ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Mustafa Çağatay KORKMAZ

İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIMLAR

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIMLAR

Mustafa Çağatay KORKMAZ

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 26/12/2013 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……	……	……..
Doç. Dr. A. İhsan GENÇ	Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Prof. Dr. Hamza EROL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
……..	……	
Prof. Dr. Aşır GENÇ	Doç. Dr. Barış SÜRÜCÜ	
ÜYE	ÜYE	

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIMLAR

Mustafa Çağatay KORKMAZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2013, Sayfa: 116
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Prof. Dr. Aşır GENÇ
: Doç. Dr. Barış SÜRÜCÜ

Bu tezde standart iki yönlü kuvvet dağılımının dönüşümleri kullanılarak, üstel, Weibull ve slash dağılımlarının iki yönlü genelleştirilmiş formları tanımlanmıştır. Bu genelleştirme ile dağılımlarda iki yönlülük fikri sınırlı bir aralıktan sonsuz bir aralığa genişletilmiştir. Elde edilen dağılımların, veri modellemesi için klasik dağılımlardan daha esnek bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Elde edilen yeni dağılımların özellikleri incelenip parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. Ayrıca gerçek veri kullanılarak veri modellemede önerilen bu dağılımların klasik dağılımlar ile genelleştirilmiş diğer dağılımlar karşısındaki üstünlükleri ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İki yönlü kuvvet dağılım, Üstel dağılım, Weibull dağılımı, Slash dağılımı, Genelleştirilmiş dağılımlar

ABSTRACT

PhD THESIS

TWO SIDED GENERALIZED DISTRIBUTIONS

Mustafa Çağatay KORKMAZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2013, Pages: 116
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Prof. Dr. Aşır GENÇ
: Assoc. Prof. Dr. Barış SÜRÜCÜ

In this thesis, the two sided generalized versions of the ordinary exponential, Weibull and slash distributions are defined by making appropriate transforms of the standard two-sided power variate. With these generalizations, the idea of two sidedness is extended to unbounded supports. The newly defined generalizations are more flexible for modeling data than respective ordinary distributions. The properties of these distributions are studied and the maximum likelihood estimators of parameters are derived. In addition, the distributions are demonstrated on some real data sets and their comparisons with some other existing models are presented.

Key Words: Two-sided power distributions, Exponential distribution, Weibull distribution, Slash distribution, Generalized distributions

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sürecinde bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan danışmanım ve sayın Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ'e; tez izleme komitesi üyeleri hocalarım sayın Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a ve sayın Prof. Dr. Hamza EROL'a; hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen Selçuk Üniversitesi öğretim üyelerinden hocam sayın Prof. Dr. Aşır GENÇ'e, Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde görev yapan Arş. Gör. Selim GÜNDÜZ'e, bu teze verdiği yardımlardan dolayı Artvin Çoruh Üniversitesindeki sayın Doç. Dr. Gökhan BAYRAMOĞLU'na, Yrd. Doç. Dr. Ayşegül BAYRAMOĞLU'na, Yrd. Doç. Dr. Fatih DEMİREL'e, Yrd. Doç. Dr. Çetin AYKURT'a, Yrd. Doç. Dr. Ömer Subaşı'na, Yrd. Doç. Dr. Suat ÇOLAK'a, Arş. Gör. Halil İbrahim GÜLER'e, Arş. Gör. Mehmet DEMİRALAY'a, Öğr. Gör. Seçkin YILMAZ'a, her zaman yanımda olan anneme, abilerime ve eşim Arş. Gör. Zehra Sedef KORKMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
TABLOLAR DİZİNİ VII
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
1. GİRİŞ 1
2. STANDART İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI 5
2.1. Momentler 6
2.2. Dağılım Fonksiyonu Özellikleri 7
2.3. Kantil Özellikleri 8
2.4. Limit Dağılımları 9
2.5. Kısmi Entropi 10
2.6. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri 12
3. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ ÜSTEL DAĞILIM 15
3.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Üstel Dağılımın Tanımlanması 17
3.1.1. Dağılımın Tanımlanması 17
3.1.2. Yoğunluk Biçimi 18
3.1.3. Dağılımın Özel ve Limit Durumları 20
3.1.4. Dağılım Fonksiyonu Özellikleri 21
3.2. Rasgele Sayı Üretimi 22
3.3. Bozulma Oranı Fonksiyonu 23
3.4. Momentler 25
3.5. Sıra İstatistikleri 31
3.6. Entropiler 32
3.6.1. Rényi Entropisi 32
3.6.2. Kısmi Entropi 33
3.7. Parametre Tahmini 34
3.7.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri ve Bir Algoritma 34

