \\
f_0(z) &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f(z;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)
\end{aligned}
$$

olarak verilir.

İspat: Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmı için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun ikinci türevlerini alırız.

$z_1 < z_2$ iken,

$$F_{z_1,z_2}(z_1,z_2) = F(z_1;\ \lambda_1+\lambda_3,\theta) - F(z_1;\ \lambda_1,\theta) + F(z_1;\ \lambda_1,\theta)F(z_2;\ \lambda_2+\lambda_3,\theta)$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2) &= \frac{\partial^2}{\partial_{z_1}\partial_{z_2}} F_{z_1,z_2}(z_1,z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial_{z_1}}\left[\frac{\partial}{\partial_{z_2}} F_{z_1,z_2}(z_1,z_2)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial_{z_1}}[0-0+F(z_1;\ \lambda_1,\theta)f(z_2;\ \lambda_2+\lambda_3,\theta)] \\ &= f(z_1;\ \lambda_1,\theta)f(z_2;\ \lambda_2+\lambda_3,\theta) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $z_1 > z_2$ iken,

$$F_{z_1,z_2}(z_1,z_2) = F(z_2;\ \lambda_2+\lambda_3,\theta) - F(z_2;\ \lambda_2,\theta) + F(z_2;\ \lambda_2,\theta)F(z_2;\ \lambda_1+\lambda_3,\theta)$$

ve

$$\begin{aligned} f_2(z_1,z_2) &= \frac{\partial^2}{\partial_{z_1}\partial_{z_2}} F_{z_1,z_2}(z_1,z_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial_{z_2}}\left[\frac{\partial}{\partial_{z_1}} F_{z_1,z_2}(z_1,z_2)\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial_{z_2}}[0 - 0 + F(z_2;\ \lambda_2, \theta) f(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta)]$$
$$= f(z_2;\ \lambda_2, \theta) f(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta)$$

olarak hesaplanır. Şimdi f_{z_1, z_2} nin bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmasından faydalanarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun singüler kısmı elde edilebilir. $z_1 = z_2$ iken,

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^{z_2} f_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2}_{\text{I. durum: } z_1 < z_2} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{z_1} f_2(z_1, z_2) dz_2 dz_1}_{\text{II. durum: } z_1 > z_2} + \underbrace{\int_0^1 f_0(z) dz}_{\text{III. durum: } z_1 = z_2} = 1 \qquad (4.3)$$

I. Durum: $z_1 < z_2$ için,

$$\int_0^1 \int_0^{z_2} f_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \int_0^1 \int_0^{z_2} f(z_1;\ \lambda_1, \theta) f(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) dz_1 dz_2$$
$$= \int_0^1 (z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \left(\int_0^{z_2} f(z_1;\ \lambda_1, \theta) dz_1 \right) dz_2$$
$$= \int_0^1 f(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta) F(z_2;\ \lambda_1, \theta)\, dz_2$$
$$= \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3) \theta {z_2}^{\theta - 1} \frac{(1 - {z_2}^{\theta})^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}}{(1 + {z_2}^{\theta})^{\lambda_2 + \lambda_3 + 1}} \left(1 - \left(\frac{1 - {z_2}^{\theta}}{1 + {z_2}^{\theta}} \right)^{\lambda_1} \right) dz_2$$
$$= \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3) \theta {z_2}^{\theta - 1} \frac{\left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}}{(1 + {z_2}^{\theta})^{\lambda_2 + \lambda_3 + 1}} dz_2 \qquad (= A)$$
$$- \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3) \theta {z_2}^{\theta - 1} \frac{\left(1 - {z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1}}{(1 + {z_2}^{\theta})^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1}} dz_2 \qquad (= B)$$

olur. A integrali için değişken değiştirme metodunu kullanılır.

$u = {z_2}^{\theta}$olsun. $du = \theta {z_2}^{\theta-1} dz_2$, $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olur.

$$A = \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3)\theta {z_2}^{\theta-1} \frac{(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_2+\lambda_3+1}} dz_2$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3)\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\lambda_2+\lambda_3-1} \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$t = \frac{1-u}{1+u}$ olsun. $dt = \frac{-2}{(1+u)^2} du$, $t_0 = 1$ ve $t_1 = 0$ olup

$$A = \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3)\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\lambda_2+\lambda_3-1} \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$$= \int_1^0 2(\lambda_2 + \lambda_3)t^{\lambda_2+\lambda_3-1}\left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda_2 + \lambda_3)t^{\lambda_2+\lambda_3-1} dt = t^{\lambda_2+\lambda_3}\Big|_0^1 = 1$$

olarak hesaplanır.

B intregrali için yine değişken değiştirme metodunu kullanılır,

$u = {z_2}^{\theta}$olsun. $du = \theta {z_2}^{\theta-1} dz_2$, $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olur.

$$B = \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3)\theta {z_2}^{\theta-1} \frac{(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1}} dz_2$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_2 + \lambda_3)\frac{(1-u)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+u)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1}} \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$t = \frac{1-u}{1+u}$ olsun. $dt = \frac{-2}{(1+u)^2}du$, $t_0 = 1$ ve $t_1 = 0$ olup

$$B = \int_1^0 2(\lambda_2+\lambda_3)t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda_2+\lambda_3)t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}dt$$

$$= \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big|_0^1 = \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

olur. Böylece,

$$\int_0^1\int_0^{z_2} f_1(z_1,z_2)dz_1dz_2 = A - B = 1 - \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

elde edilir.

II. Durum: $z_1 > z_2$ için,

$$\int_0^1\int_0^{z_1} f_2(z_1,z_2)dz_2dz_1 = \int_0^1\int_0^{z_2} f(z_1;\,\lambda_1+\lambda_3,\theta)f(z_2;\,\lambda_2,\theta)dz_2dz_1$$

$$= \int_0^1 (z_1;\,\lambda_1+\lambda_3,\theta)\left(\int_0^{z_1} f(z_2;\,\lambda_2,\theta)dz_2\right)dz_1$$

$$= \int_0^1 f(z_1;\,\lambda_1+\lambda_3,\theta)F(z_1;\,\lambda_2,\theta)\,dz_1$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1}\frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}}\left(1-\left(\frac{1-{z_1}^{\theta}}{1+{z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_2}\right)dz_1$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1} \frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}} dz_1 \qquad (=C)$$

$$-\int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1} \frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1}} dz_1 \qquad (=D)$$

C integrali için değişken değiştirme metodunu kullanılır.

$u = {z_1}^{\theta}$olsun. $du = \theta {z_1}^{\theta-1} dz_1$, $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olur.

$$C = \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1} \frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}} dz_1$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3) \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1} \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$t = \frac{1-u}{1+u}$olsun. $dt = \frac{-2}{(1+u)^2} du$, $t_0 = 1$ ve $t_1 = 0$ olup

$$C = \int_1^0 2(\lambda_1+\lambda_3) t^{\lambda_1+\lambda_3-1} \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda_1+\lambda_3) t^{\lambda_1+\lambda_3-1} dt$$

$$= t^{\lambda_1+\lambda_3} \Big|_0^1 = 1$$

olarak hesaplanır. D integrali için de değişken değiştirme metodunu kullanılır.

$u = {z_1}^{\theta}$olsun. $du = \theta {z_1}^{\theta-1} dz_1$, $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ olur.

$$D = \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1} \frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1}} dz_1$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3)\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1} \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$t = \frac{1-u}{1+u}$ olsun. $dt = \frac{-2}{(1+u)^2} du$, $t_0 = 1$ ve $t_1 = 0$ olup

$$D = \int_1^0 2(\lambda_1+\lambda_3) t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}\left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda_1+\lambda_3) t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1} dt$$

$$= \frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} t^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Big|_0^1 = \frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

olur. O halde,

$$\int_0^1 \int_0^{z_1} f_2(z_1,z_2) dz_2 dz_1 = C - D = 1 - \frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

olarak elde edilir. A, B, C ve D integrallerinden elde edilen sonuçlar Denklem (4.3)'te yerine yazılırsa

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \int_0^1 f_0(z) dz = 1$$

bulunur. Buradan

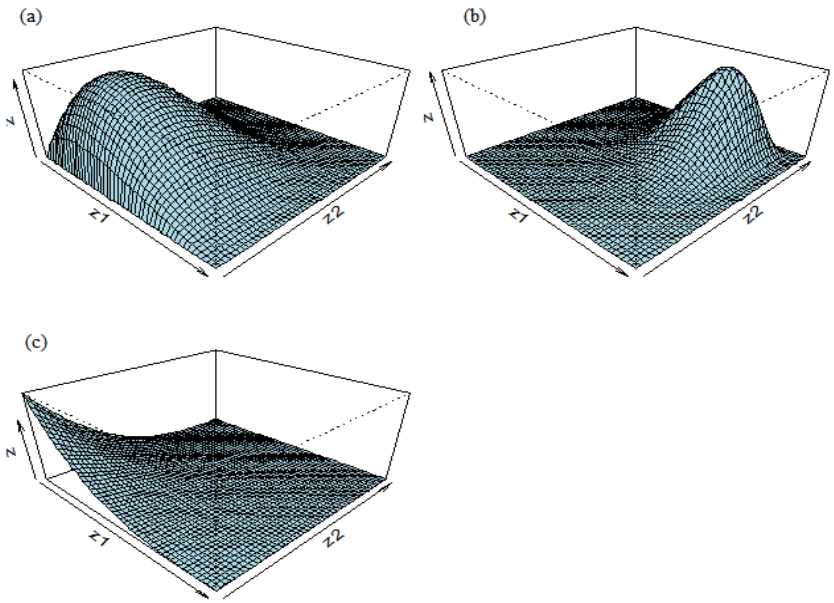
$$\int_0^1 f_0(z)dz = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

ve

$$f_0(z) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f(z;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta)$$

olarak III. durumdaki eşitlik elde edilir.

Görsel olarak bir bakış açısı sağlanması amacıyla BUEHL dağılımı yüzeyinin çeşitli parametre değerleri için grafiği Şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4. Farklı $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ parametre değerleri için BUEHL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği: (a) (2.5,3.5,0.5,1.5), (b) (4.5,2.5,0.5,5) ve (c) (3.5,3.5,0.5,1).

4.2.7. Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

(Z_1, Z_2), BUEHL dağılımına sahip iken ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z_1, z_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_a(z_1, z_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} f_s(z)$$

olup burada

$$f_a(z_1, z_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{cases} f(z_1;\ \lambda_1, \theta) f(z_2;\ \lambda_2 + \lambda_3, \theta), & z_1 < z_2 \\ f(z_1;\ \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f(z_2;\ \lambda_2, \theta), & z_1 > z_2 \end{cases}$$

ve

$$f_s(z) = f(z;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \beta), \qquad z = z_1 = z_2$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan $z_1 < z_2$ için

$$f_{Z_1|Z_2=z_2}(z_1) = \frac{f(z_1; \lambda_1, \theta) f(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)}{f(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \beta)} = f(z_1; \lambda_1, \theta)$$

$$= 2\lambda_1 \theta {z_1}^{\theta - 1} \frac{\left(1 - {z_1}^{\theta}\right)^{\lambda - 1}}{\left(1 + {z_1}^{\theta}\right)^{\lambda + 1}}$$

ve $z_1 > z_2$ için

$$f_{Z_1|Z_2=z_2}(z_1) = \frac{f(z_1; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) f(z_2; \lambda_2, \theta)}{f(z_2; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)}$$

$$= \frac{2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1}\frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}}.\,2\lambda_2\theta {z_2}^{\theta-1}\frac{(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_2-1}}{(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_2+1}}}{2(\lambda_2+\lambda_3)\theta {z_2}^{\theta-1}\frac{(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_2+\lambda_3-1}}{(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_2+\lambda_3+1}}}$$

$$= \frac{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1}\frac{(1-{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}}}{(\lambda_2+\lambda_3)\frac{(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_3}}{(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_3}}}$$

olarak elde edilir. Böylece BUEHL dağılımının koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. $(Z_1, Z_2) \sim \text{BUEHL}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip iken $Z_2 = z_2$ verilmişken Z_1 in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Z_1|Z_2=z_2}(z_1) = P_2 f_a(z_1|z_2) + (1-P_2) f_s(z_1|z_2)$$

olarak elde edilir. Burada

$$P_2 = 1 - \frac{\lambda_3\left(1-{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_1}}{(\lambda_2+\lambda_3)(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_1}},$$

$f_a(z_1|z_2)$

$$= \frac{1}{P_2}\begin{cases} 2\lambda_1\theta {z_1}^{\theta-1}\dfrac{\left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1-1}}{(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+1}}, & z_1 < z_2 \\ \dfrac{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\theta {z_1}^{\theta-1}\left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}\left(1+{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_3}}{(\lambda_2+\lambda_3)(1-{z_2}^{\theta})^{\lambda_3}(1+{z_1}^{\theta})^{\lambda_1+\lambda_3+1}} - \dfrac{\lambda_3\left(1-{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_1}}{(\lambda_2+\lambda_3)(1+{z_2}^{\theta})^{\lambda_1}}, & z_1 > z_2 \end{cases}$$

ve

$$f_s(z_1|z_2) = \begin{cases} 0, & z_1 < z_2 \\ 1, & z_1 > z_2 \end{cases}$$

şeklindedir.

4.2.8. Koşullu Sağkalım Fonksiyonu

Teorem 4.4. $(Z_1, Z_2) \sim \text{BUEHL}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip olsun. $Z_2 \geq z_2$ verilmişken Z_1 in koşullu sağkalım fonksiyonu

$$S_{Z_1|Z_2 \geq z_2}(z_1) = P(Z_1 > z_1 | Z_2 \geq z_2)$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1}, & z_1 < z_2 \\ \left(\dfrac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3} \left(\dfrac{1 - {z_2}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{-\lambda_3}, & z_1 \geq z_2 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

İspat: $z_1 < z_2$ iken

$$S_{Z_1|Z_2 \geq z_2}(z_1) = \frac{S(z_1, z_2)}{S(Z_2 = z_2)} = \frac{\left(\frac{1-{z_1}^{\theta}}{1+{z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_3}}{\left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{1-{z_2}^{\theta}}{1+{z_2}^{\theta}}\right)^{\lambda_3}}$$

$$= \left(\frac{1 - {z_1}^{\theta}}{1 + {z_1}^{\theta}}\right)^{\lambda_1}$$

ve $z_1 \geq z_2$ iken

$$S_{Z_1|Z_2\geq z_2}(z_1) = \frac{\left(\frac{1-z_1\theta}{1+z_1\theta}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{1-z_2\theta}{1+z_2\theta}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{1-z_1\theta}{1+z_1\theta}\right)^{\lambda_3}}{\left(\frac{1-z_2\theta}{1+z_2\theta}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{1-z_2\theta}{1+z_2\theta}\right)^{\lambda_3}}$$

$$= \left(\frac{1-z_1\theta}{1+z_1\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}\left(\frac{1-z_2\theta}{1+z_2\theta}\right)^{-\lambda_3}$$

olarak hesaplanır.

4.2.9. BUEHL Dağılımının Kopula Yöntemi ile Tanımlanması

BUEHL dağılımı kopula yaklaşımı kullanılarak da elde edilebilir. $\bar{H}$, $\bar{F}$ ve $\bar{G}$ sürekli marjinal sağkalım fonksiyonları ile iki değişkenli bir sağkalım fonksiyonu ise o zaman Sklar teoreminden $\bar{H}(x,y) = C(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$ olacak şekilde bir $C:[0,1]^2 \to [0,1]$ tek fonksiyonu vardır. C fonksiyonu yaşam kopulası olarak adlandırılır. Literatürde tanımlanan kopulaların birçok formu vardır.

