ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTİSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevda SÖNMEZ

TEKİLSİZ MODÜLLERİN İNJEKTİFLİĞİNİN İNCELENMESİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ADANA - 2021

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEKİLSİZ MODÜLLERİN İNJEKTİFLİĞİNİN İNCELENMESİ

Sevda SÖNMEZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Yılmaz DURĞUN
Yıl: 2021 Sayfa: 63
Jüri : Doç. Dr. Yılmaz DURĞUN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU

R birlesmeli ve birimli bir halka olsun. Verilen A ve B sağ R-modüller için, eğer her ι :B → C monomorfizması ve her f : B → A homomorfizmasi için, $h\iota = f$ olacak şekilde bir h : C → A var ise, A modülüne, B-altinjektif modül denir. Bir A modülünün altinjektif bölgesi, A modülünün B-altinjektif olduğu B modüller sınıfı olarak tanımlanır. Bu tezde, öz sınıf ve altinjektif notasyonları aracılığıyla, burulmasız (veya burulma-serbest) değişmeli grupların genellemesi olan tekilsiz modüllerin injektifliği çalışılmıştır. Tekilsiz modüllerin muhtemel en küçük altinjektif bölgesi belirlenmiş ve bu bölgeye sahip tekilsiz modüller incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: İnjektif modüller, altinjektif bölgeleri, tekilsiz modüller, öz sınıflar.

ABSTRACT

MSc THESIS

INVESTIGATIGATION OF INJECTIVITY OF NONSINGULAR MODULES

Sevda SÖNMEZ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
Years: 2021, Pages: 63
Jury : Assoc. Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Assoc. Prof. Dr. Pınar AYDOĞDU

Let R be an associative ring with identity. Given right R-modules A and B, A is said to be B-subinjective if for every monomorphism $\iota : B \to C$ and for every homomorphism $f : B \to A$, there exists a homomorphism $h : C \to A$ such that $h\iota = f$. The subinjectivity domain of a module A is defined to be the class of modules B such that A is B-subinjective. In this thesis, through the notions proper class and subinjectivity, injectivity of nonsingular modules is studied, which are the generalization of torsionless (or torsion-free) abel groups. The smallest possible subinjectivity domain of a nonsingular module is determined, and nonsingular modules which have this domain are investigated.

Keywods: Injective modules, subinjectivity domains, nonsingular modules, proper classes.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

R birlesmeli ve birimli bir halka olsun. Verilen A ve B sağ R-modüller için, eğer her ι : B → C monomorfizması ve her f : B → A homomorfizmasi için, $h\iota = f$ olacak şekilde bir h : C → A var ise, A modülüne, B-altinjektif modül denir. Bir A modülünün altinjektif bölgesi, A modülünün B-altinjektif olduğu B modüller sınıfı olarak tanımlanır. Bir A sağ R-modülünün injektif olması için, $\mathfrak{Jn}^{-1}(\mathrm{A}) = \mathcal{M}\mathrm{od}\text{-}R$ olması gerek ve yeter koşuldur. Bir N injektif modülü için, her M modülü N-altinjektiftir. Yani herhangi bir modülün muhtemel en küçük altinjektif bölgesi, injektif modüller sınıfıdır. Altinjektif bölgesi sadece injektif modüllerden oluşan modüllerin çalışılmasıyla, injektif modüllerin çapsal karşıtı tanıtılmış ve çalışılmıştır. Bu şekilde, altinjektif bölgesi sadece injekif modül sınıflarından oluşan modüller, fakir (indigent) modül olarak adlandırılmıştır.

Öz sınıflar (veya saflıklar), kategori teorisindeki önemli rolleri nedeniyle zengin araştırma konuları sunmaktadır. Buchsbaum tarafından, belirli bir bağıl kohomolojiye tekabül eden Ext grupları olarak kısa tam modül dizisi sınıfının hesaplanabildiği koşulları aksiyomlaştırmak için öz sınıflar tanımlanmıştır. Buchsbaum, bağıl homolojik cebiri incelemek için gerekli olan bir dizi monomorfizma üzerine bazı aksiyomlar ortaya koydu. Bu aksiyomlar, monomorfizmalar ve kısa tam dizilerin öz sınıfı kavramının ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bir öz sınıfın Ext grupları Baer toplamına göre değişmeli gruplardır. Bu bağıl homolojik cebirin çıkış noktasıdır. Parçalanan kısa tam dizilerin sınıfı **Split** en küçük öz sınıftır. En geniş öz sınıf ise tüm kısa tam dizilerin sınıfı olan **Abs** öz sınıfıdır (Skylarenko 1978, Clark vd 2006). Bu aşikar örneklerin dışında, **saf** (**pure**), **kapalı** (**closed** veya **complement (tümleyen)**), **bütünleyen** (**supplement**) kısa tam dizilerin sınıfı, öz sınıfların iyi bilinen örnekleridir.

Öz sınıflar, yaygın olarak funktorlar aracılığıyla üretilirler B bir sol R-modül olsun. T(M, B) bir kategoriden alınan M nesnesine bağlı olan toplamsal kovariant

veya kontravariant sağdan veya soldan tam bir funktor olsun. $\mathcal{M}$, bu kategorinin nesnelerinden oluşan bir sınıf ise, $t^{-1}(\mathcal{M})$ ile her M ∈ $\mathcal{M}$ için T(M,𝔼) dizisinin tam olmasını sağlayan tüm 𝔼 kısa tam dizilerinin oluşturduğu sınıfı gösterelim. t^{-1}(M) her zaman bir öz sınıf oluşturur. $\mathcal{M}$, sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. T(M, -) olarak kontravariant Hom(-, M) funktorunu ele aldığımızda injektif üretilmiş $i^{-1}(\mathcal{M})$ öz sınıfını elde ederiz. Başka bir deyişle $i^{-1}(\mathcal{M})$ sınıfı $\mathcal{M}$ den olan tüm modüllerin injektif olduğu en büyük sınıftır.

A bir sağ R-moül olsun ve K, A nın bir alt modülü olsun. A nın her U ≠ 0 alt modülü için, U ∩ K ≠ 0 ise K ya A nın bir büyük (essential) alt modülü denir ve K ⊴ A ile gösterilir. A ise K nın genişlemesi (essential extension) olarak adlandırılır. Eğer K nın A da öz (proper) genişlemesi yok ise K alt modülüne A da kapalı denir. A nın $\{m \in \mathrm{A} : R \text{ nin bazı büyük idealleri için } m\mathrm{I} = 0 \text{ dir}\}$ alt kümesi, A nın tekil elemanlarının kümesidir. A nın tekil elemanlarının kümesi Z(A) ile gösterilir ve A nın tekil alt modülü olarak adlandırılır. Tekil alt modüller burulma guruplarının genellemesidir. A modülüne Z(A) = 0 ise tekilsiz modül denir ve eğer Z(A) = A ise tekil modül denir. R nin sağ tekil ideali $\mathrm{Z}_R(R) = \mathrm{Z}(R_R)$ dir. A modülünün ikinci tekil (veya Goldie burulma) alt modülü $\mathrm{Z}_2(\mathrm{A})$,

$$\mathrm{Z}_2(\mathrm{A})/_{\mathrm{Z}(\mathrm{A})} = \mathrm{Z}\left(\mathrm{A}/_{\mathrm{Z}(\mathrm{A})}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\mathrm{Z}_2(\mathrm{A})$ = A ise, A modülüne Goldie burulma modülü denir.

Bu tezde, burulmasız (veya burulma-serbest) değişmeli grupların genellemesi olan tekilsiz modüllerin injektifliği çalışılmıştır. Tekilsiz modüllerin muhtemel en küçük altinjektif bölgesi belirlenmiş ve bu bölgeye sahip tekilsiz modüller incelenmiştir.

TEŞEKKÜR

Çalışmanın her aşamasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren, bilgisi ve kişiliği ile örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yılmaz DURĞUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Sayın Ar. Gör. Dr. Ayşe ÇOBANKAYA'ya destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda sonsuz sevgisi ve güveniyle beni bu günlere getiren, beni her zaman destekleyen ve varlıklarıyla bana güç veren çok değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman yanımda olduğu, beni desteklediği ve bana inandığı için Koray Taşkın'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 5
2.1. Halkalar 5
2.2. Modüller 11
3. ÖZ SINIFLAR 27
3.1. Kısa Tam Diziler 27
3.2. Öz Sınıf 28
3.3. Bir Öz Sınıfa Göre Projektif, İnjektif, Eşprojektif Ve Eşinjektif Modüller 32
3.4. İnjektif Olarak Üretilen Öz sınıflar 35
3.5. İnjektif Olarak Üretilen Bir Öz Sınıfa Göre Eşinjektif ve Eşprojektif Modüller 35
4. TEKİL VE TEKİLSİZ MODÜLLER İLE ÜRETİLEN BAZI ÖZ SINIFLAR 37
4.1. S-Bütünleyen Alt Modüller 37
4.2. Tekilsiz Modüllerin Altinjektif Bölgeleri 49
KAYNAKÇA 59
ÖZGEÇMİŞ 63

1. GİRİŞ

Bu tezde ele alınan tüm halkalar birleşmeli ve birimli halkalardır. Aksi belirtilmedikçe, R isteğe bağlı bir halkayı belirtir ve tüm modüller sağ birimli R-modüller olacaktır. Her zaman olduğu gibi, $\mathcal{M}$od-R ile sağ R-modüllerin kategorisi ifade edilecektir.

Modül teorisindeki bazı yeni çalışmalarda, modüllerin injektifliğini yeni bir perspektiften ele almak için klasik injektiflik tanımına odaklanılmıştır. Verilen A ve B sağ R-modüller için, eğer her ι : B → C monomorfizması ve her f : B → A homomorfizması için, $h\iota = f$ olacak şekilde bir h : C → A var ise A modülüne, B-altinjektif modül denir. Bir A modülünün altinjektif bölgesi, $\mathfrak{Z}\mathfrak{n}^{-1}(\mathrm{A})$, A modülünün B-altinjektif olduğu B modüllerinin sınıfı olarak tanımlanır. Bir A sağ R-modülünün injektif olması için, $\mathfrak{Z}\mathfrak{n}^{-1}(\mathrm{A})$ = $\mathcal{M}$od-R olması gerek ve yeter koşuldur. Bir N injektif modülü için, her M modülü N-altinjektiftir. Yani herhangi bir modülün muhtemel en küçük altinjektif bölgesi, injektif modüller sınıfıdır. Geleneksel olarak injektif olmayan modüllerin ne kadar injektif olmaya yakın olduğu çalışılırken son zamanlarda bunun tam tersi olarak sadece injektif modüllere göre injektif özelliği olan modüller, yani altinjektif bölgesi sadece injektif modüllerden oluşan modüller çalışılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalar ile injektif modüllerin çapsal karşıtı anlaşılmaya çalışılmıştır. Bu şekilde, altinjektif bölgesi sadece injekif modül sınıflarından oluşan modüller, fakir (indigent) modül olarak adlandırılmıştır (Aydoğdu, Lopez-Permouth, 2011). Halen keyfi bir halka için fakir modülün varlığı bilinememektedir. Fakat noether halkaları üzerinde fakir modüllerin varlığı gösterilmiştir (Durğun 2016). Yakın zamanda fakir modüller ile ilgili olarak (Alizade, Büyükaşık, 2014; Altınay, Büyükaşık, Durğun 2019) çalışmaları yayınlanmıştır.

Öz sınıflar (veya saflıklar), kategori teorisindeki önemli rolleri nedeniyle zengin araştırma konuları sunmaktadır. Buchsbaum tarafından, belirli bir bağıl

kohomolojiye tekabül eden Ext grupları olarak kısa tam modül dizisi sınıfının hesaplanabildiği koşulları aksiyomlaştırmak için öz sınıflar tanımlanmıştır. Öz sınıflar, bağıl homolojik cebirin temel araçlardır. Bağıl homolojik cebir, modül ve halka teorisi, kategori teorisi, topoloji ve cebirsel geometrideki birçok kaynaktan ortaya çıkmıştır. Bağıl homoloji, Eilenberg ve Moore (1965) tarafından yazılan ve halen bir başyapıt olarak kabul edilen kitabın ortaya çıkmasıyla tam teşekküllü bir konu haline gelmiştir. Buchsbaum, bağıl homolojik cebiri incelemek için gerekli olan bir dizi monomorfizma üzerine bazı aksiyomlar ortaya koydu. Bu aksiyomlar, monomorfizmalar ve kısa tam dizilerin öz sınıfı kavramının ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bir öz sınıfın Ext grupları Baer toplamına göre değişmeli gruplardır. Bu bağıl homolojik cebirin çıkış noktasıdır. Parçalanan kısa tam dizilerin sınıfı **Split** en küçük öz sınıftır. En geniş öz sınıf ise tüm kısa tam dizilerin sınıfı olan **Abs** öz sınıfıdır (Skylarenko 1978, Clark vd 2006). Bu aşikar örneklerin dışında, **saf** (**pure**), **kapalı** (**closed** veya **complement(tümleyen)**), **bütünleyen** (**supplement**) kısa tam dizilerin sınıfı, öz sınıfların iyi bilinen örnekleridir (Warfield 1969, Puninski vd 1999, Simmons 1987, Montano 2010, Alizade vd 2014, Büyükaşık ve Durgun 2015, Behboodi vd 2014, Facchini ve Moradzadeh-Dehkordi 2014).

Öz sınıflar, yaygın olarak funktorlar aracılığıyla üretilirler B bir sol *R*-modül olsun. T(M, B) bir kategoriden alınan M nesnesine bağlı olan toplamsal kovariant veya kontravariant sağdan veya soldan tam bir funktor olsun. $\mathcal{M}$, bu kategorinin nesnelerinden oluşan bir sınıf ise, $t^{-1}(\mathcal{M})$ ile her M ∈ $\mathcal{M}$ için T(M,𝔼) dizisinin tam olmasını sağlayan tüm 𝔼 kısa tam dizilerinin oluşturduğu sınıfı gösterelim. $t^{-1}(\mathcal{M})$ her zaman bir öz sınıf oluşturur. $\mathcal{M}$, bir sol *R*-modüller sınıfı olsun T(M, -) olarak kontravariant Hom(-, M) funktorunu ele aldığımızda injektif üretilmiş i^{-1}(M) öz sınıfını elde ederiz. Başka bir deyişle $i^{-1}(\mathcal{M})$ sınıfı $\mathcal{M}$ den olan tüm modüllerin injektif olduğu en büyük sınıftır. $\mathcal{M}$ tüm sol *R*-modüller sınıfı ise $i^{-1}(\mathcal{M})$ = **Spli**t olur. $\mathcal{M}$, tüm injektif sol *R*-modüller sınıfı ise $i^{-1}(\mathcal{M})$ = **Abs** olur.

Öz sınıfların en iyi bilinen örneği saf kısa tam dizilerin sınıfı olan **Pure** öz sınıfıdır. **Pure** öz sınıfından dolayı, öz sınıflar bazen **saflık** (**purity**) olarak adlandırılır.

