

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ruhulamin AMINI

**DÜZLEM ÇERÇEVE SİSTEMLERİN MOD BİRLEŞTİRME
YÖNTEMİ VE MATHEMATICA PROGRAMI YARDIMIYLA
DİNAMİK ANALİZİ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA-2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEM ÇERÇEVE SİSTEMLERİN MOD BİRLEŞTİRME YÖNTEMİ
VE MATHEMATICA PROGRAMI YARDIMIYLA DİNAMİK ANALİZİ

Ruhulamin AMINI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez 20/09/2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliğiyle kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ
DANIŞMAN



Prof. Dr. H. Murat ARSLAN
ÜYE



Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZLEM ÇERÇEVE SİSTEMLERİN MOD BİRLEŞTİRME YÖNTEMİ VE MATHEMATICA PROGRAMI YARDIMIYLA DİNAMİK ANALİZİ

Ruhulamin AMINI

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin R.YERLİ
Yıl: 2018 Sayfa: 91
Jüri : Prof. Dr. Hüseyin R.YERLİ
: Prof. Dr. H. Murat ARSLAN
: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Bu tez çalışmasında, doğru eksenli çubuk elemanlarından oluşan ve düzlemi içinde yüklenmiş çerçevelerin dinamik yükler altındaki davranışları mod süperpozisyon yöntemi ile incelenmiştir.

Yapıların dinamik davranışı incelemesinde, öncelikle ele alınan sistemlerin matematiksel modeli kurulmaktadır. Daha sonra matematiksel modeli kurulmuş olan sistemin serbest titreşim analizi yapılmaktadır. Serbest titreşim analizi tamamlandıktan sonra, mod süperpozisyon ya da mod birleştirme metoduyla sistem denklem takımı girişimsiz hale getirilmekte ve çeşitli yöntemler yardımıyla bu sistemlerin zorlanmış titreşim analizi yapılmaktadır.

Bu çalışmanın sonunda, çerçeve sistemlerin serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini yapan Mathematica dilinde, paket programları hazırlanmıştır. Bu paket programları kullanılarak çeşitli sayısal uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zorlanmış Titreşim, Serbest Titreşim, Modal Analiz, Mod Süperpozisyon Metodu, Dinamik Analiz.

ABSTRACT

MSc THESIS

DYNAMIC ANALYSIS OF PLANAR FRAMES BY MODE SUPERPOSITION METHOD WITH THE AID OF MATHEMATICA

**Ruhulamin AMINI
ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING**

Supervisor : Prof. Dr. Hüseyin R.YERLİ
Year: 2018 Pages: 91
Jury : Prof. Dr. Hüseyin R.YERLİ
: Prof. Dr. H. Murat ARSLAN
: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

This study aims to investigate the dynamic behaviour of the in-plane frames with straight axes elements by using the mode superposition method.

While investigating the dynamic behaviour of plane frames, firstly mathematical model of the system is obtained. Then, free vibration analysis of this system is studied. After free vibration analysis, uncoupled system of equations are solved with aid of the mode superposition method and then by using of several numerical methods forced vibration analysis of system is obtained.

At the end of this study, several computer program packages, which is capable of solving free and forced vibration responses of plane frames has been prepared. For this purpose, a technical computing program Wolfram Mathematica has been used.

Keywords: Forced Vibration, Free Vibration, Modal Analysis, Mod Superposition, Dynamic Response.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu Çalışma kapsamında, doğru eksenli çubuk elemanlardan oluşan çerçeve sistemlerin dinamik yükler altında davranışları incelenmektedir.

Yapı sistemlerin dinamik yükler altındaki davranışı incelenirken, çözüm yöntemi olarak mod birleştirme yöntemi kullanılmaktadır. Mod birleştirme yönteminin özelliğinden dolayı, ilk olarak yapıların serbest titreşim analizi incelenmektedir. Serbest titreşim konusunda meydana gelen özdeğer problemi çeşitli yöntemler ile çözülerek karşılaştırmalar yapılmaktadır. Özdeğer problemlerinin çözüm metotlarından yaklaşık yöntemleri incelenmektedir. Bunlardan vektör iterasyon yöntemleri her seferinde yalnızca bir adet özdeğer özvektör çifti bulur iken, transformasyon yöntemleri ile her seferinde sistemin tüm özdeğer özvektör çiftleri elde edilmektedir. Ayrıca, ele alınan sistemler büyüdüğü zaman bu yöntemler efektif olarak kullanılmamaktadır. Bu sebepten dolayı büyük sistemler için etkin çözüm yöntemleri (Rayleigh oranı ile iterasyon, alt uzaylarla iterasyon yöntemi ve determinant arama yöntemi) üzerinde çalışılmaktadır. Bununla birlikte, mod birleştirme yönteminin özelliğinden yararlanarak sistemin tüm özdeğerlerinin bulunması yerine sadece en küçük birkaç tanesinin bulunması yeterli gelmektedir. Bundan dolayı bu tezde Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi ile alt uzaylarla iterasyon yöntemi kullanılmaktadır. Hesaplarda bulunan özdeğerlerin en küçüklerden olup olmadığı Sturm teoremi ile kontrol edilmektedir.

Zorlanmış titreşim analizinde ise, mod birleştirme yöntemi ile girişimsiz hale gelen sistem denklemlerinin çözümü için iki farklı yöntem kullanılmakta ve bunlar birbirleri ile kıyaslanmaktadır. Bu yöntemlerden birincisi olan Newmark yöntemi direk integrasyon yöntemi olup, sonlu farklar metodundan yararlanarak diferansiyel denklemin çözümü belirli zaman artımları ile adım adım yapılmaktadır. İkinci yöntem Fourier dönüşüm yöntemi olup, bu yöntemde sistem denklemi Fourier uzayına dönüştürülüp, çözüm her frekans noktasında

yapılmaktadır. Fourier uzayında çözüm bulunduktan sonra ters Fourier dönüşüm ile zaman uzayında çözüm elde edilmektedir.

Son olarak, bu tez çalışmasında anlatılan konuların tamamını kapsayan, genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Geliştirilen bütün programlar, sembolik algebra kullanan MATHEMATICA programı ile hazırlanmıştır. Tez içinde anlatılan örneklerin tamamı hazırlanan bu programlar ile çözülmüştür.

TEŞEKKÜR

Bu alımanın hazırlaması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana yol gösteren, değerli zamanını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin R.YERLİ'ye sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında madi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgememiş olan sınıf arkadaşlarım İnş.Yük. Müh. Ahmad Reshad NOORİ, İnş.Yük. Müh. Ghulam Yahya RAHMANİ, İnş.Müh. Hasan ŞAHİN, İnş.Müh. Fatih GÜR, Ahmet ASLAN'a ve isimlerini burda zikredemiğim herkese teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca beni bugüne kadar yetiştirmiş, ve desteklerini bir an olsun eksik etmeyen aileme, sevgili eşime ve amcalarıma en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ÇİZELGELERDİZİNİ.....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	XIV
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE METOD	5
4. YAPI DİNAMİĞİ HAKKINDA GENEL BİLGİLER.....	7
4.1. Dinamik Problemin Özellikleri	7
4.2. Serbestlik Derecesi	8
4.3. Hareket Denklemlerinin Formülasyonu	8
4.3.1. D'Alembert Prensibi.....	8
4.3.2. Virtüel Deplasman Prensibi.....	9
4.3.3. Varyasyonel Yaklaşım.....	10
4.4. Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Matematiksel Modeli ve Formülasyonu	10
4.5. Sistem Rijitlik Ve Kütle Matrislerinin Teşkili	12
5. SERBEST TİTREŞİM.....	15
5.1. Giriş.....	15
5.2. Özdeğer ve Özvektörlerin Özellikleri.....	16
5.2.1. Özvektörlerin Normalizasyonu.....	16
5.2.2. Rayleigh Oranı.....	17
5.2.3. Sturm Teoremi.....	17

5.2.4. Genel Özdeğer Problemin Standart Hale Dönüştürülmesi	18
5.2.5. Kaydırma (Shift).....	20
5.3. Özdeğer Problemlerin Çözüm Yöntemleri	20
5.3.1. Kesin Çözüm	21
5.3.2. Yaklaşık Çözüm Yöntemleri	22
5.3.2.1. Vektör İterasyon Yöntemleri	23
5.3.2.2. Transformasyon Yöntemleri.....	30
5.3.3. Büyük Sistemlerin Özdeğer Problemlerinin Çözümü	37
5.3.3.1. Determinant Arama Metodu	37
5.3.3.2. Alt Uzaylarla İterasyon Metodu	39
6. ZORLANMIŞ TİTREŞİM	49
6.1. Giriş	49
6.2. Sayısal Çözüm Yöntemleri.....	49
6.2.1. Direkt İntegrasyon Metotları	49
6.2.1.1. Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi	50
6.2.1.2. Houbolt Metodu.....	50
6.2.1.3. Wilson θ Metodu.....	51
6.2.1.4. Newmark Metodu	51
6.2.2. Mod Süperpozisyon Metodu	53
7. FREKANS UZAYINDA ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	69
7.1. Giriş	69
7.2. Fourier Dönüşümü.....	69
7.3. Fourier Dönüşümün Bazı Özellikleri	70
7.4. Ayrık Fourier Dönüşümü	72
7.4.1. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemi.....	73
7.4.2. Kompleks Fourier Serileri	74
7.5. Ayrık Fourier Dönüşüm Formülleri	77
7.6. Fourier ve Ters Fourier Dönüşümünün Bulunması	79
7.6.1. Fourier Dönüşümü Bulmak İçin İzlenecek Yöntem.....	79

7.7. Fourier Dönüşümün Yapı Dinamiği Problemlerine Uygulanması	81
7.7.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Çözümü	81
7.7.2. Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Çözümü	82
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	91

ÇİZELGELERDİZİNİ

SAYFA

Çizelge 5.1. Örnek 5.9'e ait serbest titreşim frekansları.	43
Çizelge 5.2. Örnek 5.10'a ait serbest titreşim frekansları (kat hizalarında dönme var)	46
Çizelge 5.3. Örnek 5.10'e ait serbest titreşim frekansları (kat hizalarında dönme yok).....	46
Çizelge: 6.1. Serbest titreşim frekansları.....	59
Çizelge: 6.2. Örnek 6.1.'e ait maksimum moment ve deplasman değerleri.....	60
Çizelge: 6.3. Örnek 6.2'e ait serbest titreşim frekansları	61
Çizelge: 6.4. Örnek 6.2'e ait çeşitli zaman artımı için maks. deplasman değerleri	62
Çizelge: 6.5. Örnek 6.3'e ait değerler.....	66
Çizelge: 6.6. Örnek 6.3.'e ait maksimum deplasman ve kesme kuvveti değerleri	66
Çizelge: 6.7. Örnek 6.4'e ait serbest titreşim frekansı değerleri	68
Çizelge 7.1. Fourier dönüşümde türev ifadeleri	72
Çizelge 7.2. Örnek 7.1.'e ait değerler.....	85

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 4.1.	Statik ve dinamik durumun karşılaştırılması	7
Şekil 4.2.	Tek serbestlik dereceli sistemlerin tipik örnekleri	8
Şekil 4.3.	Virtüel deplasman durumu.....	9
Şekil 4.4.	Tek serbestlik dereceli sistem	10
Şekil 4.5.	Kiriş elemanı için kod numaraları.....	12
Şekil 5.1.	Karakteristik polinomun grafiği.....	39
Şekil 5.2.	Örnek 5.9'e ait şekil.....	43
Şekil 5.3.	Örnek 5.10'a ait şekil.....	45
Şekil 5.4.	Örnek 5.10'a ait mod şekilleri	47
Şekil: 6.1.	Örnek 6.1'e ait şekil.....	57
Şekil: 6.2.	Örnek 6.1.'ait kirişin orta noktasındaki deplasman değişimi.....	59
Şekil: 6.3.	Örnek 6.1.'ait kirişin orta noktasındaki momenti değişimi.....	60
Şekil: 6.4.	örnek 6.2'e ait şekil.....	61
Şekil: 6.5.	örnek 6.2'e ait şekil.....	62
Şekil: 6.6a.	Örnek 6.2 'e ait konsol uç deplasmanı (tüm modların katkısı)	63
Şekil: 6.7.	Örnek 6.3'e ait çerçeve şekli.....	64
Şekil: 6.8.	Örnek 6.3'ün basit bir şekilde modellenmesi.....	65
Şekil: 6.9.	Örnek 6.4'ün şeması ve serbest cisim diyagramı.....	67
Şekil: 6.10.	Örnek 6.4'e ait yükleme tipi	67
Şekil: 6.11.	Örnek 6.4'e ait deplasman değişimi.....	68
Şekil 7.1.	zaman uzayında $F(t)$ fonksiyonu.....	70
Şekil 7.2.	$F(t)$ 'nin ayrık tanımı.....	73
Şekil 7.3.	Ayrık Fourier dönüşümün simetrik ve antisimetrik özelliği	79
Şekil 7.4.	Örnek 7.1'e ait yükleme tipi	84
Şekil 7.5.	Örnek 7.1'e ait şekil.....	84

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\underline{K}$	: Sistem rijitlik matrisi
$\underline{M}$	: Sistem kütle matrisi
$\underline{C}$	: Sistem sönüm matrisi
$\underline{X}$	: Sistem deplasman vektörü
$\dot{\underline{X}}$	: $\underline{X}$ 'in zamana göre 1. Türevi (hız vektörü)
$\ddot{\underline{X}}$	: $\underline{X}$ 'in zamana göre 2. Türevi (ivme vektörü)
$\underline{P}(t)$	: Sistem yük vektörü
ω	: Sistemin sönümsüz haldeki serbest titreşim frekansı
ξ	: Sistemin sönüm oranı
ω_D	: Sistemin sönümlü haldeki serbest titreşim frekansı
λ	: Özdeğer
$\underline{\Phi}$	: Özvektör (mod şekil fonksiyonu)
$\underline{F}$	: Dıştan etkiyen dinamik yük vektörü
$\underline{a}$	: Dıştan etkiyen dinamik ivme vektörü
E	: Elastisite modülü
I	: Atalet momenti
r	: Atalet yarıçapı
γ	: Birim boyun ağırlığı
L	: Elemanın boyu
A	: Elemanın en kesit alanı
$\underline{T}$	: Transformasyon matrisi
δW	: Dış kuvvetlerin virtüel işi
δU	: İç kuvvetlerin virtüel işi
$[\Lambda]$	: Spektral matris
$[\Phi]$	: Modal matris

α_0, α_1 : İntegrayon sabitleri

Δt : Zaman artımı

$F^F(\omega)$: $F(t)$ 'nin Fourier uzayında dönüşüm fonksiyonu

$\dot{F}^F(\omega)$: $F(t)$ 'nin Fourier uzayında 1. türevi

$\ddot{F}^F(\omega)$: $F(t)$ 'nin Fourier uzayında 2. türevi

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın temel amacı yapıların dinamik yükler altında davranışının incelenmesi ve yapı sistemlerin bu dinamik yükler altında oluşacak deplasman, ivme, kesit tesirleri gibi mühendislik özelliklerinin saptanmasıdır.

Doğadan ve insan aktivitelerinden doğan zamana bağlı yükler en basit bir betonarme kirişinden başlayıp daha karmaşık çok katlı bir binaya kadar tüm yapılar üzerine değişkenlik göstermektedir. Dolayısıyla, bu tür yapıların analiz ve dizayn yapılırken dinamik yükler içerdiği için zamana bağlı atalet kuvvetlerini de göz önüne bulundurulması gerekiyor. Bir yapıda deplasmanlara karşı gösterilen dirençler, deplasman ve hız içeren kuvvet fonksiyonlardır. Sonuç olarak, bu yapıların dinamik yükler altında davranışı genellikle non-lineer kısmı diferansiyel denklem takımı tarafından idare edilmekte olup ve çözülmesi de oldukça güçtür. Ne mutlu ki, son zamanlarda yapı dinamiği alanında pratik ve verimli yaklaşımların gelişmesiyle bu güçlükler ortadan kaldırılmış durumdadır.

Mühendislik problemlerin kesin (analitik) çözümleri, özellikle yapı dinamiği konusunda her zaman mümkün olmamıştır. Analitik çözüm sadece birtakım özel sadeleştirilmiş durumlarda geçerli olmuştur. Kompleks malzemeye sahip, yükleme durumu ve sınır şartları karışık olan problemlerde, mühendisler birtakım idealleştirme ve kabullerle matematik modeller kurarak, bu karmaşıklığı en aza indirmişler.

Sonuç olarak, yapı sistemlerin dinamik yükler altında davranışını idare eden diferansiyel denklem takımının analitik çözülmesi (bazı basit ve özel durumlar hariç) mümkün olmadığı için, sayısal çözüm yöntemlerine başvurulması gerekmektedir. Bu tezde mod süper pozisyon üzerine çalışıldığı için, önce yapıların serbest titreşim konusuna değinilmiştir. Mod süperpozisyon metodu ile girişimsiz hale gelen diferansiyel denklem takımının çeşitli yöntemler (Newmark metodu, Fourier dönüşüm metodu) ile çözülmesi ve karşılaştırılması amaçlanmaktadır.

Son olarak, Mathematica paket programı kullanılarak eğitim amaçlı bilgisayar programları geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tez üzerinde daha önce yapılmış olan çalışmaların bazıları özet olarak aşağıda verilmektedir.

İlk başta serbest titreşim analizinde yapılan çalışmalardan bazıları kısaca şu şekildedir:

BAUER (1957), vektör iterasyon ve kuvvet yöntemleri üzerinde çalışarak çeşitli tiplerden matrislerin özelliklerini tespit etmesinde çaba göstermiştir.

SCHWARZ (1968), daha çok vektör iterasyon metotlarının yakınsama özellikleri üzerinde bir dizi çalışmalar yapmıştır.

RUTISHAUSER (1969), vektör iterasyon yöntemlerini, tam pozitif ve simetrik matrisler üzerinde uygulamıştır. Ayrıca iterasyon vektörlerinin ortogonal olma özelliğinin, Gram-Schmidt ortogonalizasyonu ve Cholesky çarpanlarına ayırma yöntemlerini kullanarak muhafaza edilmesi üzerinde çalışmalar yapmıştır.

BATHE ve WILSON (1970–1979), Rayleigh-Ritz analizi olarak da bilinen alt uzaylarla iterasyon yönteminin vektör iterasyon yöntemleri ile birlikte kullanılmasının iyi sonuçlar verdiğini vurgulanmışlardır. Geniş hacimli problemler için bu yöntemin uygun olduğunu göstermiştir.

WILSON ve ITOH (1983), hesaplama esnasında, daha önceden bulunan özdeğerlere tekrar yakınsamayı önlemek için, iterasyon vektörlerine ortogonalizasyon uygulamışlardır. Ayrıca hızlı yakınsamayı sağlamak için shift özelliğini kullanmışlardır.

Zorlanmış titreşim konusunda önceden yapılan çalışmaların bazıları şu şekildedir:

CLOUGH (1975), keyfi olarak zamanla değişen yükler altında yapıların davranışını incelemiştir. Ayrıca tipik birkaç sistem ve yükleme için seri şeklinde kapalı çözümler elde etmiştir. Bununla beraber deprem mühendisliği konusunda, özellikle yapı-zemin etkileşimi konusunda çalışmalar yapmıştır.

BATHE ve WILSON (1976), yapıların dinamik yükler altındaki davranışlarını idare eden diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Çözüm metodu olarak direkt integrasyon yöntemleri ile mod süperpozisyon metodunu kullanmışlardır.

CRAIG (1981), yapıların çeşitli tipteki yüklemeler altındaki davranışlarını ve serbest titreşim analizi üzerinde çalışmalar yapmıştır. Sistemlerin Fourier uzayındaki çözümleri üzerinde de çalışmıştır.

3. MATERYAL VE METOD

Yapıların dinamik yükler altında davranışını (özellikle düzlem çerçevelerin) incelemek için birçok yöntem yanında en yaygın kullanılan Mod Birleştirme Yöntemi veya Mod Süperpozisyon metodudur. Bu tezde malzeme özelliği olarak ele alınan kiriş elemanın ve tüm sistem malezemesi, lineer elastik, homojen ve izotrop olarak kabul edilecektir.

Bilindiği gibi yapıların dinamik davranışını ikinci dereceden diferansiyel denklem takımı idare etmektedir. Tezde önce sonlu elemanlar metodu kullanılarak, düzlem içinde yüklü çubuk sistemler için elde edilen eleman rijitlik ve kütle matrisleri verilmektedir. Sonra kodlama tekniği vb. bir metodla sistem rijitlik ve kütle matrisleri oluşturmaktadır. Daha sonra mod süperpozisyon gereği, serbest titreşim analizi yapılır. Serbest titreşim konusunda ortaya çıkan özdeğer problemi çeşitli metodlarla çözülerek karşılaştırma yapılacaktır. Serbest titreşim analizinde çözüm yöntemi olarak yaklaşık çözüm yöntemleri arasında daha çok etkin ve elverişli olan Rayleigh ile iterasyon ve alt uzaylarla iterasyon metodları kullanılacaktır. Özdeğerlerin en küçük olup olmadığı Sturm teoremi ile kontrol edilecektir.

Mod süperpozisyon yöntemi ile sistem diferansiyel takımı girişimsiz hale getirildikten sonra zorlanmış titreşim analizi yapılacaktır. Zorlanmış titreşim analizinde genel olarak iki yaklaşım çözümü vardır, bunlar zaman uzayında çözüm ve frekans uzayında çözümdür. Bu tezde zaman uzayında çözüm yöntemi olarak Newmark Metodu ve frekans uzayında çözüm için ise, Fourier dönüşüm metodu ile incelenecektir.