BUEHL dağılımı MO tipine sahip olduğundan normal olarak MO yaşam kopulası dağılımın üretilmesi için alternatif olarak kullanılır. $0 < u < 1$, $0 < v < 1$, $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$ olmak üzere

$$C(u,v) = uv \min(u^{-\beta_1}, v^{-\beta_2})$$

şeklinde tanımlanır. O halde BUEHL dağılımı

$$S_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = C\left[\left(\frac{1-z_1\theta}{1+z_1\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}, \left(\frac{1-z_2\theta}{1+z_2\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}\right],$$

$$\beta_1 = \lambda_3/(\lambda_1+\lambda_3) \; ve \; \beta_2 = \lambda_3/(\lambda_2+\lambda_3)$$

olarak elde edilir.

4.2.10. Marjinal ve Çarpım Momentleri

Öncelikle dağılımın marjinal momentlerini bulalım. Okorie ve Nadarajah (2019)'da verilen tek değişkenli sonuçları kullanarak BUEHL dağılımının iki bileşeninin *r*. momentleri şu şekilde hesaplanır:

$$E(Z_1^r) = \int_0^1 z_1^r \, 2(\lambda_1+\lambda_3)\theta z_1^{\theta-1} \frac{\left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{\left(1+{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}} dz_1$$

$$= \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3) z_1^r \frac{\left(1-{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}}{\left(1+{z_1}^{\theta}\right)^{\lambda_1+\lambda_3-1}} \theta z_1^{\theta-1} \, dz_1.$$

Değişken değiştirme metodu kullanılsın.

$u = {z_1}^{\theta}$ olsun. $du = \theta z_1^{\theta-1} dz_1$ olur. O halde

$$E(Z_1^r) = \int_0^1 2(\lambda_1+\lambda_3) u^{r/\theta} (1-u)^{\lambda_1+\lambda_3-1} (1+u)^{-\lambda_1-\lambda_3-1} du.$$

Burada

$$\int_0^u x^{v-1}(x+a)^{\lambda}(u-x)^{\mu-1} dx$$

$$= a^{\lambda} u^{\mu+v-1} B(\mu, v) \;\; {}_2F_1\left(-\lambda, v; \mu+v; -\frac{u}{a}\right),$$

$$\left[\left|\arg\left(\frac{u}{a}\right)\right| < \pi, \mathrm{Re}(\mu) > 0, \mathrm{Re}(v) > 0\right]$$

integrali kullanılsın (Gradshteyn ve Ryzhik, 2007).

$$E(Z_1^r) = 2(\lambda_1+\lambda_3)\int_0^1 u^{r/\theta}(1-u)^{\lambda_1+\lambda_3-1}(1+u)^{-\lambda_1-\lambda_3-1}du \left\{ \begin{array}{c} x=u, \lambda=-\lambda_1-\lambda_3-1 \\ v=\frac{r}{\theta}+1,\ \mu=\lambda_1+\lambda_3 \\ a=1 \end{array} \right.$$

$$= 2(\lambda_1+\lambda_3)\left(B\left(\lambda_1+\lambda_3,\frac{r}{\theta}+1\right)\ {}_2F_1\left(\lambda_1+\lambda_3+1,\frac{r}{\theta}+1;\lambda_1+\lambda_3+\frac{r}{\theta}+1;-1\right)\right)$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$E(Z_2^r) = \int_0^1 z_2^r\, 2(\lambda_2+\lambda_3)\theta z_2^{\theta-1}\frac{\left(1-{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3-1}}{\left(1+{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3+1}}dz_2$$

$$= 2(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^1 \theta z_2^{\theta+r-1}\left(1-{z_2}^{\theta}\right)^{\lambda_2+\lambda_3-1}\left(1+{z_2}^{\theta}\right)^{-\lambda_2-\lambda_3-1}dz_2$$

olup $u = {z_2}^{\theta}$ olsun. $du = \theta z_2^{\theta-1}dz_2$ yazılır. Böylece

$$E(Z_2^r) = 2(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^1 u^{\frac{r}{\theta}}(1-u)^{\lambda_2+\lambda_3-1}(1+u)^{-\lambda_2-\lambda_3-1}du.$$

İntegral formülü tekrar kullanılırsa

$$E(Z_2^r) = 2(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^1 u^{\frac{r}{\theta}}(1-u)^{\lambda_2+\lambda_3-1}(1+u)^{-\lambda_2-\lambda_3-1}du \left\{ \begin{array}{c} x=u,\ \lambda=-\lambda_2-\lambda_3-1 \\ v=\frac{r}{\theta}+1,\ \mu=\lambda_2+\lambda_3 \\ a=1 \end{array} \right.$$

$$= 2(\lambda_2+\lambda_3)\left(B\left(\lambda_2+\lambda_3,\frac{r}{\theta}+1\right)\ {}_2F_1\left(\lambda_2+\lambda_3+1,\frac{r}{\theta}+1;\lambda_2+\lambda_3+\frac{r}{\theta}+1;-1\right)\right)$$

elde edilir. Burada, $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonudur. ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyondur ve

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(z)_k = z(z+1)\cdots(z+k-1)$ artan faktöriyeldir ve *n* bir pozitif tamsayıdır. Çarpım momentleri için

$$E(Z_1^r Z_2^s) = \int_0^1\int_0^{z_2} {z_1}^r {z_2}^s f_1(z_1,z_2)dz_1dz_2 + \int_0^1\int_0^{z_1} {z_1}^r {z_2}^s f_2(z_1,z_2)dz_2dz_1 + \int_0^1 z^{r+s} f_0(z)dz \qquad (4.4)$$

eşitliği kullanılır. Eşitlik (4.4)'deki üç integral kullanılarak çarpım momenti bulunabilir. İlk integral Gradshteyn ve Ryzhik (2007) - Eşitlik (3.194.1) formülünü ve binom açılımını kullanarak

$$\int_0^1 \int_0^{z_2} {z_1}^r {z_2}^s f_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

$$= 4\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{\lambda_1 - 1}{i} \binom{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}{j} (-1)^{i+j}$$

$$\times \frac{1}{r/\theta + i + 1} I(j)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$I(j) = \int_0^1 \frac{u^{(s+r+\theta(i+1))/\theta + j}}{(1+u)^{\lambda_2+\lambda_3+1}} \, {}_2F_1\left(\lambda_1 + 1, \frac{r}{\theta} + i + 1; \frac{r}{\theta} + i + 2; -u\right) du \quad (4.5)$$

şeklindedir. Ancak Eşitlik (4.5)'te verilen integral açık formda çözülemez. Dahası integralin sınırları değiştirilemez ve seri form açılımı bulunamaz. Benzer şekilde Eşitlik (4.4)'deki ikinci integral için

$$\int_0^1 \int_0^{z_1} {z_1}^r {z_2}^s f_2(z_1, z_2) dz_2 dz_1$$

$$= 4\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3) \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{\lambda_2 - 1}{i} \binom{\lambda_1 + \lambda_3 - 1}{j} (-1)^{i+j}$$

$$\times \frac{1}{s/\theta + i + 1} II(j)$$

ifadesi elde edilebilir. Burada

$$II(j) = \int_0^1 \frac{u^{(s+r+\theta(i+1))/\theta+j}}{(1+u)^{\lambda_1+\lambda_3+1}} \; {}_2F_1\left(\lambda_2+1, \frac{s}{\theta}+i+1; \frac{s}{\theta}+i+2; -u\right) du.$$

şeklindedir. Eşitlik (4.4)'deki son integral

$$\int_0^1 z^{r+s} f_0(z)dz = 2\lambda_3 B\left(\frac{r+s}{\theta}+1, \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right) \; {}_2F_1\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i+1, \frac{r+s}{\theta} + 1; \frac{r+s}{\theta}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i+1; -1\right)$$

biçimindedir.

Z_1ve Z_2 arasındaki bağımlılık ve korelasyon λ_3 parametresinden etkilenir. Özel olarak $\lim_{\lambda_3\to 0} S_{Z_1,Z_2} = S_{Z_1}S_{Z_2}$ olduğundan λ_3 sıfıra yaklaşırken Z_1ve Z_2 nin bağımsız olduğu sonucu çıkarılabilir. Ayrıca$\lim_{\lambda_3\to\infty} P(Z_1 = Z_2) = 1$ dir. Bu da λ_3 arttıkça Z_1ve Z_2 arasındaki korelasyonun arttığı anlamına gelir. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve θ nın çeşitli değerleri için BUEHL dağılımına sahip (Z_1, Z_2) rastgele değişkenleri arasındaki korelasyonlar Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve θ nın çeşitli değerleri için Z_1 ve Z_2 arasındaki korelasyonlar

			λ_3						
θ	λ_1	λ_2	0.1	0.3	0.7	2	5	10	20
1	1	1	0.0621	0.1609	0.2978	0.5246	0.7212	0.8349	0.9094
	1	2	0.0408	0.1100	0.2158	0.4208	0.6322	0.7711	0.8699
	1	3	0.0309	0.0846	0.1705	0.3518	0.5628	0.7164	0.8338
2	1	1	0.0704	0.1818	0.3343	0.5765	0.7668	0.8666	0.9282
	1	2	0.0479	0.1287	0.2506	0.4764	0.6875	0.8128	0.8961
	1	3	0.0371	0.1015	0.2031	0.4082	0.6242	0.7658	0.8664
3	1	1	0.0735	0.1897	0.3475	0.5937	0.7807	0.8758	0.9335
	1	2	0.0506	0.1357	0.2633	0.4952	0.7047	0.8251	0.9037
	1	3	0.0396	0.1079	0.2151	0.4275	0.6436	0.7806	0.8759

4.2.11. Rastgele Sayı Üretimi

BUEHL dağılımından rastgele (z_1, z_2) sayılarını üretmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılabilir. Eşitlik (4.2)'de verilen BUEHL kümülatif dağılım fonksiyonundan faydalanarak

$$F(x;\lambda,\theta) = 1 - \left(\frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{\lambda} = k \Rightarrow 1-k = \left(\frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{\lambda}$$

olup $1-k=u$ için $U \sim \text{Uniform}(0,1)$ olduğundan

$$u = \left(\frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{\lambda} \Rightarrow u^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1-x^{\theta}}{1+x^{\theta}} \Rightarrow$$

$$x^{\theta} = \frac{1-u^{\frac{1}{\lambda}}}{1+u^{\frac{1}{\lambda}}} \Rightarrow x = \left(\frac{1-u^{1/\lambda}}{1+u^{1/\lambda}}\right)^{1/\theta}.$$

Böylece BUEHL dağılımından (z_1, z_2) rastgele sayılarını üretmek için Algoritma 4.1 verilebilir.

Algoritma 4.1. BUEHL$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımından rastgele sayı üretilmesi.

1. Adım: Uniform$(0,1)$ den u_1,u_2, u_3 üret.

2. Adım:

$$x_1 = \left(\frac{1 - {u_1}^{1/\lambda_1}}{1 + {u_1}^{1/\lambda_1}}\right)^{1/\theta}, x_2 = \left(\frac{1 - {u_2}^{1/\lambda_2}}{1 + {u_2}^{1/\lambda_2}}\right)^{1/\theta}, x_3 = \left(\frac{1 - {u_3}^{1/\lambda_3}}{1 + {u_3}^{1/\lambda_3}}\right)^{1/\theta}.$$

3. Adım: $z_1 = \min(x_1, x_3)$ ve $z_2 = \min(x_2, x_3)$ elde et.

4.3. Parametre Tahmini

Bu bölümde BUEHL dağılımının tüm parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin eşitlikleri elde edilmiştir. Daha sonra büyük örneklem çıkarımı için bir yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca EM algoritması tipik bir MO tipi iki değişkenli dağılıma uygulanabildiği için olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonu yerine BUEHL modelinde EM algoritması alternatif olarak kullanılmıştır. Dahası parametrelerin belli önsel dağılımlara sahip olduğu varsayımı altında BUEHL dağılımının parametre tahmini için Bayes yöntemi ele alınmıştır.

4.3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$\{(z_{1i}, z_{2i}),\ i = 1,2,3, \dots, n\}$ veri kümesinin, parametre vektörü $\boldsymbol{\beta} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ olan iki değişkenli BUEHL dağılımı ile modellendiğini varsayılsın. $n = n_0 + n_1 + n_2$ olmak üzere

$$I = \{1,2,3, \dots, n\}, \quad I_0 = \{i \in I:\ z_{1i} = z_{2i} = z_i\},$$
$$I_1 = \{i \in I :\ z_{1i} < z_{2i}\}, \quad I_2 = \{i \in I:\ z_{1i} > z_{2i}\}$$

ve

$$|I_0| = n_0, \quad |I_1| = n_1, \quad |I_2| = n_2$$

notasyonları tanıtılsın. Burada $|I_j|$, $\{I_j,\ j = 0,1,2\}$ kümesinin kardinalitesidir. Böylece log-olabilirlik fonksiyonu bir skaler sabit çarpanı ile

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i \in I_1} \log f_1(z_{1i}, z_{2i}) + \sum_{i \in I_2} \log f_2(z_{1i}, z_{2i}) + \sum_{i \in I_3} \log f_0(z_i)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}) = {} & [n_0 + 2(n_1 + n_2)]\log\theta + n_0\log\lambda_3 + n_1\log\lambda_1 + n_2\log\lambda_2 \\ & + n_1\log(\lambda_2 + \lambda_3) + n_2\log(\lambda_1 + \lambda_3) \\ & + (\theta - 1)\left[\sum_{I_0} \log z_i + \sum_{I_1 U I_2} (\log z_{1i} + \log z_{2i})\right] \\ & + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1\right)\sum_{I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 1\right)\sum_{I_0} \log\left(1 + {z_i}^{\theta}\right) \\ & - (\lambda_1 + 1)\sum_{I_1} \log\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_3+1)\sum_{I_2}\log\left(1+{z_{1i}}^{\theta}\right)\\
&-(\lambda_2+\lambda_3+1)\sum_{I_1}\log\left(1+{z_{2i}}^{\theta}\right)\\
&-(\lambda_2+1)\sum_{I_2}\log\left(1+{z_{2i}}^{\theta}\right)\\
&+(\lambda_1-1)\sum_{I_1}\log\left(1-{z_{1i}}^{\theta}\right)\\
&+(\lambda_1+\lambda_3-1)\sum_{I_2}\log\left(1-{z_{1i}}^{\theta}\right)\\
&+(\lambda_2-1)\sum_{I_2}\log\left(1-{z_{2i}}^{\theta}\right)\\
&+(\lambda_2+\lambda_3-1)\sum_{I_1}\log\left(1-{z_{2i}}^{\theta}\right) \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Burada parametrelere göre kısmi türevler alınarak