A bir sağ R-moül olsun ve K, A nın bir alt modülü olsun. A nın her $U \neq 0$ alt modülü için, $U \cap K \neq 0$ ise K ya A nın bir büyük (essential) alt modülü denir ve $K \trianglelefteq A$ ile gösterilir. A ise K nın genişlemesi (essential extension) olarak adlandırılır. Eğer K nın A da öz (proper) genişlemesi yok ise K alt modülüne A da kapalı denir. A nın $\{m \in A : R$ nin bazı büyük idealleri için $mI = 0$ dir$\}$ alt kümesi, A nın tekil elemanlarının kümesidir. A nın tekil elemanlarının kümesi $Z(A)$ ile gösterilir ve A nın tekil alt modülü (singular submodule) olarak adlandırılır. Tekil alt modüller burulma guruplarının bir genellemesidir. A modülüne $Z(A) = 0$ ise tekilsiz (nonsingular) modül denir ve eğer $Z(A) = A$ ise tekil denir. R nin sağ tekil ideali $Z_R(R) = Z(R_R)$ dir. A modülünün ikinci tekil (veya Goldie burulma) alt modülü $Z_2(A)$,

$$Z_2(A)/_{Z(A)} = Z\left(A/_{Z(A)}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır. $Z_2(A) = A$ ise A modülüne Goldie burulma modülü denir.

Tez çalışmamızda, tekilsiz modüller ile injektif olarak üretilen öz sınıf incelenmiştir. Bu öz sınıfın Goldie burulma modülü sınıfı aracılığıyla eşinjektif olarak üretilen öz sınıfa eşit olduğu gösterilmiştir. Bu öz sınıfın eşinjektif modülleri çalışılmıştır. Bu modüller kullanılarak tekilsiz modüllerin altinjektif bölgesi ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri ve tekilsiz modüllerin injektifliğini çalışmak için gerekli olan ön bilgileri vereceğiz. Bu bilgiler, modül, halka ve homolojik cebir ile ilgili temel bazı tanım ve teoremleri içermektedir. (Alizade, Pancar, 1999), (Hungerford, 1974), (Kasch, 1982), (Rotman, 1979), (Sharpe, Vamos, 1972), (Wiabauer, 1991).

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R, +, .)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

1) $(R, +)$ abel gruptur,
2) $\forall\, a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir,
3) $\forall\, a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$ dır.

$(R, +, .)$ halkası verilsin. Eğer her $a, b \in R$ için $ab = ba$ ise R ye, "." işlemine göre **değişmeli halka** denir. R nin toplamsal birimine **sıfırı** denir ve $\mathbf{0_R}$ ile gösterilir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak biçimde $1_R \in R$ varsa $\mathbf{1_R}$ elemanına R nin **birim elemanı** (**birimi**) ve R ye de **birimli halka** denir ve birim eleman tek türlü belirlidir.

Bu tezde tüm halkalar birimli halka olarak alınacak ve R ile $(R, +, .)$ halkası kastedilecektir.

Teorem 2.1.2 R halka ve $a, b, c \in R$, $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) $a0_R = a0_R = 0_R$.
2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

3) $(-a)(-b) = ab.$
4) $a(b - c) = ab - ac$ ve $(a - b)c = ac - bc.$
5) $(na)b = a(nb) = n(ab).$

Tanım 2.1.3. R bir halka, $a, b \in R$ ve $a \neq 0_R$ olsun. Eğer $ab = ac$ iken $b = c$ ($ba = ca$ iken $b = c$) ise, R de **sol (sağ) sadeleştirme özellikleri sağlanır** denir.

Tanım 2.1.4. R bir halka ve $a, b \in R$ ve $a, b \neq 0_R$ olsun. Eğer $ab = 0_R$ ise, a ya bir **sol sıfır böleni** ve b ye bir **sağ sıfır böleni** denir. Hem sol sıfır böleni hem de sağ sıfır böleni olan bir elemana **sıfır böleni** denir. Ne sol sıfır böleni ne de sağ sıfır böleni bulunan halkaya da **sıfır bölensiz** halka denir.

R birimli değişmeli halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. Eğer R sıfır bölensiz ise, R ye **tamlık bölgesi** denir.

Tanım 2.1.5. R halka ve $0_R \neq 1_R$, $0_R \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 1_R$ olacak biçimde $b \in R$ varsa b ye a nın **sağ tersi** ve $ca = 1_R$ olacak biçimde $c \in R$ varsa c ye a nın **sol tersi** denir. $d \in R$ olmak üzere, eğer $ad = da = 1_R$ ise d ye a nın bir **tersi** denir ve a ya **tersinir eleman** denir. Eğer a nın tersi var ise, a^{-1} ile gösterilir. R birimli değişmeli bir halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye bir **bölme halkası** denir.

Tanım 2.1.6. Eğer R halkasının sıfır hariç her elemanı tersinir ise, R ye **cisim** denir.

Tanım 2.1.7. R halka ve $\emptyset \neq \mathrm{I} \subseteq R$ olsun. I, $(R, +)$ abel grubunun alt grubu ve $a, b \in \mathrm{I}$ olsun. Her $a, b \in \mathrm{I}$ için, eğer $ab \in \mathrm{I}$ ise, I alt grubuna R nin **alt halkası** denir. Ayrıca her $r \in R$, her $a \in \mathrm{I}$ için, eğer $ar \in \mathrm{I}$ ($ra \in \mathrm{I}$) ise, I ya R nin **sağ (sol) ideali** denir. I, R nin hem sağ hem de sol ideali oluyor ise, I ya R nin **ideali** denir. Her sağ (sol) ideal bir alt halkadır ancak tersinin doğruluğu her zaman geçerli değildir.

R ve $\{0_R\}$, R nin idealleridir. $\{0_R\}$ ve R ye R nin **aşikar idealleri** denir. R nin kendisinden farklı her idealine R nin **öz ideali** denir.

Alt halka tanımından da anlaşılacağı üzere, R halkasının her sağ ideali (sol ideali) R nin bir alt halkasıdır fakat her alt halka bir ideal değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nun bir alt halkasıdır fakat ideali değildir.

R halka ve I, R nin ideali olsun. $R/\mathrm{I} = \{r + \mathrm{I} : r \in R\}$ şeklinde ifade edilen yapı R nin işlemleriyle halkadır ve R/I halkasına R nin I idealine göre **bölüm halkası** denir.

Tanım 2.1.8. R bir halka ve M, R nin bir öz ideali olsun. Eğer R nin M yi içeren her J ideali için M = J ya da J = R ise, M ye R nin bir **maksimal ideali** denir.

Tanım 2.1.9. R ve S iki halka ve $\beta : R \to S$ fonksiyonu verilsin.
Eğer her $a, b \in R$ için,

$$\beta(a+b) = \beta(a) + \beta(b) \text{ ve } \beta(ab) = \beta(a)\,\beta(b)$$

ise, β ya R den S ye bir **halka homomorfizması** denir.

Tanım 2.1.10. R halkasının ideallerinin, her artan

$$\mathrm{I}_1 \subseteq \mathrm{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{I}_n \subseteq \cdots$$

zinciri sonlu bir adımda duruyor ise, R ye **noether halkası** veya **noetherian halka** denir. Bu özelliğe **artan zincir koşulu** da denir.

Benzer şekilde, eğer R halkasının her sol ideali sonlu üretilen ise, R halkasına **sol noether halkası** denir.

Teorem 2.1.11. R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) R sağ noether halkasıdır,
2) R nin her sağ ideali sonlu üretilmiştir,
3) (Maksimal eleman koşulu) R nin sağ ideallerinden oluşan boştan farklı her ailenin bir maksimal elemanı vardır.

Sonuç 2.1.12. R sağ noether halkası ve I, R nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda R/I da sağ noether halkasıdır.

Örnekler:

1. Her temel ideal bölgesi bir noether halkasıdır. Özel olarak, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası noether halkasıdır. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölüm halkası da noether halkasıdır.
2. $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ Gauss tam sayılar halkası bir noether halkasıdır.

Tanım 2.1.13. Eğer R halkasının ideallerinin her azalan

$$\mathrm{I}_1 \supseteq \mathrm{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{I}_n \supseteq \cdots$$

zinciri sonlu bir adımda duruyor ise, R ye **artinian halka** veya **artin halkası** denir.

Teorem 2.1.14. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. R sağ artinian halkadır,
2. R halkasının sağ ideallerinin, boştan farklı her alt kümesinin bir minimal elemanı vardır.

Örnekler:

1. 1.Her cisim artinian halkadır.
2. n $>$ 1 olmak üzere, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası sonlu olduğundan artinian halkadır.
3. $\mathbb{Z}[i]$ Gauss tam sayılar halkası artinian halka değildir. Gerçekten,

   $$3\mathbb{Z}[i] \supset 3^2\mathbb{Z}[i] \supset \cdots \supset 3^n\mathbb{Z}[i] \supset \cdots$$

   dir.
4. Artinian halkanın her alt halkası artinian olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi, artinian olmasına rağmen, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası artinian değildir.

Teorem 2.1.15. Her artinian tamlık bölgesi bir cisimdir.

İspat. R artinian bir tamlık bölgesi ve $0 \neq a \in R$ olsun. $(a) \supseteq (a^2)$ ... azalan zincirini gözönüne alalım. R artinian olduğu için bir n tam sayısı için $(a^n) = (a^{n+1}) = \cdots$ dir. Şu halde $a^n = ra^{n+1}$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. R bir tamlık bölgesi olduğundan, $1 = ra$ dır. R cisimdir. □

Teorem 2.1.16. Bir artinian halkanın sonlu tane maksimal ideal vardır.

Tanım 2.1.17. R bir halka olsun. Eğer R nin her sağ (sol) ideali projektif ise, R ye **sağ (sol) kalıtsal (hereditary) halka** denir. Başka bir tanımı ise, R **sağ kalıtsal halka** olması için gerek ve yeter koşul injektif modüllerin bölüm modüllerinin injektif olmasıdır. Eğer R bir kalıtsal halkası tamlık bölgesi ise, R ye **dedekind halkası** denir.

Örnekler:

1. Her yarı-basit halka hem sol hemde sağ kalıtsaldır.
2. Her esas ideal bölgesi kalıtsaldır ve bundan dolayı dedekind halkasıdır.

Tanım 2.1.18. R bir halka olsun. Her basit sol R-modül injektif ise, R halkasına **V-halkası** denir.

Bir M sol R-modülünün maksimal alt modüllerinin kesişimine, M modülünün radikali denir ve $\boldsymbol{Rad}(\mathbf{M})$ ile gösterilir. R halkasının V-halkası olması için gerek ve yeter koşul her M sol R-modülü için, $Rad(\mathrm{M}) = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.1.19. R bir halka olsun. R deki bütün maksimal sol ideallerin kesişimine onun **Jacobson radikali** denir ve $\boldsymbol{J(R) = J}$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.20. x, bir R halkasının elemanı olsun, o zaman $x \in \boldsymbol{J}(R)$ gerek ve yeter koşul her $a \in R$ için $1 - ax$ elemanı bir sol terse sahiptir yani $u(1 - ax) = 1$ olacak şekilde $u \in R$ vardır.

Tanım 2.1.21. Eğer her sol R-modül bir projektif örtüye sahip ise, R halkasına **mükemmel halka** denir. Eğer her sonlu olarak üretilen sol R-modül projektif örtüye sahip ise, R halkasına **yarımükemmel halka** denir.

Teorem 2.1.22. Her sol artinian R halkası sağ mükemmel halkadır.

Önerme 2.1.23. Her noether sol mükemmel tamlık bölgesi cisimdir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R halka ve $(\mathrm{M},+)$ abel grubu ve $f : R \times M \to M$ fonksiyonu olsun. $f(r,m) \in \mathrm{M}$ elemanını $\boldsymbol{rm}$ ile göstereceğiz. Her $r,s \in R$ ve her $m,n \in \mathrm{M}$ olsun. Eğer;

1. $r(m+n) = rm + rn$,
2. $(r+s)m = rm + sm$,
3. $(rs)m = r(sm)$,
4. $1.m = m$

ise, M ye **birimli sol $\boldsymbol{R}$-modül** (veya $\boldsymbol{R}$ **halkası üzerinde bir sol modül**) denir ve ${}_{\boldsymbol{R}}\mathbf{M}$ ile gösterilir. Benzer koşulları gerçekleyen bir

$$\mathrm{g} : M \times R \to M \quad (\mathrm{g}(m,r) = mr)$$

fonksiyonu verilmişse, M ye **sağ $\boldsymbol{R}$-modül** denir ve $\mathbf{M}_{\boldsymbol{R}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. R halka, M bir R-modül ve $\emptyset \neq \mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$ alt küme olsun. Eğer N, (M,+) değişmeli grubunun alt grubu ve her $m \in \mathrm{N}$ ve $r \in R$ için $rm \in \mathrm{N}$ oluyor ise N alt kümesine M modülünün **alt modülü** denir ve $\mathrm{N} \leq \mathrm{M}$ ile gösterilir. $\{0\}$ ve M modülü, M modülünün **aşikar alt modülleridir**. M modülünün kendisinden farklı alt modülüne **öz alt modülü** denir ve $\mathrm{N} < \mathrm{M}$ ile gösterilir. M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin arakesiti M modülünün bir alt modülüdür.

Tanım 2.2.3. (Kasch, 1982) M modül ve $\mathrm{N} < \mathrm{M}$ öz alt modül olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa, N öz alt modülüne M modülünün **maksimal alt modülü** denir.

Örneğin p asal olmak üzere $\langle p \rangle = p\mathbb{Z} < {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ maksimal alt modülüdür.

Tanım 2.2.4. (Sharpe, Vamos, 1972) M bir R-modül ve X, M nin alt kümesi olsun. M modülünün X alt kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine M modülünün X **alt kümesi tarafından üretilen alt modülü** denir ve **⟨X⟩** ile gösterilir. X kümesine ⟨X⟩ alt modülünün **üreteç kümesi** denir. Eğer X sonlu küme ise, ⟨X⟩ alt modülüne **sonlu üretilmiş alt modül**, X = $\{m\}$ şeklinde tek elemana sahipse ⟨X⟩ = $\langle m\rangle$ alt modülüne **devirli alt modül** denir. Eğer M = ⟨X⟩ olacak şekilde M nin sonlu bir X alt kümesi var ise, M ye **sonlu üretilmiş modül** ve özel olarak M = $\langle m\rangle$ olacak şekilde $m \in$ M elemanı var ise, M ye $\boldsymbol{m}$ **tarafından üretilen devirli modül** denir. $\langle m\rangle = Rm = \{rm \mid r \in R\}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.5. M sonlu üretilmiş modül olsun. O zaman M nin her öz alt modülü M nin bir maksimal alt modülü tarafından içerilir.