3.7.2. Simülasyon Çalışması ... 37
3.8. Veri Analizi ... 38
3.8.1. Kobay Hayvanları Veri Kümesi ... 38
3.8.2. Cam Liflerin (Fiber) Dirençleri Veri Kümesi ... 42
4. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMI ... 45
4.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Weibull Dağılımının Tanımlanması ... 48
4.1.1. Dağılımın Tanımlanması ... 48
4.1.2. Yoğunluk Biçimi ... 50
4.1.3. Dağılımın Özel ve Limit Durumları ... 53
4.2. Rasgele Sayı Üretimi ... 54
4.3. Bozulma Oranı Fonksiyonu ... 55
4.4. Ortalama Geriye Kalan Ömür ... 58
4.5. Momentler ... 62
4.6. Sıra İstatistikleri ... 65
4.7. Entropiler ... 67
4.7.1. Rényi Entropisi ... 67
4.7.2. Kısmi Entropi ... 68
4.8. Parametre Tahmini ... 68
4.8.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri ve Bir Algoritma ... 68
4.8.2. Simülasyon Çalışması ... 71
4.9. Veri Analizi ... 71
4.9.1. Karbon Liflerinin Gerilme Dirençleri Veri Kümesi ... 72
4.9.2. Hava Kirliliği Veri Kümesi ... 76
5. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ SLASH DAĞILIMI ... 79
5.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Slash Dağılımının Tanımlanması ... 82
5.2. Yoğunluk Biçimi ve Özel Durumlar ... 84
5.3. Momentler ... 86
5.4. Rasgele Sayı Üretimi ... 93
5.5. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmini ... 93
5.6. Veri Analizi ... 96

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 99
KAYNAKLAR 101
ÖZGEÇMİŞ 109
EKLER 110

TABLOLAR DİZİNİ **SAYFA**

Tablo 3.1. *TSGE* dağılımının beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri 30
Tablo 3.2. Farklı parametre değerleri için *TSGE* dağılımından, simülasyon çalışması sonucu tahminlere ilişkin elde edilen ortalama ve standart hatalar 38
Tablo 3.3. Kobay hayvanları veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler 39
Tablo 3.4. *TSGE* dağılımı ile diğer dağılım modellerinin kobay hayvanları veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar (parantez içinde) 39
Tablo 3.5. Cam liflerin dirençleri veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler 42
Tablo 4.1. *TSGW* dağılımının beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri 64
Tablo 4.2. *TSGW* dağılımında farklı parametre değerleri tahminleri için simülasyon sonuçları 73
Tablo 4.3. Karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesine ait bazı istatistikler 74
Tablo 4.4. *TSGW* dağılımı ile diğer dağılım modellerinin karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar (parantez içinde).....74
Tablo 4.5. Hava kirliliği veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler 76
Tablo 4.6. *TSGW* dağılımı ile *BWG* dağılım modelinin hava kirliliği veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart hataları (parantez içinde) 77
Tablo 5.1. $TSGS(\mathrm{a},\mathrm{b},q)$ dağılımının çeşitli parametre değerine göre varyansı ve basıklık değerleri 92
Tablo 5.2. *TSGS*, *Sl* ve normal dağılıma ilişkin, cam liflerin dirençleri veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log-olabilirlik, *AIC* ve *K-S* değerleri (tahminlere ilişkin standart hatalar parantez içerisinde verilmiştir).....96

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1. $TSP(\alpha, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerlerine göre biçimleri 6

Şekil 3.1. Farklı parametre değerlerine göre *TSGE* dağılımının biçimleri; (a) $\beta = \theta = 0.5$;(b)$\alpha = 2$, $\beta = 0.5$;(c)$\alpha = 1.5$, $\theta = 0.5$ (d) $\beta = 0.1$, $\theta = 1$ 20

Şekil 3.2. $TSGE(\alpha, 0.5, 1)$ dağılımı için bozulma oranı grafikleri, (a) $\alpha = 0.5$ ve (b) $\alpha = 2$ 25

Şekil 3.3. *TSGE* dağılımı $\beta = 0.5$ için çarpıklık ve basıklık grafiği.....29

Şekil 3.4. *TSGE* dağılımı $\beta = 0.1$ için çarpıklık ve basıklık grafiği.....29

Şekil 3.5. *TSGE* dağılımının üstel dağılıma olan kısmi entropi grafiği 34

Şekil 3.6. *TSGE, WE, NHGE* ve *BGE* dağılımlarına göre modellenen kobay hayvanları yaşam sürelerinin veri kümesi grafiği 40

Şekil 3.7. Verilen üç model için bozulma oranı fonksiyonu grafikleri 41

Şekil 3.8. Kobay hayvanları veri kümesi için *TSGE* dağılımının (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri 41

Şekil 3.9. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGE* ve *BGE* dağılımlarının yoğunluğu.....43

Şekil 3.10. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGE* dağılımının (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri 44

Şekil 4.1. *TSGW* dağılımı olasılık yoğunluk biçimleri (a)$\gamma = \beta = \theta = 0.5$, (b)$\alpha = \beta = \theta = 0.5$(c) $\alpha = 0.1$, $\beta = \theta = 0.5$, (d) $\alpha = \beta = \theta = 0.5$, (e) $\alpha = \beta = \theta = 0.5(f)\gamma = 1.5, \theta = 6, \beta = 0.1$, (g) $\alpha = \gamma = 2$, $\beta = 0.5$, (h) $\gamma = 3, \alpha = \theta = 0.5$. 52