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial\lambda_1}=\frac{n_1}{\lambda_1}+\frac{n_2}{\lambda_1+\lambda_3}&+\sum_{I_0}\log\left(1-{z_i}^{\theta}\right)\\
&-\sum_{I_0}\log\left(1+{z_i}^{\theta}\right)-\sum_{I_1UI_2}\log\left(1+{z_{1i}}^{\theta}\right)\\
&+\sum_{I_1UI_2}\log\left(1-{z_{1i}}^{\theta}\right)=0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_2} = \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \sum_{I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) - \sum_{I_0} \log\left(1 + {z_i}^{\theta}\right) - \sum_{I_1 U I_2} \log\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right) + \sum_{I_1 U I_2} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_3} = \frac{n_0}{\lambda_3} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} + \sum_{I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) - \sum_{I_0} \log\left(1 + {z_i}^{\theta}\right) - \sum_{I_1} \log\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right) + \sum_{I_1} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) + \sum_{I_2} \log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right) - \sum_{I_2} \log\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right) = 0$$

ve

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n_0 + 2(n_1 + n_2)}{\theta} + \sum_{I_0} \log z_i + \sum_{I_1 U I_2} (\log z_{1i} + \log z_{2i})$$
$$- \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1\right) \sum_{I_0} \frac{{z_i}^{\theta} \log z_i}{1 - {z_i}^{\theta}} - \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 1\right) \sum_{I_0} \frac{{z_i}^{\theta} \log z_i}{1 + {z_i}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_1 + 1) \sum_{I_1} \frac{{z_{1i}}^{\theta} \log z_{1i}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}} - (\lambda_2 + \lambda_3 + 1) \sum_{I_1} \frac{{z_{2i}}^{\theta} \log z_{2i}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_1 - 1) \sum_{I_1} \frac{{z_{1i}}^{\theta} \log z_{1i}}{1 - {z_{1i}}^{\theta}} - (\lambda_2 + \lambda_3 - 1) \sum_{I_1} \frac{{z_{2i}}^{\theta} \log z_{2i}}{1 - {z_{2i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_2 - 1) \sum_{I_2} \frac{{z_{2i}}^{\theta} \log z_{2i}}{1 - {z_{2i}}^{\theta}} - (\lambda_1 + \lambda_3 - 1) \sum_{I_2} \frac{{z_{1i}}^{\theta} \log z_{1i}}{1 - {z_{1i}}^{\theta}}$$
$$- (\lambda_2 + 1) \sum_{I_2} \frac{{z_{2i}}^{\theta} \log z_{2i}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}} - (\lambda_1 + \lambda_3 + 1) \sum_{I_2} \frac{{z_{1i}}^{\theta} \log z_{1i}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}}$$
$$= 0.$$

bulunur. Bu denklemlerin oluşturduğu denklem sistemi çözülerek en çok olabilirlik tahminlerine ulaşılır.

4.3.1.1. Büyük Örneklem Özellikleri

$\boldsymbol{\beta}$ nın $\text{Acov}(\boldsymbol{\beta})$ asimptotik varyans kovaryans matrisi beklenen Fisher bilgi matrisinin tersidir, yani $I_n(\boldsymbol{\beta}) = -E\left[\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right]$ olmak üzere $\text{Acov}(\boldsymbol{\beta}) = {I_n}^{-1}(\boldsymbol{\beta})$ dır. MO tipi iki değişkenli dağılımların çoğunda yapılabildiği gibi (Kundu ve Gupta, 2009; Barreto-Souza ve Lemonte, 2013; Popović vd., 2018) bu durumda beklenen Fisher bilgi matrisinin bileşenleri için kapalı formda bir ifade bulunabilir.

l log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci dereceden kısmi türevlerinin beklenen değerlerinin sonuçlarını bulabilmek için aşağıdaki teoremler

kullanılabilir. Teoremler kolayca ispatlanabileceği için ispatlarına yer verilmemiştir.

Teorem 4.5. $Z \sim \text{UEHL}(\lambda, \theta)$ dağılımına sahip olsun.

$$h_1(z) = \frac{z^\theta \ln z}{1 - z^{2\theta}}\,, h_2(z) = \frac{z^\theta \ln^2 z}{(1 - z^\theta)^2} \text{ ve } h_3(z) = \frac{z^\theta \ln^2 z}{(1 + z^\theta)^2}$$

fonksiyonları göz önüne alınsın.

$$E[h_1(Z)] = \frac{2\lambda}{\theta} I(\lambda)\,, E[h_2(Z)] = \frac{2\lambda}{\theta^2} II(\lambda) \text{ ve } E[h_3(Z)] = \frac{2\lambda}{\theta^2} III(\lambda)$$

beklenen değerleri bilinmektedir. Burada

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{u(1-u)^{\lambda-2}}{(1+u)^{\lambda+2}} \ln u \, du$$

$$II(\lambda) = \int_0^1 \frac{u(1-u)^{\lambda-3}}{(1+u)^{\lambda+1}} \ln^2 u \, du$$

$$III(\lambda) = \int_0^1 \frac{u(1-u)^{\lambda-1}}{(1+u)^{\lambda+3}} \ln^2 u \, du$$

şeklindedir.

Teorem 4.6. $h(z)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $V_1 \sim \text{UEHL}(\sum_{i=1}^3 \lambda_i\,, \theta)$, $V_2 \sim \text{UEHL}(\lambda_1 + \lambda_3, \theta)$ ve $V_3 \sim \text{UEHL}(\lambda_2 + \lambda_3, \theta)$ dağılımına sahip iken

$$E[h(Z_{1i}); i \in I_1] = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i} E[h(V_1)]$$

$$E[h(Z_{1i}); i \in I_2] = E[h(V_2)] - \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i} E[h(V_1)]$$

$$E[h(Z_i); i \in I_0] = \frac{\lambda_3}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i} E[h(V_1)]$$

$$E[h(Z_{2i}); i \in I_1] = E[h(V_3)] - \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i} E[h(V_1)]$$

$$E[h(Z_{2i}); i \in I_2] = \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i} E[h(V_1)]$$

beklenen değerleri elde edilir. l log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci dereceden kısmi türevlerini aldıktan sonra birim beklenen bilgi matrisi $I_1(\boldsymbol{\beta}) = K(\boldsymbol{\beta})$

$$K(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} K_{\lambda_1\lambda_1} & 0 & K_{\lambda_1\lambda_3} & K_{\lambda_1\theta} \\ 0 & K_{\lambda_2\lambda_2} & K_{\lambda_2\lambda_3} & K_{\lambda_2\theta} \\ K_{\lambda_1\lambda_3} & K_{\lambda_2\lambda_3} & K_{\lambda_3\lambda_3} & K_{\lambda_3\theta} \\ K_{\lambda_1\theta} & K_{\lambda_2\theta} & K_{\lambda_3\theta} & K_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

olarak verilir. Burada $I_n(\boldsymbol{\beta}) = nK(\boldsymbol{\beta})$dır. $K(\boldsymbol{\beta})$ matrisinin bileşenlerini elde etmek için beklenen değerin negatifi alınır. Teorem 4.5 ve 4.6'dan

$$K_{\lambda_1\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i},$$

$$K_{\lambda_2\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i},$$

$$K_{\lambda_3\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_3 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i},$$

$$K_{\lambda_1\lambda_3} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i},$$

$$K_{\lambda_2\lambda_3} = \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i},$$

$$K_{\lambda_1\theta} = \frac{4}{\theta \sum_{i=1}^{3} \lambda_i}\left\{\left[{\lambda_1}^2 + {\lambda_3}^2 - \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\right] I\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right) + \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\, I(\lambda_1+\lambda_3)\right\},$$

$$K_{\lambda_2\theta} = \frac{4}{\theta \sum_{i=1}^{3} \lambda_i}\left\{\left[{\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2 - \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\right] I\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right) + \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\, I(\lambda_2+\lambda_3)\right\},$$

$$K_{\lambda_3\theta} = \frac{4}{\theta \sum_{i=1}^{3} \lambda_i}\left\{\left[{\lambda_3}^2 - \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3) - \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\right] I\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right) + \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\, I(\lambda_1+\lambda_3) + \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\, I(\lambda_2+\lambda_3)\right\}$$

ve

$$K_{\theta\theta} = \frac{2}{\theta^2 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i} \Bigg\{ \lambda_3 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) + II(\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3 - 1) + II(\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 - 1) + III(\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3 + 1) + III(\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 + 1) + II\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\right)\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1\right)\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + {\lambda_3}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3\right)\Bigg] + III\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\right)\Big[{\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2 - \lambda_3(\lambda_2 + \lambda_1(4\lambda_2 + 1)) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)\Big]\Bigg\}$$

bileşenleri elde edilir.

Standart büyük örneklem prosedürlerinden, $n \to \infty \, iken \, \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N_4(\mathbf{0}, K(\boldsymbol{\beta})^{-1})$ yazılır. Burada $K(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ kovaryans matrisi $K(\boldsymbol{\beta})$ matrisinin tersidir. Dolayısıyla $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$asimptotik olarak dört boyutlu normal dağılıma sahiptir. Bu durum gerçek parametrelerin yaklaşık güven aralıklarının oluşturulmasında kullanılabilir.

4.3.2. EM Algoritması

MO iki değişkenli dağılımın, parametre tahminleri için EM algoritması geliştirilmesine uygun olduğu bilinmektedir (Kundu ve Dey, 2009; Barreto-Souza ve Lemonte, 2013). Bu yüzden BUEHL dağılımının parametre tahminlerini elde

etmek için EM algoritmasının kullanılması uygundur. İlgili literatür takip edilerek öncelikle,

$$\Delta_1=\begin{cases}0, & Z_1=X_0\\ 1, & Z_1=X_1\end{cases}\quad,\quad \Delta_2=\begin{cases}0, & Z_2=X_0\\ 2, & Z_2=X_2\end{cases}$$

rastgele değişkenlerini tanımlanır. Şimdi eğer $Z_1=Z_2$ ise $\Delta_1=\Delta_2=0$ dır. Diğer taraftan, $Z_1<Z_2$ veya $Z_1>Z_2$ ise (Δ_1,Δ_2) nin değerinin kesin olarak belirlenemeyeceği açıktır. Örneğin, $Z_1<Z_2$ ise (Δ_1,Δ_2) nin eşiti ya $(1,0)$ ya da $(1,2)$ dir. Bu yüzden I_1 ve I_2 indeks kümelerine ait olan gözlemler için bir kayıp veri problemi ortaya çıkar. I_1de $(z_1,z_2,u_1(\boldsymbol{\beta}))$ ve $(z_1,z_2,u_2(\boldsymbol{\beta}))$ psüdo gözlemleri bulunmaktadır. Burada $u_1(\boldsymbol{\beta})$ ve $u_2(\boldsymbol{\beta})$ psüdo gözlemlere atanan oransal kitlelerdir. Yani $u_1(\boldsymbol{\beta})$, $Z_1<Z_2$ verilmişken $(\Delta_1,\Delta_2)=(1,0)$ ın koşullu olasılığıdır ve $u_2(\boldsymbol{\beta})$, $Z_1<Z_2$ verilmişken $(\Delta_1,\Delta_2)=(1,2)$ nin koşullu olasılığıdır. Bazı hesaplamalardan sonra $u_1\equiv u_1(\boldsymbol{\beta})\equiv\lambda_3/(\lambda_2+\lambda_3)$ ve $u_2\equiv u_2(\boldsymbol{\beta})\equiv\lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3)$ olarak elde edilir. Benzer şekilde I_2 de $(z_1,z_2,v_1(\boldsymbol{\beta}))$ ve $(z_1,z_2,v_2(\boldsymbol{\beta}))$ psüdo gözlemleri bulunmaktadır. Burada $v_1\equiv v_1(\boldsymbol{\beta})\equiv\lambda_3/(\lambda_1+\lambda_3)$ ve $v_2\equiv v_2(\boldsymbol{\beta})\equiv\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_3)$ olarak elde edilir.

Psüdo log-olabilirlik fonksiyonu (Z_1,Z_2) nin log-olabilirlik katkısının yerine onun beklenen değeri yazılarak Eşitlik (4.6)'daki log-olabilirlik fonksiyonundan oluşturulur.

$$
\begin{aligned}
l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{I_0} \log f_o(z_i) \\
&+ u_1 \left\{ \sum_{I_1} \log f(z_{1i}; \lambda_1, \theta) \right. \\
&\left. + \sum_{I_1} \log[u_1 f(z_{2i}; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)] \right\} \\
&+ u_2 \left\{ \sum_{I_1} \log f(z_{1i}; \lambda_1, \theta) \right. \\
&\left. + \sum_{I_1} \log[u_2 f(z_{2i}; \lambda_2 + \lambda_3, \theta)] \right\} \\
&+ v_1 \left\{ \sum_{I_2} \log f(z_{2i}; \lambda_2, \theta) \right. \\
&\left. + \sum_{I_2} \log[v_1 f(z_{1i}; \lambda_1 + \lambda_3, \theta)] \right\} \\
&+ v_2 \left\{ \sum_{I_2} \log f(z_{2i}; \lambda_2, \theta) \right. \\
&\left. + \sum_{I_2} \log[v_2 f(z_{1i}; \lambda_1 + \lambda_3, \theta)] \right\}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu, algoritmanın E adımıdır. Bazı sadeleştirmelerden sonra

$$
\begin{aligned}
l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta}) = {} & \left(n_0 + 2(n_1 + n_2)\right)\log\theta + (n_1 + n_2 v_2)\log\lambda_1 \\
& + (n_2 + n_1 u_2)\log\lambda_2 + (n_0 + n_1 u_1 + n_2 v_1)\log\lambda_3 \\
& + (\theta - 1)\left[\sum_{I_0} \log z_i + \sum_{I_1 U I_2} (\log z_{1i} + \log z_{2i})\right] \\
& + (\lambda_1 - 1)\sum_{I_1} \log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right) \\
& + (\lambda_2 - 1)\sum_{I_2} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) \\
& + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1\right)\sum_{I_0} \log\left(1 - {z_i}^{\theta}\right) \\
& + (\lambda_2 + \lambda_3 - 1)\sum_{I_1} \log\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right) \\
& + (\lambda_1 + \lambda_3 - 1)\sum_{I_2} \log\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right) \\
& - (\lambda_2 + 1)\sum_{I_1 U I_2} \log\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right) \\
& - (\lambda_1 + 1)\sum_{I_1 U I_2} \log\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right) \\
& - \lambda_3\left[\sum_{I_1} \log\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right) + \sum_{I_2} \log\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)\right] \\
& - \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 1\right)\sum_{I_0} \log\left(1 + {z_i}^{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir.