Sonuç 2.2.6. Sıfırdan farklı sonlu üretilmiş R-modül bir maksimal alt modüle sahiptir.

Teorem 2.2.7. (Modüler Kural) M modül, K, N ve U da M nin alt modülleri ve U ≤ N olsun. O zaman, $(U + K) \cap N = U + (K \cap N)$ dir.

Tanım 2.2.8. M bir R-modül ve N ≤ M olsun. M/N bölüm grubu, $r \in R$ ve $m + N \in M/N$ elemanları olsun.

$$\bullet : R \times M/N \to M/N$$

dış işlemine göre $r(m + N) = rm + N$ şeklinde ifade edilen yapı, R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle M modülünün N alt modülüne göre **bölüm modülü** denir.

Önerme 2.2.9. *R* halka olmak üzere M bir *R*-modül ve U $<$ M öz alt modül olsun. U alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in {}^{M}/_{U}$ için, U $+$ *Rm* = M olmasıdır.

Teorem 2.2.10. M sonlu üretilmiş modül olsun. M nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir.

Tanım 2.2.11. Eğer $\{N_i | \ i \in I\}$, M nin alt modüllerinin ailesi ise,

$$X = \bigcup_{i \in I} N_i$$

kümesinin ürettiği alt modüle **N_i modüllerinin toplamı** denir**.** $\langle X \rangle = \langle \cup_{i \in I} N_i \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.12. M bir *R*-modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun.

1) $M = \sum_{i \in I} N_i$,
2) $\forall \ i \in I$ için $N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$

koşullarını gerçekleyen M modülüne $\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin **iç direkt toplamı** veya **direkt toplamı** denir. $M = \oplus_{i \in I} N_i$ şeklinde gösterilir. Her bir N_i alt modülüne M modülünün **direkt toplam terimi** denir.

M modülünün N_1 ve N_2 alt modüllerini aldığımızda M = $N_1 \oplus N_2$ olması için gerek ve yeter koşulun M = $N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2 = 0$ olduğu açıktır.

M = M $\oplus$ {0} şeklinde yazılabildiğinden M = M + 0 ve M = M $\cap$ {0} = {0} olup M ve {0}, M modülünün **aşikar direkt toplam terimleri** denir.

Tanım 2.2.13. M modülünün aşikar direkt toplam terimlerinden başka direkt toplam terimi yoksa M modülüne **parçalanamaz modül**, M nin aşikar direkt toplam terimleri dışında direkt toplam terimi mevcut ise, M modülüne **parçalanabilir modül** denir.

Tanım 2.2.14. R halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{\mathrm{N}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ R -modüllerin bir ailesi olsun.

$$\left\{\gamma \mid \gamma : \mathrm{I} \to \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i, \forall\, i \in \mathrm{I} \text{ için } \gamma(i) \in \mathrm{N}_i\right\}$$

dönüşümlerin kümesine $\{\mathbf{N}_i\}_{i\in \mathbf{I}}$ modüller ailesinin **direkt çarpımı** denir ve bu küme $\prod_{i\in \mathbf{I}} \mathbf{N}_i$ ile gösterilir. Her $i \in$ I için $\gamma(i) = \gamma_i$ ve $\gamma = (\gamma_i)_{i\in \mathrm{I}}$ ile gösterelim. Burada γ_i ye γ dönüşümünün i. bileşeni denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise,

$$\gamma = (\gamma_i)_{i\in \mathrm{I}} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots)$$

şeklindedir. $\gamma, \delta \in \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ olmak üzere;

1) $\gamma = \delta \Leftrightarrow$ her $i \in$ I için $\gamma_i = \delta_i$,
2) $\gamma + \delta = (\gamma_i + \delta_i)_{i\in \mathrm{I}}$,
3) $-\gamma = (-\gamma)_{i\in \mathrm{I}}$,
4) $r \in R$ olmak üzere $r\gamma = (r\gamma_i)_{i\in \mathrm{I}}$,

ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{\mathrm{N}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir.

Tanım 2.2.15. Sadece sonlu sayıda $i \in \mathrm{I}$ için $e_i \neq 0$ olan $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ elemanlarının kümesi E' olsun. Eğer E nin boştan farklı bir alt kümesi olan E', E modülünün bir alt modülü ise, E' modülüne $\{\mathrm{E}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ ailesinin **dış direkt toplamı** denir ve $\oplus_{i\in \mathrm{I}}\mathbf{E_i}$ ile gösterilir. $\oplus^{\mu}_{i\in \mathrm{I}}\mathrm{E}_i = \{(\gamma_i)_{i\in \mathrm{I}} \mid \text{sonlu sayıda } i \in \mathrm{I} \text{ için } \gamma_i \neq 0\}$ kümesi $\prod_{i\in \mathrm{I}}\mathrm{E}_i$ modülünün bir alt modülüdür. I indis kümesi sonlu ise, iç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur ve bu nedenle iç direkt toplam yerine sadece **direkt toplam** ifadesi kullanılır.

Tanım 2.2.16. M bir *R*-modül olsun. Tanım 2.2.15. deki her bir $i \in \mathrm{I}$ için $\mathrm{E}_i = \mathrm{M}$ alınırsa $\oplus_{i\in \mathrm{I}}\mathrm{E}_i$ dış direkt toplamına M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $\mathbf{M^{(I)}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.17. M ve N *R*-modüller ve I boştan farklı bir indis kümesi olsun. $f : \mathrm{M}^{(\mathrm{I})} \rightarrow \mathrm{N}$ olacak şekilde bir epimorfizma varsa N ye **M-üretilmiş modül** denir. I indis kümesi sonlu elemenlı ise N ye **sonlu M-üretilmiş modül** denir.

Tanım 2.2.18. F bir *R*-modül ve I indis kümesi olmak üzere $\mathrm{F} \cong R^{(\mathrm{I})}$ ise F ye **serbest modül** denir. I sonlu elemenlı ise F ye **sonlu üretilmiş serbest modül** denir. Özel olarak her *R* halkası kendisi üzerinde serbest modüldür.

Tanım 2.2.19. *R* halka olmak üzere M ve N, *R*-modülleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonuna **sol *R*-modül homomorfizması** denir.

1) Her $a, b \in \mathrm{M}$ için $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ dir,
2) Her $a \in \mathrm{M}$ ve her $r \in R$ için $\varphi(ra) = r\varphi(a)$ dir.

Burada herhangi bir sol *R*-modül homomorfizması kısaca **homomorfizma** olarak adlandırılacaktır. $\varphi : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{N}$ homomorfizma olsun. Eğer φ bire-bir ise, φ

homomorfizmasına bir **monomorfizma**, φ örten ise, φ homomorfizmasna bir **epimorfizma** ve φ hem bire-bir hemde örten ise, φ homomorfizmasına bir **izomorfizma** denir. M ve N modülleri arasında bir izomorfizma varsa, M ile N modüllerine **izomorf modüller** denir ve $\mathbf{M \cong N}$ ile gösterilir. $\varphi : M \to M$ homomorfizmasına **endomorfizma** denir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi ***End*(M)** ile gösterilir.

$N \leq M$ ve $m \in M$ olsun. M nin $m + N = \{m + n \mid n \in N\}$ alt kümesine, M nin N alt modülüne göre **sol yansınıfı** denir ve bütün sol yansınıflar kümesi $\mathbf{M/N}$ ile gösterilir.

M modülünden N modülüne tanımlanan **tüm homomorfizmaların kümesi**,

$$\mathrm{Hom}(M,N) = \{\varphi \mid \varphi : M \to N \text{ modül homomorfizması}\}$$

ile gösterilir. $f, g \in \mathrm{Hom}(M,N)$ homomorfizmasının $f + g$ toplamını $\forall m \in M$ için $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$, $0 : M \to N$ homomorfizmasıdır.

Tanım 2.2.20. M modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i : N \to M$ dönüşümü monomorfizma olup i monomorfizmasına **içerme monomorfizması** denir.

Tanım 2.2.21. $\mu : M \to M/N$, $\mu(m) = m + N$ ile tanımlı dönüşümü epimorfizmadır. Bu μ epimorfizmasına **doğal (kanonik) epimorfizma** denir.

Tanım 2.2.22. M modül olmak üzere $g(m) = m$ ile tanımlı $g : M \to M$ fonksiyonu R-modül izomorfizmasıdır. Bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** adı verilir. M den M ye birim homomorfizması $\mathbf{1_M}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.23. $f : M \to N$ ve $g : N \to K$ birer homomorfizma olsun. $gf : M \to K$ bileşke fonksiyonu homomorfizmadır.

Tanım 2.2.24. π : M → N homomorfizma olmak üzere, $\{m \in M \mid \pi(m) = 0\}$ kümesine π homomorfizmasının **çekirdeği** denir ve ***Çek*(π)** ile gösterilir. *Çek*(π) ≤ M alt modülüdür. Diğer taraftan π nin monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Çek(\pi) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesidir.

Teorem 2.2.25. M ve K R-modüller olmak üzere f : M → K epimorfizma olsun. Bu durumda K modülünün alt modülleriyle M modülünün $Çek(f)$ yi kapsayan alt modülleri arasında bire-bir bir eşleme vardır.

Sonuç 2.2.26.

1) M bir modül ve N ≤ M olsun. Bu takdirde M/N bölüm modülünün her alt modülü K, M modülünün N alt modülünü kapsayan alt modülü olmak üzere K/N şeklindedir.
2) M bir modül ve N ≤ M olsun. Bu takdirde N ≤ K ⫋ M olacak şekilde K alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul K/N alt modülünün M/N bölüm modülünde maksimal alt modül olmasıdır.

Tanım 2.2.27. π : M → N homomorfizma olmak üzere, $\{\pi(m) \mid m \in M\}$ kümesine, **M modülünün π altındaki homomorfik görüntüsü** denir ve ***Gör*(π)** yazılışı ile gösterilir. *Gör*(π) ≤ N alt modüldür Diğer taraftan π nin epimorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Gör(\pi) = N$ eşitliğinin gerçekleşmesidir.

π : M → M/N doğal homomorfizması için *Çek*(π) = N olduğu açıktır.

Teorem 2.2.28. Her R-modül bir serbest R-modülün homomorfik görüntüsüdür.

Teorem 2.2.29. (Homomorfizma Teoremi) M ve N modül, f :M → N homomorfizma olsun. Bu takdirde, $M/_{Çek(f)} \cong Gör(f)$ dir. f epimorfizma ise $M/_{Çek(f)} \cong N$ dir.

Teorem 2.2.30. (1. İzomorfizma Teoremi) M modülünün H ve K alt modülleri için $(H + K)/K \leq M/K$ alt modülü olup $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ dır.

Teorem 2.2.31. (2. İzomorfizma Teoremi) $K \leq N \leq M$ modüller olsun. Bu durumda

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.32. P bir modül olsun. Her $f : A \to B$ epimorfizması ve her $g : P \to B$ homomorfizması için $g = f\,h$ olacak şekilde bir $h : P \to A$ homomorfizması var ise, P ye **projektif modül** denir. Diğer bir değişle, tam satırlı her

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \to & 0 \\ & \nwarrow^{h} & \uparrow g & & \\ & & P & & \end{array}$$

diagramı bir h homomorfizması ile değişmeli "üçgene" tamamlanabilirse, P ye **projektif modül** denir.

Önerme 2.2.33.

1) $\{M_j\}_{j\in J}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $M = \oplus_{j\in J} M_j$ modülü projektiftir. Özel olarak M projektif bir modül ise, boştan farklı her J indis kümesi için $M^{(J)}$ projektiftir.
2) M projektif bir modüldür gerek ve yeter koşul M, serbest bir modülün bir direkt toplamına izomorftur.

Teorem 2.2.34. Her serbest *R*-modül projektiftir.

Tanım 2.2.35. I bir modül olsun. Her $f : A \to B$ monomorfizması ve $g : A \to I$ homorfizması için $h \circ f = g$ olacak şekilde bir $h : B \to I$ homomorfizması bulunursa, I ya **injektif modül** denir. Diğer bir değişle, tam satırlı her

$$\begin{array}{ccc} 0 \to A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ I & & \end{array}$$

diagramı bir $h : B \to I$ homomorfizması ile değişmeli "üçgene" tamamlanabilirse, I ya **injektif modül** denir.

Tanım 2.2.36. M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M modülünün sıfırdan farklı her alt modülüyle N alt modülünün kesişimi sıfırdan farklı ise, N alt modülüne M modülünün **büyük (essential) alt modülü** denir ve $\mathbf{N \trianglelefteq M}$ ile gösterilir. Bu takdirde M modülüne N nin **genişlemesi (essential extension)** denir. Eğer N nın M da öz (proper) genişlemesi yok ise N alt modülüne M de **kapalı (closed** veya **complement)** denir. Ayrıca eğer bir monomorfizmanın görüntüsü büyük ise, bu monomorfizmaya **büyük monomorfizma** denir. E injektif bir modül ve $f : M \hookrightarrow E$ büyük (içerme) monomorfizması ise, E injektif bir modülüne M modülünün **injektif bürümü** denir ve bu durum **E(M)** ile gösterilir.

Önerme 2.2.37. Eğer $f : M \to N$ büyük monomorfizma ve K modülü $g : N \to K$ monomorfizması ile birlikte N nin injektif bürümü ise K modülü $g \circ f : M \to K$ monomorfizması ile M nin injektif bürümüdür.

Teorem 2.2.38. Her modülün bir injektif bürümü bulunur ve injektif bürüm izomorfizma hariç tektir.

Önerme 2.2.39. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ nın injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ nın injektif olmasıdır.

Önerme 2.2.40. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde,

1) $\oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ injektif ise, her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ injektiftir,
2) Λ sonlu bir indis kümesi olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$ için E_λ injektif ise, $\oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ injektiftir.

Teorem 2.2.41. (Baer Kriteri) R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $I \subseteq R$ sol ideali için $f : I \to M$ homomorfizmasının $g : R \to M$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir.

Teorem 2.2.42. (Gömülme Teoremi) Her R-modül bir injektif R-modül içine gömülebilirdir.

Teorem 2.2.43. Bir M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin kendisini kapsayan her modülde direkt toplam terimi olmasıdır.

Teorem 2.2.44. Bir R halkası için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) R_R noetheriandır.
2) İnjektif sağ R-modüllerin her direkt toplamı injektiftir.
3) Basit sağ R-modüllerin injektif bürümlerinin her sayılabilir direkt toplamı injektiftir.

Teorem 2.2.45. Bir R halkası için aşağıdaki özellikler birbirine denktir:

1) R sol kalıtsaldır.
2) Her projektif sol R-modülün her bir alt modülü projektiftir.
3) Her injektif sol R-modülün her bir bölüm modülü injektiftir.

Tanım 2.2.46. R halka ve M sıfırdan farklı R-modül olsun. M modülünün aşikar alt modüllerinden başka alt modülü yoksa M ye **basit modül** denir.