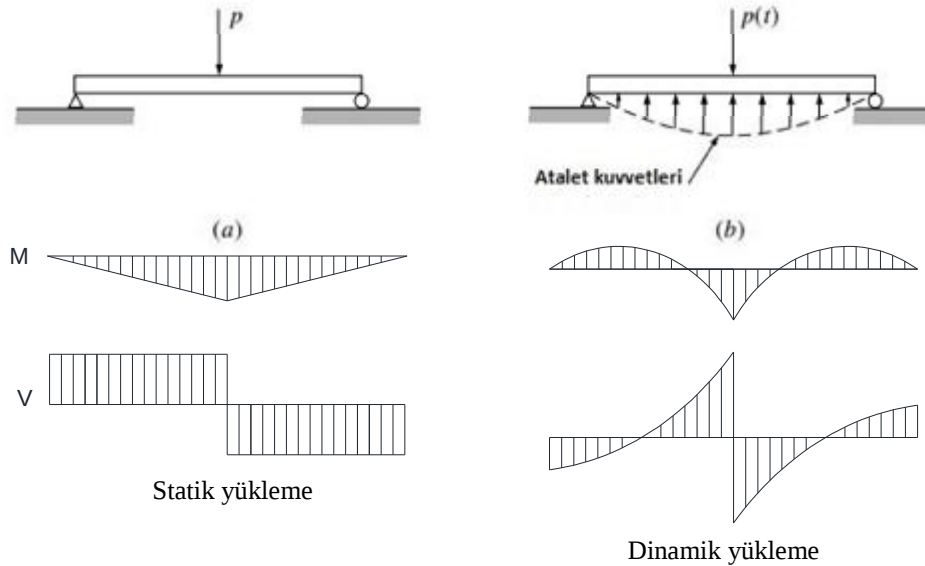
Son olarak, tezde anlatılan tüm konuları kapsayan genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanması amaçlanmış olup tüm uygulama örnekleri bu programlar yardımı ile çözülecektir.

4. YAPI DİNAMİĞİ HAKKINDA GENEL BİLGİLER

4.1. Dinamik Problemin Özellikleri

Yapı dinamiğinin konusu, zamana bağlı olarak değişen yükler altında taşıyıcı sistemdeki gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin incelenmesini içerir. Bu maksatla kullanılan yöntemler, yapı statığında kullanılanların genelleştirilmiş olarak görülebilir. Bu iki konunun birbiriyle karşılaştırılmasından, dinamik çözümün, statik çözüm gibi tek bir çözümden ibaret olmayıp, zamana bağlı bir çözüm takımından meydana geldiği ortaya çıkar. Bu ise, dinamik çözümün, statığe göre olan zorluğunu ortaya koyar, (Celep ve Kumbasar, 1992).

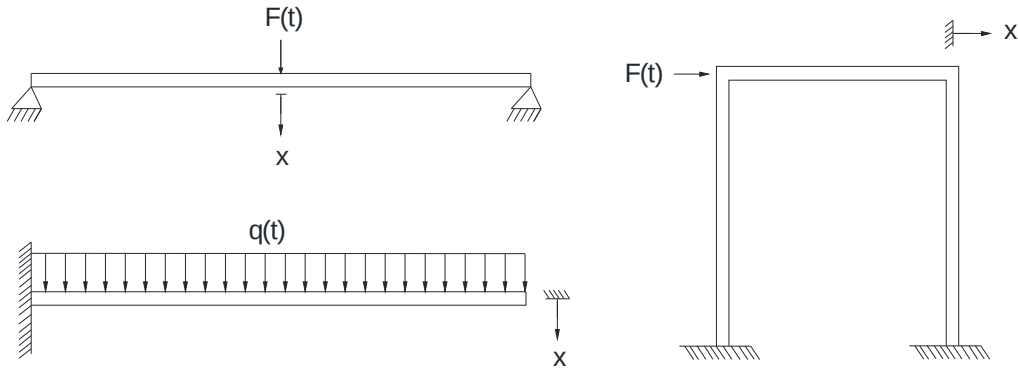
Bu iki çözüm arasında en önemli diğer bir fark da dinamik yer değiştirme sırasında kütsel atalet kuvvetlerin meydana gelmesidir. Örneğin şekil 4.1'de gösterilen basit kirişe etkiyen statik tekil yükten meydana gelen kesme kuvveti ve eğilme momenti değişimi, denge denklemleri kullanılarak elde edilebilir. Eğer kirişe etkiyen yük dinamik özelliğe sahipse, zamana bağlı yer değiştirmeler ve kiriş kütlesi sebebiyle atalet kuvvetleri ortaya çıkacaktır.



Şekil 4.1. Statik ve dinamik durumun karşılaştırılması

4.2. Serbestlik Derecesi

Yapı dinamiğinde bir sistemin herhangi bir zaman diliminde, söz konusu yapının biçim ve konumunu belirlemek için bağımsız parametre sayısına *Serbestlik Derecesi* denir. Genelde, sürekli bir sistemde sonsuz sayıda serbestlik derecesi mevcuttur. Sürekli sistemde, bazı kabuller yapılarak veya uygun bir matematiksel modeli seçilerek, sistemin serbestlik derecesini en aza indirilir. Aşağıda şekil 4.2.'de verilen örnekler dinamik analizi yapılırken her biri Tek Serbestlik Dereceli bir sistem olarak düşünülebilir.



Şekil 4.2. Tek serbestlik dereceli sistemlerin tipik örnekleri

4.3. Hareket Denklemlerinin Formülasyonu

Sistemlerin dinamik davranışını elde edilmesinde bir önemli adım, hareket denklemlerinin elde edilmesidir. Hareket denklemlerinin yazılması aşağıda açıklandığı gibi 3 farklı yöntemle yapılabilir.

4.3.1. D'Alembert Prensibi

$P(t)$ kuvveti etkisi altındaki m olan bir rijit cisim göz önüne alınsın, Newton'un ikinci kuralına göre bu kuvvet, doğrusal momentumdaki değişime eşittir:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\ddot{x}(t) \quad (4.1)$$

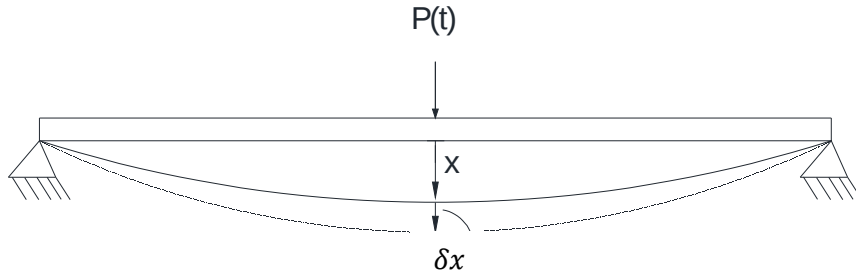
D'Alembert prensibi gereği, analiz yapılırken sistemin atalet kuvvetleri gözönüne bulundarmak suretiyle, dinamik problem statik bir problem gibi çözülmesini olanak sağlanmaktadır. Buna göre (4.1) denklemini yeniden yazılırsa;

$$p(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \quad (4.2)$$

4.3.2. Virtüel Deplasman Prensibi

Şekil 4.3. de gösterilen dengede olan sistemin x deplasmanına δx kadar virtüel (keyfi) bir yerdeğiştirme verilmektedir.

$$x \longrightarrow x + \delta x$$



Şekil 4.3. Virtüel deplasman durumu

Virtüel deplasman prensibinde en önemli ve dikkat gerektiren husus, δx gibi virtüel deplasmanı sistemin kinematik sınır koşullarına uygun olmasıdır. Bu prensibin gereği virtüel şekil değiştirme esnasında, iç aktif kuvvetlerin yaptığı virtüel iş ile dış aktif kuvvetlerin yaptığı virtüel iş birbirine eşit olmasıdır.

$$\delta W = \delta U \quad (4.3)$$

Burada δW dış kuvvetlerin virtüel işi ve δU iç kuvvetlerin virtüel işini göstermektedir.

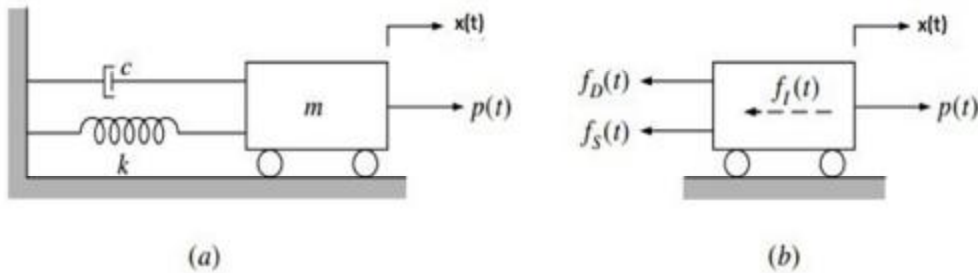
4.3.3. Varyasyonel Yaklaşım

Denge denklemlerinin vektörel bazından kaçınarak, skaler miktarları kullanılmak üzere, bir başka yol ise varyasyonel yaklaşım veya Hamilton Prensidir.

Bu yöntemde elastik ve atalet kuvveleri içermeyip onun yerine kinetik ve potansiyel enerjisi varyasyonu terimler kullanılmaktadır. Daha önce denildiği gibi bu yöntemin en büyük avantajı, virtüel-iş prosedürüne giren tüm kuvvetler, deplasmanlar vb. vektörel olmamasıdır.

4.4. Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Matematiksel Modeli ve Formülasyonu

D'Alembert yöntemi kullanılarak burada tek serbestlik dereceli bir sistemde dinamik davranışın formülasyonu çıkarılmaktadır.



(a) Matematiksel model

(b) Serbest cisim diyagramı

Şekil 4.4. Tek serbestlik dereceli sistem

Buna göre Şekil 4.4.a için denge denklemini yazılırsa;

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4.4)$$

Burada $f_I(t)$ atalet kuvveti, $f_D(t)$ sönüm kuvveti, $f_S(t)$ yay kuvveti ve $p(t)$ ise $x(t)$ ile yönde olan uygulanan dinamik kuvvetini göstermektedir.

Yukarıdaki tanımlardan yararlanarak (4.4) denklemini yeniden yazılırsa;

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (4.5)$$

olarak çıkarılır. (4.5)denkleminde $\frac{k}{m} = \omega^2$ ve $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$ dönüşümü yapılarak yeniden yazılırsa;

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{p(t)}{m} \quad (4.6)$$

ω : Sistem sönümsüz serbest titreşim frekansı

ξ : Sistem sönüm oranı (yapı sistemlerinde $0,01 \leq \xi \leq 0,1$ arasında değişir.)

Eğer bir sistemde kütlelerin ilk pozisyonlarına göre rölatif olarak yapmış oldukları yerdeğiştirme miktarları belirlemek için gereken bağımsız deplasman sayısı dinamik analizi için birden fazla ise çok serbestlik dereceli sistem olarak tanımlanır. Aşağıda gösterilen matris notasyonu, bu sistemleri idare eden diferansiyel denklem takımınıdır.

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{P}(t) \quad (4.7)$$

$\underline{M}$: Sistem kütle matrisi,

$\underline{C}$: Sistem sönüm matrisi,

$\underline{K}$: Sistem rijitlik matrisi,

$\underline{P}(t)$: Sistem yük vektörü,

Yukarıdaki denklem takımında eğer sisteme dışarıdan bir yük etkilemiyorsa, sistem serbest titreşim hareketi yapıyor demektir. Eğer sisteme dışarıdan ve zamana bağlı olarak etkiyen bir yük var ise, yani $\underline{P}(t) \neq \underline{0}$ olursa, bu sistem zorlanmış titreşim hareketi yapıldığını göstermektedir. Bu konu ile ilgili

önümüzdeki bölümlerde hem serbest titreşim hem de zorlanmış titreşim hareketi üzerine detaylı olarak değinilecektir.

4.5. Sistem Rijitlik Ve Kütle Matrislerinin Teşkili

Aşağıda gösterilen şekilden yararlanarak tipik kiriş elemanı ve düzlemi içinde yüklenmiş olan düzlemsel sistemler için hem eleman kütle matrisi hem de eleman rijitlik matrisi verilmektedir.



Şekil 4.5. Kiriş elemanı için kod numaraları

Kütle ve rijitlik matrisleri şekil 4.5.de görülen, düzlemi içinde yüklenmiş tipik bir elemandan yararlanarak eleman koordinatlarında aşağıdaki gibi elde edilmiştir (James ve Smith, 1989) :

Eleman Rijitlik Matrisi :

$$\underline{k_e} = \frac{EI}{L_e^3} \begin{vmatrix} (L_e/r)^2 & 0 & 0 & -(L_e/r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L_e & 0 & -12 & 6L_e \\ 0 & 6L_e & 4L_e^2 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -(L_e/r)^2 & 0 & 0 & (L_e/r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L_e & 0 & 12 & -6L_e \\ 0 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & -6L_e & 4L_e^2 \end{vmatrix}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4.8)$$

Eleman Kütle Matrisi :

$$\underline{m}_e = \frac{\rho A L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_e & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_e & 0 & 156 & -22L_e \\ 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Burada A, L_e, E, I, ρ ve r sırasıyla, eleman kesit alanı, eleman boyu, elastisite modülü, atalet momenti, birim kütle hacmi (yoğunluk) ve atalet yarıçapını göstermektedir.

Aşağıdaki gibi transformasyon işlemi tatbik yapmak suretiyle eleman koordinatlarında verilen matrislerin bütün sistem için ortak matris takımına göre yeniden düzenlenmektedir.

$$\begin{aligned} \underline{k}_e' &= \underline{T}^T \underline{k}_e \underline{T} \\ \underline{m}_e' &= \underline{T}^T \underline{m}_e \underline{T} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Burada transformasyon matrisi olan $\underline{T}$ düzlemsel yüklenmiş sistemler için aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t} & 0 \\ 0 & \underline{t} \end{bmatrix} ; \underline{t} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Böylece global takımda bulunan eleman matrislerinin uygun bileşenleri kullanılarak, kodlama tekniği gibi bir yöntemle sistem kütle ve rijitlik matrisleri elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \sum \underline{k}_e' &\longrightarrow \underline{K} \\ \sum \underline{m}_e' &\longrightarrow \underline{M} \end{aligned} \quad (4.12)$$

5. SERBEST TİTREŞİM

5.1. Giriş

Serbest titreşim olayında (4.7) sistem denklemleri aşağıdaki durumu almaktadır.

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{0} \quad (5.1)$$

Sönüm oranı ($\underline{C} = \underline{0}$) yapılan hesaplarda bu bölüm içinde göz önüne alınmamaktadır. Buna göre (5.1) eşitliği,

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{0} \quad (5.2)$$

şeklini almaktadır. Bununla birlikte sistem deplasman vektörü için aşağıdaki gibi dönüşüm yapılır;

$$\underline{X} = \underline{\phi} \sin \omega t \quad (5.3)$$

Bu durumda sistem ivme vektörü de aşağıda gösterildiği şekilde olmaktadır;

$$\ddot{\underline{X}} = -\omega^2 \underline{\phi} \sin \omega t \quad (5.4)$$

Yukarıdaki eşitlikleri (5.2) bağıntısında yerine yazıldıktan sonra, sistem denklemleri aşağıda gösterildiği şekilde diferansiyel denklem takımı, cebrik özdeğer problemin şekline gelmektedir.

$$\begin{aligned} (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{\phi} &= \underline{0} \\ \underline{K} \underline{\phi} &= \lambda \underline{M} \underline{\phi} ; \lambda = \omega^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

λ : Özdeğer (Serbest titreşim frekansın karesi)

$\underline{\phi}$: Özvektör (mod şekil fonksiyonu)

$$\underline{A} = \underline{K} - \lambda \underline{M} \quad (5.6)$$

(5.6) ifadesinde olduğu gibi bir A matrisi tarif edilirse, (5.5) denkleminde gösterilen özdeğer probleminin çözümü için aşağıda tanımlanan koşullar açığa gelmektedir.

$$\begin{aligned} |\underline{A}| \neq 0 & \implies \underline{\phi} = \underline{0} \\ |\underline{A}| = 0 & \implies \underline{\phi} \neq \underline{0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Yukarıdaki koşullara göre, (5.5) denkleminin çözülebilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekmektedir. Bu yüzden katsayılar determinantını sıfır olabilmesi için gereken λ değerleri hesaplanmaktadır.

5.2. Özdeğer ve Özvektörlerin Özellikleri

Bu bölüm kapsamında, çok fazla detaya girmeden, özdeğer ve özvektörlerin sadece bu çalışmada kullanılan özelliklerine değinilmektedir.

5.2.1. Özvektörlerin Normalizasyonu

Genel olarak özdeğer problemleri çözülürken değişik amaçlar için farklı şekillerde gösterilmektedir, bu değiştirme işlemi özvektörlerin normalizasyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu tez çalışmasında, özvektörlerin kütle matrisine göre normalize edilmektedir. Bu tip normalizasyon aynı zamanda rijitlik ve kütle matrisleri için ortogonlile koşullarını da sağlamaktadır ve aşağıdaki gösterildiği şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} [\phi_i]^T [M] [\phi_j] &= \delta_{ij} & (i = j, \quad \delta_{ij} = 1) \\ [\phi_i]^T [K] [\phi_j] &= \lambda_i \delta_{ij} & (i \neq j, \quad \delta_{ij} = 0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.2.2. Rayleigh Oranı

Keyfi bir $\underline{v}$ vektörü için (5.9) bağıntısına Rayleigh oranı olarak adlandırılmaktadır. Özel bir durum olarak sistemin herhangi bir özvektörü $\underline{v}$ vektörüne eşitse ($\underline{v} = \underline{\phi}_i$), Rayleigh oranı özdeğere (λ_i) tekabül etmektedir.

$$\rho(v) = \frac{[v]^T [K] [v]}{[v]^T [M] [v]} \quad , \quad \lambda_1 \leq \rho(v) \leq \lambda_n \quad (5.9)$$

$$\rho(\phi_i) = \frac{[\phi_i]^T [K] [\phi_i]}{[\phi_i]^T [M] [\phi_i]} = \lambda_i \quad (5.10)$$

5.2.3. Sturm Teoremi

Rasgele seçilmiş olan μ sayısı genel bir özdeğer probleminde,

$$[\tilde{K}] = [K] - \mu[M] \quad (5.11)$$

şeklinde bir matris tanımlanırsa, bu matris aşağıda gösterildiği gibi çarpanlarına ayrılabilir.

$$[\tilde{K}] = [L][D][L]^T \quad (5.12)$$

Burada $[L]$ ve $[D]$ sırası ile alt üçgen ve diyagonal matristir. Sturm teoremine göre $[D]$ matrisinde diyagonal üzerinde olan negatif elemanların sayısı p ise, bu özdeğer problemi için μ sayısından küçük p adet özdeğer var olduğu göstergesidir, (Bathe, 1982).

5.2.4. Genel Özdeğer Problemin Standart Hale Dönüştürülmesi

Genel bir özdeğer problemin standart özdeğer problemine dönüştürülmesinin nedeni literatürde çok sayıda bu tip problemler için kuvvetli yöntemler geliştirilmiş olmasıdır. Dönüştürme işlemi iki farklı türde yapılmaktadır. Bunlar sırasıyla, $[M]$ kütle matrisinin tam pozitif olması durumu ve $[K]$ rijitlik matrisinin tam pozitif olması durumudur. Ve aşağıda görülmektedir. İlk başta $[M]$ kütle matrisinin tam pozitif olması durumu için kütle matrisin,

$$[M] = [S][S]^T \quad (5.13)$$

olduğu şekilde çarpanlara ayrıldıktan sonra, aşağıda gösterilen dönüşümler yapılması durumunda,

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= [S]^{-1}[K][S]^{-T} \\ [\tilde{\phi}] &= [S]^T [\phi] \end{aligned} \quad (5.14)$$

olmak üzere (5.5) genel özdeğer problemi,

$$[\tilde{K}][\tilde{\phi}] = \lambda[\tilde{\phi}] \quad (5.15)$$

gibi standart durumuna gelmektedir. Diğer tip dönüşüm ise, $[K]$ rijitlik matrisinin tam pozitif olması durumu için aşağıdaki gibi yapılmaktadır. Önce sistem rijitlik matrisi,

$$[K] = [S][S]^T \quad (5.16)$$

$$[\tilde{M}] = [S]^{-1}[M][S]^{-T} \quad (5.15)$$

$$[\tilde{\phi}] = [S]^T [\phi]$$

dönüşümleri yapılacak olursa, problem;

$$[\tilde{M}][\tilde{\phi}] = \frac{1}{\lambda}[\tilde{\phi}] \quad (5.18)$$

olduğu şekilde standart duruma gelmektedir.

Örnek 5.1.

Aşağıda gösterilen kütle ile rijitlik matrisleri genel özdeğer problemidir. Bu tip problemi standart özdeğer problemi haline getirilmesi amaçlanmaktadır.

$$\underline{K} \underline{\phi} = \lambda \underline{M} \underline{\phi} \quad , \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} ; \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Öncelikle kütle matrisi (5.13)'te olduğu şekilde çarpanlarına ayrılırsa,

$$[M] = [S][S]^T \implies [S] = [S]^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & \sqrt{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S]^{-1} = [S]^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & & & \\ & 1/\sqrt{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri bulunur. Bu matrisleri kullanılarak, aşağıdaki gibi yeni sistem matrisi bulunur;

$$[\tilde{K}] = [S]^{-1}[K][S]^{-T} \implies [\tilde{K}] = \begin{bmatrix} 2.5 & -2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 3 & -2.828 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -2.828 & 6 & -4 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Böylelikle, genel özdeğer problemi, (5.15) denkleminde olduğu şekilde standart hale getirilmiştir.