Şekil 4.2. *TSGW* dağılımının $r(t)$ çizimleri:(a), $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 2$ (b) $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 0.25$,(c),(d) $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 1$, (e) $\beta = 0.25, \theta = 0.5, \gamma = 3.5$(f) $\beta = 0.1, \theta = 0.5, \gamma = 0.6$.....58

Şekil 4.3. *TSGW* için çarpıklık ve basıklık grafikleri: (a), (b)$\gamma = \beta = 0.5$, (c), (d) $\gamma = 2, \beta = 0.1$ 65

Şekil 4.4. *TSGW*, *WG*, *FW* ve *EW* dağılımlarına göre modellenen karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesi grafiği.....75
Şekil 4.5. Karbon fiberlerin gerilme dirençleri veri kümesi için *TSGW* dağılımı (a) Q-Q plot (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri 75
Şekil 4.6. *TSGW* dağılımına göre modellenen hava kirliliği veri kümesi grafiği 77
Şekil 4.7. Hava kirliliği veri kümesi için *TSGW* dağılımı (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri.....78
Şekil 5.1. $TSGS(\mathrm{a},\mathrm{b},q)$ ve $Sl(q)$ dağılımlarının farklı parametre değerleri için yoğunluk ve kuyruk grafikleri.....87
Şekil 5.2. *TSGS* (kesiksiz) ve *Sl* (kesikli) dağılımlarının basıklık grafikleri *TSGS*(2,0.5,*q*) , *Sl*(*q*) (Sol), *TSGS*(a ,0.5,5) , *Sl*(5) (Sağ).....92
Şekil 5.3. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGW*, *Sl* ve normal dağılım yoğunluğu.....97
Şekil 5.4. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGW* dağılım fonksiyonu ve deneysel dağılım fonksiyonu çizimleri 98

1. GİRİŞ

Dağılımlarda iki yönlülük kavramı; bir rasgele değişkene ait olasılık yoğunluğunun, bir köşe noktası ile ikiye bölünen tanım aralığının her bir kısmında, farklı olasılık yoğunlukları içermesi ile açıklanabilir. İki yönlü dağılımlarda ele alınan rasgele değişkenin dağılımına ait özellikler, yoğunluk fonksiyonunun farklı eşitliklerle ifade edilmesinden dolayı, her iki tanım kümesi için farklı yapıda olabilmektedir. Bu durum ise, sınırlı bir aralıkta tanımlanmış olan iki yönlü dağılımlar için, tanım aralıklarının genişletilip daha esnek formda elde edilebileceğine ve farklı tipteki veriler üzerine uygulanabilirliği fikrine vurgu yapabilir.

Literatürde sınırlandırılmış iki yönlü dağılımların ilki, Schmidt (1934) tarafından tanımlanan üçgensel dağılımdır. Schmidt, üçgensel dağılımı (0,1) aralığındaki iki düzgün dağılımın aritmetik ortalaması olarak tanımlamıştır ve ayrıca bu dağılıma özel olarak "*tine*" dağılımı ismini vermiştir. Ayyangar (1941), üçgensel dağılımı genişleterek bu dağılımın simetrik ve simetrik olmayan durumlarını da ifade etmiştir. 20. yüzyılın sonuna kadarki süre içerisinde sınırlandırılmış iki yönlü dağılım modellerine çok az sayıda ulaşılmaktaydı (Van dorp ve Kotz, 2004). Üç parametreli asimetrik üçgensel dağılım, Johnson (1997) tarafından, beta dağılımına alternatif bir dağılım olarak gösterilmiştir. Johnson ve Kotz (1999), asimetrik üçgensel dağılımın karma modelleri üzerinde durup, genelleştirilmiş yawl dağılımı önermişlerdir. Van dorp ve Kotz (2002a), üç parametreli üçgensel dağılımın bir açılımını ele alıp, üçgensel, kuvvet ve düzgün dağılım ailelerini içeren, sınırlı bir aralıkta tanımlı iki yönlü kuvvet dağılım ailesini tanımlayıp, bu dağılıma ilişkin özellikleri ve parametre tahminlerini elde etmişlerdir. Van dorp ve Kotz (2002b), standart iki yönlü kuvvet dağılımını elde edip, ekonomik bir veri seti üzerinde uygulama yapmışlardır. Van dorp ve Kotz (2003), (0,1) aralığında tanımlı olan herhangi bir dağılım ile standart iki yönlü kuvvet dağılımlarını (Van dorp ve Kotz, 2002b) kullanarak, iki yönlü kuvvet dağılımlarının genel durumunu sınırlı bir aralıkta tanımlamışlardır. İki yönlü genelleştirilmiş kuvvet dağılımlarının genel durumları ve dengesiz iki yönlü kuvvet dağılımları Van dorp ve Kotz (2004) tarafından incelenmiştir. Nadarajah (2005),