K cisim olmak üzere ${}_{K}K$ nın alt modülleri sadece 0 ve K olduğundan ${}_{K}K$ basittir.

Önerme 2.2.47. R bir artinian halka olsun. Bu takdirde sıfırdan farklı her R-modül bir basit alt modüle sahiptir.

Önerme 2.2.48. R halka olmak üzere M basit R-modül olsun. $\{0\}$, M modülünün maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir.

Teorem 2.2.49. M modül ve $N \leq M$ olsun. M nin N alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul M/N bölüm modülünün basit olmasıdır.

Tanım 2.2.50. R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün her alt modülü M de bir direkt toplam terimi ise, M ye **yarı-basit modül** denir.

Basit modül tanımına ve yarı-basit modül tanımına dikkat edilirse 0 alt modülü yarı-basittir fakat basit değildir.

Teorem 2.2.51.

1. M Yarı-basit bir modül olsun. Bu takdirde M modülünün sıfırdan farklı her alt modülü bir basit modül içerir.

2. $M = \sum_{i\in I} M_i$ basit alt modüllerin toplamı ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde;

- $M = N \oplus (\oplus_{i\in J} M_i)$ olacak şekilde $J \subseteq I$ alt kümesi vardır.
- $N \cong \oplus_{i\in K} M_i$ olacak şekilde $K \subseteq I$ alt kümesi vardır.

Teorem 2.2.52. Yarı-basit modüllerin alt modülleri, bölüm modülleri ve direkt toplamları da yarı-basittir.

Tanım 2.2.53. M bir *R*-modül olmak üzere $K \subsetneqq M$ olsun. Eğer $K + L = M$ koşulunu sağlayan M modülünün bir L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M nin **küçük alt modülü** denir ve $\mathbf{K \ll M}$ ile gösterilir.

Her $\{0\} \neq M$ modülünün $\{0\}$ alt modülü küçüktür. $\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$-modülünün sıfırdan başka küçük alt modülü yoktur. Gerçekten $\{0\} \neq n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı alt modülleri $\mathbb{Z}$ de küçük değildir.

Önerme 2.2.54. (Kasch, 1982) M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M/N sonlu üretilmiş ve $N \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir.

Tanım 2.2.55. M ve N birer *R*-modül ve $f : M \to N$ bir epimorfizma olsun. Eğer $çek(f) \ll M$ ise f **epimorfizmasına küçük epimorfizma** denir. P projektif modülüne, $f : P \to M$ küçük epimorfizması ile birlikte M modülünün **projektif örtüsü** denir.

İnjektif bürümlerden farklı olarak projektif örtüler mevcut olmayabilir.

Önerme 2.2.56. $f : M \to N$ epimorfizmasının küçük epimorfizma olması için gerek ve yeter koşul $f \circ h$ epimorfizma olacak şekilde her $h : L \to M$ homomorfizmasının bir epimorfizma olmasıdır.

Tanım 2.2.57. (Wisbauer, 1991) M modül ve N $\leq$ M olsun. M = N + K olacak şekilde bir K alt modülü var ve K bu şarta göre minimal ise, yani N + L = M koşulunu gerçekleyen her L $\leq$ K için L = K ise, K ya M de N nin **bütünleyen(supplement)** denir ve N ye M de **bütünleyene sahiptir** denir.

M modül ve N $\ll$ M olsun. Bu takdirde küçük alt modül tanımından görüleceği üzere M, N alt modülünün bütünleyenidir. Dolayısıyla modülün kendisi sıfırının tek bütünleyenidir.

Önerme 2.2.58. M modül ve U, V $\leq$ M olsun. V alt modülünün U nun M de bütünleyeni olması için gerek ve yeter koşul M = U + V ve (U $\cap$ V) $\ll$ V olmasıdır.

Tanım 2.2.59. *R* tamlık bölgesi ve M bir *R*-modül olsun. R nin sıfırdan farklı en az bir $r \in R$ elemanı için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in$ M elemanına, M nin **burulma elemanı** denir. M nin tüm burulma elemanlarının kümesi,

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists\, r \in R\backslash\{0\} \text{ için } rm = 0\}$$

ile ifade edilir. $0_R \in R$ için $0_R m = 0_M \in$ T(M) olup T(M) $\neq \emptyset$ dir. $m_1, m_2 \in$ T(M) keyfi elemanları için $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R\backslash\{0\}$ elemanları vardır. *R* tamlık bölgesi olduğundan $r_1 r_2 \neq 0$ olup,

$$r_1 r_2(m_1 - m_2) = r_2(r_1 m_1) - r_1(r_2 m_2) = 0$$

eşitliği gereği $m_1 - m_2 \in$ T(M) ve s $\in R$ keyfi elemanlar olsun. $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ olup $r(sm) = s(rm) = 0$ dır. Dolayısıyla $sm \in$ T(M) olup T(M), M nin bir alt modüldür.

Burada *R* nin tamlık bölgesi olma şartı kaldırılırsa T(M), M *R*-modülünün bir alt modülü olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_6$ da $\overline{2}$ ve $\overline{3}$ elemanları burulma elemanı iken bu elemanların toplamı olan $\overline{5}$ burulma elemanı değildir.

Eğer T(M) = M ise M modülüne **burulma modül**; T(M) = 0 ise, M R-modülüne **burulmasız modül** denir.

Önerme 2.2.60. R tamlık bölgesi ve M R-modülü bölünebilir ve burulmasız olsun. Bu takdirde, M injektiftir.

Tanım 2.2.61. A bir R-modül olsun. A nın

$$\{m \in \mathrm{A} : R \text{ nin bazı geniş idealleri için } m\mathrm{I} = 0 \text{ dır.}\}$$

alt kümesi, A nın tekil elemanlarının kümesidir. A nın tekil elemanlarının kümesi $\mathrm{Z}(\mathrm{A})$ ile gösterilir ve A nın **tekil alt modülü** olarak adlandırılır. Tekil alt modüller burulma guruplarının genellemesidir. A modülüne $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = 0$ ise **tekilsiz modül** denir ve eğer $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ ise, **tekil modül** denir. R nin sağ tekil ideali $\mathrm{Z}_R(R) = \mathrm{Z}(R_R)$ dir.

Tekil modüllerin temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

1) A ve B birer modül ve $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir R-modül homomorfizması olsun. Bu durumda $f\big(\mathrm{Z}(\mathrm{A})\big) \subset f(\mathrm{B})$ dir.
2) A, B nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{B})$ dir.
3) A, B nin büyük (esential) alt modülü olsun. Bu durumda B/A tekil modüldür.
4) R sağ tekilsiz halka olsun. Bu durumda $\mathrm{Z}\left(\mathrm{M}/\mathrm{Z(M)}\right) = 0$ dır.

A modülünün ikinci tekil (veya Goldie burulma) alt modülü $\mathrm{Z}_2(\mathrm{A})$, $\mathrm{Z}_2(\mathrm{A})/\mathrm{Z(A)} = \mathrm{Z}\left(\mathrm{A}/\mathrm{Z(A)}\right)$ eşitliği ile tanımlanır. $\mathrm{Z}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ ise A modülüne **Goldie burulma modülü** denir. Eğer R sağ tekilsiz halka ise Goldie burulma modülleri ve

tekil modüller ile çakışır. Goldie burulma teorisinin burulma sınıfı, homomorfik görüntüler, doğrudan toplamlar, uzantıları, alt modülleri ve injektif bürümler altında kapalıdır; burulmasız sınıfı ise alt modüller, doğrudan çarpımlar, uzantılar ve injektif bürümler altında kapalıdır.

3. ÖZ SINIFLAR

Bu bölümde bağıl homolojik cebirin en önemli notasyonlarından olan öz sınıflar ile ilgili tezimizde kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir. (Alizade, Pancar, 1999), (Buchsbaum, 1956), (Cartan, Elinberg, 1956), (Clark, 2006), (Mac Lane, 1963), (Sklyarenko, 1978), (Wisbauer, 1991).

3.1. Kısa Tam Diziler

Tanım 3.1.1. $\{\mathrm{M}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ modüller topluluğundan ve bunların

$$f_n : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_{n-1}$$

homomorfizmalarından oluşan

$$\to \mathrm{M}_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $G\ddot{o}r(f_{n+1}) \subseteq \c{C}ek(f_n)$ ise, bu diziye **kompleks dizi**, $G\ddot{o}r(f_{n+1}) = \c{C}ek(f_n)$ ise **tam dizi** denir.

$0 \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to 0$ şeklindeki tam diziye ise **kısa tam dizi** denir.

Önerme 3.1.2. $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ ve $g : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ homomorfizmaları için $gf = \mathrm{I}_\mathrm{M}$ olsun. Bu takdirde, $\mathrm{N} = G\ddot{o}r(f) \oplus \c{C}ek(\mathrm{g})$ dir.

Teorem 3.1.3. $0 \to \mathrm{A} \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{B} \underset{k}{\overset{\mathrm{g}}{\rightleftarrows}} \mathrm{C} \to 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $hf = \mathrm{I}_\mathrm{A}$ olacak şekilde bir $h : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ homomorfizması vardır;

2) $Gör(f)$, B modülünün direkt toplam terimidir;
3) $gk = \mathrm{I_C}$ olacak şekilde $k : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ R-modül homomorfizması vardır ve $\mathrm{B} \cong \mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$ dir.

Yukarıdaki teoremde verilen denk koşulları sağlayan kısa tam diziye **parçalanabilir kısa tam dizi** denir.

Teorem 3.1.4. Bir K modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

1) K projektiftir.
2) $0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{M} \to \mathrm{K} \to 0$ şeklinde olan her kısa tam dizi parçalanabilirdir.
3) K bir serbest modülün direkt toplam terimidir.

Önerme 3.1.5. (Schanuel's Lemma) P ve P' nün projektif olduğu

$$0 \to \mathrm{K} \xrightarrow{i} \mathrm{P} \xrightarrow{\pi} \mathrm{M} \to 0 \text{ ve } 0 \to \mathrm{K'} \xrightarrow{i'} \mathrm{P'} \xrightarrow{\pi'} \mathrm{M} \to 0$$

kısa tam dizileri verilsin, o zaman $\mathrm{K} \oplus \mathrm{P'} \cong \mathrm{K'} \oplus \mathrm{P}$ izomorfizmi vardır.

3.2. Öz Sınıf

$\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfı R-modül ve R-modül homomorfizmlerinin kısa tam dizilerinin bir sınıfı olsun. Eğer bir

$$\mathbb{E} : 0 \to \mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \xrightarrow{\mathrm{g}} \mathrm{C} \to 0 \qquad (3.1)$$

kısa tam dizisi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfına ait ise, f ye $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**-monomorfizm** ve g ye $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**-epimorfizm** denir. İzomorfizmaya bağlı olarak her $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi bir f monomorfizması ve bir g

epimorfizması ile tek türlü belirlidir. f ve g $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**-öz** ve $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**-öz kısa tam dizi** olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.1. $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (Buchsbaum 1959, Mac Lane 1963, Sklyarenko 1978) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ye **öz sınıf** denir (Buchsbaum anlamında):

1. P-1) Eğer $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ de bir kısa tam dizi ise o zaman $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfı $\mathbb{E}$ ye izomorf olan her kısa tam diziyi içerir.
2. P-2) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfı bütün parçalanan kısa tam dizileri içerir.
3. P-3) Eğer bileşkesi tanımlı ise iki $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmi ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizmi) bileşimi bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmdir ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizmdir).
4. P-4) Eğer f ve g monomorfizmler ve $f \circ g$ bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmi ise, o zaman f bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmidir. Eğer f ve g epimorfizmler ve $f \circ g$ bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizm ise, o zaman g bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizmdir.

$\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfına ait olan $\mathrm{Ext}(\mathrm{C},\mathrm{A})$ nın bütün kısa tam dizilerinin $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}$(C,A) kümesi, $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{C},\mathrm{A})$ genişlemelerinin bir alt grubudur.

Bazı önemli öz sınıf örnekleri verelim:

Değişmeli gruplarda $\mathrm{Saf}_{\mathcal{M}od-\mathbb{Z}}$ öz sınıfı: Eğer bütün n tam sayıları için $\mathrm{A} \cap n\mathrm{B} = n\mathrm{A}$ oluyorsa B nin A alt grubuna **saf alt grup** denir. (3.1) de $G\ddot{o}r(f)$, B nin saf alt grubu olsun. O zaman (3.1) tam dizisine **saf dizi** denir. Saf tam dizilerin $\mathrm{Saf}_{\mathcal{M}od-\mathbb{Z}}$ sınıfı bir öz sınıftır. Bu öz sınıf $\mathrm{Saf}_{\mathcal{M}od-\mathbb{Z}}$ **relative** homolojik cebirinin kökenlerinden birini oluşturur.

R-modüllerin en küçük öz sınıfı $\mathbf{Parçalanan}_{\boldsymbol{\mathcal{M}od-R}}$ olarak tanımlanır, bu sınıf R-modüllerin sadece **parçalanan** kısa tam dizilerini oluşur.

R-modüllerin en büyük öz sınıfı $\mathbf{Abs}_{\boldsymbol{\mathcal{M}od-R}}$ (absolute purity) olarak tanımlanır, bu sınıf R-modüllerin **bütün** kısa tam dizilerinden oluşur.

Bütünleyen$_{\mathcal{M}\mathbf{od}-R}$ sınıfı (3.1) bütün kısa tam dizilerinden oluşur öyleki $G\ddot{o}r(f)$, B nin bir K alt modülünün bütünleyenidir. **Bütünleyen**$_{\mathcal{M}\mathbf{od}-R}$ bir öz sınıftır.

N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer S basit R-modülü için,

$$\mathrm{Hom}(S,M) \rightarrow \mathrm{Hom}(S,M/N) \rightarrow 0$$

tam dizi ise N modülüne M modülünün **neat alt modülü** denir. $G\ddot{o}rf$, B de neat alt modül ise, $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine **neat tam dizi** denir. Tüm neat kısa tam dizilerinin sınıfı $\boldsymbol{\mathcal{N}eat}$ ile gösterilir ve bir öz sınıf oluşturur (Renault, 1964).

R-modüllerin bir öz sınıfı $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ için, eğer içerme monomorfizmi $i_A : A \rightarrow B$, $i_A(a) = a$, $a \in A$, B nin A alt modülü, **B nin $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-alt modülü** olarak adlandırılır, bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmidir ve $\mathbf{A} \leq_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \mathbf{B}$ olarak gösteririz.