Algoritmanın M adımında $l_{psüdo}(\boldsymbol{\beta})$ fonksiyonu bilinmeyen parametrelere göre maksimize edilir. Sabit bir θ için tahmin edicilerin çözümü

$$\widehat{\lambda_1}(\theta) = -\left(\frac{n_1 + n_2 v_2}{\sum_{I_0} \log\left(\frac{1-z_i{}^{\theta}}{1+z_i{}^{\theta}}\right) + \sum_{I_1 U I_2} \log\left(\frac{1-z_{1i}{}^{\theta}}{1+z_{1i}{}^{\theta}}\right)}\right)$$

$$\widehat{\lambda_2}(\theta) = -\left(\frac{n_2 + n_1 u_2}{\sum_{I_0} \log\left(\frac{1-z_i{}^{\theta}}{1+z_i{}^{\theta}}\right) + \sum_{I_1 U I_2} \log\left(\frac{1-z_{2i}{}^{\theta}}{1+z_{2i}{}^{\theta}}\right)}\right)$$

$$\widehat{\lambda_3}(\theta) = -\left(\frac{n_0 + n_1 u_1 + n_2 v_1}{\sum_{I_0} \log\left(\frac{1-z_i{}^{\theta}}{1+z_i{}^{\theta}}\right) + \sum_{I_1} \log\left(\frac{1-z_{2i}{}^{\theta}}{1+z_{2i}{}^{\theta}}\right) + \sum_{I_2} \log\left(\frac{1-z_{1i}{}^{\theta}}{1+z_{1i}{}^{\theta}}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial l_{psüdo}}{\partial \theta} = \frac{n_0 + 2(n_1 + n_2)}{\theta} + \xi(\theta) = 0 \qquad (4.7)$$

olup burada

$$\begin{aligned}\xi(\theta) = \sum_{I_0} \log z_i + \sum_{I_1 U I_2} (\log z_{1i} + \log z_{2i}) \\ + \sum_{I_1 U I_2} \frac{2\left(z_{1i}{}^{\theta} - \widehat{\lambda_1}(\theta)\right) z_{1i}{}^{\theta} \log z_{1i}}{1 - z_{1i}{}^{2\theta}} \\ + \sum_{I_1 U I_2} \frac{2\left(z_{2i}{}^{\theta} - \widehat{\lambda_2}(\theta)\right) z_{2i}{}^{\theta} \log z_{2i}}{1 - z_{2i}{}^{2\theta}} \\ + \sum_{I_0} \frac{2\left(z_i{}^{\theta} - \sum_{i=1}^{3} \widehat{\lambda_\iota}(\theta)\right) z_i{}^{\theta} \log z_i}{1 - z_i{}^{2\theta}} \\ - \sum_{I_1} \frac{2\widehat{\lambda_3}(\theta) z_{2i}{}^{\theta} \log z_{2i}}{1 - z_{2i}{}^{2\theta}} - \sum_{I_2} \frac{2\widehat{\lambda_3}(\theta) z_{1i}{}^{\theta} \log z_{1i}}{1 - z_{1i}{}^{2\theta}}.\end{aligned}$$

olarak verilir. Eşitlik (4.7)'den, $\eta(\theta) = -[n_0 + 2(n_1 + n_2)]/\xi(\theta)$ olmak üzere $\theta = \eta(\theta)$ sabit nokta tipi eşitliği geçerlidir. Sonuç olarak EM algoritmasının adımları Algoritma 4.2'deki gibi verilebilir.

Algoritma 4.2. BUEHL$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ dağılımının parametreleri için EM algoritması

1. Adım: Başlangıç değerleri ${\lambda_1}^{(0)}, {\lambda_2}^{(0)}, {\lambda_3}^{(0)}$ve $\theta^{(0)}$.

2. Adım: $i = 1,2, \dots, N$ veya $\left|\theta^{(i)} - \theta^{(i+1)}\right| < \varepsilon$ için tekrar et

(a) u_1, u_2, v_1ve v_2 yi ${\lambda_1}^{(i-1)}, {\lambda_2}^{(i-1)}, {\lambda_3}^{(i-1)}$ kullanarak hesapla.

(b) ${\lambda_1}^{(i)} = \widehat{\lambda_1}\left(\theta^{(i-1)}\right)$, ${\lambda_2}^{(i)} = \widehat{\lambda_2}\left(\theta^{(i-1)}\right)$, ${\lambda_3}^{(i)} = \widehat{\lambda_3}\left(\theta^{(i-1)}\right)$ değerlerini hesapla.

(c) $\theta^{(i)} = \eta(\theta^{(i-1)})$ olarak ata.

Algoritmanın adımları yakınsama sağlanana kadar devam eder. Durdurma kuralı olarak yeterince büyük bir N veya $\varepsilon = 10^{-4}$ gibi küçük bir ε sayısı seçilebilir.

4.3.3. Bayes Tahmini

MO tipi dağılımların parametrelerinin tahminleri Bayesyen bakış açısıyla elde edilebilir (Kundu ve Gupta, 2013). Bu bölümde BUEHL dağılımının parametrelerinin Bayes tahminlerinin elde edilmesi üzerinde durulmuştur. θ ortak parametresinin bilindiği varsayımı altında $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ parametrelerinin Bayes tahminlerini veren matematiksel ifadeler bulunmuştur. Söz konusu parametrelerin Bayes tahminleri iki farklı durumda incelenmiştir. Birinci durumda λ_1, λ_2 ve λ_3 parametrelerinin bağımsız gamma önsel dağılımına sahip olduğu varsayılmış ve Bayes tahminlerine ulaşılmıştır. İkinci durumda ise λ_1, λ_2 ve λ_3 parametrelerinin bağımsız olmadığı varsayılmıştır. Bu durumda $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ parametresinin

gamma önsel dağılımına, $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}\right)$ parametrelerinin ise Dirichlet dağılımına sahip olduğu kabul edilmiş ve λ_1, λ_2 ve λ_3 ün Bayes tahminleri kapalı formda ifade edilmiş ve Bayes tahminlerine ulaşmak için önem örneklemesi yönteminin adımları verilmiştir.

Öncelikle parametrelerin olabilirlik fonksiyonu

$$\mathrm{L} = \prod_{I_1} f(z_{1i}; \lambda_1, \theta) f(z_{2i}; \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \prod_{I_2} f(z_{2i}; \lambda_2, \theta) f(z_{1i}; \lambda_1 + \lambda_3, \theta) \prod_{I_0} f(z_i; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \theta) \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$= \prod_{I_1} 2\theta\lambda_1 {z_{1i}}^{\theta-1} \frac{\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + 1}} 2\theta(\lambda_2 + \lambda_3) {z_{2i}}^{\theta-1} \frac{\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}}{\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + \lambda_3 + 1}}$$

$$\prod_{I_2} 2\theta\lambda_2 {z_{2i}}^{\theta-1} \frac{\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 - 1}}{\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + 1}} 2\theta(\lambda_1 + \lambda_3) {z_{1i}}^{\theta-1} \frac{\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3 - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3 + 1}}$$

$$\prod_{I_0} 2\theta\lambda_3 {z_i}^{\theta-1} \frac{\left(1 - {z_i}^{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 1}}.$$

olup θ ortak parametresi biliniyorken,

$$L \propto {\lambda_1}^{n_1} (\lambda_2 + \lambda_3)^{n_1} {\lambda_2}^{n_2} (\lambda_1 + \lambda_3)^{n_2} {\lambda_3}^{n_0}$$

$$\prod_{I_1} \frac{\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + 1}} \frac{\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}}{\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + \lambda_3 + 1}}$$

$$\prod_{I_2} \frac{\left(1 - {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 - 1}}{\left(1 + {z_{2i}}^{\theta}\right)^{\lambda_2 + 1}} \frac{\left(1 - {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3 - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\lambda_1 + \lambda_3 + 1}}$$

$$\prod_{I_0} \frac{\left(1 - {z_i}^{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i - 1}}{\left(1 + {z_{1i}}^{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 1}}$$

şeklindedir. Burada

$$(\lambda_2 + \lambda_3)^{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} {\lambda_2}^{i} {\lambda_3}^{n_1 - i}$$

ve

$$(\lambda_1 + \lambda_3)^{n_2} = \sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_2}{j} {\lambda_1}^{j} {\lambda_3}^{n_2 - j}$$

binom açılımlarından yararlanarak

$$L \propto {\lambda_1}^{n_1} {\lambda_2}^{n_2} {\lambda_3}^{n_0} \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} {\lambda_2}^{i} {\lambda_3}^{n_1 - i} {\lambda_1}^{j} {\lambda_3}^{n_2 - j}$$

$$\exp\left\{ \lambda_1 \sum_{I_1 \cup I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{1i}}^{\theta}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}} \right) \right.$$

$$+ \lambda_2 \sum_{I_1 \cup I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{2i}}^{\theta}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}} \right)$$

$$+ \lambda_3 \left[\sum_{I_1} \log\left(\frac{1 - {z_{2i}}^{\theta}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}} \right) + \sum_{I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{1i}}^{\theta}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}} \right) \right]$$

$$\left. + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sum_{I_0} \log\left(\frac{1 - {z_i}^{\theta}}{1 + {z_i}^{\theta}} \right) \right\}$$

elde edilir. Şimdi

$$T_1 = \sum_{I_1 \cup I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{1i}}^{\theta}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}}\right),$$

$$T_2 = \sum_{I_1 \cup I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{2i}}^{\theta}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}}\right),$$

$$T_3 = \sum_{I_1} \log\left(\frac{1 - {z_{2i}}^{\theta}}{1 + {z_{2i}}^{\theta}}\right) + \sum_{I_2} \log\left(\frac{1 - {z_{1i}}^{\theta}}{1 + {z_{1i}}^{\theta}}\right)$$

ve

$$T_4 = \sum_{I_0} \log\left(\frac{1 - {z_i}^{\theta}}{1 + {z_i}^{\theta}}\right)$$

olarak alınsın. O zaman

$$L \propto \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j} {\lambda_1}^{n_1+j} {\lambda_2}^{n_2+i} {\lambda_3}^{n_0+n_1-i+n_2-j} e^{\lambda_1(T_1+T_4)+\lambda_2(T_2+T_4)+\lambda_3(T_3+T_4)}$$

olarak bulunur.

4.3.3.1. λ_i lerin Bağımsız Olduğu Durum için Bayes Tahmini

$\lambda_i,\ i = 1,2,3$ bağımsız ve gamma önsel dağılımlı olarak kabul edilsin. O halde

$$\pi_i(\lambda_i) = \frac{{b_i}^{a_i}}{\Gamma(a_i)} {\lambda_i}^{a_i - 1} e^{-b_i \lambda_i}, \qquad i = 1,2,3.$$

Burada a_1, a_2 ve a_3 e hiper parametreler denir. Bu parametreler simülasyon çalışmalarında ve gerçek veri modellerinde bilinen sabitler olarak alınır. D veri kümesini göstersin.

$$\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D) \propto \pi_{\ddot{o}}(\boldsymbol{\lambda})L(D|\boldsymbol{\lambda}), \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

olmak üzere $\pi_{\ddot{o}}(\boldsymbol{\lambda}|D)$ $\boldsymbol{\lambda}$ nın önsel dağılımını ve $\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D)$ $\boldsymbol{\lambda}$ nın sonsal dağılımını göstermektedir. Bu durumda

$$\pi_{\ddot{o}}(\boldsymbol{\lambda}) = \pi_1(\lambda_1)\pi_2(\lambda_2)\pi_3(\lambda_3)$$

ve

$$\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D) \propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j} \lambda_1^{\,a_1+n_1+j-1}\lambda_2^{\,a_2+n_2+i-1}\lambda_3^{\,n_0+n_1-i+n_2-j+a_3-1} e^{-\lambda_1(b_1-T_1-T_4)}e^{-\lambda_2(b_2-T_2-T_4)}e^{-\lambda_3(b_3-T_3-T_4)}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$f_{GA}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} \;\Rightarrow\; \frac{f_{GA}(x)\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} = x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D) \propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j} f_{GA(a_1+n_1+j,\,b_1-T_1-T_4)}(\lambda_1)$$

$$\frac{\Gamma(a_1+n_1+j)}{(b_1-T_1-T_4)^{a_1+n_1+j}} f_{GA(a_2+n_2+i,b_2-T_2-T_4)}(\lambda_2)$$
$$\frac{\Gamma(a_2+n_2+i)}{(b_2-T_2-T_4)^{a_2+n_2+i}} f_{GA(a_3+n-i-j,b_3-T_3-T_4)}(\lambda_3)$$
$$\frac{\Gamma(a_3+n-i-j)}{(b_3-T_3-T_4)^{a_3+n-i-j}}$$

ve

$$\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D) \propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} c_{ij} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)$$

olarak elde edilir. Burada

$$c_{ij} = \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j} \frac{\Gamma(a_1+n_1+j)}{(b_1-T_1-T_4)^{a_1+n_1+j}} \frac{\Gamma(a_2+n_2+i)}{(b_2-T_2-T_4)^{a_2+n_2+i}} \frac{\Gamma(a_3+n-i-j)}{(b_3-T_3-T_4)^{a_3+n-i-j}}.$$

Şimdi

$$w_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} c_{ij}}$$

olarak seçilirse

$$\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} = 1$$

olur. Böylece $\boldsymbol{\lambda}$ nün sonsal dağılımı gamma olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ağırlıklı toplamı olarak elde edilir ve

$$\pi_s(\boldsymbol{\lambda}|D) \propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)$$

olarak bulunur. SELF (Squared Error Loss Function – Karesel Kayıp Hata Fonksiyonu) altında λ_1, λ_2 ve λ_3 ün Bayes tahminleri için λ_1 in marjinal sonsal dağılımı

$$\begin{aligned}\pi_s(\lambda_1) &= \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_{\lambda_2}\int_{\lambda_3} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)\, d\lambda_2 d\lambda_3 \\ &= \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}(\lambda_1),\end{aligned}$$

λ_2 nin marjinal sonsal dağılımı

$$\begin{aligned}\pi_s(\lambda_2) &= \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_{\lambda_1}\int_{\lambda_3} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)\, d\lambda_1 d\lambda_3 \\ &= \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}(\lambda_2)\end{aligned}$$

ve λ_3 ün marjinal sonsal dağılımı

$$\pi_s(\lambda_3) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_{\lambda_1}\int_{\lambda_2} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)\, d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}\,(\lambda_3)$$

olarak elde edilir. λ_1 in beklenen değeri λ_1 in bayes tahminini verecektir. O halde

$$\hat{\lambda}_{1\beta} = \int_0^{\infty} \lambda_1\, \pi_s(\lambda_1) d\lambda_1$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}\,(\lambda_1) d\lambda_1$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_0^{\infty} \lambda_1\, f_{GA(a_1+n_1+j,\, b_1-T_1-T_4)}\,(\lambda_1) d\lambda_1$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \frac{a_1 + n_1 + j}{b_1 - T_1 - T_4}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\hat{\lambda}_{2\beta} = \int_0^{\infty} \lambda_2\, \pi_s(\lambda_2) d\lambda_2$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}\,(\lambda_2) d\lambda_2$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_0^{\infty} \lambda_2\, f_{GA(a_2+n_2+i,\, b_2-T_2-T_4)}\,(\lambda_2) d\lambda_2$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \frac{a_2 + n_2 + i}{b_2 - T_2 - T_4}$$

ve

$$\hat{\lambda}_{3\beta} = \int_0^{\infty} \lambda_3 \, \pi_s(\lambda_3) d\lambda_3$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_3 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}(\lambda_3) d\lambda_3$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \int_0^{\infty} \lambda_3 \, f_{GA(a_3+n-i-j, b_3-T_3-T_4)}(\lambda_3) d\lambda_3$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \frac{a_3 + n - i - j}{b_3 - T_3 - T_4}$$

olarak hesaplanır.

4.3.3.2. λ_i lerin Bağımsız Olmadığı Durum için Bayes Tahmini

λ_1, λ_2 ve λ_3 bağımsız kabul edilmesin ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ olsun. $\lambda \sim GA(a, b)$ olduğu varsayılsın. Yani λ nın önsel dağılımı

$$\pi_0(\lambda | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. Ayrıca $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}\right)$ nin ortak önsel dağılımını

$$\pi_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda} \middle| \lambda, a_1, a_2, a_3\right) = \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{a_1 - 1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{a_2 - 1} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^{a_3 - 1}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonlu Dirichlet olarak varsaymak makuldür. Burada

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ \lambda_3 = \lambda - \lambda_1 - \lambda_2$ ve hiper parametreler $a, b, a_1, a_2, a_3 > 0$ dır (Kundu ve Gupta, 2013). O zaman $\lambda,\ \frac{\lambda_1}{\lambda},\ \frac{\lambda_2}{\lambda}$ nin ortak önseli

$$\pi\left(\lambda, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda} \middle| a, b, a_1, a_2, a_3\right) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^{a_3 - 1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{a_1 - 1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{a_2 - 1}$$

olarak elde edilebilir ki bu dağılım gamma-Dirichlet ailesidir (Kundu ve Gupta, 2013).