standart iki yönlü kuvvet dağılımını dört parametreli bir formda genelleyip bu dağılımın özelliklerini ve en çok olabilirlik tahminlerini elde etmiştir. Oruç ve Bairamov (2005), Van dorp ve Kotz (2003)'un önerdiği dağılım sınıfının örneklerini; negatif olmayan ve azalmayan, (0,1) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir $g(1)$-$g(0)=1$ şartını sağlayan bir g fonksiyonu kullanarak, sınırlı bir aralıkta önermişlerdir. Yazarlar bu çalışmada, dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik ve moment tahminleri üzerinde durup, moment çıkaran fonksiyonları ile kismi entropileri de elde etmişlerdir. Vicari ve ark. (2008), Topp-Leone dağılımını kullarak, (0,1) sınırlı aralığında tanımlı iki yönlü genelleştirilmiş Topp-Leone dağılım sınıfını sunmuşlardır. Velasco ve ark. (2009), Van dorp ve Kotz (2004) tarafından önerilen genelleştirilmiş iki yönlü kuvvet dağılımının bir lineer dönüşümünü kullanarak (0,1) sınırlı aralığında tanımlı iki yönlü genelleştirilmiş dağılım elde edip, bu dönüşüm dağılımının dağılımsal özellikleri ve parametre tahmini üzerinde durmuşlardır. Sultani ve Homei (2009), olasılık yoğunluk fonksiyonu Gauss-hipergeometrik fonksiyonlarla açıklanan simetrik, sınırlı bir aralıkta tanımlı, genel bir iki yönlü kuvvet dağılımı sunmuşlardır. Ayrıca yazarlar, momentleri kullanarak, parametre tahmininde bir yöntem vermişlerdir. Bu yapılan genelleştirilmiş dağılımlar, sınırlı bir aralığa sahip olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak literatüre girmiştir.

Diğer yandan, klasik üstel ve klasik iki parametreli Weibull dağılımlarının istatistikte çok önemli bir yeri vardır ve özellikle yaşam zamanı ve güvenirlilik çalışmalarında bu dağılımlar oldukça popülerdir (Johnson ve ark., 1995). Ancak bu iki dağılımın bazı dezavantajları vardır. Klasik üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu (tehlike fonksiyonu) sabit olduğundan dolayı, veri modellemedeki alanı sınırlıdır ve genellikle elektronik parçaların yaşam zamanı çalışmalarında kullanılmaktadır. Klasik Weibull dağılımı ise içerdiği biçim parametresinden dolayı, üstel dağılımdan daha esnek bir yapıya sahiptir. Ancak, biçim parametresi 1 den büyük olduğunda, klasik Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonu 0 dan sonsuza kadar artış göstermektedir ki bu durum bazı durumlarda istenmeyebilir. Bu gibi nedenlerden dolayı dağılımların esnekliklerini artırıp, daha geniş kitlelere uygulamak için çeşitli yöntemlerle dağılımlara ait genelleştirilmiş durumları birçok istatistikçi tarafından tanımlanmıştır (Mudholkar ve Srivastava, 1993, Adamidis ve

Loukas, 1998, Gupta ve Kundu, 1999, Nadajarah ve Haigighi, 2011, Bidram ve ark., 2013).

Bir başka problem olarak, kullanılan veri setinde sapan değer olması durumudur. Sapan değer durumlarında, veri modellemesi için kalın kuyruklu dağılımlar tercih edilmektedir ve bu dağılımların en başında *t* ve klasik slash dağılımları gelmektedir (Rogers ve Tukey, 1972, Morgenthaler, 1986, Lange ve ark., 1989, Jamshidian, 2001, Arslan, 2008 ve Genç, 2013). İstatistikte birçok sonuç çıkarımı normal dağılıma dayalı olarak yapıldığı için, sapan değer gibi durumlarda normal dağılıma göre sonuç çıkarmak verimli olmayabilir ve normal dağılımdan daha kalın kuyruklu bir dağılım kullanmak gerekir (Arslan ve Genç, 2009).

Diğer taraftan, veri modellemesi, zaman, maliyet ve bu gibi benzer durumlardan kazanç sağlamak ve sonuç çıkarımında bulunmak için istatistikte çok önemli bir yere sahiptir. Örneğin, pahalı bir sistemin bozulma süreleri ile ilgili bilgi toplanmak istendiğinde, bu durum hem maliyeti hem de test zamanını artıracaktır. Bu gibi durumlarda gözleme dayalı örneklem birimleri oluşturulup, bir dağılım üzerinden sonuç çıkarımına gidilebilir. Ancak modellenmek istenen verinin özellikleri nedeniyle her dağılım veriye uymayabilir. Veri modelleme çalışmalarında en önemli kısım, veri setini en uygun dağılım ile modellemektir.

Bu tez çalışmasındaki amaç, sınırlı bir aralıkta tanımlı iki yönlü dağılım sınıflarındaki iki yönlülük kavramını, sınırsız bir aralığa genişletip, veri modellemesinde iki yönlü genelleştirilmiş dağılımların daha esnek bir formda elde edilmesi ve iki yönlü dağılımların uygulanabilirliğinin artırılmasıdır. Bu tezde, Van dorp ve Kotz (2002b) tarafından önerilen, standart iki yönlü kuvvet dağılımlı bir rasgele değişkenin dönüşümleri kullanılarak, istatistik ve diğer disiplinlerde oldukça popüler olan klasik üstel, Weibull ve slash dağılımlarının ve hatta bunların bazı genelleştirmelerinin daha genel ve daha esnek durumlarının tanımlanması planlanmıştır. Sınırsız bir aralıkta tanımlanan bu dağılımlara, ***iki yönlü genelleştirilmiş dağılımlar*** denilecektir. Tezde, önerilecek dağılımların özelliklerinin ve veri yapısının özelliklerine göre önerilen dağılımın kullanılabilirliğinin araştırılması amaçlanmıştır.