5.2.5. Kaydırma (Shift)

μ rastgele seçilmiş bir sayı olursa, genel bir özdeğer probleminde,

$$[\tilde{K}] = [K] - \mu[M] \quad (5.19)$$

dönüşüm işlemi yapılırsa, (5.5) denklemini kullanılarak, özdeğer problemi

$$[\tilde{K}][\phi] = \eta[M][\phi] \quad (5.20)$$

şekline gelmektedir. Bu şekilde ilk sistemin özdeğerleri (λ_i) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\lambda_i = \eta_i + \mu \quad (5.21)$$

İki önemli sebepten dolayı, bu şekilde bir yol izlenmektedir. Birincisi olarak, sistem matrisleri hiç biri tam pozitif olmaması, bu durumda, çoğu çözüm yöntemleri kullanılmamaktadır. Böyle bir durumda, matrisleri tam pozitif hale dönüştürülebilmesi için kaydırma yöntemi uygulanmaktadır. İkinci sebep ise, iteratif yöntemlerde işlemleri hızlandırmasıdır. Bu yöntemde, problem çabuk yakınsaması, shift değeri özdeğere ne kadar yakın seçilmesine bağlıdır.

5.3. Özdeğer Problemlerin Çözüm Yöntemleri

Gerek Standart tip gerekse genel özdeğer problemleri için çeşitli çözüm metotları olmakla birlikte bunları genel bir şekilde iki gruba ayırılabilir.

- a) Kesin Çözüm
- b) Yaklaşık Çözüm

5.3.1. Kesin Çözüm

(5.22) 'deki özdeğer problemini gözönüne alalım:

$$(\underline{K} - \lambda \underline{M})\phi = \underline{0} \quad (5.22)$$

Özdeğer problemini tanımlı gereği (5.22)'deki denklem için çözümün olabilmesi için katsayılar matrisin determinantın sıfır olması şarttır. Bu durumda yukarıdaki denklem çözülürse elde edilen λ' ya bağlı polinoma karakteristik polinom denmektedir.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \text{Det}(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = 0 \\ p(\lambda) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} \dots \dots a_1 \lambda + a_0 \\ \lambda_1 &< \lambda_2 \dots \dots \dots < \lambda_n \end{aligned} \quad (5.23)$$

(5.23)' teki karakteristik polinom kökleri, özdeğerleri $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \dots, \lambda_n)$ vermektedir. Öncelikle, özdeğerler hesaplanır. Daha sonra aşağıda verilen (5.24) bağıntısı yardımıyla her bir özdeğere karşılık gelen özvektörler hesaplanabilmektedir.

$$(\underline{K} - \lambda_i \underline{M})\phi = \underline{0} \quad (5.24)$$

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli husus λ' ya bağlı olan polinomun katsayıları ve ona bağlı polinomun kökleri doğru olarak saptanmasıdır. Bilindiği gibi yapı dinamik analizinde çok yüksek dereceli polinomlarla karşı karşıyadır. Bu sebepten dolayı karakteristik polinomların köklerinin saptanması

oldukça zordur veya bazı durumlarda imkansızdır. Bu yüzden, özdeğer problemlerin çözümü için çok sayıda yöntemler geliştirilmiştir.

Örnek 5.2.

Örnek 5.1. için kesin olarak çözülmesi:

$$\underline{K} - \lambda \underline{M} = \begin{bmatrix} 5 - 2\lambda & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 - 2\lambda & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 - \lambda & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \text{Det}(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = 4\lambda^4 - 66\lambda^3 + 276\lambda^2 - 285\lambda + 25$$

şeklinde sistemin karakteristik polinomu bulunur. Bu polinomun kökleri sistemin özdeğerlerini verilmektedir. Aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,09654 \implies \omega_1 = 0,31071 \text{ rad/sn} \\ \lambda_2 &= 1,39147 \implies \omega_2 = 1,17961 \text{ rad/sn} \\ \lambda_3 &= 4,37355 \implies \omega_3 = 2,09130 \text{ rad/sn} \\ \lambda_4 &= 10,6384 \implies \omega_4 = 3,26166 \text{ rad/sn} \end{aligned}$$

Bu aşamadan sonra, (5.24) ifadesi kullanılarak her bir özdeğer için ayrı ayrı özvektörleri (şekil fonksiyonları) hesaplanmaktadır.

5.3.2. Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Genel bir şekilde bu yöntemleri iki farklı başlık altında incelenmesi mümkün olmaktadır.

- a) Vektör İterasyon Yöntemleri,
- b) Transformasyon Yöntemleri,

5.3.2.1. Vektör İterasyon Yöntemleri

Başlıktan da anlaşılacağı üzere, bu yöntemleri kullanılırken, bir seri iterasyon sonucunda özdeğerler ve özvektörler elde edilmektedir. Bu başlık altında bu yöntemleri genel bir şekilde üç gruba ayrılabilir.

- ▼ Ters iterasyon yöntemi,
- ▼ İleri iterasyon yöntemi,
- ▼ Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi,

Yukarıda adları geçen yöntemlere Kuvvet Yöntemleri de denmektedir.

1)Ters İterasyon Yöntemi

Bu yöntemin gereği sistem rijitlik matrisinin ($\underline{K}$) tam pozitif olması lazım. Ama $\underline{M}$ sistem kütle matrisi için herhangi bir koşul söz konusu değildir. Eğer sistem rijitlik matrisi tam pozitif değilse, shift özelliğini kullanılarak $\underline{K}$ matrisi tam pozitif olarak dönüştürülmektedir. Bu yöntem kullanıldığında aşağıdaki yol izlenmektedir;

- 1- Öncelikle iterasyonu başlatmak için başlangıç vektörü seçilmektedir. Genelde birim vektör seçilir.

$$[X_1] = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$$

- 2- Aşağıda verilen işlem döngüsü problem yakınsayınca kadar uygulanmaktadır.

$$\left. \begin{aligned} [K][\bar{X}_{k+1}] &= [M][X_k] \\ \rho(\bar{X}_{k+1}) &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]^T [K] [\bar{X}_{k+1}]}{[\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}]} \\ [X_{k+1}] &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]}{([\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}])^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.25)$$

3- L adımın sonuna kadar problemin yakınsadığı varsayılırsa,

$$\rho(\bar{X}_{L+1}) \longrightarrow \lambda_1 ; [X_{k+1}] \longrightarrow [\phi_1] \quad (5.26)$$

şeklinde sistemin özdeğerlerinden biri ve o özdeğere karşılık gelen özvektör (mod şekil fonksiyonları ve serbest titreşim frekanslarından biri) elde edilmektedir. (Bathe ve Wilson, 1976)

Bu yöntemde başlangıç vektörünü herhangi bir vektör seçilmesi mümkün olmakla birlikte daima özdeğer ve özvektörlerin en küçüğü elde edilmektedir. (Bathe ve Wilson, 1976). Ters iterasyon yöntemi için, yakınsama kriteri olarak aşağıda verilen bağıntı kullanılmaktadır.

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq Tol \quad (5.27)$$

Tolerans değeri olarak en az 10^{-2s} kadar iterasyon devam edilir. (en küçük özdeğerinin 2s dijit doğru olacak şekilde hesaplanması).

Örnek 5.3.

Örnek 5.1 için ters iterasyon yöntemini kullanarak sistemin en küçük özdeğeri ve ona karşılık gelen özvektörün bulunması;

Bu problemde başlangıç vektörü olarak $[X_1] = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ve yakınsama toleransı 10^{-6} ($s = 3$) olacak şekilde ters iterasyon algoritması yapıldığında aşağıda verilen değerler hesaplanmaktadır.

$$k = 1 \implies [\bar{X}_1] = [7,8 \ 12,2 \ 11,8 \ 7,2]^T \implies \rho(\bar{X}_2) = 0,0966516$$

$$k = 2 \implies [\bar{X}_2] = [3,239 \ 5,132 \ 4,962 \ 3,001]^T \implies \rho(\bar{X}_3) = 0,0965374$$

$$k = 3 \implies [\bar{X}_3] = [3,238 \ 5,133 \ 4,963 \ 3,002]^T \implies \rho(\bar{X}_4) = 0,0965373$$

$k = 3$ adım sonunda artık problem yakınsadığı gözlenmekte ve iterasyonu durdurarak aşağıda verilen değerler bulunmaktadır.

$$\lambda_1 = 0,09654 \quad [\phi_1] = \begin{bmatrix} 0,3126 \\ 0,4955 \\ 0,4791 \\ 0,2898 \end{bmatrix}$$

2) İleri İterasyon Yöntemi

İleri iterasyon yöntemi, ters iterasyon yönteminin tamamlayıcısıdır. Bu iterasyon yöntemi sonucunda sistemin en büyük özdeğeri ve buna karşılık gelen özvektörler bulunmaktadır. Bir diğer husus, ters iterasyon yönteminde $\underline{K}$ sistem rijitlik matrisi tam pozitif olması gerekirken bu yöntemde ise, $\underline{M}$ sistem kütle matrisi tam pozitif olması gerekmektedir. Aksi takdirde shift kullanılmaktadır (Bathe ve Wilson, 1976). Yöntemin algoritması aşağıda görülmektedir.

- 1- Bir önceki yöntemde olduğu gibi başlangıç vektörü seçilir ve genelde birim vektörü seçilmektedir.

$$[X_1] = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

2- Aşağıda verilen işlem döngüsü problem yakınsayınca kadar uygulanmaktadır.

$$\left. \begin{aligned} [M][\bar{X}_{k+1}] &= [K][X_k] \\ \rho(\bar{X}_{k+1}) &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]^T [K][\bar{X}_{k+1}]}{[\bar{X}_{k+1}]^T [M][\bar{X}_{k+1}]} \\ [X_{k+1}] &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]}{([\bar{X}_{k+1}]^T [M][\bar{X}_{k+1}])^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.28)$$

3- L adımın sonuna kadar problemin yakınsadığı varsayılırsa,

$$\rho(\bar{X}_{L+1}) \longrightarrow \lambda_1 ; [X_{k+1}] \longrightarrow [\phi_1] \quad (5.29)$$

olduğu şekilde sistem için en büyük özdeğer ve özvektörü elde edilmektedir. (5.27) yakınsama kriterini kullanılarak ileri iterasyon yönteminde iterasyon son verilmektedir.

Örnek 5.4.

Örnek 5.1.'deki sistem özdeğer ileri iterasyon yöntemi yardımı ile çözümü; Bu problemde başlangıç vektörü olarak $[X_1] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ ve yakınsama toleransı 10^{-6} ($s = 3$) olacak şekilde ileri iterasyon algoritması yapıldığında aşağıda verilen değerler hesaplanmaktadır.

$$k = 1 \implies [\bar{X}_2] = [1 \quad -0,5 \quad -1 \quad 2]^T \implies \rho(\bar{X}_2) = 5,93333$$

$$k = 2 \implies [\bar{X}_2] = [1,096 \quad -0,183 \quad -4,017 \quad 4,929]^T \implies \rho(\bar{X}_3) = 8,57887$$

⋮

$$k = 9 \implies [\bar{X}_{10}] = [-1,138 \quad 2,713 \quad -7,748 \quad 5,982]^T \implies \rho(\bar{X}_{10}) = 10,63844$$

$$k = 10 \implies [\bar{X}_{11}] = [-1,142 \quad 2,717 \quad -7,748 \quad 5,982]^T \implies \rho(\bar{X}_{11}) = 10,63845$$

$k = 10$ adımda problemin yakınsadığı görülmektedir , iterasyona son verildiğinde aşağıda verilen değerler bulunmaktadır.

$$\lambda_4 = 10,63845 \quad [\phi_4] = \begin{bmatrix} -0,10731 \\ 0,25539 \\ -0,72827 \\ 0,56227 \end{bmatrix}$$

3) Rayleigh Oranı ile İterasyon Yöntemi

Çalışmalar sonucunda gösterilmiştir ki ters iterasyon yöntemine shift metodu uygulanırsa problem sonuca daha çabuk yakınsadığı gözlenmiştir. Burada püf noktası shift değerinin aranan özdeğere yakın seçilmesidir. Uygun shift değeri seçmesi zordur, bunu başarmanın bir yolu vardır, Rayleigh oranının shift değeri olarak kullanmasıdır. Yine ters iterasyon yöntemini uygulanırken her aşamada elde edilen Rayleigh oranı daha sonraki aşama için shift yerine kullandığında çözüme daha hızlı yakınsadığı görülmüştür. Rayleigh oranının shift değeri yerine kullanılan ters iterasyon yöntemine bu sebeple Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi adı verilmektedir. Bir önceki başlıkta yani ters iterasyon yönteminde bahsedilen her şey aynı zaman bu yöntem için uyumludur, (Bathe ve Wilson, 1976). Aşağıda verilen algoritma bu yönteme aittir:

- 1- Öncelikle daha önceki algoritmalar da olduğu gibi başlangıç vektörü $[X_1]$ ve başlangıç shift değeri seçilmektedir. Shift değeri başlangıç olarak sıfır, $\rho(\bar{X}_2) = 0$ kabul edilir.
- 2- Aşağıda verilen işlem döngüsü problem yakınsayınca kadar uygulanmaktadır.

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{K}] &= [K] - \rho(\bar{X}_k)[M] \\ [\tilde{K}][\bar{X}_{k+1}] &= [M][X_k] \\ \rho(\bar{X}_{k+1}) &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]^T [K] [\bar{X}_{k+1}]}{[\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}]} + \rho(\bar{X}_k) \\ [X_{k+1}] &= \frac{[\bar{X}_{k+1}]}{([\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}])^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (5.30)$$

3- L adımın sonuna kadar problemin yakınsadığı varsayılırsa,

$$\rho(\bar{X}_{L+1}) \longrightarrow \lambda_i ; [X_{k+1}] \longrightarrow [\phi_i] \quad (5.31)$$

olduğu şekilde sistem için özdeğer ve özvektörlerinden biri (λ_i, ϕ_i) elde edilmektedir. (5.27) yakınsama kriterini kullanılarak bu yöntemde iterasyon son verilmektedir.

4) Gram-Schmidt Ortogonalizasyonu

Daha önce bahsedildiği gibi, en küçük özdeğer ters iterasyon yöntemi ile, en büyük özdeğer ileri iterasyon yöntemi ile hesaplanırken arada kalan özdeğerleri Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemini kullanılarak elde edilmektedir. Rayleigh oranı ile iterasyon yönteminin zorluğu shift değerinin seçmesidir. Böyle bir durumda arada kalan özdeğer ve özvektörleri bulmak için başka bir yol aramak gerekmektedir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için başlangıç vektörü her adımda değiştirilmesi gerekmektedir. Bunu yapmak için çeşitli alternatif yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri Gram-Schmidt metodudur. Bu yöntemle göre yeni başlangıç vektörü, daha önce hesaplanan özvektörlere dik bir şekilde elde edilir. Önceden hesaplanan özvektörleri kullanılarak yeni vektör bulunmakta ve aynı şekilde yeni özvektör ve özdeğer çifti elde edilmektedir. Yeni başlangıç vektörünün hesaplamasında Gram-Schmidt ortogonalizasyonu kullanılmakta ve aşağıda verilen denklemlerin yardımıyla elde edilmektedir, (Bathe ve Wilson, 1976).

$$\alpha_i = [\phi_i]^T [M] [X_1] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.32)$$

$$[\tilde{X}_1] = [X_1] - \sum_{i=1}^m \alpha_i [\phi_i] \quad (5.33)$$

Böylece Rayleigh oranı ile ters iterasyon ve bulunan yeni başlangıç vektörünün yardımıyla arada kalan özvektör ve özdeğer çiftleri elde edilmektedir.

Örnek 5.5.

Örnek 5.1.'deki sistem özdeğeri Gram-Schmit ortogonalizasyonu ve Rayleigh oranı ile itersayon yöntemini kullanarak çözülmesi; örnek 5.3. ve örnek 5.4.'te sırasıyla ters iterasyon metodu ve ileri iterasyon metodu kullanılarak sistemin en küçük ve en büyük özdeğerleri hesaplanmıştı. Arada kalan diğer özdeğer ve özvektörün bulunması için, Gram-Schmidt metodu yardımıyla yeni başlangıç vektörü aşağıda gösterildiği şekilde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [\phi_1]^T [M] [X_1] \implies \alpha_1 = 2,3850 \\ \alpha_2 &= [\phi_4]^T [M] [X_1] \implies \alpha_2 = 0,1299 \\ [\tilde{X}_1] &= [X_1] - \sum_{i=1}^2 \alpha_i [\phi_i] \implies [\tilde{X}_1] = \begin{bmatrix} 0,2683 \\ -0,2149 \\ -0,0481 \\ 0,2358 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu şekilde hesaplanan başlangıç vektörü $[\tilde{X}_1]$ ve başlangıç shift değeri $\rho(\tilde{X}_1)$ yardımıyla Rayleigh oranı ile iterasyon algoritması uygulandığında aşağıdaki gibi özdeğer, özvektör çifti elde edilir.

$$\lambda_3 = 4,37355 \quad [\phi_3] = \begin{bmatrix} 0,43867 \\ -0,41674 \\ -0,02322 \\ 0,516965 \end{bmatrix}$$

5.3.2.2. Transformasyon Yöntemleri

Bu yöntemler modal matris $[\Phi]$ 'deki özvektörlerin temel özelliklerini kullanan özdeğer sistemi için bir takım çözüm prosedürünü ihtiva etmektedir.

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[K][\Phi] &= [\Lambda] \\ [\Phi]^T[M][\Phi] &= [I] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Burada temel amaç sırasıyla $\underline{P}$ ve $\underline{P}^T$ gibi ortogonal matrisleri kullanarak $[K]$ ve $[M]$ 'ye sağdan ve soldan çarpma işlemi uygulanarak diyagonal forma getirmektir. Bu çarpma işlemi yardımıyla diyagonal forma dönüşen matrisler orijinal formdaki sistem matrisleri ile hiçbir farkı yoktur. Buna benzerlik dönüşümleri adı da verilmektedir. Bu şekilde diyagonal formda olan sistemin özdeğerlerini elde etmek çok kolay olmaktadır. $[M_1] = [M]$ ve $[K_1] = [K]$ olmak üzere, sembolik bir şekilde aşağıda gösterilmiştir.

$$[K_{k+1}] = [P_k]^T[K_k][P_k] \text{ ve } [M_{k+1}] = [P_k]^T[M_k][P_k] \quad (5.35)$$

Burada dönüşüm işlemlerinden sonra $k \longrightarrow \infty$ için $[K_{k+1}]$ ve $[M_{k+1}]$ matrislerinin diyagonal forma geldiği varsayımı yapılırsa özvektör ve özdeğerler aşağıda gösterildiği şekilde hesaplanmaktadır, (Bathe, 1982):

$$\begin{aligned} [\Lambda] &= \text{Diag}(K_r^{(L+1)}/M_r^{(L+1)}) \\ [\Phi] &= [P_1][P_2] \dots [P_L] \text{Diag}\left(1/\sqrt{M_r^{(L+1)}}\right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$[\Lambda]$: Spektral matris

$[\Phi]$: Modal matris

Diyagonal üzerindeki elemanları özdeğerler olan matrise spektral matris ve her bir kolonu özvektörlere karşılık gelen matrise modal matris denilmektedir.

Diğer en önemli husus ise, bu yöntemlerinin özelliği çözümden sonra bütün özdeğerlerin aynı zamanda hesaplanmasıdır. Genel bir şekilde bu başlık altında aşağıda verilen üç yonteme toplamak mümkündür.

- ▼ Jacobi metodu,
- ▼ Genel Jacobi metodu,
- ▼ Householder-QR-Ters iterasyon metodudur.

a) Jacobi Metodu

Bu yöntem yalnızca standart tip özdeğer problemleri için geliştirilmiştir. Bu yöntemi kullanmadan önce eğer özdeğer problemi genel tip ise önce standart tip özdeğer problemi haline getirilir daha sonra çözüm yapılmaktadır, (Bathe, 1982).

$$[P_k] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos \theta & & & & \\ & & & 1 & & & -\sin \theta \\ & & & & \ddots & & \\ & & \sin \theta & & & 1 & \\ & & & & & \cos \theta & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Ortogonal rotasyon matrisleri $[P_k]$ yardımıyla sistem matrisleri diyagonal forma getirmektedir. Yukarıda verilen (5.37) tipik bir rotasyon matrisinin örneğidir. Burada θ açısı (5.38) denklemlerin yardımıyla hesaplanmakta ve diğer boş olan elemanlar ise değerleri sıfır olarak kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned}
k_{ii}^{(k)} \neq k_{jj}^{(k)} &\implies \tan 2\theta = \frac{2k_{ij}^{(k)}}{k_{ii}^{(k)} - k_{jj}^{(k)}} \\
k_{ii}^{(k)} \neq k_{jj}^{(k)} &\implies \theta = \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Bu dönüşüm işlemine sonlandırmak için aşağıda verilen yakınsama kriterleri kullanılmakta ve bu kriterlerin hepsi sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned}
\frac{|k_{ii}^{(k+1)} - k_{ii}^{(k)}|}{k_{ii}^{(k+1)}} &\leq 10^{-2s} \quad i = 1, 2, \dots, n \\
\left[\frac{(k_{ii}^{(k+1)})^2}{k_{ii}^{(k+1)} k_{jj}^{(k+1)}} \right]^{1/2} &\leq 10^{-2s} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (i < j)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

L adım sonunda problemin yakınsadığı varsayılırsa,

$$\begin{aligned}
[K_{L+1}] &= [\Lambda] \\
[\Phi] &= [P_1] [P_2] \dots [P_L]
\end{aligned} \tag{5.40}$$

şeklinde spektral ve modal matrisleri bulunmaktadır.