R-modüllerin bir öz sınıfı $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ olarak tanımlanır. Bir *R*-modül M eğer $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfındaki bütün kısa tam dizilere göre projektif (injektif) ise yani $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{E})$ ($\mathrm{Hom}(\mathbb{E},M)$) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sınıfındaki her kısa tam dizisi $\mathbb{E}$ için tam ise, o zaman **$\boldsymbol{\mathcal{P}}$-projektif** (**$\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif**) olarak tanımlanır. Bütün $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-projektif ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif) modüller $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ $(\iota(\boldsymbol{\mathcal{P}}))$ olarak adlandırılır. Modüllerin verilen bir $\mathcal{M}$ sınıfı için her bir $M \in \mathcal{M}$ $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-projektif ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif) olan en geniş $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfı $\mathcal{M}$ tarafından **projektif olarak üretilen** (**injektif olarak üretilen**) öz sınıf şeklinde tanımlanır ve $\boldsymbol{\pi^{-1}}(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ $(\iota^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{P}}))$ şeklinde gösterilir.

A ve C *R*-modülleri verilmiş olsun. C ile biten (3.1) formundaki her kısa tam dizisi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfında ise, C modülüne, **$\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektif** denir. Eğer A ile başlayan (3.1) formunun her kısa tam dizisi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfında ise, A modülüne, **$\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektif** denir.

Eğer her *R*-modül M için bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-projektif P (bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif I) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizmi $P \rightarrow M$ ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmi $M \rightarrow I$) ile birlikte varsa o zaman *R*-modüllerin bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfı **yeterli projektiflere (yeterli injektiflere) sahiptir** denir. Ayrıca

R-modüllerin bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfı yeterli projektiflere (yeterli injektiflere) sahip ise, bu öz sınıf **projektif öz sınıf** (**injektif öz sınıf**) olarak adlandırılır.

Bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfı ve R-modüller A, C için A ile başlayan ve C ile biten $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ deki bütün kısa tam dizilerin denk sınıfları yani (3.1) formunun $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ deki bir kısa tam dizisi $\mathbf{Ext}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\mathbf{(C,A)}$ olarak veya sadece $\mathbf{Ext}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\mathbf{(C,A)}$ ile gösterilir. $\mathrm{Ext}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$(C,A), Ext_R(C,A) nin bir altgrubu haline gelir ve bir bifunktor $\mathrm{Ext}^1_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} : \mathcal{M}\text{od-}R \times \mathcal{M}\text{od-}R \to \mathcal{A}b$ funktoru Ext^1_R funktorunun bir alt funktorundan elde edilir(Maclane,1963, bölüm 12, syf4-5).

A ve C, birer R-modül olsunlar. $\mathbb{E} \in \mathrm{Ext}_R$(C,A), $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi Ext_R(C,A) grubunun bir elemanı demektir, yani $\mathbb{E}$ nin A da başlayıp C de biten R-modüllerinin bir kısa tam dizisi olduğu anlamına gelir. Eğer R halkası belirli ise, Ext_R(C,A) nın yerine $\mathrm{Ext}(\mathrm{C},\mathrm{A})$ yazacağız.

Bir öz sınıf oluşturmanın en etkili yolu funktorları kullanmaktır. T(M, B), bir kategoriden alınan M nesnesine bağlı olan toplamsal kovariant veya kontravariant sağdan ya da soldan tam bir funktor olsun. $\mathcal{M}$ bu kategorinin nesnelerinden oluşan bir sınıf olsun. $t^{-1}(\mathcal{M})$ ile, her M $\in \mathcal{M}$ için T(M, $\mathbb{E}$) dizisinin tam olmasını sağlayan tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerin oluşturduğu sınıf olsun.

Lemma 3.2.2. $\boldsymbol{\mathcal{P}} = t^{-1}(\mathcal{M})$ bir öz sınıftır.

$t(\boldsymbol{\mathcal{P}})$, her $\mathbb{E} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ için, T(M, $\mathbb{E}$) dizisinin tam olmasını sağlayan M nesnelerinin sınıfı olsun.

Lemma 3.2.3. $\boldsymbol{\mathcal{P}} \subseteq t^{-1}\big(t(\boldsymbol{\mathcal{P}})\big)$, $\mathcal{M} \subseteq t\big(t^{-1}(\mathcal{M})\big)$, $t(\boldsymbol{\mathcal{P}}) = t\Big(t^{-1}\big(t(\boldsymbol{\mathcal{P}})\big)\Big)$ ve $t^{-1}(\mathcal{M}) = t^{-1}\Big(t\big(t^{-1}(\mathcal{M})\big)\Big)$ ilişkilerine ve ayrıca $t^{-1}(\mathcal{M})$ ve $t(\boldsymbol{\mathcal{P}})$ yapısının sınıfları arasında bir birebir ve örten ilişkiye de sahibiz.

$\mathcal{E}$, kısa tam dizilerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{E}$ yi içeren en küçük öz sınıf, $\mathcal{E}$ tarafından **üretilen** olarak tanımlanır ve $\langle\mathcal{E}\rangle$ şeklinde gösterilir (Pancar, 1997).

Kısa tam dizilerin bir $\mathcal{E}$ sınıfı için öz sınıfların herhangi bir ailesinin kesişimi öz olduğu için,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \bigcap \{\mathcal{P} : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P};\ \mathcal{P} \text{ bir öz sınıftır}\} \text{ dir.}$$

3.3. Bir Öz Sınıfa Göre Projektif, İnjektif, Eşprojektif Ve Eşinjektif Modüller

R-modüllerin ve *R*-modül homomorfizmlerinin $\mathbb{E} : 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ bir kısa tam dizisini alalım.

Verilen bir *R*-modül M için, eğer aşağıdaki eşdeğer koşullardan herhangi biri geçerliyse $\mathbb{E}$ **kısa tam dizisine göre projektiftir** veya **g epimorfizmine göre projektiftir** denir:

1. İlk satırın $\mathbb{E}$ olduğu ve $\gamma : M \to C$ in bir *R*-modül homomorfizmi olduğu her diyagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{E}: & 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to 0 \\ & & & & \acute{\gamma} \searrow & \uparrow & & \uparrow \gamma & \\ & & & & & M & & & \end{array}$$

   $\acute{\gamma} : M \to B$ bir *R*-modül homomorfizmi seçerek bir değişmeli diagramın içine gömülebilir; yani $\gamma : M \to C$ her modül homomorfizmi için bir tane $\acute{\gamma} : M \to B$ homomorfizmi vardır, öyle ki $g \circ \acute{\gamma} = \gamma$ dir.
2. $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{E}) : 0 \to \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M,C) \to 0$ dizisi tamdır.

Verilen bir *R*-modül M için, eğer aşağıdaki eşdeğer koşullardan herhangi biri geçerliyse $\mathbb{E}$ **kısa tam dizisine göre injektiftir** veya f **monomorfizmine göre injektiftir** denir:

1. İlk satırın $\mathbb{E}$ olduğu ve $\alpha : A \to M$ in bir *R*-modül homomorfizmi olduğu her diyagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{E}: 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \swarrow & \nearrow {\scriptstyle\acute{\alpha}} & & & & \\ & & M & & & & & & \end{array}$$

   $\acute{\alpha} : B \to M$ bir *R*-modül homomorfizmi seçerek bir değişmeli diagramın içine gömülebilir; yani $\alpha : A \to M$ her modül homomorfizmi için bir tane $\acute{\alpha} : B \to M$ homomorfizmi vardır öyle ki $\acute{\alpha} \circ f = \alpha$ dir.
2. $\mathrm{Hom}(\mathbb{E},M) : 0 \to \mathrm{Hom}(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A,M) \to 0$ dizisi tamdır.

$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}$ funktorunu kullanarak bir $\mathcal{P}$ öz sınıfın $\mathcal{P}$-projektifleri, $\mathcal{P}$-injektifleri, $\mathcal{P}$-eşprojektifleri, $\mathcal{P}$-eşinjektifleri tanımlanabilir.

1.Bir *R*-modül C, $\mathcal{P}$**-projektiftir** gerek ve yeter koşul
bütün *R*-modül A için $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A) = 0$ dır.

2.Bir *R*-modül C, $\mathcal{P}$**-eşprojektiftir** gerek ve yeter koşul
bütün *R*-modül A için $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A) = \mathrm{Ext}_{R}(C,A)$ dır.

3.Bir *R*-modül A, $\mathcal{P}$**-injektiftir** gerek ve yeter koşul
bütün *R*-modül C için $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A) = 0$ dır.

4.Bir *R*-modül A, $\mathcal{P}$**-eşinjektiftir** gerek ve yeter koşul
bütün *R*-modül C için $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A) = \mathrm{Ext}_{R}(C,A)$ dır.

Aşağıdaki önermeler $\mathcal{E}$ tarafından üretilen öz sınıf $\langle\mathcal{E}\rangle$ e göre ve kısa tam dizilerin bir sınıfı $\mathcal{E}$ ye göre projektif (injektif) modüller arasındaki ilişkiyi verir.

Önerme 3.3.1. (Pancar, 1997, Propositions 2.3, Proposition 2.4)

1) $\pi(\mathcal{E}) = \pi(\langle\mathcal{E}\rangle)$
2) $\iota(\mathcal{E}) = \iota(\langle\mathcal{E}\rangle)$

Önerme 3.3.2. (Misina, Skornjakov, 1960, Proposition 1.9, Proposition 1.4) Eğer $0 \to M \to N \to K \to 0$ kısa tam dizisinde M ve K modülleri $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektif ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektif) ise o zaman N, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektiftir ($\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektiftir).

Önerme 3.3.3. (Misina, Skornjakov, 1960, Proposition 1.12) Bir R-modül M, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektiftir gerek ve yeter koşul bir projektif R-modül P den M ye bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-epimorfizmi vardır.

Sonuç 3.3.4. (Misina, Skornjakov, 1960, Proposition 1.13)
Eğer $0 \to A \to B \to C \to 0$ bir $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfında bir kısa tam dizi ve B $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektif ise, o zaman C de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektiftir.

Önerme 3.3.5. (Misina, Skornjakov, 1960, Proposition 1.7) Bir R-modül N, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektiftir gerek ve yeter koşul N den bir injektif modül I ya $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-monomorfizmi vardır.

Sonuç 3.3.6. (Misina, Skornjakov, 1960, Proposition 1.8)
Eğer $0 \to A \to B \to C \to 0$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ öz sınıfının elemanı ve B, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektif ise o zaman A da $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektiftir.

3.4. İnjektif Olarak Üretilen Öz sınıflar

$\mathcal{M}$, R-modüllerin bir sınıfı olsun. Her $M \in \mathcal{M}$ için, $\mathrm{Hom}(\mathbb{E}, M)$ yi tam yapan tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerinin sınıfı $\iota^{-1}(\mathcal{M})$ olarak tanımlanır, yani

$$\iota^{-1}(\mathcal{M}) = \{\mathbb{E} \in \mathcal{A}bs_{\mathcal{M}od-R} \mid \mathrm{Hom}(\mathbb{E}, M) \text{ bütün } M \in \mathcal{M} \text{ için tamdır}\} \text{ dir.}$$

Eğer $T(\cdot, M) = \mathrm{Hom}(\cdot, M)$ alırsak $\iota^{-1}(\mathcal{M})$, $\iota^{-1}(\mathcal{M})$ bir öz sınıf olduğu Lemma 3.2.2. den elde edilir. Aslında $\iota^{-1}(\mathcal{M})$, her bir $M \in \mathcal{M}$ sınıfının $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif olduğu en büyük öz sınıftır. $\iota^{-1}(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ tarafından **injektif olarak üretilen** öz sınıf olarak adlandırılır.

Teorem 3.4.1. (Sklyarenko, 1978, Teorem 3.2) $\mathcal{M}$ modüllerin bir sınıfı olsun. Şu şekilde tanımlanan $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sınıfını düşünelim: Bütün $M \in \mathcal{M}$ için ve bütün $f : A \to M$ homomorfizmleri için,

$$\mathrm{Ext}^1_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \bigcap_{M,f} \mathrm{Ker}\,\{f_1 : \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, M)\}$$

dir. O zaman $\mathrm{Ext}_{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(C, A)$ ye ait kısa tam dizileri $0 \to A \to X \to C \to 0$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sınıfı $\iota^{-1}(\mathcal{M})$ ile denk gelir ve bir öz sınıf oluşturur.

3.5. İnjektif Olarak Üretilen Bir Öz Sınıfa Göre Eşinjektif ve Eşprojektif Modüller

Bu bölüm boyunca $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, R-modüllerin bir öz sınıfı olsun.

Önerme 3.5.1. (Sklyarenko, 1978, Proposition 9.1) Bütün $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-projektif modüllerin sınıfı ve bütün $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektif modüllerin sınıfının kesişimi bütün projektif R-modüllerin sınıfıdır.

Önerme 3.5.2. (Sklyarenko, 1978, Proposition 9.2) Bütün $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif modüllerin sınıfı ve bütün $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşinjektif modüllerin sınıfının kesişimi bütün injektif *R*-modüllerin sınıfıdır.

Önerme 3.5.3. (Sklyarenko, 1978, Proposition 9.4) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, injektif olarak üretilmiş olsun. Bir C modülü $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektiftir gerek ve yeter koşul, her $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-injektif J için $\mathrm{Ext}_R^1(C,J) = 0$ dır.

Bundan başka:

Önerme 3.5.4. Eğer modüllerin bir $\mathcal{M}$ sınıfı için $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \iota^{-1}(\mathcal{M})$ olsun. Bir C modülü $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-eşprojektiftir gerek ve yeter koşul, her $M \in \mathcal{M}$ için $\mathrm{Ext}_R^1(C,M) = 0$ dır.

Tanım 3.5.5. $\mathcal{J}$ ve $\mathcal{S}$, herhangi sol R-modüllerin sınıfı olsun. $\mathcal{S}$ den alınan tüm modüllerin eşprojektif olduğu en küçük $\overline{k}(\mathcal{S})$ öz sınıfına $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **tarafından eşprojektif üretilmiş öz sınıf** denir. $\mathcal{J}$ den alınan tüm modüller eşinjektif olduğu için en küçük $\underline{k}(\mathcal{J})$ öz sınıfına $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ **tarafından eşinjektif üretilmiş öz sınıf** denir. $\overline{k}(\mathcal{S})$ ve $\underline{k}(\mathcal{J})$ sınıfları özel durumlarda Kepka (1973) da tanımlanmış ve incelenmiştir, bundan dolayı biz bu sınıflara **Kepka sınıfları** diyeceğiz. (Misina, Skornyakov, 1969) de not edildiği gibi herhangi öz sınıflar ailesinin kesişimi de öz sınıftır, dolayısıyla yukarıdaki sınıflar iyi tanımlıdır.

4. TEKİL VE TEKİLSİZ MODÜLLER İLE ÜRETİLEN BAZI ÖZ SINIFLAR

4.1. S-Bütünleyen Alt Modüller

Bu bölümde Goldie burulma modülleri sınıfı tarafından eşinjektif olarak üretilen öz sınıf incelenecektir. Bu öz sınıf ve altinjektif bölgeleri yardımıyla, tekilsiz modüllerin injektifliği incelenecektir. Bu alt bölümde verilen sonuçların bazıları Durğun (2019) ve Durğun (2020) makalelerinden alınmıştır.