O zaman $\lambda_1,\ \lambda_2$ ve λ_3 ün ortak önseli

$$\begin{aligned}
&\pi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | a, b, a_1, a_2, a_3) \\
&= \frac{b^a}{\lambda^a} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^{a_3 - 1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{a_1 - 1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{a_2 - 1} \lambda^{-2} \\
&= \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)}{\Gamma(a)} (b\lambda)^{a - a_1 - a_2 - a_3} \left(\frac{b^{a_3}}{\Gamma(a_3)} {\lambda_3}^{a_3 - 1} e^{-b\lambda_3}\right) \\
&\left(\frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} {\lambda_1}^{a_1 - 1} e^{-b\lambda_1}\right) \left(\frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} {\lambda_2}^{a_2 - 1} e^{-b\lambda_2}\right)
\end{aligned}$$

olup gamma yoğunluklarının bir karmasıdır. $a^* = a_1 + a_2 + a_3$ olsun. O zaman,

$$\pi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | a, b, a_1, a_2, a_3) = \frac{\Gamma(a^*)}{\Gamma(a)} (b\lambda)^{a - a^*} \prod_{i=1}^{3} \frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)} {\lambda_i}^{a_i - 1} e^{-b\lambda_i}$$

olarak bulunur. $a = a^*$ ise $\lambda_1,\ \lambda_2$ ve λ_3 bağımsızdır. θ biliniyorken sonsal dağılım,

$$\ell(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \theta, D) \propto \pi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | a, b, a_1, a_2, a_3) \ell(D | \alpha, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\propto \frac{\Gamma(a^*)}{\Gamma(a)}(b\lambda)^{a-a^*}\prod_{i=1}^{3}\frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)}{\lambda_i}^{a_i-1}e^{-b\lambda_i}$$

$${\lambda_1}^{n_1}{\lambda_2}^{n_2}{\lambda_3}^{n_3}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2}$$

$$\prod_{I_1}\left(\frac{1-{z_{1i}}^{\theta}}{1+{z_{1i}}^{\theta}}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{1-z_{2i}}{1+z_{2i}}\right)^{\lambda_2+\lambda_3}$$

$$\prod_{I_2}\left(\frac{1-{z_{2i}}^{\theta}}{1+{z_{2i}}^{\theta}}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{1-{z_{1i}}^{\theta}}{1+{z_{1i}}^{\theta}}\right)^{\lambda_1+\lambda_3}$$

$$\prod_{I_0}\left(\frac{1-{z_i}^{\theta}}{1+{z_i}^{\theta}}\right)^{\sum_{i:1}^{3}\lambda_i}$$

$$\propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}{\lambda_2}^{i+a_2-1+n_2}{\lambda_1}^{j+a_1-1+n_1}$$

$${\lambda_3}^{a_3-1+n_0+n_1+n_2-i-j}e^{-b\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}\lambda^{a-a^*}$$

$$\exp\left\{\lambda_1\sum_{I_1}\log\left(\frac{1-{z_{1i}}^{\theta}}{1+{z_{1i}}^{\theta}}\right)+(\lambda_2\right.$$

$$+\lambda_3)\sum_{I_1}\log\left(\frac{1-{z_{2i}}^{\theta}}{1+{z_{2i}}^{\theta}}\right)+\lambda_2\sum_{I_2}\log\left(\frac{1-{z_{2i}}^{\theta}}{1+{z_{2i}}^{\theta}}\right)+(\lambda_1$$

$$\left.+\lambda_3)\sum_{I_2}\log\left(\frac{1-{z_{1i}}^{\theta}}{1+{z_{1i}}^{\theta}}\right)+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\sum_{I_0}\log\left(\frac{1-{z_i}^{\theta}}{1+{z_i}^{\theta}}\right)\right\}$$

$$\propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\lambda^{a-a^*}{\lambda_1}^{j+a_1+n_1-1}e^{-\lambda_1(b-T_1-T_4)}$$

$${\lambda_2}^{i+a_2+n_2-1}e^{-\lambda_2(b-T_2-T_4)}{\lambda_3}^{a_3+n_1-i-j-1}e^{-\lambda_3(b-T_3-T_4)}$$

$$\propto \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\lambda^{a-a^*}f_{GA(i+a_2+n_2,b-T_1-T_4)}(\lambda_2)$$

$$f_{GA(j+a_1+n_1,b-T_1-T_4)}(\lambda_1)f_{GA(a_3+n-i-j,b-T_3-T_4)}(\lambda_3)$$

$$\frac{\Gamma(j+a_1+n_1)}{(b-T_1-T_4)^{j+a_1+n_1}}\frac{\Gamma(i+a_2+n_2)}{(b-T_2-T_4)^{i+a_2+n_2}}$$
$$\frac{\Gamma(a_3+n-i-j)}{(b-T_3-T_4)^{a_3+n-i-j}}$$
$$\propto \lambda^{a-a^*}\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} f_{GA}(\lambda_1) f_{GA}(\lambda_2) f_{GA}(\lambda_3)$$

olup burada

$$w_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} c_{ij}}$$

ve

$$c_{ij} = \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\frac{\Gamma(j+a_1+n_1)}{(b-T_1-T_4)^{j+a_1+n_1}}\frac{\Gamma(i+a_2+n_2)}{(b-T_2-T_4)^{i+a_2+n_2}}$$
$$\frac{\Gamma(a_3+n-i-j)}{(b-T_3-T_4)^{a_3+n-i-j}}.$$

$a = a^*$ ise λ_1, λ_2 ve λ_3 ün bağımsız olduğu durum ortaya çıkar. O zaman SELF altında Bayes tahmin edicileri $\hat{\lambda}_{1\beta}$, $\hat{\lambda}_{2\beta}$ ve $\hat{\lambda}_{3\beta}$ olur. $a \neq a^*$ ise Bayes tahmin edicileri açıkça elde edilemez. $u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, λ_i lerin herhangi bir fonksiyonu olsun. O zaman u fonksiyonunun Bayes tahmin edicileri için önem örneklemesi yöntemi kullanılır.

$$\ell(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\theta, D) \propto \lambda^{a-a^*}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2} f_{GA(a_1+n_1, b-T_1-T_4)}(\lambda_1)$$
$$f_{GA(a_2+n_2, b-T_2-T_4)}(\lambda_2) f_{GA(a_3+n_0, b-T_3-T_4)}(\lambda_3)$$

SELF altında u fonksiyonunun Bayes tahmin edicisi

$$\hat{u}_B = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\ell(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|\theta,D)d\lambda_1 d\lambda_2 \mathrm{d}\lambda_3}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ell(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|\theta,D)d\lambda_1 d\lambda_2 \mathrm{d}\lambda_3}.$$

şeklinde elde edilir.

Algoritma 4.3. BUEHL$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\theta)$ dağılımının parametrelerinin Bayes tahmini için önem örneklemesi

1. Adım:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \sim GA(a_1+n_1, b-T_1-T_4)\\ \lambda_2 \sim GA(a_2+n_2, b-T_2-T_4)\\ \lambda_3 \sim GA(a_3+n_0, b-T_3-T_4)\end{array}\right\} \text{üret.}$$

2. Adım: $\{(\lambda_{1i},\lambda_{2i},\lambda_{3i}), i = 1,2,\ldots,N\}$ üretmek için Adım 1'i tekrarla.

3. Adım: $h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \lambda^{a-a^*}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2}$ olmak üzere

$$\frac{\sum_{i=1}^N u(\lambda_{1i},\lambda_{2i},\lambda_{3i})h(\lambda_{1i},\lambda_{2i},\lambda_{3i})}{\sum_{i=1}^N h(\lambda_{1i},\lambda_{2i},\lambda_{3i})}$$

hesapla. Bu $\hat{u}_B$ nın bir yaklaşığıdır.

5. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Bu bölümde BUEHL tahmin edicisinin performansının incelenmesi ve elde edilen teorik sonuçların değerlendirilmesi amacıyla simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda karşılaştırmanın yapılabilmesi için log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonu, EM algoritması ve Bayes yöntemleri ile parametre tahminleri yapılmıştır. Simülasyon çalışmalarında Özbilen ve Genç (2022) makalesinden faydalanılmıştır. Ayrıca simülasyon çalışmalarında yapılan bütün hesaplamalar için R programı kullanılmıştır (R Core Team, 2020).

5.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri İçin Simülasyon Çalışması

BUEHL dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri için simülasyon çalışmalarının yapılabilmesi amacıyla bazı spesifik parametre değerleri için BUEHL dağılımından 50 ve 100 birimlik örneklem üretilmiştir. Tahmin denklemleri lineer olmadığından tahminlerin elde edilmesinde nümerik bir prosedür kullanılmıştır. Bazı bilgisayar paketleri bu tür lineer olmayan optimizasyon problemlerinin çözülmesini sağlayan algoritmalar içermektedir. Doğrudan maksimizasyon için R programının L-BFGS-B optimizasyon yöntemini (Byrd ve ark., 1995) kullanan optim fonksiyonundan faydalanılmıştır. Diğer yandan EM algoritması ile tahmin için Alt Bölüm 4.3.2'de verilen algoritma R programında kodlanmış ve çalıştırılmıştır. Algoritmanın az sayıda iterasyon sonunda yakınsama sağladığı görülmüştür. Bu bağlamda tahminlerin ortalaması ve karşılık gelen hata kareler ortalaması (MSE) Çizelge5.1'de rapor edilmiştir.

Çizelge 5.1. $\theta = 1$ iken farklı λ değerleri için doğrudan log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu ve EM algoritmasının simülasyon çalışmasının sonuçları: tahminlerin ortalaması ve parantez içinde MSE değerleri

				Doğrudan Maksimizasyon Sonuçları			
n	λ_1	λ_2	λ_3	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$
				1.045293	2.095201	3.108481	1.008700
50	1	2	3	(0.382614)	(0.626032)	(0.674845)	(0.087941)
				0.645633	0.762891	0.945392	1.038952
	0.6	0.7	0.9	(0.178079)	(0.213582)	(0.218191)	(0.120480)
				2.094164	0.603895	4.157664	1.009097
	2	0.5	4	(0.646664)	(0.267333)	(0.917810)	(0.083656)
				1.026216	2.067946	3.076974	1.006028
100	1	2	3	(0.270231)	(0.461794)	(0.516081)	(0.068864)
				0.621735	0.723296	0.925346	1.018622
	0.6	0.7	0.9	(0.121789)	(0.141362)	(0.151042)	(0.082200)
				2.094161	0.603891	4.157645	1.009095
	2	0.5	4	(0.646665)	(0.267330)	(0.917774)	(0.083657)
				EM Algoritması Sonuçları			
n	λ_1	λ_2	λ_3	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$
				1.045294	2.095214	3.108492	1.008702
50	1	2	3	(0.382607)	(0.626049)	(0.674843)	(0.087942)
				0.645633	0.762891	0.945392	1.038952
	0.6	0.7	0.9	(0.178079)	(0.213582)	(0.218190)	(0.120480)
				2.078533	0.564135	4.125473	1.010067
	2	0.5	4	(0.507857)	(0.192067)	(0.691861)	(0.067872)
				1.026217	2.067952	3.076977	1.006029
100	1	2	3	(0.270230)	(0.461800)	(0.516077)	(0.068866)
				0.621733	0.723295	0.925346	1.018621
	0.6	0.7	0.9	(0.121788)	(0.141361)	(0.151040)	(0.082198)
				2.078518	0.564129	4.125442	1.010063
	2	0.5	4	(0.507854)	(0.192063)	(0.691865)	(0.067875)

Çizelge 5.1'e göre parametre değerlerinin elde edilen tahminlere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Bütün tahmin ediciler parametrelerin değerlerini gerçek değerlerinden az bir miktar büyük tahmin etmiştir. Log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonunun sonuçları EM algoritmasından elde edilen sonuçlara oldukça yakındır. Bu durum EM algoritmasının model uydurmada log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonuna alternatif olarak kullanılabileceğini göstermektedir. Beklendiği gibi örneklem büyüklüğü arttıkça daha küçük MSE değerlerine ulaşılmaktadır.

5.2. Bayes Tahmin Edicileri İçin Simülasyon Çalışması

Bu bölümde BUEHL dağılımının parametrelerinin Bayes tahminleri ele alınmıştır. θ parametresi biliniyorken Bayes tahminleri için simülasyon çalışmalarının yapılabilmesi amacıyla bağımsız $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ parametrelerinin çeşitli değerleri için BUEHL dağılımından 50 ve 100 birimlik örneklemler üretilmiştir. Parametrelerin tahmininde kullanılmak üzere hiper parametreleri $a_1 = a_2 = a_3 = b = a = 0.001$ olan bağımsız ve gamma önsel dağılımlarından $N = 10000$ birimlik rastgele sayılar üretilmiştir. θ parametresinin değeri $\theta = 1$ olarak seçilmiştir. Simülasyonlarda örneklem hacmi 5000 birim olarak belirlenmiştir. Simülasyon sonuçları Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2. θ biliniyorken bağımsız λ_i ler için BUEHL dağılımının parametrelerinin Bayes tahminleri ve parantez içinde SELF değerleri $(\theta = 1)$

n	λ_1	λ_2	λ_3	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$
50	1	2	3	0.9922	2.0101	2.9404
				(0.3462)	(0.4877)	(0.5876)
	0.6	0.7	0.9	0.5910	0.6884	0.8498
				(0.1586)	(0.1735)	(0.2034)
	2	0.5	4	2.0257	0.4993	4.0228
				(0.5335)	(0.2585)	(0.6806)
100	1	2	3	0.9235	1.9550	2.6891
				(0.2575)	(0.3701)	(0.5295)
	0.6	0.7	0.9	0.5478	0.6491	0.7621
				(0.1267)	(0.1369)	(0.1947)
	2	0.5	4	2.0075	0.4792	3.8172
				(0.3817)	(0.1836)	(0.5364)

Çizelge 5.2'ye göre her iki örneklem hacminde de seçilen tüm parametre değerleri için Bayes tahminleri gerçek parametre değerlerine oldukça yakındır. Dolayısıyla Bölüm 4.3.3'te verilen önsel dağılım varsayımları altında BUEHL dağılımının parametrelerinin tahmini için Bayes tahmin yöntemi kullanışlı bir yöntemdir.

6. GERÇEK VERİ ANALİZLERİ

Bu bölümde BUEHL dağılımının performansı gerçek veri kümeleri üzerinde incelenmiştir. Performans karşılaştırmasının yapılabilmesi için ulusal futbol ligi (NFL) (Balakrishna ve Shiji, 2014; Csörgó ve Welsh, 1989; Kundu, Gupta; 2017) ve kilo kaybı (Fox ve Weisberg, 2020) veri kümeleri kullanılmıştır.