Örnek 5.6

Örnek 5.1'deki sistemin özdeğerini bulmak için Jacobi metodu kullanılmaktadır: Problem Jacobi metodu ile çözüldüğü için önce problem standart tip hale getirilmektedir. Bu problemin daha önce çözülmüştü, fakat bu kez Jacobi yöntemini kullanılarak çözülür. Yakınsama toleransı(10^{-6} ($s=3$)) seçilir, sistemin özdeğer ve özvektörleri aşağıda gösterildiği şekilde hesaplanmaktadır.

1. Tarama :

i=1 , j=2 için rotasyon matrisi aşağıdaki gibi bulunmaktadır :

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2(-2)}{2,5 - 3} = \frac{-4}{-0,5} = 8 \Rightarrow 2\theta = 82,875^\circ \Rightarrow \theta = 41,44^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0,662 , \quad \cos \theta = 0,7497$$

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 0,7497 & 0,662 & 0 & 0 \\ 0,662 & 0,7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K_2] = [P_1]^T [K_1] [P_1] = \begin{bmatrix} 0,7344 & 0 & -1,342 & 0,468 \\ 0 & 4,765 & -2,588 & 0,530 \\ -1,342 & -2,588 & 6 & -4 \\ 0,468 & 0,530 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde diyagonal dışında diğer elemanlar için aynı işlemler yapılırsa 4. tarama (k=4) sonunda problem yakınsadığı görülmektedir. Problemin son hali aşağıda görülmektedir :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0,09653 & & & \\ & 1,39147 & & \\ & & 4,37355 & \\ & & & 10,6384 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,4421 & -0,6297 & 0,62037 & 0,15212 \\ 0,7007 & -0,1760 & -0,58936 & -0,36152 \\ 0,4791 & 0,4894 & -0,02322 & 0,72826 \\ 0,2898 & 0,5770 & 0,51696 & -0,56197 \end{bmatrix}$$

b) Genel Jacobi Metodu

Önceki başlık altında sadece standart tip özdeğer problemi incelendi. $[K]$ 'yi diyagonal forma getirmek için geleneksel Jacobi rotasyon matrisleri kullanılmıştır. Genel özdeğer problemi için önce standart hale getirilip sonra çözüldü. Ama genel Jacobi yönteminde standart hale getirilmesine gerek

kalmadan direk $[K]$ ve $[M]$ üzerine işlem yapılmaktadır. Genel Jacobi yönteminde aşağıda verilen transformasyon matrisi kullanılmaktadır.

$$[P_k] = \begin{bmatrix} & i & & j \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \alpha \\ & & \gamma & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix} \quad (5.41)$$

(5.41)'da bulunan α ve γ sayıları,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ii}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} &= k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$x = \bar{k}^{(k)}/2 + \text{sign}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{(\bar{k}^{(k)}/2)^2 + k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}} \quad (5.43)$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \quad ; \quad \gamma = \frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x} \quad (5.44)$$

ifadelerinden elde edilmektedir, (Bathe, 1982).

İterasyonu sonlandırmak için aşağıda verilen iki yakınsama kriterlerin aynı anda sağlanması gerekir.

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq 10^{-2s} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.45)$$

$$\lambda_i = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$$

$$\left[\frac{\left(k_{ii}^{(k+1)}\right)^2}{k_{ii}^{(k+1)} k_{jj}^{(k+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-2s} \quad \left[\frac{\left(k_{ii}^{(k+1)}\right)^2}{k_{ii}^{(k+1)} k_{jj}^{(k+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-2s}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n \quad (i < j) \quad (5.46)$$

(5.45)'deki yakınsanma kriterleri sağlandığında iterasyonu durdurup, diyagonal hale gelen sistem rijitlik ve kütle matrisleri ve (5.36) denklemi yardımıyla sistemin özvektör ve özdeğerleri bulunmaktadır.

Örnek 5.7.

Yine aynı örnek 5.1.'deki sistemin özdeğer genel Jacobi yöntemi ile çözümü; $[K] = [K_1]$; $[M] = [M_1]$ olmak üzere iterasyona başlanırsa;

1. Tarama :

i=1 , j=2 için rotasyon matrisi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır :

$$\bar{k}_{11}^{(k)} = 5 \times 0 - 2 \times (-4) = 8 \Rightarrow x = -9,062$$

$$\bar{k}_{22}^{(k)} = 6 \times 0 - 2 \times (-4) = 8 \Rightarrow \alpha = -9,062 \Rightarrow [P_1]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,833 & 0 & 0 \\ 0,833 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}^{(k)} = 5 \times 2 - 6 \times 2 = -2 \Rightarrow x = -0,833$$

Bu aşamadan sonra transformasyon işlemi yapılırsa yeni matrisler elde edilir;

$$[K_2] = [P_1]^T [K_1] [P_1] = \begin{bmatrix} 2,61 & 0 & -2,53 & 0,883 \\ 0 & 16,96 & -4,883 & 1 \\ -2,53 & -4,883 & 6 & -4 \\ 0,883 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = [P_1]^T [M_1] [P_1] = \begin{bmatrix} 3,5594 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki işlemler tüm diyagonal dışı elemanlar için de tekrarlanmaktadır. 5. taramada problem yakınsadığı gözlenmektedir. (5.36) ifadesinin yardımıyla sistemin spektral ve modal matrisleri aşağıda gösterildiği şekilde hesaplanmaktadır.

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0,09653 & & & \\ & 1,39147 & & \\ & & 4,37355 & \\ & & & 10,6384 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,3126 & -0,4453 & 0,4387 & 0,10756 \\ 0,4955 & -0,1244 & -0,4167 & -0,25563 \\ 0,4791 & 0,4894 & -0,0232 & 0,72826 \\ 0,2898 & 0,5770 & 0,5170 & -0,56197 \end{bmatrix}$$

c) Householder-QR-Ters İterasyon Metodu

Son olarak transformasyon yöntemlerin bir başkası da Householder-QR-Ters iterasyon yöntemidir. En önemli özeliği ise, Jacobi metodunda olduğu gibi yalnızca standart tip problemler için geliştirilen bir yöntemdir. Tabi ki genel bir özdeğer problemi için önce standart hale getirilip daha sonra bu yöntem kullanılabilir. (Bathe, 1982):

Householder-QR ters iterasyon metodunun algoritması aşağıda verilen üç aşamada incelenmektedir, (Bathe, 1982):

- 1) Householder transformasyon metodunun yardımıyla sistem rijitlik matrisi $[K]$ üçlü diyagonal forma getirilmektedir.
- 2) QR metodunun yardımıyla tüm sistem özdeğerleri hesaplanmaktadır.
- 3) Üçlü matristeki gereken özvektörleri ters iterasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Daha sonra $[K]$ 'nin özvektörlerini elde etmek için bu vektörlere transformasyon işlemi yapılmaktadır.

5.3.3. Büyük Sistemlerin Özdeğer Problemlerinin Çözümü

Bilindiği gibi genel olarak yapı mekaniği problemleri geniş hacimli ve karmaşıktır. Bu durumda, söz konusu problemlerde daha efektif ve yeterli yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer önemli husus ise, yapı mekaniğindeki problemlerinde bütün özdeğer ve özvektörlerinin hesaplanması lazım olmayıp sadece en küçük birkaç özdeğerin bulunması çözüm için oldukça yeterli olduğu gözlenmiştir. Bu sebepten dolayı, büyük sistemlerin en küçük modlarını hesaplayabilen çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin bazıları aşağıda verilmektedir.

- ▼ Determinant arama metodu,
- ▼ Alt uzaylarda iterasyon metodu.

5.3.3.1. Determinant Arama Metodu

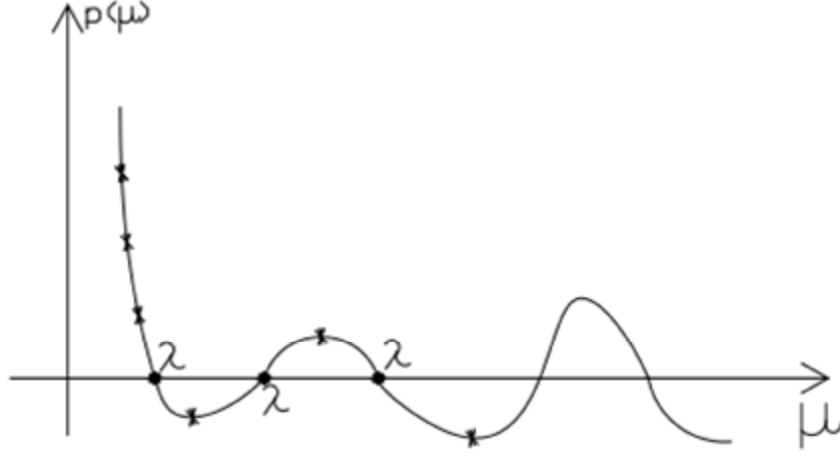
Daha önce bahsedildiği gibi büyük özdeğer problemlerinin çözümünde, gerekli özdeğerler ve karşılık gelen vektörlerin sayısı genellikle matrislerin boyutuna göre daha küçüktür. Bu durumda sadece gerekli olan özdeğeri bulmak yeterlidir. Bant genişliği küçük olan matrisler için determinant arama algoritması çok verimli çözüm sağlamaktadır. Genel tip özdeğer problemi için kesin çözümün,

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \text{Det}(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = 0 \\
 p(\lambda) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} \dots \dots \dots a_1 \lambda + a_0 \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmektedir. Rastgele seçilmiş μ sayısı için karakteristik polinomun determinantı, aşağıda görülen (5.47) bağıntısı ile bulunabilmektedir.

$$\begin{aligned}
 ([K] - \mu[M]) &= [L][D][L]^T \\
 p(\mu) &= \text{Det}([K] - \mu[M]) = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Bu yöntemde, karakteristik polinom değeri rastgele seçilmiş olan μ sayıları için hesaplanır ve eksenleri $p(\mu) - \mu$ olan koordinat takımına işaretlenmektedir (şekil 5.1.). Daha sonra grafikte determinantın işaret değiştirdiği noktada polinomun kökü hesaplanmaktadır. Böylece özdeğerlerin en küçüğü ve arzu edilen sayıda hesaplanabilmektedir. Bulunan özdeğerleri Sturm teoremi ile (bkz. 5.2.3) en küçük özdeğer olup olmadığı kontrol edilebilmesi mümkündür. En sonunda da ters iterasyon yöntemiyle bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulunmaktadır, (Bathe, 1982).



Şekil 5.1. Karakteristik polinomun grafiği

5.3.3.2. Alt Uzaylarla İterasyon Metodu

Bu yöntemle direk özdeğer problemleri standart forma dönüştürülmeden istenilen sayıda özdeğer ve özvektör hesaplanabilmektedir. Bu yöntemde temel amaç aşağıdaki (5.49) ve (5.50) eşitlikleri sağlaması gerekli olan p adet en küçük özdeğerin bulunmasıdır.

$$[K]_{n \times n} [\Phi]_{n \times p} = [M]_{n \times n} [\Phi]_{n \times p} [\Lambda]_{p \times p}$$

$$[\Lambda]_{p \times p} = \text{Diag}(\lambda_i) ; [\Phi]_{n \times p} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_p] \quad (5.49)$$

$$[\Phi]_{n \times p}^T [M]_{n \times n} [\Phi]_{n \times p} = [I]_{p \times p}$$

$$[\Phi]_{p \times n}^T [M]_{n \times n} [\Phi]_{n \times p} = [I]_{p \times p}$$

$$[\Phi]_{p \times n}^T [K]_{n \times n} [\Phi]_{n \times p} = [\Lambda]_{p \times p} \quad (5.50)$$

(5.50) eşitliklere rijitlik ve kütle matrisleri için ortogonalite şartları adı da verilmektedir. Bu yöntemin algoritması aşağıdaki gibidir , (Bathe, 1982).

- 1) Öncelikle başlangıç vektörü, $[X_1]_{n \times p}$, seçilir.
- 2) Aşağıda verilen işlem döngüsü problemin yakınsama kriteri sağlayıncaya kadar uygulanmaktadır.

$$\begin{aligned} E_k &\longrightarrow E_{k+1} & k &= 1, 2, \dots, \infty \\ [M][\bar{X}_{k+1}] &= [K][X_k] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Önce (5.51)'deki denklem çözülür ve $[M]$ ve $[K]$ 'nin E_{k+1} uzayındaki izdüşümleri elde edilir.

$$\begin{aligned} [K_{k+1}]_{p \times p} &= [\bar{X}_{k+1}]^T [K] [\bar{X}_{k+1}] \\ [M_{k+1}]_{p \times p} &= [\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}] \end{aligned} \quad (5.52)$$

Elde edilen izdüşümleri (E_{k+1} uzayındaki) yeni sistemin (5.53) özdeğer problemi uygun bir yöntemle (örneğin genel Jacobi vb.) hesaplanır ve alt uzaydaki sistem için,

$$[K_{k+1}][\Phi_{k+1}] = [\Phi_{k+1}][M_{k+1}][\Lambda_{k+1}] \quad (5.53)$$

$[\Phi_{k+1}]$ ile $[\Lambda_{k+1}]$ bulunur. Bundan sonra bir sonraki iterasyon adımı için yeni matris elde edilir.

$$[K_{k+1}]_{n \times p} = [\bar{X}_{k+1}]_{n \times p} [\Phi_{k+1}]_{n \times p} \quad (5.54)$$

- 3) En sonunda $k \longrightarrow \infty$ için sistemin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$[\Lambda_{k+1}] \rightarrow [\Lambda] \quad , \quad [X_{k+1}] \rightarrow [\Phi] \quad (5.55)$$

Kuvvet yöntemlerinde incelenen yakınsama kriteri bu iterasyon yönteminde de kullanılmaktadır.

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq 10^{-2s} \quad (5.56)$$

Bu yöntemde yakınsama asimptotik olduğundan iterasyon q adet özdeğeri buluncaya kadar devam edilir. Her ne kadar q büyük seçilirse, istenen p adet en küçük özdeğer için daha çabuk çözüme yakınsamaktadır. Hem de her adım için o kadar işlem gerektirir. Ama yapılan çalışmalar $q = \min(2p, p+8)$ çok etkili olduğu gözlenmiştir, (Bathe, 1982).

Örnek 5.8.

Örnek 5.1. alt uzaylarla iterasyon yöntemiyle özdeğer çözümü;

Daha önceki örneklerde olduğu gibi öncelikle başlangıç vektörü seçilir. Kolonları birim vektör ve metebesi 4x2 olan matris başlangıçta kullanılır. Bu örnekte 2 (p=2) adet özdeğer hesabı istenmektedir.

$$[X_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\bar{X}_2] = \begin{bmatrix} 2,4 & 3,2 \\ 3,2 & 5,2 \\ 2,8 & 4,8 \\ 1,6 & 2,8 \end{bmatrix}$$

(5.52) bağıntısından indirgenmiş sistem matrisleri elde edilmektedir.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 4,8 & 6,4 \\ 6,4 & 10,4 \end{bmatrix} \quad [M_2] = \begin{bmatrix} 42,4 & 66,56 \\ 66,56 & 105,44 \end{bmatrix}$$

En sonda indirgenmiş olan matrislerden bulunan yeni sistem genel Jacobi metodu ile hesaplanırsa;

$$[\Lambda_2] = \begin{bmatrix} 2,2544 & 0 \\ 0 & 0,0983 \end{bmatrix} \quad [\Phi_2] = \begin{bmatrix} 1,61495 & -1,02063 \\ 0,01945 & 0,085099 \end{bmatrix}$$

matrisleri bulunmaktadır. Daha sonra bir sonraki adım için iterasyonun devam edilmesi için (5.54) denklemini kullanarak yeni matris hesaplanmaktadır.

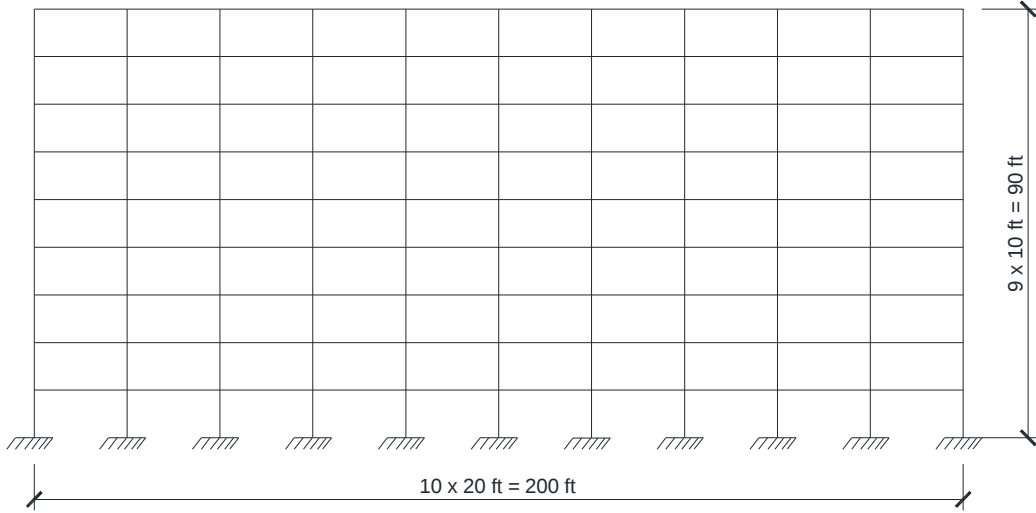
$$[X_2] = \begin{bmatrix} 0,6099 & 0,3190 \\ -0,1394 & 0,5048 \\ -0,3771 & 0,4629 \\ -0,2738 & 0,2694 \end{bmatrix}$$

Aynı şekilde benzer işlemler yapılırsa, problem k=7 adım sonunda yakınsadığı görülmekte ve aşağıda gösterildiği gibi sistemin en küçük iki özdeğeri ve özvektörü elde edilmektedir.

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1,39147 & 0 \\ 0 & 0,09654 \end{bmatrix} ; [\Phi] = \begin{bmatrix} 0,4455 & 0,3126 \\ 0,1249 & 0,4955 \\ -0,4895 & 0,4791 \\ -0,5767 & 0,2898 \end{bmatrix}$$

Örnek 5.9.

Şekil 5.2 görüldüğü gibi 10 açıklıklı 9 katlı binanın ilk 3 özdeğeri, Bathe & Wilson 1972 ve Peterson 1981 kaynaklarında bulunmaktadır. Bu problem hazırlanan Mathematica paket programı, SAP2000 ve ANSYS ile çözülüp sonuçları kaynaktakiler ile karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.2. Örnek 5.9'e ait şekil

Malzeme ve Kesit Özellikleri

$$E = 432000 \text{ k/ft}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{m} = 3 \text{ k-sec/ft}^2 \\ A = 3 \text{ ft}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{\bar{m}}{A} = \frac{3}{3} = 1 \text{ k-sec/ft}^4$$

$$I = 1 \text{ ft}^4$$

Yukarıda bahsedildiği gibi problemin en küçük 3 özdeğeri çeşitli programlar yardımıyla çözülüp sonuçları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 5.1. Örnek 5.9'e ait serbest titreşim frekansları.

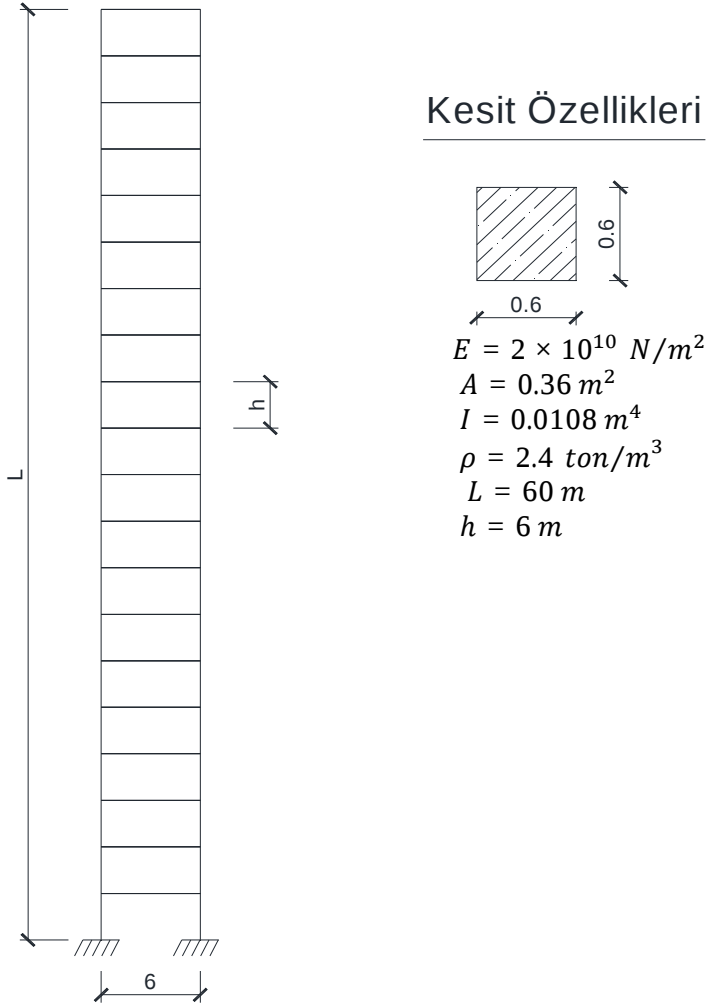
Özdeğer	Bathe & Wilson 1972	Peterson 1981	SAP2000	ANSYS	Mathematica	
					MSSN.MAT	MSRN.MAT
λ_1	0,589541	0,589541	0,589541	0,589814	0,597411	0,597411
λ_2	5,52695	5,52696	5,52696	5,55047	5,61155	5,61155
λ_3	16,5878	16,5879	16,5879	16,7757	16,8377	16,8377

Örnek 5.10.