Tezin öneminin belirtildiği bu bölümden sonra, ikinci bölümde standart iki yönlü kuvvet dağılımı (Van dorp ve Kotz, 2002b), dağılıma ait özellikleri ile verilecektir.

Tezin üçüncü bölümde, klasik üstel dağılımın olasılık integral dönüşümünde düzgün dağılım yerine bu dağılımın genel bir durumu olan standart iki yönlü kuvvet dağılımı kullanılarak, klasik üstel dağılım için genel bir durum olan iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılım verilecektir. Elde edilen yeni dağılım için, yoğunluk biçimi, özel ve limit durumları, dağılım fonksiyonu özellikleri, rasgele sayı üretimi, bozulma oranı fonksiyonu ve biçimi, momentler, entropiler ve sıra istatistikleri gibi özellikler incelenecektir. Parametrelerin en çok olabilirlik tahmini elde edilecektir. İki farklı türdeki gerçek veri kümesi için veri analizi yapılıp, literatürdeki diğer genelleştirilmiş üstel dağılımlarla karşılaştırma yapılacaktır. Dağılımın üstün ve zayıf yönleri ortaya konacaktır.

Tezin dördüncü bölümde, bir önceki bölüme paralel olarak, klasik Weibull dağılımının genel bir durumu olan iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımı tanımlanacaktır. Bir önceki bölümde incelenen benzer dağılım özellikleri çalışılacaktır. Parametrelerin en çok olabilirlik tahmini bir algoritmayla verilecek olup, bu algoritmaya ilişkin simülasyon çalışması yapılacaktır. İki gerçek veri kümesi için veri analizi, literatürdeki diğer genelleştirilmiş Weibull dağılımlarıyla karşılaştırılarak yapılacaktır.

Tezin beşinci bölümünde, klasik slash dağılımının tanımlamasındaki bir dönüşümle iki yönlü genelleştirilmiş slash dağılımı verilecektir. Dağılımın yoğunluk biçimi ve özel durumları incelenecektir. Ayrıca, bu dağılım ve bu dağılımın konum-ölçek formundaki durumu için momentler elde edilecektir. Dağılımdan rasgele sayı üretimi açıklanacaktır. Konum-ölçek formundaki dağılıma ilişkin parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri elde edilip, gerçek veri kümesi uygulaması yapılacaktır. Bu gerçek veri kümesi üzerinde dağılımın, klasik slash ve normal dağılım ile kıyaslaması yapılacaktır.

Sonuç bölümünde çalışmadan elde edilen bulgular değerlendirilerek önerilerde bulunulacaktır.

2. STANDART İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

Standart iki yönlü kuvvet dağılımı Van dorp ve Kotz (2002b) tarafından tanımlanmıştır. Bu dağılım, yazarlar tarafından özellikle ekonomide risk ve belirsizlik problemlerinde, beta dağılımına alternatif, daha esnek ve daha sivri bir dağılım olarak önerilmiştir. Bunun nedeni ekonomik verilerin yoğunluklarının sivri ve değişken bir yapıya sahip olmasıdır. Bu bölümde standart iki yönlü kuvvet dağılımının temel özellikleri ve en çok olabilirlik tahminleri verilmiştir. Bu dağılım için verilecek eşitliklerin ispatı verilmemiştir. Detaylı bilgi için Van dorp ve Kotz (2002b)'e bakılabilir.

Standart iki yönlü kuvvet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)

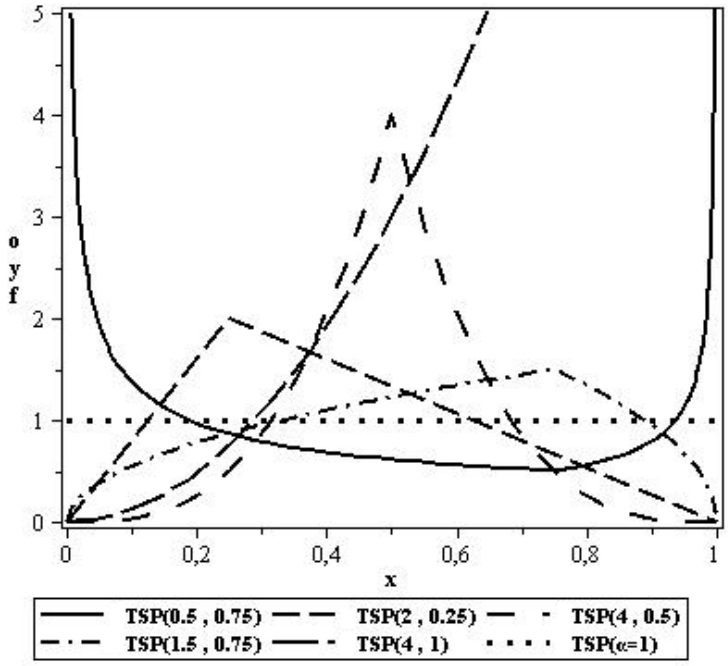
$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} & 0<x\le\beta\\ \alpha\left(\dfrac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} & \beta\le x<1\end{cases} \qquad (2.1.)$$