M bir sağ R-modül olsun. N, M nin bir alt modülü olsun. Bu konuda yapılmış olan çalışmalarla bütünlük sağlanması için, eğer $Z_2(N) = N$ ise N ye M nin S-bütünleyen alt modülü denir. S-bütünleyen alt modüller yardımıyla tanımlanan S-bütünleyen kısa tam dizilerin sınıfı olan **S-Büt** sınıfının bir öz sınıf olmadığı gösterilmiştir. **S-Büt** sınıfını içeren en küçük öz sınıf $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ belirlenmiş ve bu öz sınıfın elemanlarının yapısı S-bütünleyen alt modüller aracılığı ile belirlenmiştir. $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ öz sınıfının bilinen bazı öz sınıflar ile aynı olduğu durumdaki halka yapıları belirlenmiştir.

Tanım 4.1.1. X bir modül ve Y de Xin bir alt modülü olsun. Eğer Y Goldie burulma modül yani $Z_2(Y) = Y$ ise Y alt modülüne X in S-bütünleyen alt modülü denir.

$$\mathbb{E} : 0 \to Y \xrightarrow{f} X \to Z \to 0$$

bir kısa tam dizisi olsun. Eğer $f(Y)$, X in S-bütünleyen alt modülü ise $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine **S-bütünleyen kısa tam** dizi denir. **S-Büt** ile S-bütünleyen kısa tam dizilerin sınıfını göstereceğiz. Aşağıdaki örnekte, **S-Büt** sınıfının bir öz sınıf olmadığını gösterdik.

Örnek. X bir modül ve $Z_2(X) \neq X$ olsun.

Şimdi $0 \to X \to X \to 0$ parçalanan kısa tam dizisini düşünelim. P-2) şartından ötürü bu kısa tam dizi tüm öz sınıflara aittir. Ama X Goldie burulma modülü olmadığından bu kısa tam dizi **S-Büt** sınıfına ait değildir. Buradan, **S-Büt** sınıfı bir öz sınıf belirtmediği sonucunu elde ederiz.

Teorem 4.1.2. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) **S-Büt** sınıfı bir öz sınıftır.
2) Her sağ R-modül X için, $Z_2(X) = X$ dir.
3) **Abs = S-Büt**
4) R sağ Goldie burulma halkasıdır.

İspat. 1) ⇒ 2) X, bir sağ R-modül olsun. $0 \to X \to X \to 0$ kısa tam dizisi parçalanan bir kısa tam dizidir. Kabulümüzden bu dizi **S-Büt** sınıfına aittir. Yani $Z_2(X) = X$ dir.
2) ⇒4), 3) ⇒ 1) ve 2) ⇒ 3) açıkça görülmektedir.
4) ⇒ 2) X sağ R-modül olsun. $X \cong \pi(E)$ olacak şekilde E serbest sağ R-modül ve $\pi : E \to X$ örten homomorfizması vardır (Kasch, 1982). Dahası Goldie burulma modülleri direkt toplam altında kapalı olduklarından her serbest sağ R-modül, Goldie burulma modülüdür. Ayrıca Goldie burulma modüllerinin epimorfik görüntüleri de Goldie burulma modülü olduğundan $Z_2(X) = X$ bulunur. □

Kepka (1973), bir monomorfizma sınıfı üzerine bazı koşullar koyarak yeni öz sınıflar oluşturmuştur. Bizde bu çalışmamızda genişletilmiş S-bütünleyen alt modülleri oluşturmak adına Kepka (1973) dan faydalanacağız.

Tanım 4.1.3. X bir modül ve Y de X in bir alt modülü olsun. Eğer $T + Y = X$ ve $T \cap Y$ Goldie burulma olacak şekilde X in T alt modülü varsa Y ye X in **genişletilmiş S-bütünleyen alt modülü** denir. S-bütünleyen alt modüller, genişletilmiş

S-bütünleyen alt modüllerdir. $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ ile tüm genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizilerin sınıfı gösterilecektir. (Kepka, 1973, Theorem 3.1) den $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ sınıfı bir öz sınıftır.

Şimdi sıradaki teorem ile $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ öz sınıfının **S-Büt** sınıfı tarafından üretilen en küçük öz sınıf olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 4.1.4. $\overline{\mathbf{S-Büt}} = \langle \mathbf{S-Büt} \rangle$.

İspat. **S-Büt** sınıfını içeren en küçük öz sınıf $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ dir. $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ bir öz sınıf ve **S-Büt** $\subseteq \overline{\mathbf{S-Büt}}$ olduğundan $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle \subseteq \overline{\mathbf{S-Büt}}$ dir.

Şimdi $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle \supseteq \overline{\mathbf{S-Büt}}$ olduğunu gösterelim.

$\mathbb{E} : 0 \to Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ bir genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizisi olsun. Bu durumda $T + Y = X$ ve $T \cap Y$ Goldie burulma modülü olacak şekilde X in bir T alt modülü vardır. Genellemeyi bozmadan, α nın bir içerme homomorfizmi olduğunu kabul edebilirz.

Şimdi aşağıdaki değişmeli diagramı düşünürsek;

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & T \cap X & = & T \cap X & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbb{E}: 0 & \to & Y & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\beta} & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \| & & \\
0 & \to & Y/(T \cap X) & \to & X/(T \cap X) & \xrightarrow{\gamma} & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

γ bir **parçalanan**-epimorfizmadır. O zaman γ bir $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ epimorfizmadır. T ∩ X Goldie burulma modülü olduğundan θ bir $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ epimorfizmasıdır. Dolayısıyla $\beta = \gamma\alpha$ bir epimorfizmadır. Diğer taraftan öz, sınıfların P-3) özelliğinden dolayı $\beta, \langle \mathbf{S-Büt} \rangle$ epimorfizmasıdır. Yani $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi $\mathbf{S-Büt}$ sınıfını içeren en küçük öz sınıfın elemanıdır. Bu da $\langle \mathbf{S-Büt} \rangle \supseteq \overline{\mathbf{S-Büt}}$ olduğunu göstermektedir. □

Bir sonraki sonuç ile, $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ öz sınıfının, tekilsiz modüller sınıfı tarafından injektif olarak üretilen bir öz sınıf olduğunu gösterdik.

Teorem 4.1.5. $\mathbb{E}: Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} {}^{X}/_{Y} \to 0$ dizisi genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizisi olması için gerek ve yeter koşul her A tekilsiz modülü için Hom(𝔼,A) nın tam olmasıdır.

İspat: (⇐) Aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & Z_2(Y) & = & Z_2(Y) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbb{E}: & 0 \to & Y & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\beta} & {}^{X}/_{Y} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \| & & \\
\alpha_*(\mathbb{E}): & 0 \to & {}^{Y}/_{Z_2(Y)} & \to & {}^{X}/_{Z_2(Y)} & \xrightarrow{\theta} & {}^{X}/_{Y} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

${}^{Y}/_{Z_2(Y)}$ tekilsiz modül olduğundan, $\alpha_*(\mathbb{E})$ parçalanan kısa tam dizidir. Yani,

$$X/Z_2(Y) \cong \left(Y/Z_2(Y)\right) \oplus \left(K/Z_2(Y)\right)$$

olacak şekilde bir $Z_2(Y) \subseteq K$ ve $K \subseteq Y$ vardır. Buradan kolaylıkla $X \cong Y + K$ ve $Y \cap K = Z_2(Y)$ olduğu görülmektedir. Yani $\mathbb{E}$, genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizisidir.

$(\Rightarrow)$ $\mathbb{E}: 0 \to Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X/Y \to 0$ dizisi genişletilmiş S-bütünleyen dizisi ve A tekilsiz modül olmak üzere $\gamma: Y \to A$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $f_*(\mathbb{E}): 0 \to A \to Z \to X/Y \to 0$ kısa tam dizisi genişletilmiş S-bütünleyen dizisidir. O halde $Z = A + L$ ve $A \cap L$ Goldie burulma modülü olacak şekilde bir $L \leq Z$ vardır. Ama $A \cap L \leq A$ ve A tekilsiz modül olduğundan, $A \cap L$ tekilsiz modüldür. O zaman $A \cap L = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla buradan $A \oplus L = Z$ bulunur. Şimdi aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E}: & 0 & \to & Y & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\beta} & X/Y & \to & 0 \\
 & & & \gamma\downarrow & & \downarrow\theta & & \| & & \\
\alpha_*(\mathbb{E}): & 0 & \to & A & \xrightarrow{i} & Z & \to & X/Y & \to & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Burada $\alpha_*(\mathbb{E})$ parçalanan kısa tam dizi olduğundan, $(i)(i)^{-1} = 1_A$ olacak şekilde $(i)^{-1}: Z \to A$ homomorfizmi vardır. O zaman $((i)^{-1}\theta)\alpha = \gamma$ olacak şekilde $(i)^{-1}\theta: X \to A$ homomorfizmi bulunmuş oldu. □

Bir sonraki sonuç ile, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$ öz sınıfının, Goldie burulma modüller sınıfı tarafından eşinjektif olarak üretilen bir öz sınıf olduğunu gösterdik.

Teorem 4.1.6. K, Goldie burulma modüllerinin bir sınıfı olmak üzere,

$$\overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K}) = \overline{\mathbf{S-Büt}}\,.$$

İspat. $\overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K}) \subset \overline{\mathbf{S-Büt}}$ olduğu açıktır, çünkü her Goldie burulma modülü $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ – eşinjektiftir.

Şimdi $\overline{\mathbf{S-Büt}} \subseteq \overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K})$ olduğunu gösterelim:

$$\mathbb{E}: \ 0 \ \rightarrow \ \ Y \ \xrightarrow{\alpha} \ X \ \xrightarrow{\beta} \ X/_Y \ \rightarrow \ 0$$

dizisi genişletilmiş S-bütünleyen olsun. Bu durumda $Y + T = X$ ve $Y \cap T$ Goldie burulma modülü olacak şekilde bir $T \leq X$ vardır. Teorem 4.1.4. ispatındaki diagramdan $Y \cap T$ Goldie burulma modülü olduğu için θ bir $\overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K})$-epimorfizmdir. γ parçalanan-epimorfizma olduğundan γ da $\overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K})$-epimorfizmadır. Öz sınıfların P-3) özelliğinden dolayı $\beta = \gamma\theta$ bir $\overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K})$-epimorfizmidir. Yani $\overline{\mathbf{S-Büt}} \subseteq \overline{\boldsymbol{k}}(\mathbf{K})$ olduğu bulunmuş olur. □

Her tekil sağ R-modülün injektif olduğu R-halkasına **SI-halkası** denir ve $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ öz sınıfının en küçük öz sınıfa eşit olduğu halkaların SI-halkaları olduğunu bulduk.

Sonuç 4.1.7. R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) Her Goldie burulma modülü sağ R-modül injektiftir.
2) R sağ SI-halkasıdır.
3) $\overline{\mathbf{S-Büt}}$ = **Parçalanandır**.

İspat. 1) ⇒ 2) ve 2) ⇒ 1) açıktır.

1) ⇒ 3) Teorem 4.1.6. dan elde edilir.

3) ⇒ 1) K Goldie burulma modülü olsun.

$$\mathbb{E} : 0 \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} \mathbf{E}(K) \xrightarrow{\beta} X \rightarrow 0$$

kısa tam dizisini düşünecek olursak; K Goldie burulma modülü olduğundan $\mathbb{E}$, genişletilmiş S-bütünleyen dizisidir. Kabulümüzden $\mathbb{E}$, parçalanan kısa tam dizi olur. Bu durumda K, **E**(K) modülünün direkt toplam terimine izomorftur. Buradan K, injektif modül olduğu elde edilir. □

Tanım 4.1.8. Bir X modülü ile başlayan her kısa tam dizi genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizi ise X e $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-eşinjektif modül** adı verilir.

Bir X modülü $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif olur gerek ve yeter koşul X, **E**(X) de genişletilmiş S-bütünleyendir gerek ve yeter koşul X, herhangi bir $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modülde, genişletilmiş S-bütünleyendir.

(Mishina, Skornyakov, 1969, Proposition 1.7-1.8) den, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüller; genişlemeler ve genişletilmiş S-bütünleyen alt modüller altında kapalıdırlar.

Not. İnjektif modüller ve Goldie burulma modülleri $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerin aşikar örnekleridir.

Aşağıdaki sonuçta ne zaman $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerin bölüm modüllerinin $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerin bölüm modüllerinin $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif olacağı düşünüldü.

Teorem 4.1.9. $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüller bölüm modülleri altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul injektif modüllerin bölüm modülleri $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüldür.

İspat. (⇒) Açık.

(⇐) U, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modül ve K ≤ U olsun.

Aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & K & = & K & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{E}: & 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & \mathbf{E}(U) & \overset{gf}{\rightarrow} & \mathbf{E}(U)/_{U} & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow f & & \| & & \\ \mathbb{E}_1: & 0 & \rightarrow & U/_{K} & \rightarrow & \mathbf{E}(U)/_{K} & \overset{g}{\rightarrow} & \mathbf{E}(U)/_{U} & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

U, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olduğundan U, **E**(U) da genişletilmiş S-bütünleyen alt modüldür. Öz sınıf özelliklerinden $U/_K$, $\mathbf{E}(U)/_K$ da genişletilmiş S-bütünleyen alt modüldür. Kabulümüzden $\mathbf{E}(U)/_K$, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüldür. (Mishina, Skornyakov, 1969, proposition 1.8) den $U/_K$, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüldür. □

Sonuç 4.1.10. $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüller sağ kalıtsal halkalar üzerinde bölüm modüllerine göre kapalıdır.

Önerme 4.1.11. $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$**-**eşinjektif modüller büyük genişlemeler altında kapalıdır.

İspat. N, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül ve T, N nin büyük genişlemesi olsun. N, T nin büyük alt modülü olduğundan $^{T}/_{N}$ tekil modüldür. Tekil modüller $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif ve $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerinin genişlemesi, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olduğundan T, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüldür. □

Önerme 4.1.12. Tekilsiz $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüller injektiftir.

İspat. U injektif olmayan tekilsiz $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olsun. (Mishina, Skornyakov, 1969, Proposition 1.8) den $U + N_1 = \mathbf{E}(U)$ ve $U \cap N_1$, Goldie burulma modül olacak şekilde $\mathbf{E}(U)$ nun bir N_1 alt modülü vardır. Tekilsiz modüller injektif bürüme göre kapalı olduğundan ve U tekilsiz modül olduğundan dolayı $\mathbf{E}(U)$ da tekilsizdir. Bu durumda $U \cap N_1 = 0$ olur. Ama bu durum U nun $\mathbf{E}(U)$ da büyük olması ile çelişir. Dolayısıyla U injektif modül olmalıdır. □

I, *R* nin sağ ideali olsun. Eğer *R* nin her K ideali $(1-e)K \subseteq I$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in K$ var ise *R* ye **sağ I-yarımükemmel halka** denir (Yousif, Zhou,2002). *R*, sağ $Z_2(R_R)$-yarımükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul *R* sağ yarımükemmel ve $J(R) = Z_2(R_R)$ olmasıdır (Nicholson, Zhou, 2005, Corollary 37).