Şekil 5.3.'deki verilen yapı sistemidir bu yapının serbest titreşim frekanslarını ve mod şekillerini hesaplayınız:

Kolonları eksenel deformasyon yapmadığı ve kat hizalarında dönme olmadığı kesme tipi binalarda kabul edilirse, sistemin serbest titreşim frekansları ve mod şekilleri aşağıda gösterildiği şekilde kapalı olarak açıklanmaktadır, (Clough ve Penzien, 1993).

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{2n-1}{2} \pi \left(\frac{12 \sum EI}{m_i h L^2} \right)^{1/2} \\ \phi_n &= \sin \left(\frac{2n-1}{2} \times \frac{\pi x}{L} \right)\end{aligned}\tag{5.56}$$



Şekil 5.3. Örnek 5.10'a ait şekil

Yukarıdaki örnek (Zakout, 1992)'de değişik birkaç yöntemiyle serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır (kat hizalarında dönme olduğu kabulü) :

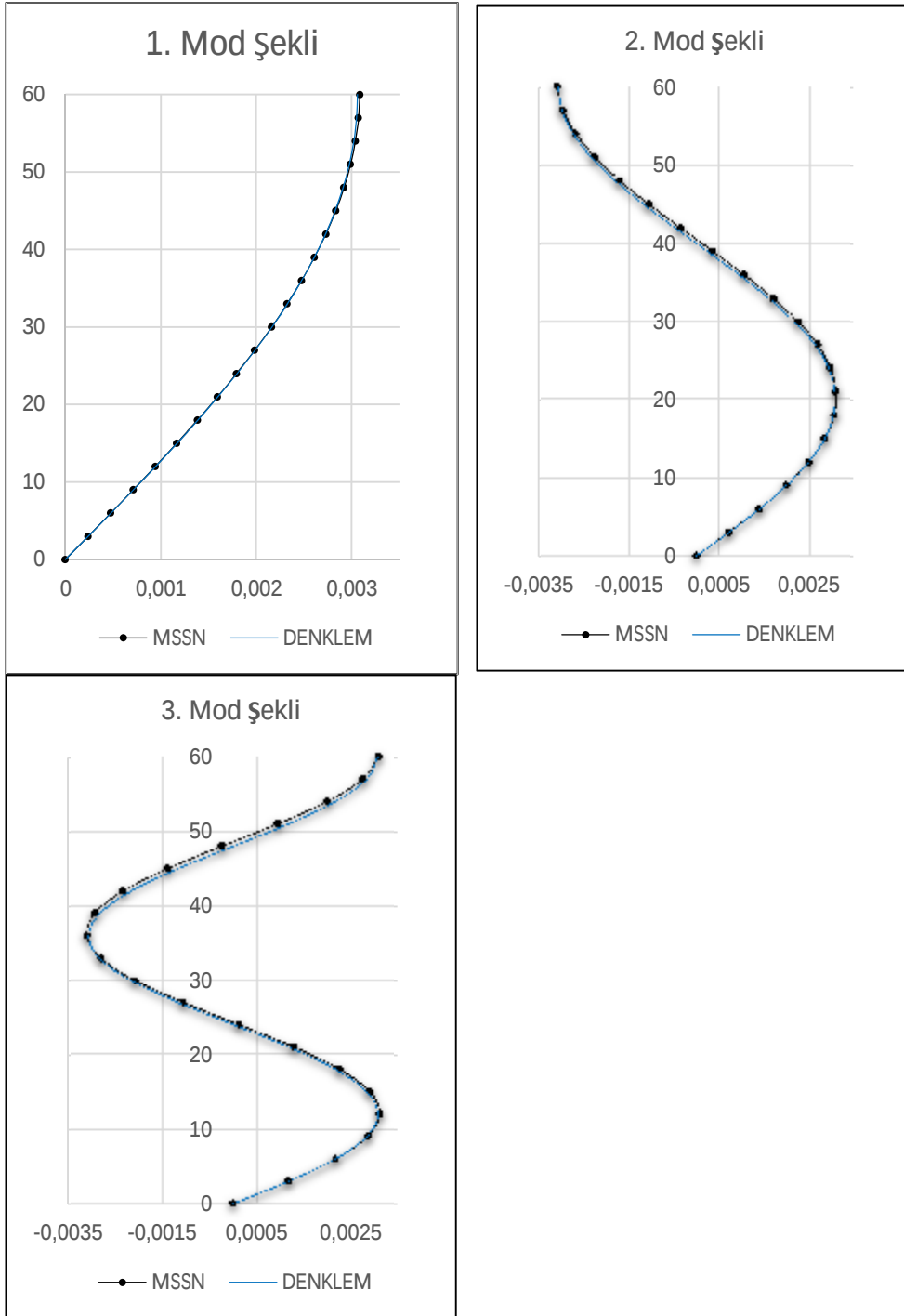
Çizelge 5.2. Örnek 5.10'a ait serbest titreşim frekansları (kat hizalarında dönme var)

Deter. Arama	Alt Uzaylarla iterasyon	Lancsoz Metodu	ANSYS	SAP2000	MSSN.MAT	Denklem (5.56)
0.75932	0.75932	0.75932	0.60118	0.59207	0.77557	1.70103
2.29729	2.29729	2.29729	1.9903	1.94698	2.34723	5.10310
3.89175	3.89175	3.89192	3.7932	3.69967	3.97919	8.50517

Çizelge 5.3. Örnek 5.10'e ait serbest titreşim frekansları (kat hizalarında dönme yok)

Deter. Arama	Alt Uzaylarla iterasyon	Lancsoz Metodu	ANSYS	SAP2000	MSSN.MAT	Denklem (5.56)
1.59661	1.59661	1.59661	1.6799	1.58369	1.67913	1.70103
4.78005	4.78005	4.78005	5.0370	4.74136	5.03726	5.10310
7.93421	7.93421	7.93451	8.3855	7.8700	8.38679	8.50517

Ayrıca ilk 3 serbest titreşim frekansına karşılık gelen modlar şekil 5.4.'te görülmektedir.



Şekil 5.4. Örnek 5.10'a ait mod şekilleri

6. ZORLANMIŞ TİTREŞİM

6.1. Giriş

Bir sistemde zorlanmış titreşim olmasının sebebi o sisteme zamana bağlı olarak değişen yüklerden kaynaklanmaktadır. Bu yükün uygulanması sonucunda oluşan etkiye zorlanmış titreşim adı verilmektedir. Genel olarak çok serbestlik dereceli sistemler için zorlanmış titreşim olayını idare eden denklem aşağıda verildiği şekildedir;

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{P}(t) \quad ; \quad \underline{P}(t) \neq \underline{0} \quad (6.1)$$

Bu denklemde $\underline{P}(t)$ zamana bağlı bir yüktür. Eğer sistemde sönüm etkisi yoksa veya ihmal edilirse, denklemden $\underline{C} \dot{\underline{X}}$ terimi düşürülmektedir. Denklem 6.1'de kapalı bir şekilde olup aynı anda deplasman vektörü ve zaman türevleri cinsinden N adet denklemlere temsil etmektedir. Bu denklemler genelde ancak sayısal yöntemlerle çözülebilmektedir, (Humar, 2002).

6.2. Sayısal Çözüm Yöntemleri

Çoğu mühendislik alanlarında, dinamik yük etkisi altında kalan yapıların analizi yapılırken sayısal çözüm yöntemleri kullanılması kaçınılmazdır. Genel bir şekilde bu yöntemleri iki gruba ayırılarak incelenmektedir.

- i) Direkt integrasyon yöntemleri,
- ii) Mod süperpozisyon yöntemi.

6.2.1. Direkt İntegrasyon Metotları

Bu yöntemlerin temel özelliği, (6.1) denkleminde integrasyon işlemin adım adım sayısal bir şekilde yapılmaktadır. Yani integrasyon işlemlerinden önce herhangi bir transformasyon işlemi yapılmayıp direk integrasyon uygulanmaktadır.

Direkt integrasyon yöntemleri aşağıda verildiği şekilde dört ayrı yöntemden oluşmaktadır:

- a) Merkezi sonlu farklar yöntemi,
- b) Houbolt yöntemi,
- c) Wilson θ yöntemi,
- d) Newmark yöntemi.

6.2.1.1. Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi

Bu yöntemde, deplasmanın zamana göre türevlerinin (hız ve ivme) sonlu farklar yaklaşımına dayanmaktadır. Sonlu farklar metodunda hız ve ivme bağıntıları ile adım adım istenilen tüm zaman aralığı boyunca uygulanır. Bu yöntem aynı zamanda zaman artımı ile adım adım uygulanan yöntem olup eğer zaman artımı küçük seçilmezse gerçek çözümden çok farklı sonuçlara gidebilmektedir. Sonuçlar kararlı olabilmesi için zaman artımını seçilirken aşağıda verilen özel şart kullanılmaktadır, (Clough ve Penzien 1995).

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi} = 0.318 \quad (6.2)$$

6.2.1.2. Houbolt Metodu

Houbolt yöntemi bir önceki metoda benzemektedir. Bu yöntemde ivme ve hız bileşenleri, deplasman bileşenleri cinsinden ifade edebilmesi için standart sonlu farklar ifadeleri kullanılmaktadır. Ayrıca Houbolt metodunda, sistem denkleminin t anında ve daha önceki değerleri bilinirken $\Delta t + t$ anında çözülerek sistemin bilinmeyenleri hesaplamaktadır. Bu yöntemin diğer farkı ise zaman artımı bir önceki metoda göre daha büyük seçilebilmektedir.

Başka dikkate değer konu ise, Houbolt yönteminde eğer denklemde sönüm ve kütle etkisi ihmal edilirse problem direk statik problemine indirgenmektedir, (Bathe, 1982).

6.2.1.3. Wilson θ Metodu

Bu yöntem, doğrusal ivme yönteminin biraz genişletilmiş olup El. Wilson tarafından öne sürülmüştür. Doğrusal ivme yönteminde ivmenin t anı ile $\Delta t + t$ arasında doğrusal olarak değiştiği varsayımı yapılırken Wilson θ yönteminde ise ivmenin t anı ile $t + \theta\Delta t$ ($\theta \geq 1$) arasında doğrusal olarak değiştiği varsayımına dayanmaktadır. İstenilen hassasiyet ve kararlılığa sağlayacak şekilde θ parametresi daima birden büyük ($\theta \geq 1.37$) seçilir. Ama hesap yapılırken kolaylık açısından $\theta = 1.40$ olduğu şekilde seçilmektedir, (Bathe, 1982).

6.2.1.4. Newmark Metodu

1959 yılında Newmark, bir seri şeklinde sayısal integrasyon formülleri geliştirdi ki toplu olarak Newmark metodu da denilmektedir. Bu yöntem aşağıda verilen denklemlerin varsayımına dayanmaktadır, (Bathe, 1982).

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + [(1 - \delta)\ddot{X}_t + \delta\ddot{X}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (6.3)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \dot{X}_t\Delta t + [(0.5 - \alpha)\ddot{X}_t + \alpha\ddot{X}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (6.4)$$

Burada, δ ve α parametreleri, ivmedeki zaman artımının varyasyonunu tanımlar ve bu yöntemin kararlılık ve doğruluk özelliklerini belirlemektedir. δ için tipik değeri $1/2$ 'dir ve $1/6 \leq \alpha \leq 1/4$ olduğu zaman doğruluk özelliği dahil olmak üzere, tüm bakış açılara göre oldukça tatmin edici değer almaktadır. Daha öncekilerde olduğu gibi sistem denklemi $\Delta t + t$ anı için yazıldıktan sonra

deplasmanlar adım adım hesaplanmaktadır. Sistem denklemi herhangi bir $\Delta t + t$ anında aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\underline{M} \ddot{X}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{X}_{t+\Delta t} + \underline{K} X_{t+\Delta t} = \underline{P}(t)_{t+\Delta t} \quad (6.5)$$

(6.4) denkleminde olan $\Delta t + t$ anındaki ivme çekildikten sonra (6.3) denkleminde yerine yazılır ise, $\Delta t + t$ anında olan hız ve ivmenin deplasman cinsinden bağıntıları hesaplanmaktadır. Elde edilenler (6.5)de yerine yazılıp, denklemi yeniden çözüm yapılarak deplasmanlar hesaplanmaktadır. Daha sonra sistem ivme ve hız değerleri (6.3) ve (6.4) bağıntıları yardımıyla bulunmaktadır. Tüm işlemler arzu edilen zaman aralığı boyunca Δt artırımlarla sistemin her t anı için çözümü yapılmaktadır.

Bu yöntemi kullanılırken aşağıdaki izlenim yolu takip edilmektedir:

A) Başlangıç değerlerin hesaplanması için ;

1. Rijitlik matrisi, kütle matrisi ve varsa sönüm matrisi teşkil edilir.
2. Hız, deplasman ve ivme başlangıç değerleri saptanır.
3. Δt seçilir, δ ve α parametreleri bulunur.
- 4.

$$\delta \geq 0,5 \quad ; \quad \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \quad (6.6)$$

5. İntegrasyon sabitleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ \alpha_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad ; \quad \alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad ; \quad \alpha_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad ; \quad \alpha_7 = \alpha \Delta t \end{aligned} \quad (6.7)$$

6. Efektif $\underline{\hat{K}}$ matrisi (rijilik matrisi) teşkil edilir.

$$\underline{\hat{K}} = \underline{K} + \alpha_0 \underline{M} + \alpha_1 \underline{C} \quad (6.8)$$

7. Efektif $\underline{\hat{K}}$ matrisi üçgen matrise indirgenir.

$$\underline{\hat{K}} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (6.9)$$

B) Her adım için gereken hesaplananlar ve tekrar edenler için:

1. $\Delta t + t$ zamanı için efektif yük bulunur:

$$\underline{\hat{P}}_{t+\Delta t} = \underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{M}(\alpha_0 \underline{X}_t + \alpha_2 \underline{\dot{X}}_t + \alpha_3 \underline{\ddot{X}}_t) + \underline{C}(\alpha_1 \underline{X}_t + \alpha_4 \underline{\dot{X}}_t + \alpha_6 \underline{\ddot{X}}_t) \quad (6.10)$$

2. $\Delta t + t$ anı için deplasmanlar sistem denkleminin içinden hesaplanır:

$$\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{X}_{t+\Delta t} = \underline{\hat{P}}_{t+\Delta t} \quad (6.11)$$

3. $\Delta t + t$ anındaki hız ve ivme değerleri bulunur:

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{X}}_{t+\Delta t} &= \alpha_0 (\underline{X}_{t+\Delta t} - \underline{X}_t) - \alpha_2 \underline{\dot{X}}_t - \alpha_3 \underline{\ddot{X}}_t \\ \underline{\dot{X}}_{t+\Delta t} &= \underline{\dot{X}}_t + \alpha_6 \underline{\ddot{X}}_t + \alpha_7 \underline{\ddot{X}}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Yukarıdaki en son verilen denklemler her t anında benzer işlemler yapılarak sistem bilinmeyenleri elde edilmektedir.

6.2.2. Mod Süperpozisyon Metodu

Önceki çözüm yönteminde gereken işlem sayısı, çözümde kullanılan zaman artırımının sayısına doğru orantılıdır. Bu durumda direk integrasyon yöntemin kullanılması sadece kısa süreli veya kısa zaman aralığı analizler için etkili olduğu beklenmektedir. Böylece çözüm aralığı büyük olan integrasyon

problemlerinde daha efektif çözüm için hareket denklemini önce işlem sayısı az gerektiren bir forma dönüştürülmek mümkündür. Bu avantajları sağlayan en uygun yöntemlerden biri de mod süperpozisyon yöntemidir. (6.1)'deki genel denklemi için başlangıç koşulları

$$\underline{X}(0) = \underline{X}_0 \quad ; \quad \dot{\underline{X}}(0) = \underline{V}_0 \quad (6.13)$$

olduğu kabul edilirse, bu yöntemin amacı söz konusu genel hareket denkleminin $\underline{X} = \underline{X}(t)$, çözülmesidir. Mod süperpozisyon yöntemi ile sistem deplasmanlarının hesaplamasında aşağıda görülen çözüm adımları izlenmektedir.

Adım 1) 5. bölümde anlatılan uygun bir metodu kullanılarak, aşağıda verilen sönümüz özdeğer problemini çözülerek, sistemin serbest titreşim frekansları ve mod şekilleri hesaplanır.

$$(\underline{K} - \lambda \underline{M})\underline{\Phi} = \underline{0} \quad ; \quad \lambda = \omega^2 \quad (6.14)$$

$$[\underline{\Phi}] = [\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \quad \dots \dots \quad \underline{\phi}_n]$$

$$[\underline{\Lambda}] = \text{Diag}(\omega^2) \quad (6.15)$$

Burada $\underline{\phi}$ şekil fonksiyonları, ω serbest titreşim frekansı, $[\underline{\Phi}]$ modal matrisi ve $[\underline{\Lambda}]$ spektral matrisidir. Dikkate değer hususlardan biri, ilerde sistem matrislere daha basit forma gelmesi için mod şekil fonksiyonları kütleye göre normalizasyon yapılması gerekmektedir.

Adım 2) Sistem deplasmanlarını bulmak için öncelikle modal deplasman hesaplanır, aşağıdaki işlemler sırasıyla yapılır;

- Sistem deplasmanını modal ve mod şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi varsayımı yapılır.

$$\underline{\dot{X}} = \underline{\Phi} \underline{\dot{Y}} \quad (6.16)$$

- Sistem denkleminde deplasman vektörü ve türevleri yerine yukarıdaki denkleme göre yeniden yazılırsa;

$$\underline{M} \underline{\Phi} \underline{\ddot{Y}} + \underline{C} \underline{\Phi} \underline{\dot{Y}} + \underline{K} \underline{\Phi} \underline{Y} = \underline{P}(t) \quad (6.17)$$

şeklini almaktadır.

- (6.17) denklemini her iki tarafını soldan $\underline{\Phi}^T$ çarpılarak aşağıda gösterildiği şekilde olmaktadır.

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \underline{\ddot{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} \underline{\dot{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \underline{Y} = \underline{\Phi}^T \underline{P}(t) \quad (6.18)$$

- Yukarıdaki denklemde 5. bölümde bahsedildiği şeklindeki ifadeler bulunmaktadır;

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}} &= \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = [\text{I}] \\ \underline{\tilde{C}} &= \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} = \text{Diag}(2\xi\omega_i) \\ \underline{\tilde{K}} &= \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} = [\Lambda] \\ \underline{\tilde{P}} &= \underline{\Phi}^T \underline{P}(t) \end{aligned} \quad (6.19)$$

- (6.19) ifadeleri yerine konulup yeniden yazılırsa;

$$\underline{\tilde{M}} \underline{\ddot{Y}} + \underline{\tilde{C}} \underline{\dot{Y}} + \underline{\tilde{K}} \underline{Y} = \underline{\tilde{P}} \quad (6.20)$$

haline gelmektedir.

- Yukarıdaki sistem denklem takımı açık bir şekilde tipik olarak aşağıda gösterildiği gibi olmaktadır.

$$\ddot{\underline{Y}}_i + 2\xi\omega_i\dot{\underline{Y}}_i + \omega_i^2\underline{Y}_i = \underline{P}(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.21)$$

Görüldüğü gibi en başta sistem serbestlik derecesine göre denklem girişimli diferansiyel denklem takımı olup, yukarıdaki izlenim yolu takip edilerek ve sistem denklemlerin ortogonalite şartlarını kullanılarak en sonunda denklem girişimsiz hale getirilmiştir. Bu aşamadan sonra girişimsiz hale gelen denklem takımı ister zaman uzayında (örneğin; Newmark metodu) ister frekans uzayında (örneğin; Fourier veya Laplace transform metodu) çözülerek modal deplasmanlar elde edilmektedir.

Adım 3) Elde edilen modal deplasmanları kullanarak sistemin esas deplasmanlarına geçilmektedir. Sistem deplasmanları bulunduğundan sonra eleman kesit tesirleri elde edilmektedir.

$$\underline{X} = \underline{\Phi} \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \dots & \underline{\phi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

(6.22)'deki ifade aşağıdaki forma yazılacak olursa;

$$\underline{X} = \underline{\phi}_1 \underline{Y}_1 + \underline{\phi}_2 \underline{Y}_2 + \dots + \underline{\phi}_n \underline{Y}_n \quad (6.23)$$

(6.23) ifadesinde yer alan $\underline{\phi}_1 \underline{Y}_1$ terimi birinci modun katkısı, $\underline{\phi}_2 \underline{Y}_2$ terimi ikinci modun katkısını vs. göstermektedir.