eşitliğindeki gibi verilir. Burada, $0<\beta<1$ ve $\alpha>0$ dır. İki yönlü kuvvet dağılımı $TSP(\alpha,\beta)$ ile ifade edilecektir. Buradaki, β parametresi yansıtma (*reflection parameter*) ve α parametresi ise biçim (*shape*) parametresidir. *TSP* dağılımı beta tipi bir dağılımdır. Bu dağılım sınırlı bir aralıkta tanımlanmıştır. Dağılım parametreleri beta dağılımının parametrelerine benzer olup, dağılımın biçimini belirlemektedir. $0<\beta<1$ ve $\alpha>0$ için olasılık yoğunluğu tek tepeli ve β'da modludur. $0<\beta<1$ ve $0<\alpha<1$ olasılık yoğunluk fonksiyonun şekli U-biçimli olup 0 ya da 1'de modludur. $\alpha=1$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma, $\alpha=2$ için ise yoğunluk fonksiyonu üçgensel dağılıma sahiptir. $\beta=1$ için yoğunluk kuvvet fonksiyonu biçimindedir. Şekil 1. de $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımının içerdiği düzgün, üçgensel ve kuvvet dağılımlarının grafikleri özel parametre değerlerine göre verilmiştir. *TSP* dağılımının beta dağılımına göre bir

avantajı, kümülatif dağılım fonksiyonun (kdf) açık bir şekilde elde edilmesidir ve bu dağılım fonksiyonu

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & 0<x\le\beta\\ 1-(1-\beta)\left(\dfrac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha} & \beta\le x<1\end{cases} \qquad (2.2.)$$

eşitliği ile verilir.



Şekil 2.1. $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımının farklı parametre değerlerine göre biçimleri

2.1 Momentler

$TSP(\alpha,\beta)$ dağılımının eşitlik (1)'den türetilen *k.* momenti,

$$E(X^{k})=\frac{\alpha\beta^{k+1}}{\alpha+k}+\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}\frac{\alpha}{\alpha+i}(1-\beta)^{i+1} \qquad (2.3.)$$

ile verilir. Buradan dağılımın beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=\frac{1}{\alpha+1}0+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\beta+\frac{1}{\alpha+1}1=\frac{(\alpha-1)\beta+1}{\alpha+1} \tag{2.4.}$$

$$V(X)=\frac{\alpha-2(\alpha-1)\theta(1-\theta)}{(\alpha+2)(\alpha+1)^2} \tag{2.5.}$$

eşitliklerindeki gibi elde edilir. $\alpha=1$ için eşitlik (2.4.), $1/2$ ye eşittir ki bu da *Düzgün* $[0,1]$ dağılımının beklenen değeridir. $\alpha>1$ durumunda, mod değeri olan β'ya daha çok ağırlık atanır ve α değeri artıkça alt sınır ve üst sınırlardaki ağırlık daha da azalma gösterir. Uç değer durumunda, yani $\alpha \to \infty$, hiçbir ağırlık sınırlara ve ortalamaya etki etmez. Aynı zamanda, $\alpha<1$ için, yine sınırlara hiçbir ağırlık etki etmezken, α'nın artan değerlerin ise ortalama β'ya kadar indirilir. Diğer uç değer durumunda, yani $\alpha \to 0$, ortalama $1-\beta$'ya kadar iner.

2.2 Dağılım Fonksiyonu Özellikleri

TSP dağılımı, beta dağılımına benzer olarak stokastik artanlık ve azalanlık özelliklerini sağlamaktadır.

Tanım 2.1 Θ bir parametre uzayı, $\{\theta \in \Theta \mid \theta=(\theta_1,\theta_2)\}$ bir parametre vektörü ve $F(x,\theta)$ bir dağılım fonksiyonu olmak üzere; $\theta_1>\theta_2$ iken $\forall x$ için $F(x,\theta_1) \le F(x,\theta_2)$ kesin eşitsizliği varsa, $\{F(x,\theta)\mid\theta\in\Theta\}$ ailesine θ'da ***stokastik artandır*** denir.

Tanım 2.2 Θ bir parametre uzayı, $\{\theta \in \Theta \mid \theta=(\theta_1,\theta_2)\}$ bir parametre vektörü ve $F(x,\theta)$ bir dağılım fonksiyonu olmak üzere; $\theta_1>\theta_2$ iken $\forall x$ için $F(x,\theta_1) \ge F(x,\theta_2)$ kesin eşitsizliği varsa, $\{F(x,\theta)\mid\theta\in\Theta\}$ ailesine θ'da ***stokastik azalandır*** denir.