6.1. NFL Verisi

Bu bölümde NFL veri kümesinin analizi ele alınmıştır. Söz konusu veri kümesinin analizinde Özbilen ve Genç (2022) makalesinden faydalanılmıştır. Bu veri kümesi Z_1, kaleden topun ilk kez geçerek yapılan ilk skor için geçen oyun süresi ve Z_2, topun gol bölgesini ilk kez geçerek yapılan ilk skor için geçen oyun süresi olmak üzere iki boyutlu (Z_1, Z_2) gözlemlerinden oluşmaktadır. Z_1 ve Z_2 değişkenleri şu özelliklere sahiptir:

(a) $Z_1 < Z_2$ ise ilk skorun bir alan golü olduğu anlamına gelir.

(b) $Z_1 = Z_2$ ise ilk skorun dönüştürülmüş bir touchdown olduğu anlamına gelir. Burada touchdown, rakip takımın son çizgisinin topla beraber geçilmesi ile atılan goldür.

(c) $Z_1 > Z_2$ ise ilk skorun bir dönüştürülmemiş touchdown veya bir savunma sayısı olduğu anlamına gelir.

Bir touchdown ve bir dönüştürme denemesinden sonraki nokta arasında geçen oyun süresi bulunmadığı için doğal olarak beraberlik durumları ortaya çıkar ve gözardı edilemez. Dakika cinsinden skor zamanları iki ondalıklı olarak Çizelge 6.1'de verilmiştir. Ondalık kısımlar saniyeleri temsil etmektedir.

Çizelge 6.1. NFL veri kümesi

Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2
2.03	3.59	5.47	25.59	10.24	14.15
9.03	9.03	13.48	49.45	2.59	2.59
0.51	0.51	7.15	7.15	3.53	6.26
3.26	3.26	4.15	4.15	0.45	0.45
7.47	7.47	1.39	1.39	11.38	17.22
10.34	14.17	6.25	15.05	1.23	1.23
7.03	7.03	4.13	9.29	10.21	10.21
2.35	2.35	15.32	15.32	12.08	12.08
7.14	9.41	2.54	2.54	14.35	14.35
6.51	34.35	7.01	7.01	11.49	11.49
32.27	42.21	6.25	6.25	5.31	11.16
8.32	14.34	8.59	8.59	19.39	10.42
31.08	49.53	10.09	10.09	17.50	17.50
14.35	20.34	8.52	8.52	10.51	38.04

Değerlerin saat cinsinden elde edilebilmesi için tüm skorlar 60'a bölünmüştür. Bu durumda bütün değerler (0,1) aralığına düşmektedir. Sırasıyla Z_1, Z_2 ve $\min(Z_1, Z_2)$ için skorlar UEHL marjinal dağılımı ile uydurulmuştur. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri, Anderson-Darling (AD) test istatistiği ve *p*-değerleri Çizelge 6.2'de rapor edilmiştir. Buna göre UEHL dağılımının marjinal dağılımlar ve bunların minimumu için veri kümesini uydurmada kullanışlı olduğu görülmektedir.

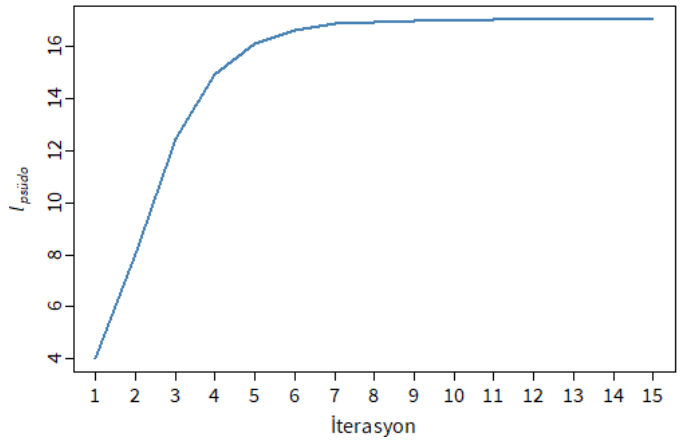
Çizelge 6.2. NFL veri kümesi için MLE'ler ve Anderson-Darling (AD) test istatistiğinin *p*-değeri

Değişken	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	p
Z_1	5.5187	1.3228	0.9128
Z_2	2.0905	1.0313	0.7368
$\min(Z_1, Z_2)$	5.8706	1.3404	0.8550

Uydurulmuş marjinal modeller iki değişkenli veri kümesini BUEHL dağılımıyla uydurmanın uygun olduğunu göstermektedir. BUEHL dağılımının uydurulması sürecinde R programı yardımıyla (R Core Team, 2020) hem EM algoritması hem de log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonu yöntemleri kullanılmıştır. EM algoritması için başlangıç değerleri, uydurulmuş marjinal modellerden faydalanılarak ${\lambda_1}^{(0)} = 0.3519$, ${\lambda_2}^{(0)} = 3.7801$, ${\lambda_3}^{(0)} = 1.7386$ ve $\theta^{(0)} = 1.2315$ olarak belirlenmiş ve Bölüm 4'te verilen Algoritma 4.2 çalıştırılmıştır. Algoritma 4.2 ile 15. iterasyonda yakınsama sağlanmış ve psüdo log-olabilirlik değerleri iterasyonlar ilerledikçe artmıştır. İterasyona bağlı olarak parametre değerlerindeki değişim Çizelge 6.3'te, iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği ise Şekil 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.3. NFL veri kümesi için EM algoritması iterasyonları

İterasyon Sayısı	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\theta}$	$l_{psüdo}$
1	1.740418	0.724595	1.701663	1.157294	3.992275
2	1.882084	0.362220	2.134695	1.194120	8.024122
3	1.826326	0.202781	2.247846	1.176562	12.47734
4	1.846220	0.141933	2.328450	1.184086	14.95348
5	1.835199	0.116137	2.344941	1.180545	16.13083
6	1.839347	0.106058	2.359032	1.182077	16.64916
7	1.837158	0.101813	2.361398	1.181363	16.86766
8	1.838013	0.100156	2.363870	1.181674	16.95789
9	1.837576	0.099455	2.364193	1.181530	16.99475
10	1.837751	0.099183	2.364630	1.181594	17.00976
11	1.837663	0.099067	2.364669	1.181564	17.01586
12	1.837699	0.099023	2.364748	1.181577	17.01834
13	1.837682	0.099003	2.364751	1.181571	17.01934
14	1.837689	0.098996	2.364765	1.181574	17.01975
15	1.837686	0.098993	2.364765	1.181573	17.01991



Şekil 6.1. NFL veri kümesi için EM algoritmasının iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği

Son olarak sonuçlar iki farklı Marshall-Olkin tipi dağılım ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırılan dağılımlardan birincisi Bölüm 3'te Önerme 3.3 ile verilen iki değişkenli Kumaraswamy dağılımıdır. Diğer dağılım ise $f(x;\lambda) = 2\lambda(1-x)x^{\lambda-1}(2-x)^{\lambda-1}$ olmak üzere

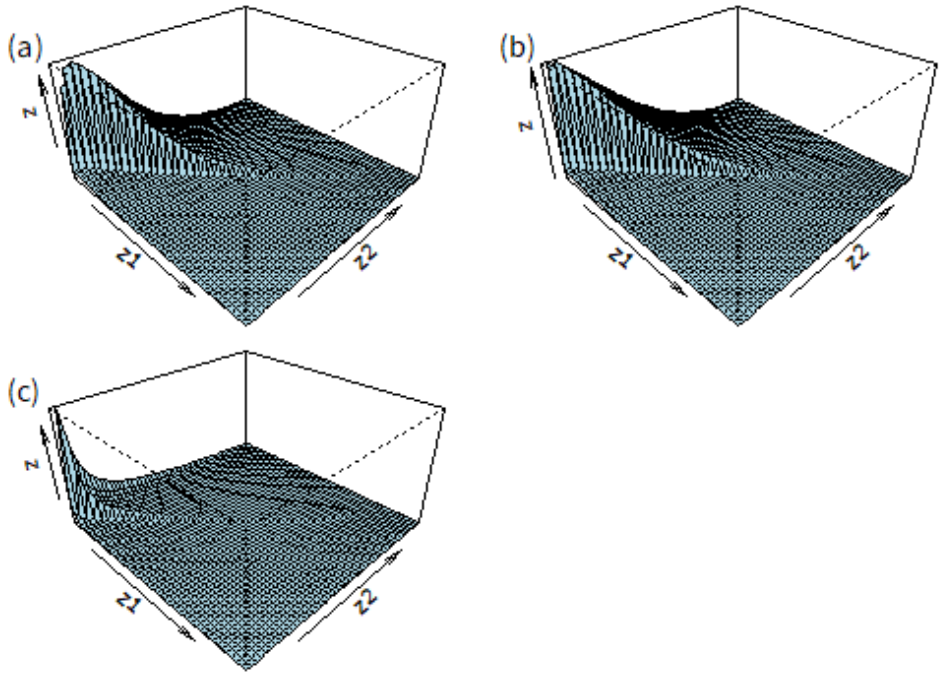
$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \begin{cases} f(z_1;\lambda_1+\lambda_3)f(z_2;\lambda_2), & 0 < z_1 < z_2 < 1 \\ f(z_1;\lambda_1)f(z_2;\lambda_2+\lambda_3), & 0 < z_1 < z_2 < 1 \\ \dfrac{\lambda_3}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} f\left(z;\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right), & z_1 = z_2 = z \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip Marshall-Olkin tipi iki değişkenli Topp-Leone (BTL) dağılımıdır (Topp ve Leone, 1955).

Log-olabilirlik fonksiyonunun doğrudan maksimizasyonu ile elde edilen en çok olabilirlik tahminleri ve diğer çıkarımların sonuçları Çizelge 6.4'te verilmiştir. BUEHL dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri EM algoritması ile elde edilen değerlerle uyumludur. BUEHL dağılımı ile uydurulmuş modelin iki değişkenli Kumaraswamy dağılımı ile uydurulmuş modele göre daha büyük log-olabilirlik değeri verdiği görülmektedir. Sonuç olarak bu veri kümesi özelinde BUEHL dağılımı iki değişkenli Kumaraswamy dağılımına göre daha iyi bir performans göstermiştir. Ayrıca parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerindeki değerleri için BUEHL, BVK ve BTL modellerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği Şekil 6.2'de görülmektedir.

Çizelge 6.4. NFLveri kümesi için BUEHL dağılımı, BVK dağılımı ve BTL dağılımının uydurulmuş modellerinin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik değerleri ve AIC değerleri (Parantez içindeki değerler standard hatalardır)

Model	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\theta}$	log-lik	AIC
BUEHL	1.8377	0.0990	2.3648	1.1816	20.570	-33.140
	(0.5792)	(0.0991)	(0.4911)	(0.1267)		
BVK	2.6810	0.1384	3.3109	1.0557	18.952	-29.904
	(0.8865)	(0.1389)	(0.7266)	(0.1289)		
BTL	0.0244	0.2947	0.5930		1.9185	2.1630
	(0.0241)	(0.0712)	(0.0941)			



Şekil 6.2. NFL veri kümesinde parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri için (a) BUEHL, (b) BVK ve (c) BTL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği

6.2. Kilo Kaybı Veri Kümesi

Gerçek veri analizinde ikinci olarak kilo kaybı veri kümesi göz önüne alınsın. Bu veri kümesi, 34 bireyden oluşan üç grup (Kontrol, Diyet ve Diyet + Egzersiz) için üç ay boyunca kilo kaybı ve özsaygıya ilişkin yapay verilerden oluşan iki değişkenli bir veri kümesidir. Veri kümesi iki değişkenli bir tasarım oluşturmakta olup R programındaki carData paketinde mevcuttur.

Z_1, iki ay boyunca kilo kaybını Z_2 ise üç ay boyunca kilo kaybını temsil etsin. Bir bireyin kilo kaybetmesi, kilo alması veya aynı kiloda kalması söz konusu olduğunda Marshall-Olkin tipi iki değişkenli dağılım bu tip bir veriyi modellemede kullanımı uygun olabilir. Veri kümesi Çizelge 6.5'te verilmiştir.

Çizelge 6.5. Kilo kaybı veri kümesi

Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2
0.4	0.3	0.4	0.2	0.6	0.5	0.6	0.6
0.4	0.4	0.5	0.2	0.7	0.6	0.9	0.5
0.4	0.3	0.6	0.3	0.4	0.3	0.7	0.9
0.3	0.2	0.5	0.4	0.7	0.4	0.8	0.6
0.5	0.3	0.7	0.6	0.7	0.7		
0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.7		
0.6	0.5	0.3	0.2	0.9	0.7		
0.5	0.4	0.5	0.5	0.3	0.4		
0.5	0.4	0.4	0.3	0.3	0.5		
0.3	0.3	0.4	0.2	0.6	0.5		

Öncelikle Z_1 , Z_2 ve $\min(Z_1, Z_2)$ için skorlara UEHL marjinal dağılımları uydurulsun. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri ve AD test istatistiğinin p değerleri Çizelge 6.6'da rapor edilmiştir.

Çizelge 6.6. Kilo kaybı veri kümesi için MLE'ler ve Anderson-Darling (AD) test istatistiğinin *p*-değeri

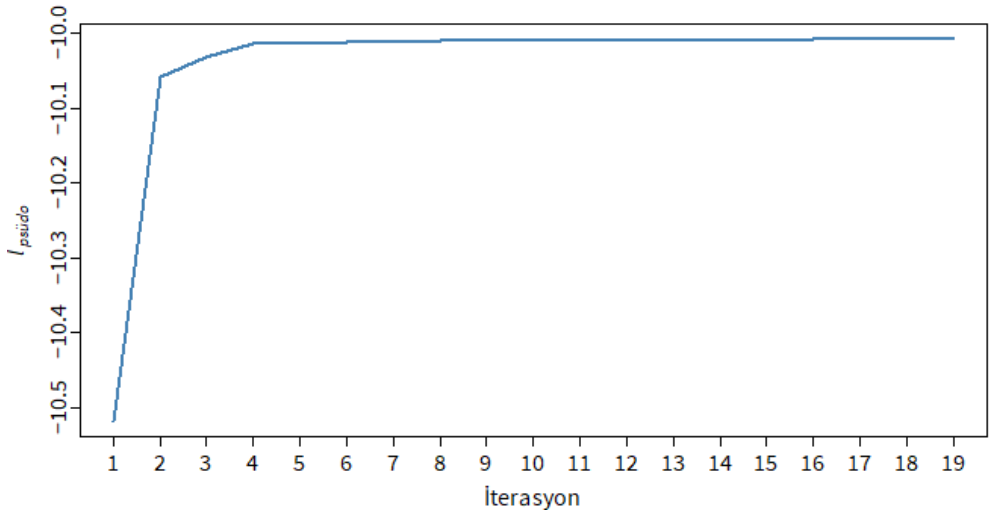
Değişken	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	p
Z_1	2.6848	3.2806	0.8872
Z_2	3.1394	2.6378	0.9696
$\min(Z_1, Z_2)$	4.7460	2.9346	0.9126

Buna göre UEHL dağılımının marjinal değişkenler ve bunların minimumu olan değişkeni uydurmada uygun olduğu görülmüştür.