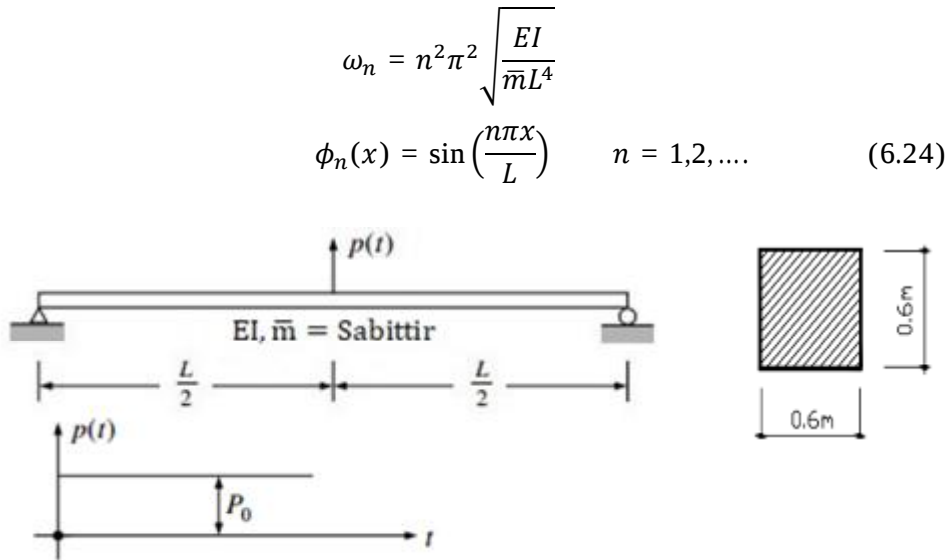
Dikkat edilmesi gereken en önemli husus, yapı dinamiği analizinde hemen hemen bütün yükleme türünde genelde büyük deplasmanlar, en küçük modların katkısından gelmektedir ve modlar büyüdükçe deplasman açısından katkısı da

ihmal edecek kadar küçülmektedir. Dolayısı ile mod süperpozisyon yönteminde istenen doğruluk derecesine göre en küçük birkaç modun katkıları dikkate alınması yeterli olabilir. Bir diğer husus ise, çok karmaşık yapıların dinamik analizinde ve matematiksel idealleştirmesinde büyük modların katkısı problemin doğruluk açısından daha az güvenilir olmaktadır. Bu durumda modları sınırlamak doğru bir karar olmaktadır, (Clough ve Penzien, 1993).

Bu çalışmada, 6.1'denklemi Rayleigh oranı ile iterasyon ve mod süperpozisyon yöntemiyle girişimsiz hale getirilmekte ve daha sonra direk integrasyon yöntemlerden biri ve Fourier transform yöntemi ile çözüm yapabilen Mathematica dilinde programlar hazırlanmıştır.

Örnek 6.1.

İki ucu basit mesnetli ve adım tipi yüklemeye maruz kalan kirişin orta noktasının moment ve deplasman değişimini mod süperpozisyon yöntemini kullanarak bulunuz, (Şekil 6.1.). Aşağıda verilen kapalı ifadeler sistemin çözümü olarak (Clough ve Penzien, 1993)'de çözülmüştür.



Şekil: 6.1 Örnek 6.1'e ait şekil

Kesit Özellikleri

$$E = 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ; \quad I = 0,0108 \text{ m}^4 ; \quad A = 0,36 \text{ m}^2$$

$$\rho = 2400 \text{ N/m}^3 ; \quad L = 10 \text{ m} ; \quad P_0 = 10 \text{ N}$$

Sistemin herhangi noktası için deplasman, moment ve kesme kuvvetinin zamanla değişimi kapalı bir şekilde aşağıda görülmektedir;

$$v(x, t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^4} (1 - \cos \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.25)$$

$$M(x, t) = -\frac{2P_0L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} (1 - \cos \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.26)$$

$$V(x, t) = -\frac{2P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} (1 - \cos \omega_n t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.27)$$

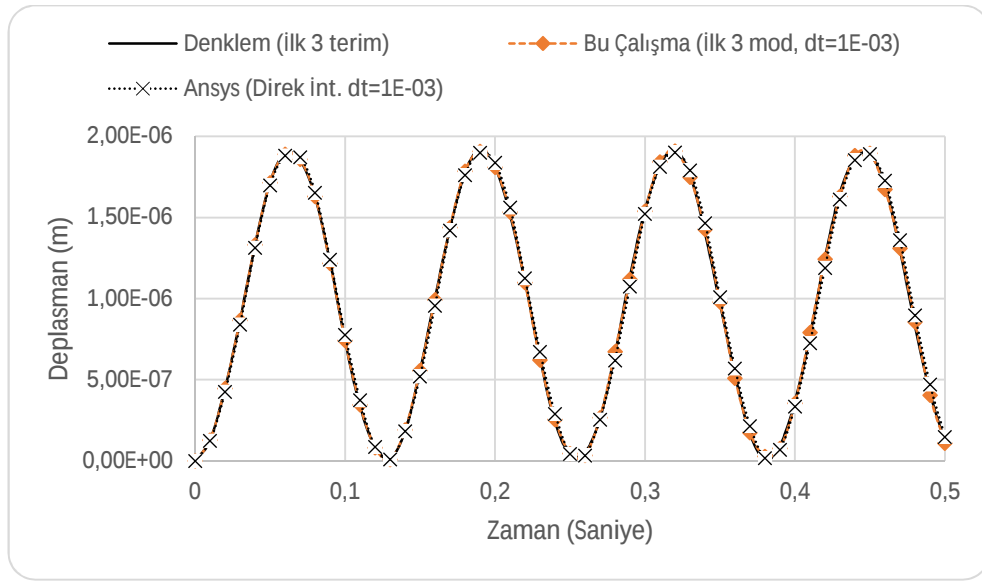
Yukarıda denklemlerde yer alan α_n parametresi aşağıda verilen bağıntıdan elde edilmektedir;

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & n = 1,5,9, \dots \\ -1 & n = 3,7,11, \dots \\ 0 & n = 2,4,6, \dots \end{cases}$$

Bu örnek aynı zamanda (Zakout, 1992), Sap2000, Mathematica paket programı ve Ansys'da çözülmüştür ve aşağıdaki serbest titreşim frekans değerleri hesaplanmıştır;

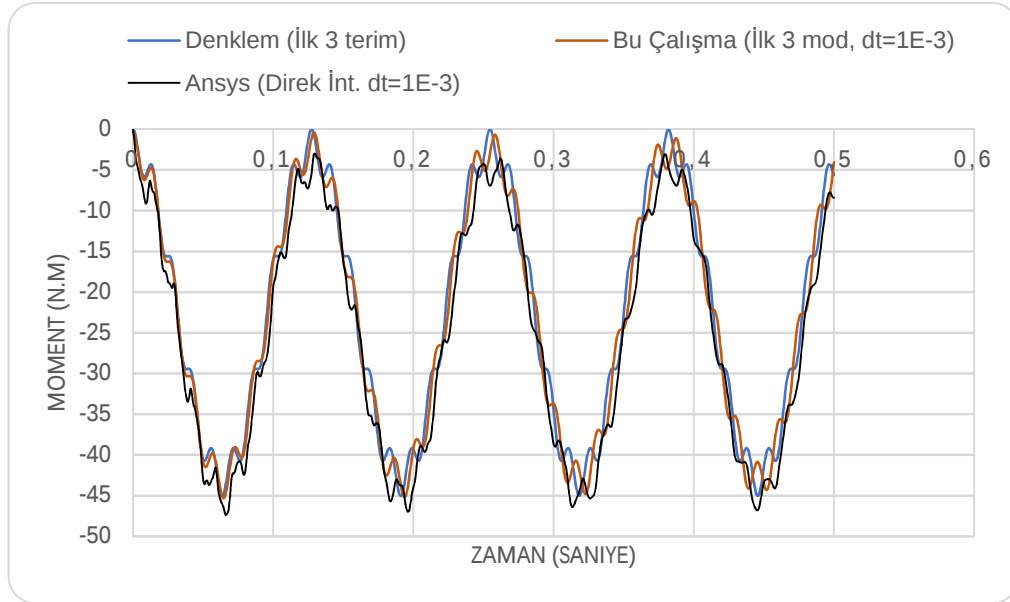
Çizelge: 6.1 Serbest titreşim frekansları

SAP2000	ANSYS	Denklem	MSSN.MAT	Fark(%)
7.85393	7.8424	7.85398	7.85403	-6.37E-04
31.4122	31.235	31.41593	31.4193	-1.07E-02
70.6383	69.800	70.68583	70.7236	-5.34E-02



Şekil: 6.2. Örnek 6.1.'ait kirişin orta noktasındaki deplasman değişimi

Çizelgenden de anlaşılacağı üzere paket programıyla yapılan çözüm, Ansys, denklem (6.24) ve Sap2000 ile çözüme oldukça yakın olduğu görülmektedir. Aynı karşılaştırmalar deplasman, moment ve kesme kuvvetinde de değişik zaman arıtımı ve mod sayısına göre grafik olarak yapılmıştır.



Şekil: 6.3. Örnek 6.1.'ait kirişin orta noktasındaki momenti değişimi

Çizelge: 6.2. Örnek 6.1.'e ait maksimum moment ve deplasman değerleri

$\Delta t = 0.001$	Mod Kakısı	Sap2000	Ansys	Denklemler	MSSN	FARK(%)
Maksimum Deplasman (m)	1	1.901E-06	1.923E-06	1.901E-06	1.901E-06	0.00
	3	1.925E-06		1.925E-06	1.924E-06	0.05
	Tüm	1.929E-06		1.929E-06	1.926E-06	0.15
Maksimum Moment (N.m)	1	-40.86	-47.34	-40.53	-40.69	-0.39
	3	-45.71		-45.03	-45.29	-0.58
	Tüm	-49.78		-48.98	48.49	1.00

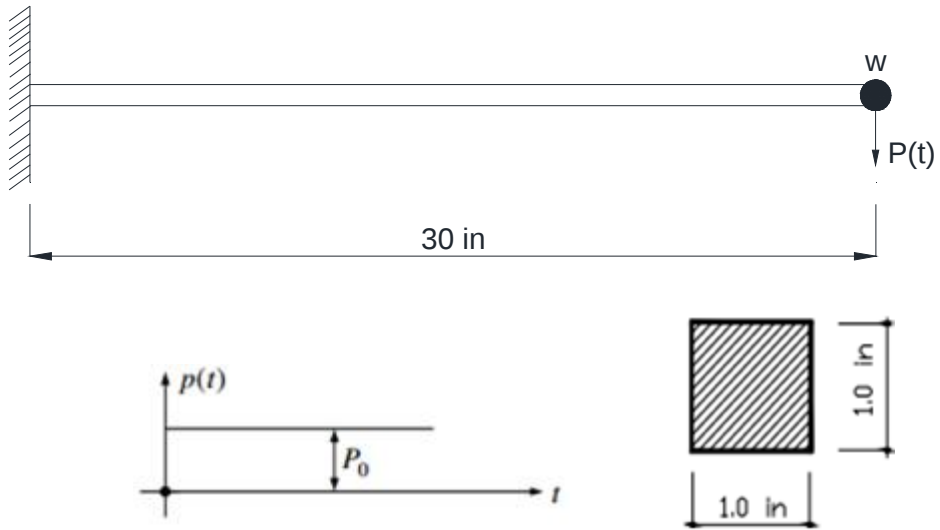
Örnek 6.2.

Adım tipi yükleme maruz kalan konsol kirişin uç noktasının deplasman değişimini mod süperpozisyon yöntemini kullanarak bulunuz, (Şekil 6.4.). Aşağıda verilen serbest titreşim frekansları bu örnek için (Craig, 1981)'de çözülmüştür.

Çizelge: 6.3. Örnek 6.2'e ait serbest titreşim frekansları

	1	2	3	4	5	6
CRAIG	9.19655	157.7099	512.8766	1192.35	2290.46	4056.94
MSSN	9.19229	157.637	512.639	1191.83	2289.40	4054.07
ANSYS	9.1921	157.550	511.601	1186.30	2269.80	3993.00

Ayrıca konsol ucu için maksimum deplasmanın zamanla değişimi değişik zaman artımı ve mod sayısının katkılarına göre hem çizelgede hem de grafikte değerleri verilmiştir.

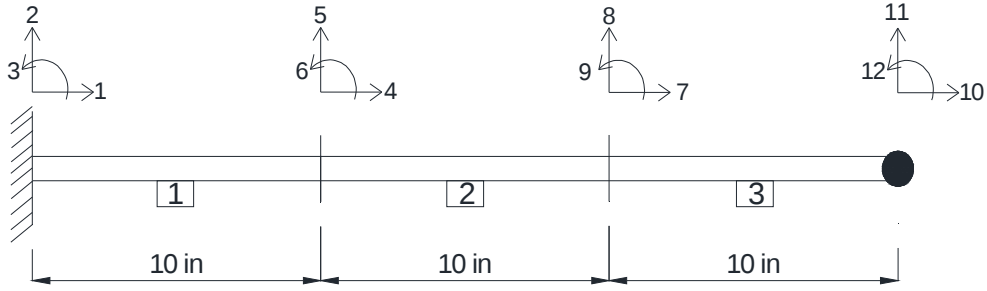


Şekil: 6.4. örnek 6.2'e ait şekil

Kesit Özellikleri

$$E = 10 \times 10^6 \text{ psi} ; I = 0,08333 \text{ in}^4 ; A = 1 \text{ in}^2 ; \rho = 2.591 \times 10^{-4} \text{ lb. sn}^2 / \text{in}^4$$

$$g = 386 \text{ in /sn}^2 ; P_0 = 10 \text{ N} ; w = 10 \text{ lb} \Rightarrow m = 0.02591 \text{ lb. sn}^2 / \text{in}$$

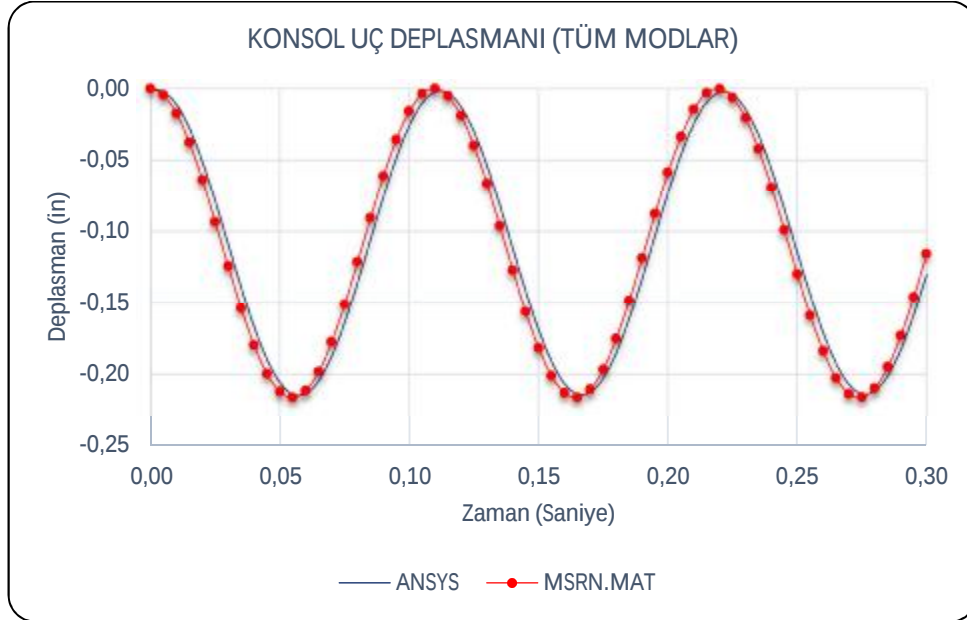


Şekil: 6.5. örnek 6.2'e ait şekil

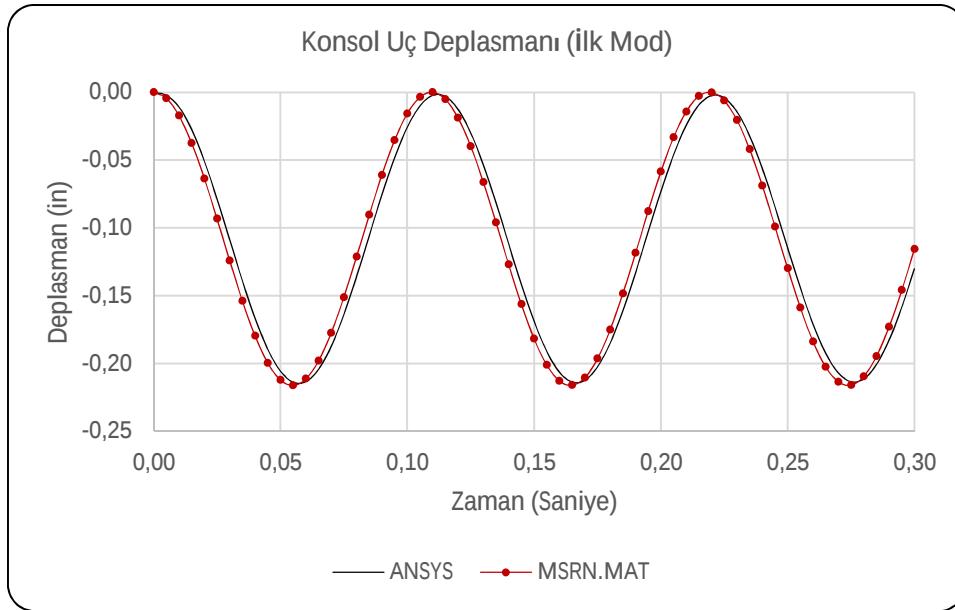
Yapılan hesap sonucunda bu örnek için sadece ilk modun katkısı bulunan değerler karşılaştırılınca yeterli olduğu görülmektedir.

Çizelge: 6.4. Örnek 6.2'e ait çeşitli zaman artımı için maks. deplasman değerleri

	Deplasman (in)				
Δt	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0001
Craig 1981	0.215949				
ANSYS	0.167693	0.211709	0.21465	0.215970	0.216080
MSRN (ilk mod)	0.21331	0.215991	0.21605	0.216059	0.216059
MSRN (tüm modlar)	0.21334	0.216003	0.21605	0.216067	0.216085



Şekil: 6.6a. Örnek 6.2 'e ait konsol uç deplasmanı (tüm modların katkısı)

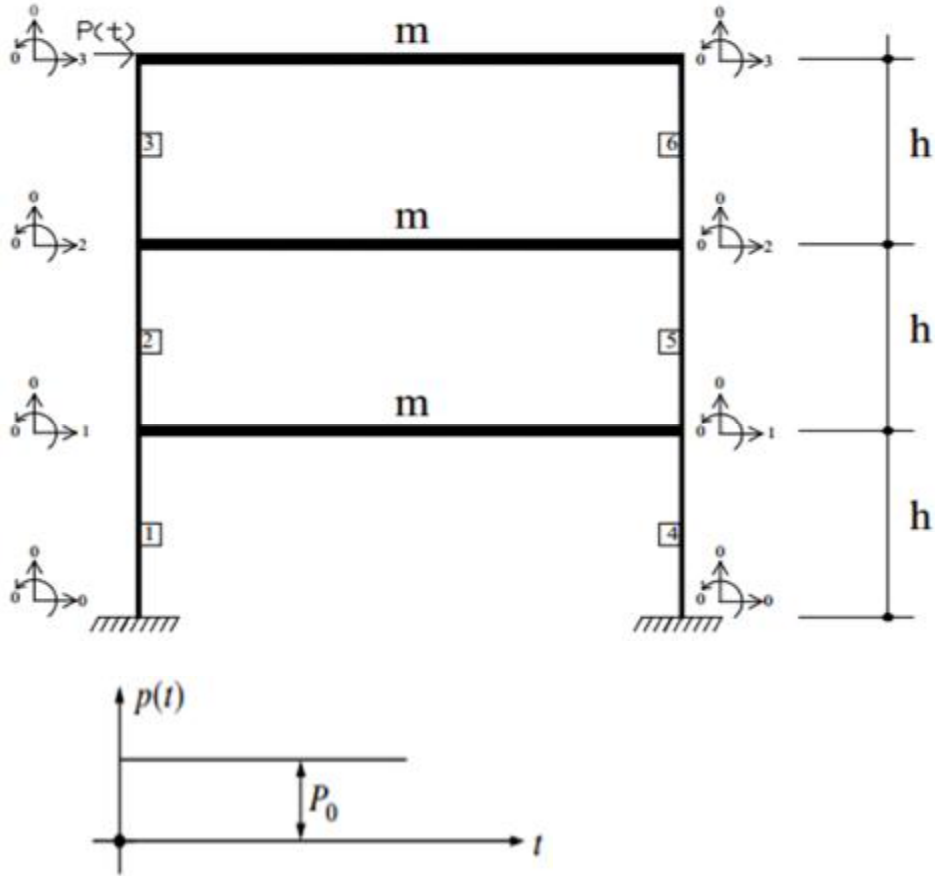


Şekil: 6.6b. Örnek 6.2 'e ait konsol uç deplasmanı (sadece ilk modun katkısı)

Örnek 6.3.

Adım tipi yüklemeye maruz kalan çerçeve sistemin kolonları kütsüz olduğu ve eksenel şekil değıştirme yapmadığı, tüm kütleler kat hizalarında toplandığı varsayılırsa, 1 nolu elemanın maksimum kesme kuvvetinin ve 3 nolu serbestlik derecesi yönünde olan maksimum deplasman değeri nin hesaplanması amaçlanmaktadır.