Teorem 2.1.(Van dorp ve Kotz, 2002b)

i. $\alpha > 1$ *için, dağılım fonksiyonu stokastik olarak artandır, öyle ki,*

$$\beta_1 < \beta_2, x \in (0,1) \Rightarrow F(x|\beta_1,\alpha) > F(x|\beta_2,\alpha) \tag{2.6.}$$

dir.

ii. $\alpha < 1$ *için, dağılım fonksiyonu stokastik olarak azalandır, öyle ki,*

$$\beta_1 < \beta_2, x \in (0,1) \Rightarrow F(x|\beta_1,\alpha) < F(x|\beta_2,\alpha) \tag{2.7.}$$

dir.

2.3. Kantil Özellikleri

x_p ile gösterilen p. kantil, $F(x_p|\alpha,\beta) = p$ ile tanımlanır. Burada verilecek olan kantil özellikleri β'nın başlangıç tahmininde faydalı olabilir. Ayrıca verilecek olan Özellik 3 ve Özellik 4, x_p ile x_{1-p} kantilleri arasındaki ilişkiyi vermektedir. $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımının kantil fonksiyonu,

$$x_p = \begin{cases} \beta\left(\frac{p}{1-\beta}\right)^{1/\alpha} & ,0 < p < \beta \\ 1-(1-\beta)\left(\frac{1-p}{1-\beta}\right)^{1/\alpha} & ,\beta < p < 1 \end{cases} \tag{2.8.}$$

eşitliğindeki gibidir. Şimdi kantil özellikleri verilecektir.

Özellik 1: Dağılım fonksiyonundan $x_p < p \Leftrightarrow p < \beta$ olduğu görülür.

Özellik 2: Benzer olarak, $x_p = \beta \Leftrightarrow p = \beta$ dir ve α'nın değerinden bağımsızdır. Böylece bütün TSP dağılımlarının olasılık yoğunlukları β da ayrılmıştır.

Özellik 3: *p*'nin $p < \min(\beta, 1-\beta)$ değeri ile ilgilenilsin. Dağılım fonksiyonu ve Özellik 1 den

$$\frac{x_p^{\alpha}}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{(1-x_{1-p})^{\alpha}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \Rightarrow \frac{x_p}{1-x_{1-p}} = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \tag{2.9.}$$

ifadesi elde edilir. Böylelikle $\frac{x_p}{1-x_{1-p}}$ oranı $p < \min(\beta, 1-\beta)$ için p değerine bağlı değildir.

Özellik 4: Özellik 3 e benzer olarak $p > \max(\beta, 1-\beta)$ için $\frac{x_{1-p}}{1-x_p} = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ oranı da *p* değerinden bağımsızdır.

2.4. Limit Dağılımları

X rasgele değişkeni $TSP(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip olsun. $\beta = 0$ ve $\alpha \to \infty$ olarak alındığında eşitlik (2.4) ve (2.5) den, *X* rasgele değişkeni sıfır noktasında 1 yoğunluklu bir dejenere dağılıma sahip olur. $\beta = 1$ ve $\alpha \to \infty$ olarak alındığında *X* rasgele değişkeni 1 noktasında 1 yoğunluklu bir dejenere dağılıma sahip olur. $0 < \beta < 1$ ve $\alpha \to \infty$ olarak alındığında *X* rasgele değişkeni β noktasında 1 yoğunluklu bir dejenere dağılıma sahip olur. $0 < \beta < 1$ ve $\alpha \to 0$ olarak alındığında (2.3) den bütün *k* değerleri için $\lim_{\alpha \to 0} E(X^k) = (1-\beta)$ elde edilir. Bunun sonucu olarak $\alpha \to 0$ iken *k*. moment 1 noktasında $(1-\beta)$ yoğunluğunda bir Bernoulli dağılımının momentine yakınsar (Harris 1966, s. 103 e bakılabilir). Bu limit dağılımları, beta dağılımının limit dağılımlarına denktir (Van dorp ve Mazzuchi, 2000). Diğer bir deyişle $TSP(\alpha, \beta)$ dağılım sınıfının esnekliği, beta dağılım ailesi ile karşılaştırılabilirdir.

Bir başka ilginç limit dağılımı $A > 0$ rasgele bir sabit ve $\alpha > 1$ olmak üzere

$$Y = (a - 1)A\frac{(X - b)}{b} \tag{2.10.}$$

lineer dönüşümü kullanılarak türetilebilir. (2.1) ve (2.10)'dan,

$$f(y|a,b,A) = \begin{cases} \frac{ab}{(a-1)A}\left(1 + \frac{1}{a-1}\frac{Y}{A}\right)^{a-1} & -(a-1)A < Y < 0 \\ \frac{ab}{(a-1)A}\left(1 - \frac{1}{a-1}\frac{bY}{(1-b)A}\right)^{a-1} & 0 < Y < \frac{(1-b)(a-1)A}{b} \end{cases} \tag{2.11.}$$

elde edilir. $a \to \infty$ iken,

$$f(y|b,A) = \begin{cases} \frac{b}{A}\exp\left(\frac{Y}{A}\right) & Y \le 0 \\ \frac{b}{A}\exp\left(-\frac{b}{1-b}\frac{Y}{A}\right) & Y > 0 \end{cases} \tag{2.12.}$$

olasılık yoğunluğu elde edilir. Böylece $f(y|a,b,A)$, yoğunluğu $f(y|b,A)$ olan bir "Simetrik Olmayan Laplace" dağılımına yakınsar (Johnson ve ark. 1994 bakılabilir). Burada olasılık yoğunluğu b ve $(1-b)$ içinde A parametresi ne olursa olsun sıfırda bölünmüştür. Simetrik Olmayan Laplace dağılımı Kozubowski ve Podgorski (1999) tarafından incelenmiştir.