Önerme 4.1.13. Her modülün $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olması için gerek ve yeter koşul *R* nin sağ $Z_2(R_R)$-yarımükemmel modül olmasıdır.

İspat. (⇒) Önerme 4.1.12. ten her tekilsiz sağ *R*-modül injektiftir. Bu durumda (Nicholson, Zhou, 2005, Theorem 49) dan *R*, sağ $Z_2(R_R)$-yarımükemmel halkadır.
(⇐) Her tekilsiz sağ *R*-modül injektif ise bu durumda her kısa tam dizi genişletilmiş S-bütünleyen kısa tam dizidir. Yani her sağ *R*-modül $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektiftir. □

Teorem 4.1.14. *R*, sağ SI-halka olması için gerek ve yeter koşul $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüller injektif olmasıdır.

İspat. (⇐) Her tekil modül $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olduğundan açıktır.

(⇒) W, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olsun. Bu durumda $W + U = \mathbf{E}(W)$ ve $U \cap W$ Goldie burulma modülü olacak şekilde $U \subseteq \mathbf{E}(W)$ alt modülü vardır.

Şimdi aşağıdaki değişmeli diagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & W\cap U & = & W\cap U & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbb{E}: & 0 \to & W & \to & \mathbf{E}(W) & \overset{gf}{\to} & \mathbf{E}(W)/_{W} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \| & & \\
\mathbb{E}_1: & 0 \to & W/_{(W\cap U)} & \to & \mathbf{E}(W)/_{(W\cap U)} & \overset{g}{\to} & \mathbf{E}(W)/_{W} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Kabulümüzden, $W \cap U$ injektif olduğundan $\mathbf{E}(W)$ nun direkt bileşenidir. Dahası; $W/_{(W\cap U)}$, $\mathbf{E}(W)/_{(W\cap U)}$ nin direkt bileşenidir. Bu da W nın $\mathbf{E}(W)$ nin direkt bileşeni olduğunu gösterir ki bu bir çelişkidir. □

Eğer *R* sağ veya sol artinian ise ve sağ veya sol self-injective ise bu *R* halkası bir **quasi-Forbenius** olarak adlandırılır kısaca **QF-halka** da denir.

R, QF halka olması için gerek ve yeter koşul projektif modüllerin injektif olmasıdır.

Sıradaki sonuçta bir projektif modülün ne zaman $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olduğunu göstereceğiz.

Önerme 4.1.15. M_1, M_2 modüller ve $f : M_2 \to M_1$ monomorfizm olsun. Eğer M_2, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül ise bu durumda M_2 nin her tekilsiz bölüm modülü, M_1 in tekilsiz bir bölüm modülüne izomorftur. Özellikle $M_2/Z_2(M_2)$ bir injektif modülün bölüm modülüdür.

İspat. Kabul edelim ki F, M_2 nin tekilsiz bölüm modülü ve $\pi : M_2 \to F$ bir epimorfizm olsun. M_2, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif olduğundan

$$\mathrm{Hom}(M_1, F) \to \mathrm{Hom}(M_2, F) \to 0$$

tamdır ve bu sebeple $gf = \pi$ olacak şekilde bir $g : M_1 \to F$ homomorfizmi vardır. Bu durumda g epimorfizmdir ve

$$M_1/\text{Çek}(g) \cong g(M_1) = M_2$$

tekilsiz modüldür.

$f : M_2 \to \mathbf{E}(M_2)$ içerme morfizmini kullanarak ve $F = M_2/Z_2(M_2)$ alarak teoremin diğer kısmının ifadesini gösterebiliriz. □

Teorem 4.1.16. W projektif bir modül olsun. W, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olması için gerek ve yeter koşul $W/Z_2(W)$ nin injektif modül olmasıdır.

İspat. (⇒) W, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olsun. Bu durumda Önerme 4.1.15. den $W/Z_2(W)$ bir injektif modülün bölüm modülüdür. Bu injektif modüle E diyelim.

Şimdi $0 \to Çek(\alpha) \to E \xrightarrow{\alpha} W/Z_2(W) \to 0$ kısa tam dizisini düşünelim. $W/Z_2(W)$ tekilsiz olduğundan (Sandomierski, 1968, Lemma 2.3.) $Çek(\alpha)$, E de

kapalı alt modüldür. Bu durumda bu kısa tam dizi parçalanır. Dolayısıyla $^{W}/_{Z_2(W)}$, E nin bir direkt bileşenine (izomorf) olarak bir injektif modüldür.

(⇐) Kabul edelim ki $^{W}/_{Z_2(W)}$ injektif bir modül olsun.

$$\mathbb{E} : 0 \to W \xrightarrow{g} E \to A \to 0$$

E injektif modülü ile birlikte bir kısa tam dizi ve H bir tekilsiz modül olmak üzere $f : W \to H$ bir homomorfizm olsun. Genelliği kaybetmeden f yi epimorfizm olarak alabiliriz. Biz $hg = f$ olacak şekilde bir $h : E \to H$ homomorfizminin var olduğunu iddia ediyoruz. H tekilsiz modül olduğundan, $f(W) = H$, $^{W}/_{Z_2(W)}$ nin bölüm modülüdür. O zaman $\pi : {}^{W}/_{Z_2(W)} \to H$ bir epimorfizmi vardır. $^{W}/_{Z_2(W)}$ injektif ve H tekilsiz modül olduğundan π parçalanan bir epimorfizmdir ve bu da H nin injektif modül olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine göre her tekilsiz modül injektif olduğundan W, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüldür. □

(Sandomierski, 1968, Lemma 2.3) ve Teorem 4.1.16. yı yardımıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.17. Bir P projektif modülü $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektiftir gerek ve yeter koşul P nin her tekilsiz bölüm modülü injektif modüldür.

Teorem 4.1.18. *R* nin sağ $Z_2(R_R)$-yarımükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul projektif modüllerin $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif olmasıdır.

İspat. (⇐) (Nicholson, Zhou, 2005, Theorem 49) dan her tekilsiz sağ R-modülün injektif modül olduğunu göstermemiz yeterlidir. U tekilsiz modül ve $f : T \to U$ epimorfizm ve T serbest modül olsun. Kabulümüzden $\iota : T \to \mathbf{E}(T)$ içerme morfizmi için $\alpha\iota = f$ olacak şekilde $\alpha : \mathbf{E}(T) \to U$ homomorfizmi vardır. U tekilsiz modül

olduğundan ve (Sandomierski, 1968, Lemma 2.3.) den $Çek(\alpha)$, $\mathbf{E}(\mathrm{T})$ de kapalıdır. Ama injektif modüllerin kapalı alt modülleri direkt bileşen olduğundan U injektif modüldür.

(⇒) Sonuç 4.1.17. ve (Nicholson, Zhou, 2005, Theorem 49) dan açıktır. □

4.2. Tekilsiz Modüllerin Altinjektif Bölgeleri

Bu bölümde tekilsiz modüllerin altinjektif bölgeleri incelenmiş ve injektif olmayan tekilsiz modüllerin olası en küçük altinjektif bölgesi belirlenmiştir. Ayrıca, muhtemel en küçük altinjektif bölgesine sahip tekilsiz modüller aracılığı ile bazı halka karakterizasyonları verilmiştir.

Altinjektif Bölgesi, bir modülün injektifliğinin analizinde alternatif bir bakış açısı olarak; iyi bilinen injektiflik kavramına karşıt olarak tanıtılmıştır (Aydoğdu, Lopez-Permouth, 2011).

Tanım 4.2.1. Verilen M ve N modülleri için N nin her K genişlemesi ve her $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ homomorfizması için $\phi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir $\phi : \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ homomorfizması varsa M modülüne **N-altinjektif**tir denir. Bir M modülü için M nin N-altinjektif olduğu tüm modüllerin sınıfına **altinjektif bölgesi** denir ve $\mathfrak{Jn}^{-1}(\mathbf{M})$ ile gösterilir. O zaman

$$\mathfrak{Jn}^{-1}(\mathrm{M}) = \{\, \mathrm{N} \in \mathcal{M}od - R \mid \mathrm{M}, \mathrm{N} - \text{altinjektiftir.} \,\} \text{ dir.}$$

Açıkça görülmektedir ki bir modülün injektif modül olması için gerek ve yeter koşul altinjektif bölgesinin tüm modüllerini içermesidir. İnjektiflik ile ilgili bu yeni perspektif yardımıyla düşünülecek pek çok soru olsa da, ilk olarak altinjektif bölgesine göre en az injektif olan modüller üzerine odaklanılmıştır. Açıktır ki, altinjektif bölgeleri tüm injektif modülleri içermektedir. Bu bakımdan injektifliğe

karşı bir durum olarak, injektif bölgesi sadece injektif modüllerden oluşan modüller düşünülmüştür. Altinjektif bölgesi sadece injektif modüllerden oluşan modüller, fakir (indigent) modüller olarak adlandırılmıştır (Aydoğdu, Lopez-Permouth, 2011).

Lemma 4.2.2. Herhangi M ve N modülleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) M ve N-altinjektiftir.
2) Her φ : N → M homomorfizması ve N ⊴ K olan her K modülü için $\phi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir ϕ : K → M homomorfizması vardır.
3) Her φ : N → M homomorfizması için $\phi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir ϕ : **E**(N) → M homomorfizmi vardır.
4) Her φ : N → M homomorfizması için N nin bir E injektif genişlemesi ve $\phi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir ϕ : E → M homomorfizmi vardır.

İspat. 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) açıktır.

4) ⇒ 1) N ⊆ N' ve φ : N → M homomorfizma olsun. Kabulümüzden N nin bir E injektif genişlemesi ve $\phi|_N = \varphi$ olacak şekilde bir ϕ : E → M homomorfizması vardır. E injektif olduğundan, i : N → E içerme dönüşümü olmak üzere $\psi|_N = i$ olacak şekilde bir ψ : N′ → E homomorfizması vardır. O zaman N′ den M ye giden homomorfizmi $\phi\psi$ alabiliriz. Çünkü $(\phi\psi)|_N = \varphi$ dir. Dolayısıyla N∈ $\mathfrak{Jn}^{-1}$(M) dir.

□

Önerme 4.2.3.

$$\bigcap_{M \in R-\mathcal{M}od} \mathfrak{Jn}^{-1}(M) = \{ A \in \mathcal{M}od - R \mid A \text{ injektiftir.} \}$$

İspat. $N \in \bigcap_{M \in R-\mathcal{M}od} \mathfrak{Jn}^{-1}(M)$ olsun. Bu durumda $N \in \mathfrak{Jn}^{-1}(N)$ dir. O zaman N injektif modüldür. Diğer taraftan, A injektif modül olsun. O halde her $M \in R-\mathcal{M}od$ için $A \in \mathfrak{Jn}^{-1}(M)$ dir. O zaman $A \in \bigcap \mathfrak{Jn}^{-1}(M)$ dir. □

Önerme 4.2.4. Herhangi bir N modülü için, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\prod_{i \in I} M_i$, N-altinjektif olması için gerek ve yeter koşul her bir M_i nin N-altinjektif olmasıdır.
2) $i = 1,2,\dots,n$ için her bir M_i, N-altinjektif ise bu durumda $\oplus_{i=1}^{n} M_i$, N-altinjektiftir.
3) Bir N-altinjektif modülün her direkt bileşeni bir N-altinjektif modüldür. Tersine, eğer N sonlu üretilmiş bir modül ve $M_i, i \in I$, I keyfi indeks kümesinde indekslenmiş N-altinjektif modüllerin bir ailesi ise o zaman $\oplus_{i \in I} M_i$ bir N-altinjektif modüldür.

Tanım 4.2.5. M bir modül olsun. Eğer

$$\mathfrak{Jn}^{-1}(M) = \{ A \in \mathcal{M}od - R \mid A \text{ injektiftir. } \}$$

ise, M ye **fakir (indigent) modül** denir.

Önerme 4.2.6. Eğer bir M modülü fakir ise, keyfi N modülü için $M \oplus N$ fakirdir.
İspat. $A \in \mathfrak{Jn}^{-1}(M \oplus N)$ olsun. Bu durumda Önerme 4.2.4. den $A \in \mathfrak{Jn}^{-1}(M)$ dir. M fakir olduğundan, A injektiftir. Dolayısıyla $M \oplus N$ fakirdir. □

Bir R halkasının, her sağ tekil modülün basit alt modulü var ise, R ye **sağ yarı-basit artinian halkası** denir.

Önerme 4.2.7. Keyfi bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) R yarı-basit artinian halkadır.
2) Her (sıfırdan farklı) R-modülü fakirdir.
3) İnjektif fakir modül vardır.
4) $\{0\}$ bir fakir modüldür.
5) R fakir bir modüle sahiptir ve fakir modüllerin sıfırdan farklı doğrudan bileşenleri yoktur.

Lemma 4.2.8. S, Rad(S) = 0 olan bir modül ve N de Rad(N) = N olan bir modül olsun. Bu durumda S, N-altinjektiftir.

İspat. N maksimal alt modüle sahip olmadığından ve Rad(S) = 0 olduğundan Hom(N, S) = 0 dır. Dolayısıyla S, N-altinjektiftir. □

Sonuç 4.2.9. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir yarı-basit fakir modüle sahiptir.

M bir tekilsiz sağ R-modül olsun. Eğer bir N sağ R-modülü $\overline{\mathbf{S-Bü t}}$-eşinjektif modül ise Teorem 4.1.5 yardımıyla M modülünün, N-altinjektif olduğu kolaylıkla elde edilir. Öyleyse bir tekilsiz modülün olası en küçük altinjektif bölgesi, $\overline{\mathbf{S-Bü t}}$-eşinjektif modüller sınıfıdır.

Önerme 4.2.10. M tekilsiz sağ R-modül olsun. Bir sağ N R-modül için M, N-altinjektif modüldür gerek ve yeter koşul Hom($\mathbf{E}$(N), M) ≅ Hom(N, M) dir.

İspat. M tekilsiz sağ R-modülü verilen bir sağ N R-modül için N-altinjektif olsun.

$$0 \to \mathrm{N} \to \mathbf{E}(\mathrm{N}) \to {}^{\mathbf{E}(\mathrm{N})}\!/_{\mathrm{N}} \to 0$$

kısa dizisini düşünelim. M tekilsiz olduğundan,

$$0 \to \mathrm{Hom}\left(\mathbf{E}(\mathrm{N})/_{\mathrm{N}}, \mathrm{M}\right) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{E}(\mathrm{N}), \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) \to 0$$

kısa tam dizisi elde edilir. $\mathbf{E}(\mathrm{N})/_{\mathrm{N}}$ tekil modül olduğundan $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{E}(\mathrm{N})/_{\mathrm{N}}, \mathrm{M}\right) = 0$ bulunur. Böylece istenen $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}(\mathrm{N}), \mathrm{M}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{N},\mathrm{M})$ sonucu elde edilir. $\mathrm{Hom}(\mathbf{E}(\mathrm{N}), \mathrm{M}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ ise M, N-altinjektif olduğu Lemma 4.2.2. den elde edilir. □

Önerme 4. 2.11. $\mathcal{N}$ tüm tekilsiz sağ R-modülerin sınıfı olsun. O zaman

$$\bigcap_{\mathrm{N}\in\mathcal{N}} \mathfrak{J}\mathfrak{n}^{-1}(\mathrm{N}) = \left\{M \in \mathcal{M}\mathrm{od} - \mathrm{R} : \mathrm{M}, \overline{\mathbf{S}-\mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}}\mathbf{t}} - \text{eşinjektif modül}\right\}$$

dir.