Bu kabuller doğrultusunda, çerçeve sistemi şekil 6.7’de verilen model gibi basitleştirilmiştir.

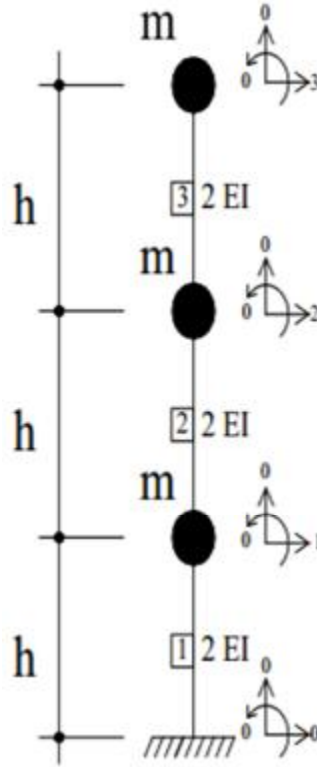


Şekil: 6.7.Örnek 6.3’e ait çerçeve şekli

Kesit Özellikleri

$$EI = 40 \times 10^6 \text{ ton.cm}^2 \quad ; \quad h = 300 \text{ cm} \quad ; \quad m = 1 \text{ ton.Sn}^2/\text{cm}$$

$$P_0 = 10 \text{ ton} ; \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.05$$



Şekil: 6.8. Örnek 6.3'ün basit bir şekilde modellenmesi

Bu örnek (Mengi, 1994)'te çözülmüş olup aşağıda verilen serbest titreşim frekansın, deplasmanın ve kesme kuvvetlerin değerleri paket programı ile hesaplanmış ve sonuçlar Ansys ve (Mengi, 1994)'deki değerlere göre karşılaştırılmıştır.

Çizelge: 6.5. Örnek 6.3'e ait değerler

Modlar	ω_1	ω_2	ω_3
Mengi	2.65372	7.43555	10.74467
MSRN.MAT	2.65372	7.43555	10.74467
ANSYS	2.65370	7.43552	10.74487
SAP2000	2.65372	7.43555	10.44680

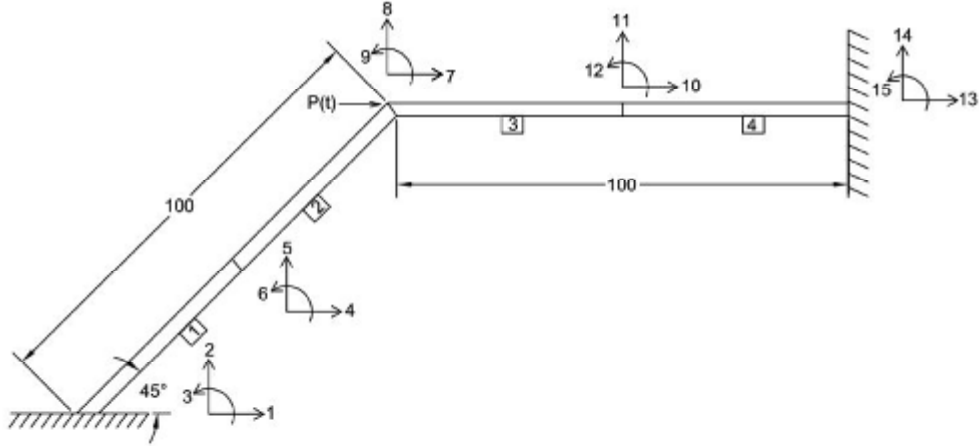
Çizelge: 6.6. Örnek 6.3.'e ait maksimum deplasman ve kesme kuvveti değerleri

	$\Delta t = 0.01$	ilk mod	ilk 2 mod	Tüm modlar
3 nolu ser. der. yönündeki maksimum deplasman (cm)	Mengi	1.43	1.53	1.53
	MSRN.MAT	1.4302	1.5276	1.5324
	ANSYS	1.6383	1.6383	1.6383
	SAP2000	1.3509	1.3940	1.405
1 nolu elemana ait maksimum kesme kuvveti (ton)	Mengi	11.31	9.73	10.08
	MSRN.MAT	11.3158	9.7347	10.1095
	ANSYS	11.3196	11.3196	11.3196
	SAP2000	10.6880	9.7320	10.1055

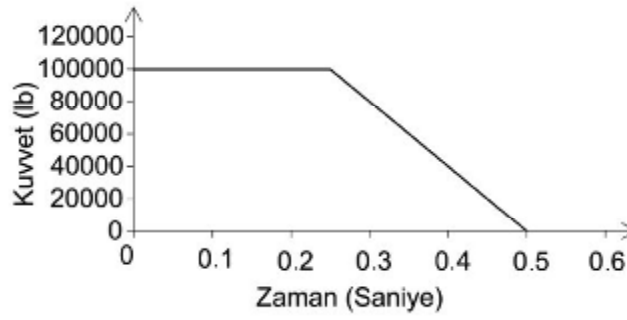
Örnek 6.4.

Şekil 6.8'de verilen 2 prizmatik kiriş elemanından oluşan bir çerçeve sistemidir. Bu sistem iki kirişin birleştiği yerde şekil 6.9'de gösterilen birdenbire 100000 lb 'lık dinamik yüklemeye maruz kalmaktadır. Sistemin en küçük ilk 3 serbest titreşim frekansı ile 7 ve 8 nolu serbestlik derecesi yönünde olan maksimum deplasman değerlerinin bulunması istenmektedir, (Paz, 2004).

Not: sistem sönüm etkisi göz ardı edilmektedir.



Şekil: 6.9. Örnek 6.4'ün şeması ve serbest cisim diyagramı



Şekil: 6.10. Örnek 6.4'e ait yükleme tipi

Kesit Özellikleri

$$E = 10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2; \quad I = 100 \text{ in}^4; \quad A = 6 \text{ in}^2; \quad \bar{m} = 4.20 \text{ lb.sn}^2/\text{in}^2$$

Bu örnek (Paz, 2004)'te Sap2000 programı yardımı ile çözülmüştür, elde edilen sonuçlar, bu çalışmada geliştirilen paket programı ve Ansys programıyla çözülmüş değerleri aşağıda çizelgeler halinde verilmiştir.

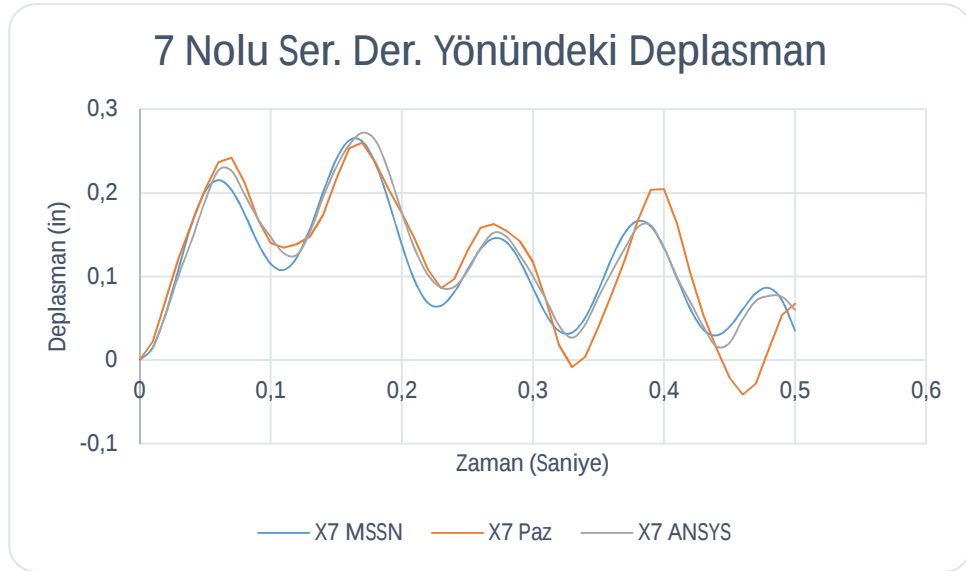
Çizelge: 6.7. Örnek 6.4'e ait serbest titreşim frekansı değerleri

MODLAR	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
M. PAZ, 2004	3.471	3.632	6.486	8.849	17.702	21.442
MSSN.MAT	3.561	3.803	7.930	9.466	14.507	20.545
ANSYS V15.	3.552	3.768	7.790	9.452	13.980	20.062

Çizelge 6.8. Örnek 6.4'e ait maksimum deplasman değerleri

Tüm modların katkısı ve zaman artımı ($\Delta t = 0.01$)	M. PAZ, 2004	MSSN.MAT	ANSYS V15
$ X_7 $ (in)	0.260	0.263	0.272
$ X_8 $ (in)	0.274	0.250	0.254

Görüldüğü gibi sonuçlar birbirine yeteri kadar yakındır. Örnek olarak 7 numaralı serbestlik derecesi yönündeki deplasman değişimi aşağıdaki gibidir.



Şekil: 6.11. Örnek 6.4'e ait deplasman değişimi

7. FOURIER DÖNÜŞÜM METODU

7.1. Giriş

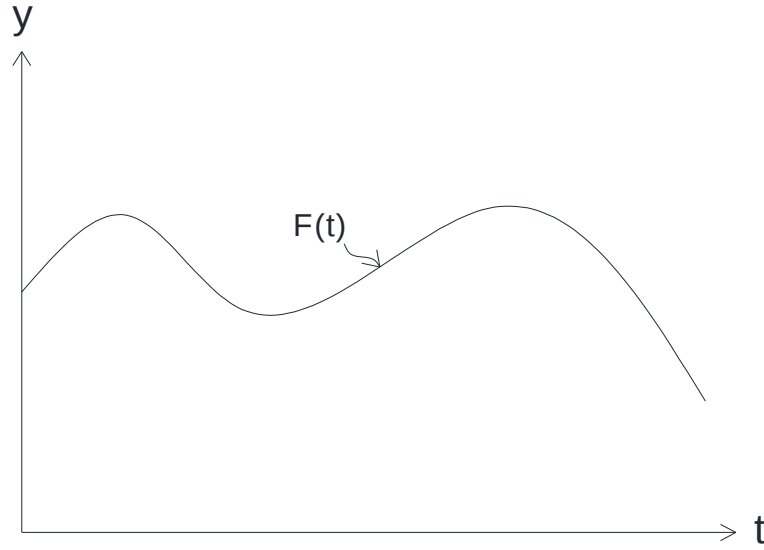
Şimdiye kadar tüm bölümlerde hareket denklemini zaman uzayında incelenmiştir. Ancak, belirli durumlarda analitik yöntemlerinin verimliliğini artırmak amacıyla, dönüşüm metotları kullanılabilir. Mühendislik uygulamalarında dönüşüm yöntemleri çok etkili ve yararlı olduğu kanıtlanmıştır (Humar, 2001). Sürekli fonksiyonlara uygulanan iki dönüşüm yöntemi var. Bunlar; Laplace ve Fourier dönüşüm yöntemleridir. Doğrusal diferansiyel denklemlerini, özellikle hareket denklemlerini daha basit cebrik denklemlere dönüştürmesinde oldukça etkili bir yöntemdir. Her iki yöntem kavramsal olarak birbirine benzediğinden, burada sadece Fourier dönüşüm metodu ele alınacaktır, (Chopra, 2007).

7.2. Fourier Dönüşümü

Kısaca bu yöntem Dhamel integralini, zaman uzayından frekna uzayına dönüştürerek söz konusu integrali gerekli parametreleri bulunduktan sonra ters Fourier dönüşümü yardımıyla geri zaman uzayına getirilir ve gereken deplasman ve kesit tesirleri hesaplanmaktadır, (Humar, 2003).

$t \geq 0$ aralığında, reel çözüm aralıklı ve zaman uzayında, tanımlanmış keyfi bir $F(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım, (şekil 7.1). Bu fonksiyonun Fourier dönüşüm denklemi aşağıdaki gibidir;

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7.1)$$



Şekil 7.1. zaman uzayında F(t) fonksiyonu

Fourier dönüşüm ifadesinde yer alan ω parametresine açısal frekans denmektedir. Fourier uzayında olan bir fonksiyonun zaman uzayına getirmek için ters Fourier dönüşüm ifadesi ile yapılmaktadır, (Clough ve Penzien, 1993).

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (7.2)$$

(7.1) ve (7.2) denklemlerine Fourier dönüşüm çifti de denmektedir. Bu iki ifade frekans uzayında analizin esas denklemleridir.

7.3. Fourier Dönüşümün Bazı Özellikleri

A) $[0, \infty)$ aralığında F(t) fonksiyonu reel değildir. Ayrıca, $(-\infty, 0)$ tanımlı, $F^F(\omega)$ fonksiyonu kompleks değerlere sahiptir. Bunun birlikte, $F^F(\omega)$ fonksiyonun $(+\omega)$ ve $(-\omega)$ noktalarında kompleks eşleniği vardır.

$$F^F(-\omega) = \overline{F^F(\omega)} \quad (7.3)$$

B) Fourier dönüşümünde zamanla türev işlemi;

$$\dot{F}^F(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{F}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7.4)$$

Yukarıda (7.4) denkleminin kısmi integrasyonu alınacak olur ise,

$$\dot{F}^F(\omega) = F(t)e^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7.5)$$

$$\dot{F}^F(\omega) = F(t)e^{-i\omega t} \Big|_{t=\infty} - F(0) + i\omega F^F \quad (7.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \quad (7.7)$$

varsayılmaktadır. Burada, $F(t)$ 'nin zamanla sönümlendiği kabullenilmektedir. Bu durumda (7.6) bağıntısı,

$$\dot{F}^F(\omega) = i\omega F^F - F(0) \quad (7.8)$$

şeklini almaktadır. Buradan benzer bir şekilde, $F(t)$ fonksiyonun zamana göre ikinci türevinin ve daha genel olarak n 'inci dereceden türevinin Fourier dönüşüm ifadeleri sırasıyla (7.9) ve (7.10) gösterildiği gibi bulunmaktadır.

$$\ddot{F}^F(\omega) = (i\omega)^2 F^F - i\omega F(0) - \dot{F}(0) \quad (7.9)$$

$$(F^n)^F = (i\omega)^n F^F - (i\omega)^{n-1} F(0) - \dots - i\omega F^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \quad (7.10)$$

Yukarıdaki ifadelerde başlangıç koşulları sıfır olarak kabul edilirse; bu ifadeler aşağıda görülen şekiller gibi olmaktadır:

Çizelge 7.1. Fourier dönüşümde türev ifadeleri

ZAMAN UZAYI	FOURIER UZAYI
F	F^F
dF/dt	$i\omega F^F$
d^2F/dt^2	$(i\omega)^2 F^F$
$d^n F/dt^n$	$(i\omega)^n F^F$

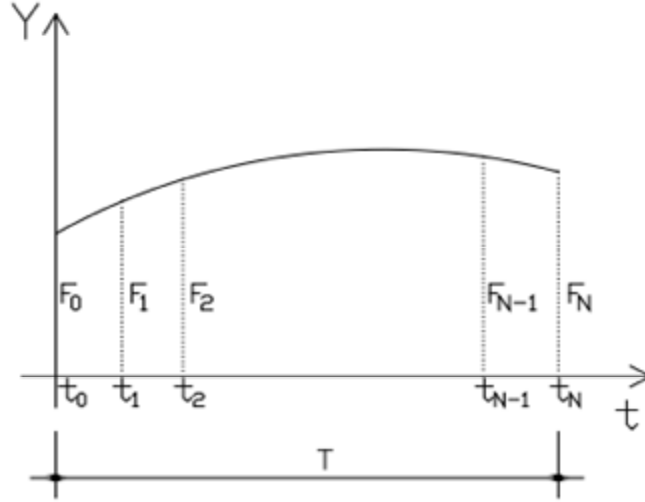
7.4. Ayrık Fourier Dönüşümü

Şekil (7.1.)’de zaman fonksiyonu, $n = 0'dan N - 1'e$ kadar N eşit aralıklı parçalarda olduğunu göz önüne alınırsa, bu durumda F(t) fonksiyonun $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N - 1)\Delta t$ zaman aralıklarında ayrık olarak değerleri bilinmektedir. Böylece,

$$F_i = F(t_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (7.11)$$

varsayımı yapılırsa, (şekil 7.1) (7.11) ifadesinde t_i zaman bağıntısı aşağıdaki gibi bulunmaktadır;

$$t_i = i\Delta t \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad (7.12)$$

Şekil 7.2. $F(t)$ 'nin ayrık tanımı

Ayrık bir biçimde verilen $F(t)$ 'nin Fourier dönüşümünü bulmak için Ayrık Fourier dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır.

7.4.1. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemi

Fourier dönüşüm prosedürün başarısı, arzu edilen herhangi bir fonksiyonun direk ve ters Fourier dönüşümünün bulunmasında bağlıdır. Ama daha önce bahsedildiği gibi, dönüşüm ifadelerinde kompleks integrali içerdiğinden, bu durumda çözüm daha güç olmaktadır. Böyle bir durumda, birçok problemde, dönüşüm metotları ile birlikte sayısal tekniği kullanılması halinde tek pratik çözüm yöntemi olabilir. Genelde dinamik etki fonksiyonları belirli zaman aralığında, sadece ayrık bir formda mevcuttur. Bu sebepten dolayı, Fourier dönüşümünde sayısal çözüm kaçınılmazdır. Bu açıdan, ayrık Fourier dönüşümünü kavramsal olarak geliştirmesinde ve sürekli ve ayrık dönüşümler arasında bağlantı kurulmasında yarar var, (Humar, 2003).

Diğer önemli husus, sürekli dönüşüm, verilen fonksiyonun gerçekçi olarak temsil eder iken, ayrık dönüşüm ise, verilen fonksiyonunun sadece periyodik bir versiyonunu temsil etmektedir, (Humar, 2003).

Klasik integral yöntemlerinde, bir noktanın dinamik davranışını bulmak için diğer noktaların davranışın bilinmesine gerek var iken, ama Fourier dönüşümünde istenilen bir noktanın direk yani (diğer noktanın dinamik davranışını hesaplamadan) bulunabilmektedir.

7.4.2. Kompleks Fourier Serileri

Daha önce bahsedildiği gibi, Ayrık Fourier dönüşüm formüllerinde kompleks Fourier serileri içerdiğinden dolayı kompleks Fourier serileri hakkında bilgi verilmektedir. Sonra sürekli Fourier dönüşümüyle ilişkilendirecektir.

T periyodunda bir $F(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı sürece, periyodik bir fonksiyon denilebilmektedir;

$$F(t + nT) = F(t) \quad n = -\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Fourier serisini kullanarak periyodik bir fonksiyonu, harmonik bileşenlerine ayrılacak mümkündür;

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (7.13)$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları ortogonal olduğundan, yukarıdaki Fourier serisinde yer alan katsayılar $F(t)$ cinsinden ifade edilebilmektedir.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (7.14)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Teorik olarak, Fourier serisinin $F(t)$ 'ye kapsamsı sonsuz terim olması gerekir. Ama pratikte birkaç terimin alınması yeterli gelmektedir, (Chopra, 2007).

Bunların yanında, aşağıda verilen trigonometrik ve üstel fonksiyonlar arasında kompleks olarak bağlantı kuran, Euler formülünden çıkan ifadeleri kullanılarak yukarıdaki Fourier serisini trigonometrik formdan üstel bir fonksiyon biçime dönüştürülebilmektedir.

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad (7.15)$$

Böylece (7.13) denklemi daha basit bir forma aşağıdaki gibi gelmektedir;

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{(i\omega_k t)} \quad (7.16)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{(-i\omega_k t)} dt$$

Burada ω_k parametresi k 'ninci Fourier bileşeninin açısal frekansını gösterir ve aşağıdaki bağıntılarla tanımlanır;

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi}{T_k} = 2\pi f_k \quad (7.17)$$

$$f_k = \frac{k}{T} = k \Delta f \quad \Delta f = \frac{1}{T}$$

(7.16) ifadelerinde yer alan C_k Fourier sabitleri Δf frekans artımına bölünürse, yayılı Fourier sabitleri bulunmuş olur, (Mengi, 1993).

$$F_k^F = \frac{C_k}{\Delta f} \quad (7.18)$$

Bunlarla birlikte, Fourier serisi denklemleri yayılı Fourier sabitleri içerdiği şekilde aşağıda gösterildiği gibi bulunmaktadır:

$$F(t) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{(i\omega_k t)} \quad (7.19)$$

$$F_k^F = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{(-i\omega_k t)} dt$$

Eğer yükleme periyodu sonsuza kadar devam ettiği ($T \rightarrow \infty$), frekans artımı sonsuz kadar küçüldüğü ($\Delta f \rightarrow df$) ve ayrık frekanslar ω 'nın sürekli bir fonksiyonunu olduğu varsayımları yapılırsa, limit durumunda, (7.19)'deki Fourier serisi ifadeleri sürekli Fourier dönüşüm formüllerine dönüşmektedir, (Clough ve Penzien, 1993). Diğer bir deyişle,

$$T \rightarrow \infty \implies \begin{pmatrix} \Delta f = \frac{1}{T} \longrightarrow df \\ \omega_k = 2\pi f_k \longrightarrow \omega = 2\pi f \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

olur ve böylece,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7.21)$$

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

şeklinde, direk Fourier ve ters Fourier dönüşüm denklemleri haline gelmektedir.