Çizelge 6.6'ya göre uydurulan marjinal dağılımlar kilo kaybı iki değişkenli veri kümesini modellemede BUEHL dağılımının kullanımının uygun olduğuna dair kayda değer bir bakış açısı sağlamaktadır. EM algoritması 19. iterasyonda yakınsama sağlamış ve iterasyonlar arttıkça psüdo log-olabilirlik değerleri de artmıştır. İterasyon adımları Çizelge 6.7'de, iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği ise Şekil 6.3'te verilmiştir.

Çizelge 6.7. Kilo kaybı veri kümesi için EM algoritması iterasyonları

İterasyon Sayısı	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\theta}$	$l_{psüdo}$
1	1.166816	3.158945	1.167686	3.023489	-10.51969
2	1.007944	2.671012	1.005779	2.700209	-10.05908
3	1.070428	2.867679	1.062445	2.828595	-10.03233
4	1.048123	2.789898	1.037278	2.778062	-10.01322
5	1.059004	2.820988	1.045357	2.798213	-10.01478
6	1.056202	2.808910	1.040790	2.790302	-10.01182
7	1.058435	2.813893	1.041594	2.793494	-10.01156
8	1.058376	2.812062	1.040535	2.792269	-10.01064
9	1.059009	2.812895	1.040408	2.792785	-10.01025
10	1.059207	2.812644	1.040056	2.792602	-10.00984
11	1.059460	2.812802	1.039899	2.792691	-10.00958
12	1.059603	2.812782	1.039742	2.792668	-10.00937
13	1.059726	2.812822	1.039643	2.792686	-10.00923
14	1.059810	2.812829	1.039564	2.792685	-10.00912
15	1.059875	2.812843	1.039508	2.792690	-10.00904
16	1.059921	2.812851	1.039465	2.792691	-10.00898
17	1.059956	2.812857	1.039435	2.792693	-10.00893
18	1.059981	2.812861	1.039412	2.792695	-10.00890
19	1.060000	2.812865	1.039395	2.792696	-10.00887

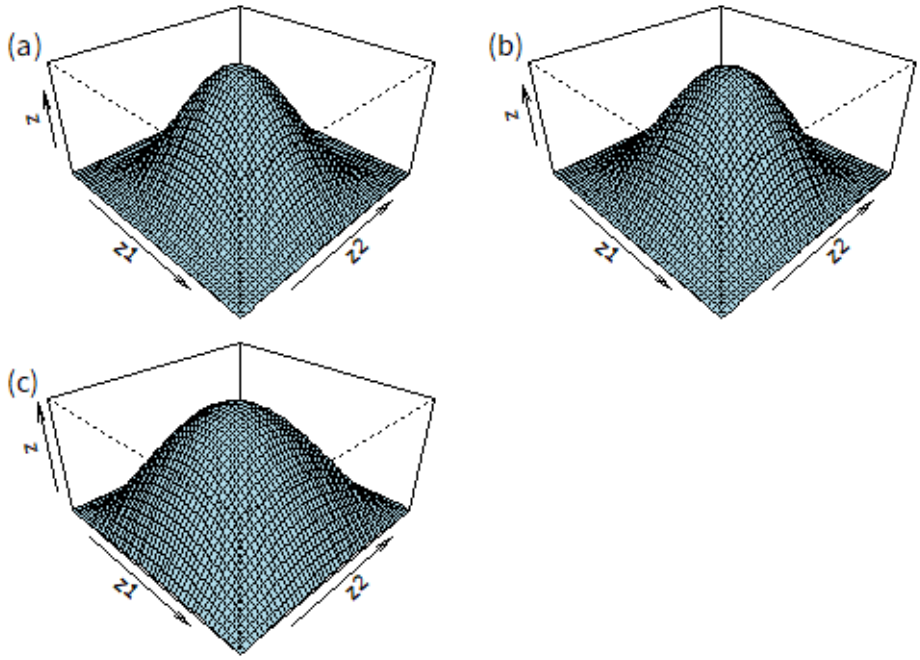


Şekil 6.3. Kilo kaybı veri kümesi için EM algoritmasının iterasyon adımlarına karşı $l_{psüdo}$ grafiği

Son olarak doğrudan maksimizasyon sonuçları Çizelge 6.8'de verilmiş olup buna göre önerilen BUEHL dağılımının iki değişkenli veri kümesine diğer iki dağılıma göre daha iyi bir uyum gösterdiği görülmüştür. Dahası BUEHL, BVK ve BTL modellerinin parametrelerinin en çok olabilirlik değerlerinde ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği Şekil 6.4'te verilmiştir.

Çizelge 6.8. Kilo kaybı veri kümesi için BUEHL dağılımı, BVK dağılımı ve BTL dağılımının uydurulmuş modellerinin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik değerleri ve AIC değerleri (Parantez içindeki değerler standart hatalardır)

Model	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\theta}$	log-lik	AIC
BUEHL	1.0601	2.8129	1.0393	2.7927	9.6509	-11.3018
	(0.4333)	(0.7162)	(0.3934)	(0.2982)		
MO-BVK	1.5370	4.0561	1.4570	2.5040	8.2425	-8.4850
	(0.6351)	(1.0888)	(0.5638)	(0.3035)		
MO-BTL	2.6662	0.9483	1.1827		8.1897	-10.3795
	(0.5147)	(0.3862)	(0.3989)			



Şekil 6.4. Kilo kaybı veri kümesinde parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri için (a) BUEHL, (b) BVK ve (c) BTL modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli kısmının yüzey grafiği

7. SONUÇLAR

Gerçek yaşam verilerindeki çeşitliliğe bağlı olarak verileri modellemek için klasik dağılımların yanı sıra daha esnek ve sınırlı tipte dağılımlara ihtiyaç duyulur. Bu amaçla literatürde faydalı dağılımlar oluşturmak için yeni yöntemler üzerine farklı çalışmalar bulunmaktadır.

Birçok gerçek yaşam verisini modellemede yaygın kullanıma sahip olduğu bilinen Weibull dağılımı küvet eğrisi yapısına sahip tehlike hızı modellemesinde uygun değildir. Bu noktada özel fonksiyonlar içermeyen ve dolayısıyla kullanımı kolay olan omega dağılımı, Weibull dağılımının bu eksikliği ile başa çıkmak için kullanılabilir. Ayrıca UEHL dağılımı, omega dağılımının (0,1) sınırlı destek kümesine sahip olan özel bir hali olup istatistiksel güvenilirlik teorisinde birçok uygulamaya sahip bir dağılımdır.

İstatistiksel güvenilirlik teorisinde eşanlı olarak gerçekleşen olayları modellemek için tek değişkenli dağılımların iki değişkenli genelleştirilmeleri önerilmiştir. Bu kapsamda MO tipi iki değişkenli dağılımlar, temel üretici bir dağılımı ana dağılım alarak çeşitli gerçek yaşam verilerini modellemek için oluşturulan oldukça esnek dağılımlardır. Bu tür dağılımlar sürekli ve singüler kısımlardan oluşur ve iki değişkenli verideki eşitsizlik durumlarının yanı sıra eşitlik durumlarını da modelleyebilir. MO tipi iki değişkenli dağılımlar genellikle $(0,\infty)$ destek kümeli iki değişkenli verileri modellemede kullanılırken destek kümesi (0,1) olan iki değişkenli verileri modellemek için sınırlı destek kümeli dağılımlara ihtiyaç olduğu açıktır.

Bu tez çalışmasında omega dağılımının özel bir durumuna karşılık gelen UEHL dağılımının iki değişkenli versiyonuna genelleştirilmesi olarak MO tipi BUEHL dağılımı verildi ve bu yeni dağılımın temel özellikleri incelendi. MO tipi iki değişkenli dağılımların çoğunda olduğu gibi BUEHL dağılımı sınırlı bir destek kümesine sahiptir. BUEHL dağılımı spesifik olarak iki değişkenli oranları veya yüzdeleri modellemek için kullanılabilir. Bu dağılımın, dağılım fonksiyonu özel bir

fonksiyon ve üstel bir terim içermediğinden hesaplama kolaylığı bakımından BUEHL dağılım modeli oldukça kullanışlıdır.

Bu tez çalışmasında önerilen BUEHL dağılımının özellikleri oldukça ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. Buna ek olarak BUEHL modelinin parametre tahmini için bir bilgisayar paketinde bulunan herhangi bir optimizasyon rutini uygulanmaksızın kullanılabilecek EM algoritması verilmiştir. Ayrıca dağılım parametrelerinin Bayes tahminlerini veren teorik ifadeler elde edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların değerlendirilmesi amacıyla bir simülasyon çalışması yapılarak en çok olabilirlik ve EM algoritması yöntemleri karşılaştırılmış ve örneklem büyüklüğü yeterli olduğunda yöntemlerin oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Dahası Bayes tahmin yönteminin performansının incelenmesi amacıyla yapılan simülasyon çalışmasına göre Bayes yönteminin gerçek parametre değerlerine oldukça yakın tahmin değerleri verdiği tespit edilmiştir. Önerilen BUEHL dağılımının gerçek yaşam verilerinde kullanışlı bir model olduğunu göstermek amacıyla gerçek veri analizleri yapılmış ve BUEHL dağılımı ile BVK dağılımı ve BTL dağılımı karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonunda elde edilen log-olabilirlik ve AIC değerleri göz önüne alınarak BUEHL dağılımının BVK dağılımına ve BTL dağılımına göre veriye daha iyi bir uyum sağladığı görülmüştür. Dolayısıyla BUEHL dağılımının sınırlı tipteki iki değişkenli verileri modellemede faydalı bir alternatif dağılım olduğu sonucuna varılmıştır.

Dağılımın çok değişkenli versiyonunun tanımlanmasının ve özelliklerinin incelenmesinin daha sonraki bir çalışmada yapılması hedeflenmektedir. Diğer yandan omega dağılımının genel formunda bulunan d sınır parametresinin modele fazladan esneklik sağladığı açıktır. Böylece omega dağılımının bilinmeyen d parametreli iki değişkenli versiyonunun sonraki bir çalışmada ele alınması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

Almalki, S. J., Nadarajah, S. 2014. Modifications of the Weibull distribution: A review. Reliability Engineering & System Safety, 124, 32–55.

Alotaibi, R.M., Rezk, H.R., Ghosh, I., Dey, S., 2021. Bivariate exponentiated half logistic distribution: Properties and application. Communications in Statistics-Theory and Methods, 50(24), 6099-6121.

Arnold, B.C., Ng, H.K.T., 2011. Flexible bivariate beta distributions. Journal of Multivariate Analysis, 102(8), 1194-1202.

Balakrishna, N., Shiji, K., 2014. On a class of bivariate exponential distributions. Statisics and Probability Letters, 85:153-160.

Balakrishnan, N., Lai, C.D., 2009. Continuous bivariate distributions. Springer Science and Business Media.

Barreto-Souza, W., Lemonte, A.J., 2013. Bivariate Kumaraswamy distribution: properties and a new method to generate bivariate classes. Statistics, 47(6), 1321-1342.

Barreto-Souza, W., Santos, A.H., Cordeiro, G.M., 2010. The beta generalized exponential distribution. Journal of statistical Computation and Simulation, 80(2), 159-172.

Bemis, B.M., Bain, L.J., Higgins, J.J., 1972. Estimation and hypothesis testing for the parameters of a bivariate exponential distribution. Journal of the American Statistical Association, 67(340), 927- 929.

Block, H.W., Basu, A.P., 1974. A continuous, bivariate exponential extension. Journal of the American Statistical Association, 69(348), 1031-1037.

Byrd, R.H., Lu, P., Nocedal, J., Zhu, C., 1995. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. SIAM Journal of Scientific Computing, 16(5), 1190-1208.

Csörgó , S., Welsh, A.H., 1989. Testing for exponential and Marshall-Olkin distributions. Journal of Statistical Planning and Inference, 23(3), 287–300.

Dombi, J., Jonas, T., Toth, E.Z., Arva, G., 2019. The omega probability distribution and its applications in reliability theory. Qualality and Reliability Engineering International, 35(2), 600-626.

Eugene, N., Lee, C., Famoye, F., 2002. Beta-normal distribution and its applications. Communications in Statistics-Theory and methods, 31(4), 497-512.

Fletcher, S.G., Ponnambalam, K., 1996. Estimation of reservoir yield and storage distribution using moments analysis. Journal of hydrology, 182(1-4), 259-275.

Fox, J., Weisberg, S., Price, B., 2020. carData: Companion to Applied Regression Data Sets. R package version 3.0-4; https://CRAN.R-project.org/package=carData.

Ganji, A., Ponnambalam, K., Khalili, D., Karamouz, M., 2006. Grain yield reliability analysis with crop water demand uncertainty. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 20(4), 259-277.

Ghitany, M.E., Kotz, S., 2007. Reliability properties of extended linear failure-rate distributions. Probability in the Engineering and informational Sciences, 21(3), 441-450.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 2007. Tables of Integrals, Series and Products, (7th edition).

Gui, W., 2013. Marshall-Olkin extended log-logistic distribution and its application in minification processes. Applied Mathematical Sciences, 7(80), 3947-3961.

Gupta, A.K., Orozco-Castañeda, J.M., Nagar, D. K., 2011. Non-central bivariate beta distribution. Statistical Papers, 52(1), 139-152.

Jayakumar, K., Mathew, T., 2008. On a generalization to Marshall-Olkin scheme and its application to Burr type XII distribution. Statistical Papers, 49(3), 421.

Jones, M.C., 2009. Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. Statistical Methodology, 6(1), 70-81.

Jose, K.K., Krishna, E., Ramkumar, T.B., 2011. Acceptance sampling plan for Marshall-Olkin extended frechet distribution. In 2011 IEEE International Conference on Quality and Reliability (pp.195-199).

Jose, K.K., Sebastian, R., 2013. Marshall–Olkin Morgenstern–Weibull distribution: generalisations and applications. Economic Quality Control, 28(2), 105-116.

Kang, S.B., Seo, J., 2011. Estimation in an exponentiated halfl ogistic distribution under progressively Type-II censoring. Communications for Statistical Applications and Methods, 18(5), 657–666.

Korkmaz, M. Ç., Genç, A. İ., 2017. A new generalized two-sided class of distributions with an emphasis on two-sided generalized normal distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(2), 1441–1460.

Koutsoyiannis, D., Xanthopoulos, T., 1989. On the parametric approach to unit hydrograph identification. Water resources management, 3(2), 107-128.

Kumaraswamy, P., 1980. A generalized probability density function for double-bounded random processes. Journal of hydrology, 46(1-2), 79-88.

Kundu, D., Dey, A.K., 2009. Estimating the parameters of the Marshall-Olkin bivariate Weibull distribution by EM algorithm. Computational Statistics and Data Analysis, 53(4), 956– 965.

Kundu, D., Gupta, A. K., 2013. Bayes estimation for the Marshall–Olkin bivariate Weibull distribution. Computational Statistics and Data Analysis, 57(1), 271-281.

Kundu, D., Gupta, A.K., 2017. On bivariate inverse Weibull distribution. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 31(2), 275–302.

Kundu, D., Gupta, R.D., 2009. Bivariate generalized exponential distribution. Journal of Multivariate Analysis, 100(4), 581–593.

Kundu, D., Gupta, R.D., 2010. Modified Sarhan–Balakrishnan singular bivariate distribution. Journal of statistical planning and inference, 140(2), 526-538.

Lai, C.D., 2013. Generalized Weibull Distributions. Berlin, Heidelberg: Springer.

Lemonte, A.J., 2011. Improved point estimation for the Kumaraswamy distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(12), 1971-1982.