İspat. ($\supseteq$) N herhangi bir tekilsiz sağ R-modül olsun. Eğer bir M sağ R-modülü $\overline{\mathbf{S}-\mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}}\mathbf{t}}$-eşinjektif modül ise,

$$0 \to \mathrm{M} \to \mathbf{E}(\mathrm{M}) \to \mathbf{E}(\mathrm{M})/_{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$$

kısa dizisi S-bütünleyendir. Teorem 4.1.5 yardımıyla N modülü bu kısa tam diziye göre injektiftir. O zaman (Aydoğdu, Lopez-Permouth, 2011, Lemma 2.2) Lemma 4.2.2 den, N bir M-altinjektiftir.

($\subseteq$) M bir sağ R-modül ve $\mathrm{M} \in \bigcap_{\mathrm{N}\in\mathcal{N}} \mathfrak{J}\mathfrak{n}^{-1}(\mathrm{N})$ olsun.

$$0 \to \mathrm{M} \to \mathbf{E}(\mathrm{M}) \to \mathbf{E}(\mathrm{M})/_{\mathrm{M}} \to \mathrm{M} \to 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Teorem 4.1.5. yardımıyla bu kısa tam dizi S-bütünleyen olduğu elde edilir. (Mishina, Skornyakov, 1969, Proposition 1.8.) yardımıyla M, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüldür. □

Bir tekilsiz modülün altinjekif bölgesi $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül sınıfını içerdiğinden dolayı tekilsiz modüllerin injektifliğinin makul bir çapsal tersi, altinjektif bölgesi yalnızca $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerden oluşan tekilsiz modüller olarak düşünülebilir.

Tanım 4.2.12. Altinjektif bölgesi yalnızca $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modüllerden oluşan tekilsiz modüller, **tekilsiz injektif fakir** kısaca **ti-fakir modül** olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.2.13. Bir M sağ tekilsiz R-modül injektiftir gerek ve yeter koşul her projektif sağ R-modül P için M, P-altinjektiftir.

İspat. (⇒) M sağ tekilsiz modül olsun. M injektif ise her projektif sağ R-modül P için M, P-altinjektiftir.

(⇐) M sağ tekilsiz R-modül olsun. Her projektif sağ R-modül P için M, P-altinjektif olduğunu kabul edelim. Her modülün bir projektif modülün epimorfik görüntüsü olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bir F projektif modülü için g : F → M epimorfizması vardır. Kabulümüz gereği M, bir F-altinjektif modüldür. O zaman doğal ι : F → **E**(F) içermesi için $h\iota = \mathrm{g}$ olacak şekilde bir h : **E**(F) → M homomorfizması vardır. g epimorfizma olduğu için h homomorfizması da epimorfizmadır. Şimdi $0 \to Ker(h) \to \mathbf{E}(\mathrm{F}) \xrightarrow{h} \mathrm{M} \to 0$ kısa tam dizisini düşünelim. M tekilsiz olduğu için bu kısa tam dizi kapalı (closed) tam dizidir. İnjektif modüllerin, kapalı alt modülleri doğrudan toplam terimi olduğu için bu kısa dizi parçalanandır. Dolayısıyla M modülü injektif **E**(F) modülünün bir doğrudan toplam

terimine izomorftur. İnjektif modüller doğrudan toplam terimlere ve izomorfizmalara göre kapalı olduğundan M, injektiftir. □

R sağ $Z_2(R_R)$-yarımükemmel halkadır gerek ve yeter koşul her tekilsiz modül injektiftir (Nicholson, Zhou, 2005, Theorem 49.), Teorem 4.2.13. yardımıyla aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.2.14. R sağ $Z_2(R_R)$ yarımükemmel halkadır gerek ve yeter koşul her projektif sağ R-modül $\overline{\mathbf{S-Büt}}$-eşinjektif modüldür.

Önerme 4.2.15. M tekilsiz injektif olmayan sağ R-modül olsun. M fakir ise R sağ SI -halkasıdır.

İspat. M tekilsiz olduğundan dolayı her tekil sağ R-modül N için Hom(N, M) = 0 dır. O zaman M, bir N-altinjektiftir. Kabulümüz gereği N injektif olmak zorundadır. Dolayısıyla R sağ SI-halkası olduğu elde edilir. □

Her basit modül ya tekil yada projektiftir, ayrıca her basit modül ya küçük ya da injektif olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla tekil olmayan basit modüller tekilsizdir.

Önerme 4.2.16. M injektif olmayan projektif basit sağ R-modül olsun. Verilen bir A sağ R-modülü için M, A-altinjektiftir gerek ve yeter koşul Hom(A, M) = 0 dır.

İspat. (⇒) Verilen bir sağ R-modül M, A-altinjektif olsun. O zaman Önerme 4.2.10. yardımıyla Hom(**E**(A), M) ≅ Hom(A, M) olur. Eğer Hom(A, M) ≠ 0 ise sıfırdan farklı bir f : **E**(A) → M homomorfizması vardır. M basit olduğundan f homomorfizması epimorfizma olmak zorundadır. Fakat M projektif modül ve bu yüzden f epimorfizması bir parçalanan epimorfizmadır, yani **E**(A) nın bir X alt modülü için **E**(A) ≅ X ⊕ M dir. Bu M modülünün injektif olması ile çelişir

dolayısıyla Hom(A, M) = 0 olmak zorundadır. Hom(A,M) = 0 ise M, A-altinjektif olduğu açıktır. □

Önerme 4.2.17. M injektif olmayan projektif basit sağ R-modül olsun. Eğer M ti-fakir ise R nin M ye izomorf olanlar hariç injektif olmayan projektif basit sağ R-modülü yoktur.

İspat. (⇒) A injektif olmayan projektif basit sağ R-modül olsun. A ≇ M olduğunu kabul edelim. A ≇ M ve A, M basit modüller olduğundan dolayı Hom(A, M) = 0 olduğu elde edilir. Öyleyse M, A-altinjektiftir. M, ti-fakir olduğundan A, $\overline{\mathbf{S-B\ddot{u}t}}$-eşinjektif modül olur. O zaman A + X = **E**(A) ve A ∩ X Goldie Burulma modülü olacak şekilde **E**(A) nın bir X altmodülü vardır. A basit modül olduğundan ya A ∩ X = 0 ya da A ∩ X = A olur. A ∩ X = 0 durumu, A modülü **E**(A) nın büyük alt modülü olduğundan mümkün değildir. A tekilsiz modül olduğundan, ikinci durum mümkün değildir. O zaman A ≇ M kabulümüz doğru değildir, yani R nin izomorfizma hariç tek bir injektif olmayan projektif basit sağ R-modülü vardır. □

Önerme 4.2.18. M injektif olmayan projektif basit sağ R-modül olsun. $\mathfrak{Z}\pi^{-1}(M)$ sınıfı, bölüm modülleri altında kapalıdır.

İspat. (⇒) X ∈ $\mathfrak{Z}\pi^{-1}(M)$ olsun. X in her Y alt modülü için, $^{X}/_{Y} \in \mathfrak{Z}\pi^{-1}(M)$ olduğunu göstereceğiz.

$$0 \to Y \to X \to {}^{X}/_{Y} \to 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Bu diziye, Hom(-, M) funktorunu uygularsak,

$$0 \to \mathrm{Hom}\left({}^{X}/_{Y}, M\right) \to \mathrm{Hom}(X, M) \to \mathrm{Hom}(Y, M)$$

dizisini elde ederiz. Önerme 4.2.16 den, Hom(X,M) = 0 olduğu bulunur. Dolayısıyla, $\mathrm{Hom}\left({}^{X}/_{Y}, M\right) = 0$ olmak zorundadır. Önerme 4.2.16 den ${}^{X}/_{Y} \in \Im\pi^{-1}(M)$ sonucu elde edilir. □

Önerme 4.2.19. M injektif olmayan tekilsiz sağ R-modül olsun. Basit alt modüllerinin toplamı Soc ile ifade edilir. Eğer M fakir ise, $\mathrm{Soc}(R_R)$ projektiftir.

İspat. $\mathrm{Soc}(R_R)$ projektif olmadığını kabul edelim. O zaman R halkasının tekil basit bir sağ ideali vardır, bu ideali A ile gösterelim. Hom(A, M) = 0 olduğundan M modülü, A-altinjektiftir. Fakat M fakir modüldür ve bu yüzden A injektif olmalıdır. O zaman A ideali, R nin bir doğrudan toplam terimidir ve bu yüzden projektiftir. Bu durum A modülünün tekilsiz olması olur. Bu yüzden $\mathrm{Soc}(R_R)$ projektiftir. □

Her basit sağ R-modülün bir serbest modülün içine gömülebildiği halkalara **sağ Kasch** olarak adlandırılır.

Önerme 4.2.20. R bir sağ Kasch halkası ve M injektif olmayan tekilsiz bir sağ R-modül olsun. Eğer M fakir ise R yarı-basit artinian halkasıdır.

İspat. Her basit sağ R-modülün projektif olduğunu göstermek yeterlidir. A tekil basit sağ R-modül olsun. R bir sağ Kasch halkası olduğundan A modülü R halkasının içine gömülebilir. Hom(A, M) = 0 olduğundan M modülü, A-altinjektiftir. Fakat M fakir modüldür ve bu yüzden A injektif olmalıdır. O zaman A ideali R nin bir doğrudan toplam terimidir ve bu yüzden projektiftir. Bu durum A modülünün tekil olması ile çelişir. Dolayısıyla her basit sağ R-modül projektiftir ve bu yüzden R yarı-basit artinian halkadır. □

KAYNAKÇA

Alizade, R. , Pancar, A. (1999). Homoloji Cebire Giriş. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 177.

Alizade, R. G. 1986. Proper Classes of Short Exact Sequences in the Category of Abelian Groups. Math. Notes 40(1):3-15 (English Translation).

Aydoğdu, P. and S.R. Lopez-Permouth. An alternative perspective on injectivity of modules. J. Algebra, 338:207-219, 2011.

Buchsbaum, D. 1959. A Note on Homology in Categories. Ann. of Math 69(1):66-74.

Butler, M. C. R. and G. Horrocks. 1961. Classes of Extensions and Resolutions. Philos. Trans. R. Soc. London 254(A):155-222.

Cartan, H. and Eilenberg, S. 1956. Homological Algebra. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics series, New Jersey: Princeton University, 13th ed.

Clark, J., C. Lomp, N. Vanaja, and R. Wisbauer, eds. 2006. Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. Basel: Birkhäuser.

Durğun, Y. (2020). S-Bütünleyen Alt Modüller Tarafından Üretilen Öz Sınıf. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 9(2), 518-524.

Durğun, Y. (2019). Extended S-Supplement Submodules. Turkish Journal of Mathematics. 43 (6), 2833-2841.

Erdoğan, E. (2004). Absolutely supplement and absolutely complement modules. M. Sc. Thesis, İzmir Institute of Technology, İzmir.

Generalov, A. I. (1972). On the definition of purity of modules. Math. Notes, 11, 232-235. Translated from Russian from Mat. Zametki 11(4), 375-380 (1972).

Generalov, A. I. (1978). On weak and *w*-high purity in the category of modules. Math. USSR, Sb., 34, 345-356. Translated from Russian from Mat. Sb., N. Ser. 105(147), 389-402 (1978).

Generalov, A. I. (1983) The *w*-cohigh purity in a category of modules. Math. Notes, 33(5-6), 402-408. Translated from Russian from Mat. Zametki 33(5), 785-796 (1983).

Hungerford, T. W. (1974). Algebra. Springer Verlag, 502.

Ivanov A.V.(1978). w-bölünür ve w-düz modüller, Matem. Zametki, 24:6(1978), 741-747.

Kash, F. (1982). Module and Rings. Academic Press, 372.

Kepka, T. (1973). On one class of purities, Comment. Math. Univ. Carol., 14:1(1973), 139-154.

Lam, T.Y. (1991). A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, 397.

Mac Lane, S. 1963. Homology. Springer-Verlag.

Mermut, E. 2004. Homological Approach to Complements and Supplements. PhD Thesis, Dokuz Eylül University.

Mishina AP, Skornyakov LA. Abelevy gruppy i moduli (Abelian groups and modules). Moscow, RU: Izdat-Nauka, 1969.

Mishina, A. P., & Skornyakov, L. A. (1976). Abelian groups and modules, vol. 107 of American Mathematical Society Translations. Ser. 2. Providence, R. I.: American Mathematical Society. Translated from Russian from Abelevy gruppy i moduli, Izdat. Nauka, Moskow (1969).

Nicholson WK, Zhou Y. Strong Lifting. Journal of Algebra 2005; 285 (2): 795-818. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.11.019

Nunke, R. J. 1963. Purity and Subfunctor of the Identity. Topics in Abelian groups (Proc. Sympos., New Mexico State Univ., 1962) 121-171.

Pancar, A. 1997. Generation of Proper Classes of Short Exact Sequence. Internat. J. Math. and Math. Sci. 20(3):465-474.

Rotman, J. 1979. An Introduction to Homological Algebra. New York: Academic Press.

Sandomierski FL. Nonsingular rings. Proceedings of the American Mathematical Society 1968; 19: 225-230. doi: 10.2307/2036177

Sharpe, D.W. , Vamos, P. (1972). İnjektive Modules, Cambridge at the University Press, 190.

Sklyarenko, E. G. 1978. Relative Homological Algebra in Categories of Modules. Rusian Math. Surveys 33(3):97-137. Translated from Russian from Uspehi Mat. Nauk 33(201):85-120.

Walker, C.P. 1964. Properties of Ext and Quasisplitting of Abelian Groups. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15:157-160.

Yousif MF, Zhou Y. Semiregular, semiperfect and perfect rings relative to an ideal. The Rocky Mountain Journal of Mathematics 2002; 32 (4):1651-1671. doi: 10.1216/rmjm/1181070046

Zöschinger H. Moduln, die in jeder Erveiterung ein Komplement haben // Math. scand. -1974. -35. –P. 267-287.

ÖZGEÇMİŞ

Sevda SÖNMEZ, İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı 2014 yılında mezun oldu. 2018 yılında Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul edildi.