7.5. Ayrık Fourier Dönüşüm Formülleri

Kompleks Fourier serisi denklemlerini kullanılarak ayrık Fourier dönüşüm denklemleri bulunmaktadır. (7.21) Fourier dönüşüm serisi denkleminde görülen ikinci integral işlemi sayısal bir şekilde dikdörtgenler metoduyla hesaplanıp, $t = t_n = n \times \Delta t$ zamanına göre yazılacak olursa,

$$\omega_n t_k = (2\pi n \Delta f)(k \Delta t) = 2\pi \frac{nk}{N} \quad (7.22)$$

olmak suretiyle,

$$F_n = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.23)$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

denklemleri bulunmaktadır. (7.23) denklemlerinde görülen Δt aralıklarla temsil edilmesi mümkün olan Fourier bileşenlerindeki en büyük frekansı,

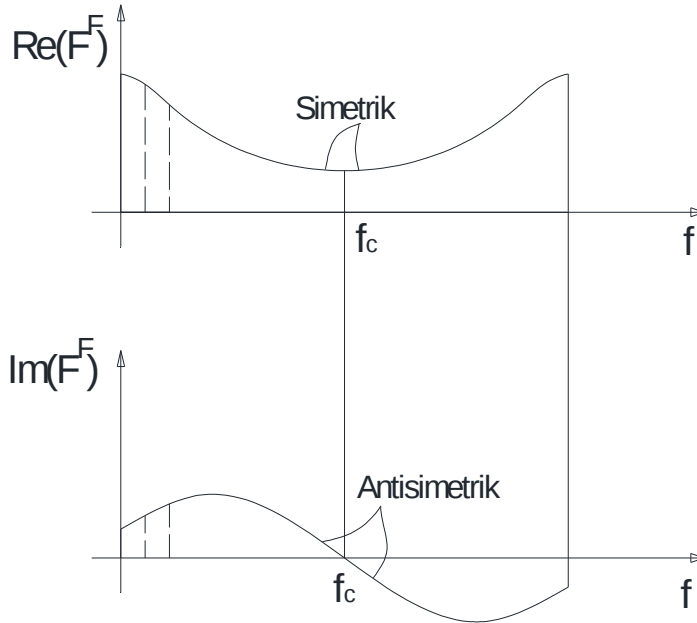
$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2} \Delta f \quad (7.24)$$

şeklinde bulunmaktadır. Yukarıda görülen f_c parametresine katlama frekansı adı verilmekte ve frekanslı Fourier bileşenlerinde, katlama frekanstan büyük olanlarının katlama frekanstan daha küçük olanlar üzerine katlandığı kabul edilmektedir. Bu tanımlama doğrultusunda katlama frekansının özelliği gereği, ayrık Fourier dönüşüm eşitlikleri son olarak aşağıda gösterildiği gibi olmaktadır, (Clough ve Penzien, 1993).

$$F_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7.25)$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

Yukarıda verilen denklem ile bulunan Fourier dönüşümlerin gerçek ve sanal kısımları f_c 'ye göre sırasıyla simetrik ve anti-simetrik olmaktadır, (Dhatt ve Touzut, 1985).



Şekil 7.3. Ayırık Fourier dönüşümün simetrik ve antisimetrik özelliği

7.6. Fourier ve Ters Fourier Dönüşümünün Bulunması

Daha önce bahsedildiği gibi, herhangi bir fonksiyonun zaman uzayından frekans uzayına veya tam tersi frekans uzayından zaman uzayına dönüştürmek için (7.25) ayırık Fourier dönüşüm eşitlikleri kullanılmaktadır.

7.6.1. Fourier Dönüşümü Bulmak İçin İzlenecek Yöntem

Zaman uzayında ve belirli bir zaman aralığında $F(t)$ gibi bir fonksiyonun tanımlandığı kabul edilirse, bu durumda bu fonksiyonun frekans uzayında Fourier dönüşümünü ($F^F(\omega)$) bulmak için aşağıda verilen aşamalar izlenmektedir, (Craig, 1981);

- A) Analiz için gerekli zaman aralığı $[0, T]$ seçilmektedir.
- B) Adım sayısı N ve $F(t)$ 'nin Δt aralıklarla değerleri saptanır, ($\Delta t = T/N$).
- C) Aşağıda görülen denklemden X_n değerleri elde edilir:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.26)$$

$$W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

D) En sonunda da Fourier dönüşümü bulunur:

$$F_n^F = \Delta t X_n \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.27)$$

7.6.2. Ters Fourier Dönüşümü Bulmak İçin İzlenecek Yöntem

Frekans uzayında Fourier dönüşümü $F^F(\omega)$ 'nın verildiği varsılırsa, bu durumda zaman uzayındaki $F(t)$ tespit etmek için aşağıda görülen adımlar takip edilecektir, (Craig, 1981);

- A)** Analiz için gerekli frekans aralığı $[0, f_c]$ seçilir.
- B)** Adım sayısı N ve $F^F(\omega)$ 'nın Δf aralıklarla değerleri belirlenir.
- C)** $F^F(\omega)$ 'nın gerçek ve sanal kısımları f_c etrafında simetrik ve anti-simetrik olarak $[0, 2f_c]$ aralığında tarif edilir.
- D)** Aşağıda verilen denklemi yardımı ile X_n değerleri bulunur:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k^F \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.28)$$

$$W = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

E) Son adım olarak ters Fourier dönüşüm elde edilir:

$$F_n = \Delta t X_n \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.29)$$

7.7. Fourier Dönüşümün Yapı Dinamiği Problemlerine Uygulanması

Bilindiği gibi, yapı mekaniğinde dinamik sistemdeki hareket denklemleri 2. dereceden diferansiyel denklemlerinden oluşmaktadır. Bu denklemlerin çözümü ile ilgili zaman uzayında önceki bölümlerde üzerine değinilmiştir. Bu bölümde sadece frekans uzayında Fourier dönüşümü ile çözüm tekniği incelenmektedir.

7.7.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Çözümü

Tipik olarak tek serbestlik dereceli bir sistemin aşağıda verilen diferansiyel denklem tarafından idare edilmektedir.

$$\ddot{X} + 2 \xi \bar{\omega} \dot{X} + \bar{\omega}^2 X = \frac{P}{m} \quad (7.30)$$

Yukarıdaki denklemde, $\bar{\omega}$ serbest titreşim frekansı olup, bu denklemin frekans uzayındaki Fourier dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$\dot{X}^F = (i\omega)X^F \quad (7.31)$$

$$\ddot{X}^F = (i\omega)^2 X^F$$

$$-\omega^2 X^F + 2 \xi \bar{\omega} (i\omega) X^F + \bar{\omega}^2 X^F = \frac{P^F}{m} \quad (7.32)$$

Bu denklemlerdeki ω Fourier dönüşüm parametresidir. Görüldüğü gibi yukarıda verilen denklem, yapı dinamiğinde Fourier uzayındaki olayı idare eden cebrik bir biçimde baş göstermekte ve bu denklemin çözülmesinden X^F değerleri elde edilmektedir, (Celep ve Kumbasar,1992).

$$X^F = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{-\omega^2 + 2 \xi \bar{\omega} (i\omega) + \bar{\omega}^2} \right] P^F \quad (7.33)$$

Fourier dönüşümün girişim özelliğine (Fourier transform convolution property) göre X^F 'in ters Fourier dönüşümü aşağıda verildiği şekilde elde edilebilmektedir:

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi \bar{\omega}(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

$$\omega_D = \bar{\omega} \sqrt{1 - \xi^2}$$
(7.34)

Bu denklemlerde, ω_D parametresi sistem için sönümlü serbest titreşim frekansıdır. (7.34) denklemine tek serbestlik dereceli sistemler (T.S.D.S.) için Konvolüsyon veya Duhamel integrali adı verilmektedir. Bu denklem, lineer sistem analizlerde herhangi bir keyfi yükleme için genel bir metot sağlanmaktadır, (Humar, 2003).

7.7.2. Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Çözümü

Bu sistemler aşağıda matris notasyonunda verilen diferansiyel denklem takımı tarafından idare edilmektedir.

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{P}$$
(7.35)

Aşağıda gösterildiği biçimde zaman uzayında bir dinamik rijitlik matrisi ($\underline{D}$) tanımlanarak, sistem denklemi yeniden yazılacak olur ise;

$$\underline{D} \underline{X} = \underline{P}$$

$$\underline{D} = (\underline{M} d^2/dt^2 + \underline{C} d/dt + \underline{K})$$
(7.36)

şeklini almaktadır. (7.36)'deki denklemin Fourier dönüşümü alınacak olur ise, bu durumda frekans uzayındaki son hali aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\underline{D}^F \underline{X}^F = \underline{P}^F \quad (7.37)$$

$$\underline{D}^F = (i\omega)^2 \underline{M} + (i\omega) \underline{C} + \underline{K}$$

Burada, $\underline{D}^F$ matrisi frekans uzayında dinamik rijitlik matrisidir. (7.37)'den de anlaşılacağı üzere, frekans uzayında olan sistem hareket denklem takımı daha basit bir biçime yani cebrik denklem takımına dönüştüğü açıkça görülmektedir, (Celep ve Kumbasar,1992).

(7.37) denklemini yardımıyla frekans uzayında hesaplananlara aşağıdaki ters Fourier dönüşümünün denklemleri uygulanarak zaman uzayında sistem bilinmeyen büyüklükleri bulunabilmektedir:

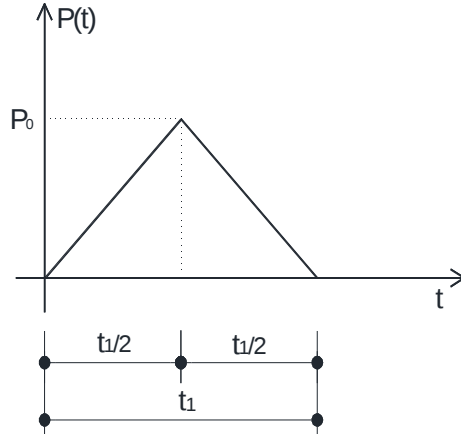
$$\underline{X}^F = \underline{H} \underline{P}^F \quad (7.38)$$

$$\underline{H}(\omega) = (\underline{D}^F)^{-1}$$

$$\underline{X}(t) = \int_0^t \underline{h}(t - \alpha) \underline{P}(\alpha) d\alpha, \quad \underline{h}^F(\omega) = \underline{H} \quad (7.39)$$

Örnek 7.1.

Üçgen tipi yüklemeye maruz kalan çerçeve sistemin kolonları kütesiz olduğu ve eksenel şekil değiştirme yapmadığı, tüm kütleler kat hizalarında toplandığı varsıyılırsa, 8 nolu elemanın maksimum kesme kuvvetinin ve 15 nolu serbestlik derecesi yönünde olan maksimum deplasman değerinin hesaplanması amaçlanmaktadır.



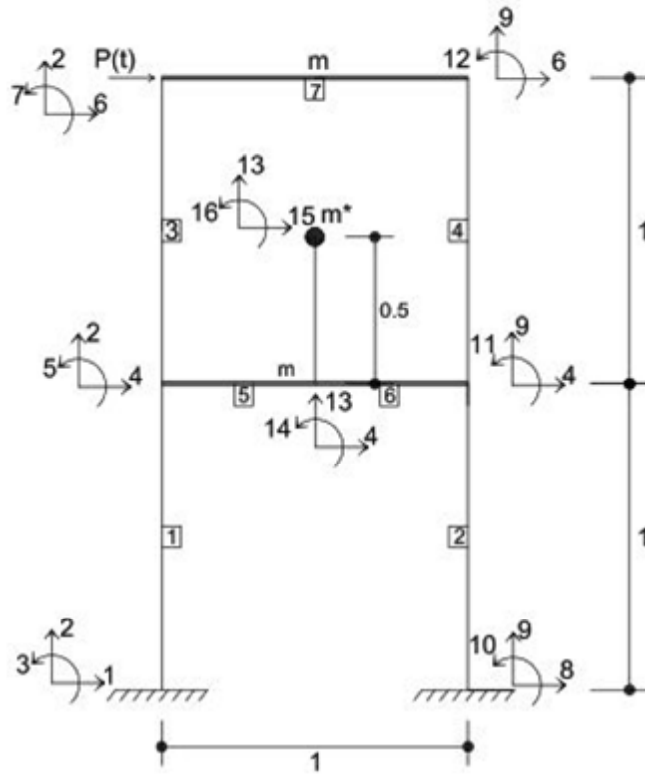
Boyutsuz Büyüklükler

$$\bar{P} = 1; P_0 = 1; \bar{t}_1 = 1; \bar{t}_1/\bar{T} = 0.3$$

$$\bar{EI} = 1; \bar{\xi} = 0.02; \bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$$

$$\bar{m}^* = 24/(2\pi \bar{t}/\bar{T})^2 = 6.7547$$

Şekil 7.4. Örnek 7.1'e ait yükleme tipi



Şekil 7.5. Örnek 7.1'e ait şekil

Bu problem boyutsuz uzayda çözüleceğinden gerekli boyutsuz büyüklükler şekilde verilmektedir. Hem Fourier transform metodu hem de Newmark metodu ile bu tez çalışmasında geliştirilmiş Mathematica paket programları yardımı ile çözülmüş sonuçlar aşağıda gösterilmektedir.

Çizelge 7.2. Örnek 7.1.'e ait değerler

	MSRFT	MSRN.MAT	Mengi
δ_{max}	0.0590622	0.0535303	0.0507012
V_{max}	1.0663	1.14109	1.17624

Tablodan da görülebileceği üzere, verilen değerlere, Newmark metodu ile çözüm yapan MSRN.MAT ile elde edilen değerler, Fourier transform metodu ile çözüm yapan MSRF.MAT ile elde edilen değerlerden daha yakın çıktığı görülmüştür.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Mod Süperpozisyon yöntemi kullanılarak iki boyutlu yapı çerçeve sistemlerinin dinamik analizi incelenmiştir. Girişimsiz hale getirilen diferansiyel denklem sistemleri, arzu edilen sistem büyüklüklerin bulunması için mod süperpozisyon yönteminin yanında Newmark ile Fourier dönüşüm yöntemleri de kullanılmıştır. Bu iki yöntem arasında her açıdan (Örneğin; birbirlerine göre üstünlükleri, kullanım yerleri vb.) karşılaştırmalar yapılmıştır. Bunlarla birlikte, benzer şekilde serbest titreşim analizinde kullanılan çözüm yöntemler arasında da karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu incelenen konularından elde edilen netice özetçe aşağıda verilmektedir:

- ▼ Serbest titreşim analizi yapan yöntemlerden dönüşüm yöntemlerinin özdeğer problemi çözümünde pek uygun olmadığı neticesine varılmıştır. Genel olarak yapı dinamiği analizindeki problemler geniş hacimli ve çok serbestlik dereceli sistemlerdir. Bununla beraber, dönüşüm yöntemleri hiç gerektirmediği halde tüm serbest titreşim frekansları ve mod şekillerini hesaplandığından dolayı çok zaman alıcı, çok işlem gerektiren yöntem olduğu görülmüştür.
- ▼ Mod süperpozisyon yönteminin özelliğinden dolayı, geniş hacimli yapı mekaniği problemlerinde, tüm serbest titreşim karakteristiklerinin bulunması yerine, sadece en küçüklerinin göz önünde bulundurulması yeterli olduğu görülmüştür. Bu nedenle, özdeğer problemi çözümünde iterasyon yöntemleri arasında alt uzaylar ile iterasyon ve Rayleigh oranıyla iterasyon yöntemi en üstün olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte, sistem matrislerinde bant genişliği büyük olan sistemler için alt uzaylar ile iterasyon yönteminin kullanılması uygunken ama, bant genişliği küçük olan sistemler için determinant arama yönteminin daha uygun olduğu sonucuna varılmıştır.

- ▼ Alt uzaylar ile iterasyon yöntemi ve Rayleigh Oranı ile iterasyon yönteminin tutarlı kütle (consistent mass) kabullenen sistemler için uygun olduğu gibi, tutarlı kütle yerine toplanmış kütle (lumped mass) kabullendiğinde sistem kütle matrisi genelde tekil olarak ortaya çıkmaktadır. Bu sebepten dolayı, bu tip sistemler için Rayleigh oranıyla iterasyon yönteminin (Sturm teoremi ile beraber) serbest titreşim büyüklükleri hesaplamasında uygun olduğu görülmüştür.
- ▼ Mod süperpozisyon yöntemi ile zorlanmış titreşim analizi sırasında, sistemi idare eden ikinci dereceden adi diferansiyel denklem takımı girişimsiz hale getirilir. Daha sonra bu denklem takımı Fourier dönüşümü metoduyla çözüldüğünde sistem çok basit forma yani cebrik denklem takımına dönüşmektedir. Bu önemli husustan dolayı Newmark yöntemine göre Fourier dönüşüm yöntemi daha basit olduğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, Fourier dönüşüm yönteminde, Newmark yönteminin tersine, herhangi bir t zamanında olan değerini hesaplamak için daha önce elde edilen değerlere ihtiyaç olmadığı görülmüştür. Bu sebeple, Newmark yöntemini kullanılırken seçilmesi gereken zaman artımı önemli olduğu gözlenmiştir.
- ▼ Zorlanmış titreşim analizinde, Fourier dönüşüm yönteminin kullanıldığında hem sistem sönümlü ve hem de sisteme zorlanan yükün zaman ilerledikçe küçülerek sıfırlanması gerekir. Oysaki Newmark yöntemi için böyle bir sınırlama söz konusu değildir ve bütün yükleme tiplerinde uygun olduğu anlaşılmıştır. Bundan dolayı, sadece zaman ile sönümlenen yük ve davranış için Fourier dönüşüm yöntemi uygun olduğu görülmüştür.
- ▼ Yine zorlanmış titreşim analizinde, özellikle kesme tipi çerçeve sistemlerde mod süperpozisyon yöntemi uygulandığında yapı sistemin tüm modlarından gelen katkıların bulunması yerine sadece en küçük birkaç modun katkısının göz önüne alınması, çözüm için yeterli hassasiyete olduğu gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Bathe, K. J., 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prenticehall, New Jersey, 735s.
- Bathe, K. J., ve Wilson, E. L., 1976. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, New Jersey, 528s.
- Celep, Z., ve Kumbasar, N., 1992. Örneklerle Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş. Sema Matbaacılık, İstanbul, 422s.
- Chopra, K. Anil 2012. Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 944s
- Clough, R. W., ve Penzien, J., 1993. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, Singapore, 738s.
- Craig, R. R., 1981. Structural Dynamics. John Wiley & Sons, Singapore, 527s.
- Dhatt, G., ve Touzot, G., 1985. The Finite Element Method Displayed. John Wiley & Sons, Norwich, 509s.
- Enez S., 2009. Düzlem Çerçeve Sistemlerin Mod Birleştirme Yöntemi ile Dinamik Analizi. Çukurova Üniversitesi, Adana, 164s.
- Ghali, A., ve Neville, A. M., 1984. Structural Analysis. Bizim Büro Basımevi, Ankara, 779s.
- Humar J. L., 2002. Dynamics of Structures. 2nd Ed. A. A. Balkema Publishers, Lisse, The Netherlands, 967s.
- James, M. L., ve Smith, G. M., Ark., 1989. Vibration of Mechanical And Structural Systems. Harper And Row, New York, 652s.
- Kıral, E., Gürkök, A., ve Mengi, Y., 1981. Computing Methods in Engineering Volume I. O.D.T.Ü. Basımevi, Ankara, 330s.
- Master Tezi, O.D.T.Ü, Ankara, 124s. (Yayınlanmamış).
- Mengi, Y., Soil-Structure Interaction Analysis Ders Notları (Yayınlanmamış).
- Mengi, Y., Structural Dynamics Ders Notları (Yayınlanmamış).

- Paz, M. Ve Leigh W., 2004. Structural Dynamics: Theory and Computation, 5th Ed. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 815s
- Tezcan, S., 1970. Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makinaları ile Çözümü. Arı Kitabevi Matbaası, Ankara, 406s.
- Weaver, W., ve Johnston, P.R., 1984. Finite Elements For Structural Analysis. Prentice-Hall, New Jersey, 403s.
- Wolfram, S., 1991. Mathematica. Addison – Wesley Publishing Co., California, 961s.
- Yerli H.R., Kıral E., 1994. Düzlem Çerçeve Sistemlerin Mod Süperpozisyon Metodu ile Zorlanmış Titreşim Analizi. Çukurova Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi, Cilt.9, Ss.13-20.
- Zakout, U., 1992. A Study Of Eigensolution Methods in Structural Engineering. ODTÜ., Ankara, 124s.

ÖZGEÇMİŞ

1986 Yılında Afganistanın Panjshir ilinde doğdu. İlkokulu ve ortaokulu Afganistanın kuzey bölgesinde tamamladıktan sonra 2005 yılında Lise eğitimini tamamlamıştır. Aynı yılda Afganistan'da üniversite sınavına girerek Kabil Üniversitesi, Mühendislik Fakültesine kazandı ancak 2006 yılında Kabil'deki Türk Büyükelçiliği tarafından düzenlenen Türkiye Hükümet Bursu adına bir sınava girdikten sonra Türkiye'deki Bursa'da Ankara Üniversitesine bağlı olan Türkçe Öğrenim Merkezinde (TÖMER)'de Türkçe dilini okudu. 2007 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans eğitimine başlayıp, 2011 mezun olarak aynı yılda Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

Lisans eğitimini bittirdikten sonra çeşitli inşaat firmalarında saha ve kalite kontrol mühendisi olarak görev yapmıştır. Halen Afganistan'de NATO'ye bağlı olan bir ÜS'te, JS INT'L INC. isimli bir Amerikan firmasında çalışmaktadır.

Evli ve bir çocuk babasıdır.