Marshall, A.W., Olkin, I., 1967. A multivariate exponential distribution. Journal of the American Statistical Association, 62(317), 30-44.

Marshall, A.W., Olkin, I., 1997. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. Biometrika, 84(3), 641-652.

Marshall, A.W., Olkin, I., 2007. Life Distributions (Vol. 13). Springer, New York.

Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K., Freimer, M., 1995. The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. Technometrics, 37(4), 436-445.

Muhammed, H.Z., 2016. Bivariate inverse Weibull distribution. Journal of Statistical Computation and Simululation, 86(12), 1–11.

Muhammed, H.Z., 2020. On a bivariate generalized inverted Kumaraswamy distribution. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 553, 124281.

Murthy, D.N.P., Xie, M., Jiang, R., 2004. Weibull Models. New Jersey: Wiley.

Nadarajah, S., 2005. Exponentiated pareto distributions. Statistics, 39(3), 255-260.

Nadarajah, S., 2006. The bivariate F 3-beta distribution. Communications of the Korean Mathematical Society, 21(2), 363-374.

Nadarajah, S., 2007. A new bivariate beta distribution with application to drought data. Metron, 65(2), 153-74.

Nadarajah, S., 2008. On the distribution of Kumaraswamy. Journal of Hydrology, 348(3), 568-569.

Nadarajah, S., Kotz, S., 2005. The bivariate F1-beta distribution. Mathematical Reports of the Academy of Sciences, 27(2), 58.

Okorie, I.E., Nadarajah, S., 2019. On the omega probability distribution. Quality and Reliability Engineering International, 35(6), 2045–2050.

Olkin, I., Liu, R., 2003. A bivariate beta distribution. Statistics and Probability Letters, 62(4), 407-412.

Opone, F., Iwerumor, B., 2021. A new Marshall-Olkin extended family of distributions with bounded support. Gazi University Journal of Science, 34(3), 899-914.

Özbilen, Ö., Genç, A.İ., 2022. A bivariate extension of the omega distribution for two-dimensional proportional data, Mathematica Slovaca, 72(6), 1605-1622.

Ponnambalam, K., Seifi, A., Vlach, J., 2001. Probabilistic design of systems with general distributions of parameters. International journal of circuit theory and applications, 29(6), 527-536.

Popović, B.V., Genç, A.İ., Domma, F., 2018. Copula-based properties of the bivariate Dagum distribution. Computational and Applied Mathematics, 37(5), 6230–6251.

Popović, B.V., Ristić, M.M., Genç, A.İ., 2020. Dependence properties of multivariate distributions with proportional hazard rate marginals. Applied Mathematical Modelling, 77, 182-198.

R Core Team, 2020. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.URL https://www.R-project.org/.

Rao, G.S., Naudi, C.H.R., 2013. Estimation of reliability in multi component stress strength based on exponentiated half logistic distribution. Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications, 9, 19–35.

Rastogi, M.K., Tripathi, Y.M., 2014. Parameter and reliability estimation for an exponentiated half-logistic distribution under progressive type II censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84(8), 1711-1727.

Sarhan, A., Balakrishnan, N., 2007. A new class of bivariate distribution and its mixture. Journal of Multivariate Analysis, 98(7), 1508–1527.

Sarhan, A.M., Hamilton, D.C., Smith, B., Kundu, D., 2011. The bivariate generalized linear failure rate distribution and its multivariate extension. Computational statistics and data analysis, 55(1), 644-654.

Seifi, A., Ponnambalam, K., Vlach, J., 2000. Maximization of manufacturing yield of systems with arbitrary distributions of component values. Annals of Operations research, 99(1), 373-383.

Seo, J.I., Kang, S.B., 2015. Notes on the exponentiated half logistic distribution. Applied Mathematical Modelling, 39(21), 6491–6500.

Sklar, M., 1959. Fonctions de repartition an dimensions et leursmarges. Publ. inst. statist. univ. Paris, 8, 229-231.

Sundar, V., Subbiah, K., 1989. Application of double bounded probability density function for analysis of ocean waves. Ocean engineering, 16(2), 193-200.

Thomas, A., Jose, K.K., 2004. Bivariate semi-Pareto minification processes. Metrika, 59(3), 305- 313.

Topp, C.W., Leone, F.C., 1955. A family of J-shaped frequency functions, JASA 50, 209-219.

Wang, F.K., 2000. A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution. Reliability Engineering and System Safety, 70(3), 305–312.

Zhang, T., Xie, M., 2007. Failure data analysis with extended Weibull distribution. Communications in Statistics-Simulation and computation, 36(3), 579-592.

ÖZGEÇMİŞ

Ömer ÖZBİLEN, İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. 2001 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü birincilikle kazandı. Lisans eğitimini 2005 yılında tamamladı. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi tezsiz yüksek lisansı tamamladı. 2005-2009 yılları arasında Adana'da özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2010 yılında Millî Eğitim Bakanlığında kadrolu ortaöğretim matematik öğretmeni olarak Mardin'e atandı. 2015 yılında Mersin Üniversitesi Tarsus Meslek Yüksekokuluna öğretim görevlisi olarak atandı. 2016 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında Doktora eğitimine başladı. Evli ve üç çocuk babasıdır.

EKLER

EK1

Şekil 3.1 için R Kodu

```
# fonksiyonu belirle
fk <- function (x,a,b) {
  return(a*b*(x^(b-1))*(1-(x^b))^(a-1))
}
f1 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(fk(z1,a1,b)*fk(z2,a2+a3,b))
}
f2 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(fk(z1,a1+a3,b)*fk(z2,a2,b))
}
f<- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(ifelse(z1<z2,f1(z1,z2,a1,a2,a3,b),f2(z1,z2,a1,a2,a3,b)))
}
#z1 lerin değerlerini belirle
z1 <- seq(0,1,length=50)
#z2 lerin değerlerini belirle
z2 <- seq(0,1,length=50)
#(a) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=1.5,a2=4.5,a3=0.7,b=2.5)
# Grafiği çiz
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
# (b) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=3.5,a2=1.5,a3=0.7,b=4)
```

```
# Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
#(c) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=4.5,a2=4.5,a3=0.7,b=1.5)
# Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
# Tek degiskenli kumaraswamy sagkalım fonksiyonu
Sk <- function(x,a,b){
  return((1-x^b)^a)
}
S <- function(z1,z2,a1,a2,a3,b){
  w <- max(z1,z2)
  return(Sk(z1,a1,b)*Sk(z2,a2,b)*Sk(w,a3,b))
}
Fz <- function(z1,z2,l1,l2,l3,t){
  w <- max(z1,z2)
  return(1-Sk(z1,a1,b)*Sk(z2,a2,b)*Sk(w,a3,b))
}
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
#z1 lerin degerlerini belirle
z1 <- seq(0,0.01,length=50)
#z2 lerin degerlerini belirle
z2 <- seq(0,0.01,length=50)
#(a) icin z=f(.) leri belirle
z <- outer(z1,z2,S,a1=1.5,a2=4.5,a3=0.7,b=2.5)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

```
# (b) icin z=f(.) leri belirle
z <- outer(z1,z2,S,a1=3.5,a2=1.5,a3=0.7,b=4)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
#(c) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,S,a1=4.5,a2=4.5,a3=0.7,b=1.5)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

EK2

Şekil 3.2 için R Kodu

```
# fonksiyonu belirle
fk<- function (x,a,b) {
return(a*b*(x^(b-1))*(1-(x^b))^(a-1))
 }
f1 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(fk(z1,a1,b)*fk(z2,a2+a3,b))
 }
f2 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(fk(z1,a1+a3,b)*fk(z2,a2,b))
 }
f<- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(ifelse(z1<z2,f1(z1,z2,a1,a2,a3,b),f2(z1,z2,a1,a2,a3,b)))
 }
 #z1 lerin değerlerini belirle
z1 <- seq(0,1,length=50)
 #z2 lerin değerlerini belirle
z2 <- seq(0,1,length=50)
 #(a) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=1.5,a2=4.5,a3=0.7,b=2.5)
 # Grafiği çiz
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
 # (b) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=3.5,a2=1.5,a3=0.7,b=4)
```

```
 # Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
 #(c) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=4.5,a2=4.5,a3=0.7,b=1.5)
 # Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

EK3

Şekil 4.1 için R Kodu

```
# fonksiyonu belirle
fk<- function (x,a,b) {
  return(2*a*b*x^(b-1)*((1-x^b)^(a-1))/((1+x^b)^(a+1)))
}
f1 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(fk(z1,a1,b)*fk(z2,a2+a3,b))
}
f2 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(fk(z1,a1+a3,b)*fk(z2,a2,b))
}
f<- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
  return(ifelse(z1<z2,f1(z1,z2,a1,a2,a3,b),f2(z1,z2,a1,a2,a3,b)))
}
#z1 lerin degerlerini belirle
z1 <- seq(0,1,length=50)
#z2 lerin degerlerini belirle
z2 <- seq(0,1,length=50)
#(a) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=2.5,a2=3.5,a3=0.5,b=1.5)
# Grafigi ciz
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
# (b) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=4.5,a2=2.5,a3=0.5,b=5)
```

```
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
#(c) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=3.5,a2=3.5,a3=0.5,b=1)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
# Tek degiskenli UEHL sagkalım fonksiyonu
Su <- function(x,l,t){
  return(((1-x^t)/(1+x+t))^l)
}
S <- function(z1,z2,l1,l2,l3,t){
  w <- max(z1,z2)
  return(Su(z1,l1,t)*Su(z2,l2,t)*Su(w,l3,t))
}
Fz <- function(z1,z2,l1,l2,l3,t){
  w <- max(z1,z2)
  return(1-Su(z1,l1,t)*Su(z2,l2,t)*Su(w,l3,t))
}
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
#z1 lerin degerlerini belirle
z1 <- seq(0,0.01,length=50)
#z2 lerin degerlerini belirle
z2 <- seq(0,0.01,length=50)
#(a) icin z=f(.) leri belirle
z <- outer(z1,z2,S,l1=2.5,l2=3.5,l3=0.5,t=1.5)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

```
# (b) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,S,l1=4.5,l2=2.5,l3=0.5,t=5)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
#(c) icin z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,S,l1=3.5,l2=3.5,l3=0.5,t=1)
# Grafigi ciz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

EK4

Şekil 4.2 için R Kodu

```
# fonksiyonu belirle
fk<- function (x,a,b) {
return(2*a*b*x^(b-1)*((1-x^b)^(a-1))/((1+x^b)^(a+1)))
 }
f1 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(fk(z1,a1,b)*fk(z2,a2+a3,b))
 }
f2 <- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(fk(z1,a1+a3,b)*fk(z2,a2,b))
 }
f<- function (z1,z2,a1,a2,a3,b) {
return(ifelse(z1<z2,f1(z1,z2,a1,a2,a3,b),f2(z1,z2,a1,a2,a3,b)))
 }
 #z1 lerin değerlerini belirle
z1 <- seq(0,1,length=50)
 #z2 lerin değerlerini belirle
z2 <- seq(0,1,length=50)
 #(a) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=2.5,a2=3.5,a3=0.5,b=1.5)
 # Grafiği çiz
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(0,0,0,0))
par(oma=c(0,0,0,0))
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
 # (b) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=4.5,a2=2.5,a3=0.5,b=5)
```

```
 # Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
 #(c) için z=f(.) leri belirle
z<- outer(z1,z2,f,a1=3.5,a2=3.5,a3=0.5,b=1)
 # Grafiği çiz
persp(z1,z2,z,theta=45,phi=30,expand=0.5,col="lightblue")
```

EK5

Çizelge 4.1 için R Kodu

```
ruehl<- function(n,a1,a2,a3,b){
u1 <- runif(n)
u2 <- runif(n)
u3 <- runif(n)
x1 <- ((1-u1^(1/a1))/ (1+u1^(1/a1)))^(1/b)
x2 <- ((1-u2^(1/a2))/ (1+u2^(1/a2)))^(1/b)
x3 <- ((1-u3^(1/a3))/ (1+u3^(1/a3)))^(1/b)
x13 <- cbind(x1,x3)
x23 <- cbind(x2,x3)
z1 <- apply(x13,1,min)
z2 <- apply(x23,1,min)
cbind(z1,z2)
}
# 1. satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,1,0.1,1))
cor(ruehl(500000,1,1,0.3,1))
cor(ruehl(500000,1,1,0.7,1))
cor(ruehl(500000,1,1,2,1))
cor(ruehl(500000,1,1,5,1))
cor(ruehl(500000,1,1,10,1))
cor(ruehl(500000,1,1,20,1))
# 2. satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,2,0.1,1))
cor(ruehl(500000,1,2,0.3,1))
```

```
cor(ruehl(500000,1,2,0.7,1))
cor(ruehl(500000,1,2,2,1))
cor(ruehl(500000,1,2,5,1))
cor(ruehl(500000,1,2,10,1))
cor(ruehl(500000,1,2,20,1))
# 3. satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,3,0.1,1))
cor(ruehl(500000,1,3,0.3,1))
cor(ruehl(500000,1,3,0.7,1))
cor(ruehl(500000,1,3,2,1))
cor(ruehl(500000,1,3,5,1))
cor(ruehl(500000,1,3,10,1))
cor(ruehl(500000,1,3,20,1))
# 4. satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,1,0.1,2))
cor(ruehl(500000,1,1,0.3,2))
cor(ruehl(500000,1,1,0.7,2))
cor(ruehl(500000,1,1,2,2))
cor(ruehl(500000,1,1,5,2))
cor(ruehl(500000,1,1,10,2))
cor(ruehl(500000,1,1,20,2))
# 5.satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,2,0.1,2))
cor(ruehl(500000,1,2,0.3,2))
cor(ruehl(500000,1,2,0.7,2))
cor(ruehl(500000,1,2,2,2))
```

```
cor(ruehl(500000,1,2,5,2))
cor(ruehl(500000,1,2,10,2))
cor(ruehl(500000,1,2,20,2))
# 6.satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,3,0.1,3))
cor(ruehl(500000,1,3,0.3,3))
cor(ruehl(500000,1,3,0.7,3))
cor(ruehl(500000,1,3,2,3))
cor(ruehl(500000,1,3,5,3))
cor(ruehl(500000,1,3,10,3))
cor(ruehl(500000,1,3,20,3))
# 7.satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,1,0.1,3))
cor(ruehl(500000,1,1,0.3,3))
cor(ruehl(500000,1,1,0.7,3))
cor(ruehl(500000,1,1,2,3))
cor(ruehl(500000,1,1,5,3))
cor(ruehl(500000,1,1,10,3))
cor(ruehl(500000,1,1,20,3))
# 8.satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,2,0.1,3))
cor(ruehl(500000,1,2,0.3,3))
cor(ruehl(500000,1,2,0.7,3))
cor(ruehl(500000,1,2,2,3))
cor(ruehl(500000,1,2,5,3))
cor(ruehl(500000,1,2,10,3))
```

```
cor(ruehl(500000,1,2,20,3))
# 9.satır
set.seed(1)
cor(ruehl(500000,1,3,0.1,3))
cor(ruehl(500000,1,3,0.3,3))
cor(ruehl(500000,1,3,0.7,3))
cor(ruehl(500000,1,3,2,3))
cor(ruehl(500000,1,3,5,3))
cor(ruehl(500000,1,3,10,3))
cor(ruehl(500000,1,3,20,3))
```