2.5. Kısmi Entropi

Mutlak sürekli bir olasılık yoğunluğuna sahip bir $f(y;\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonun, $g(y)$ olasılık yoğunluğuna bağlı kısmi entropisi (çapraz bilgi ya da ayrıştırma fonksiyonu)

$$E(f:g;\theta)=\int \log\left(\frac{f(y;\theta)}{g(y)}\right) f(y;\theta)\,dy \qquad (2.13.)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir (Soofi ve Retzer 2002). Ayrıca kısmi entropi, bir rasgele değişkenin Kullback-Leibler uzaklığı olarak isimlendirilmektedir (Kullback, 1959). Kısmi entropi, dağılımların içerdiği bilgileri karşılaştırmanın bir ölçüsüdür. Ayrıştırma terimi, $E(f:g;\theta)\geq 0$ olmasını ve $f(y;\theta)=g(y)$ olmasını ifade etmektedir.

Van dorp ve Kotz (2002b) *TSP* dağılımlarının içerdiği bilgi ile *Düzgün* $[0,1]$ dağılımının içerdiği bilgiyi teorik olarak karşılaştırmışlardır. Beta dağılımının *Düzgün* $[0,1]$ dağılımına bağlı kısmi entropisi, Soofi ve Retzer (2002) tarafından çalışılmıştır ve bu entropi

$$E(f:g\mid a,b)=\log(B(a,b)) - (a-1)(\psi(a)-\psi(a+b)) - (b-1)(\psi(b)-\psi(a+b)) \qquad (2.14.)$$

biçiminde elde edilmiştir. Burada,

$$f(x\mid a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \qquad (2.15.)$$

$a>0$, $b>0$, $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$, g *Düzgün* $[0,1]$ dağılıma sahip olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $\psi(\cdot)=\Gamma'(\cdot)$ psi fonksiyonudur.

TSP dağılımının, *Düzgün* $[0,1]$ dağılımına bağlı kısmi entropisi (2.1) ve (2.13) kullanılarak

$$E(f:g\mid a,b)=\log a-\frac{a-1}{a} \qquad (2.16.)$$

gibi bulunmuştur. Bu entropi, $\alpha = 1$ için en küçük değerini almaktadır yani 0 olmaktadır. Bunun nedeni $\alpha = 1$ için *TSP* dağılımının *Düzgün* $[0,1]$ dağılımına dönüşmesidir. Dikkat edilecek olursa (2.14) ve (2.16) yapı olarak benzerdir. $E(f:g|\alpha,\beta)$ değeri, β değeri ne olursa olsun α değerleri için sabittir. Böylece, β 'nın çeşitli değerleri, α değeri sabit iken *TSP* dağılımının içerdiği bilgiye hiçbir bilgi eklememekte veya çıkarmamaktadır. Sonuç olarak, [0,1] aralığındaki bütün üçgensel dağılımların, *Düzgün* $[0,1]$ dağılımına bağlı kısmi entropisi, $-1/2+\log(2)$ değerine eşittir ve β mod değerinden etkilenmemektedir.

2.6. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri

TSP dağılımının parametre tahminleri yapısından dolayı sıra istatistiklerinden faydalanarak elde edilmektedir. Özellikle de β yansıtma parametresinin tahmini için sıra istatistiği ön plandadır. Bu nedenle bu parametre, *TSP* yoğunluğunun tanımlamasında iki farklı analitik açıklama ile belirtildiğinden ayırıcı olarak düşünülebilir (Van dorp ve Kotz, 2004).

$\underline{X} = (X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n)$, $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımından *n* birimlik bir örneklem ve $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \mathbf{L}\, X_{(n)}$ de bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. Bu örneklem için sıra istatistiğine dayalı olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\underline{X};\alpha,\beta) = \alpha^n \left(\frac{\prod_{i=1}^{r} X_{(i)} \prod_{i=r+1}^{n} (1 - X_{(i)})}{\beta^r (1-\beta)^{n-r}} \right)^{\alpha-1} \qquad (2.17.)$$

eşitliği ile verilir. Burada $X_{(r)} \le \beta \le X_{(r+1)}$, $X_{(0)} = 0$ ve $X_{(n+1)} = 1$ dir.

Teorem 2.2 (Van dorp ve Kotz, 2002b). $\underline{X} = (X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n)$ *örneklemi* $TSP(a, b)$ *dağılımından alınmış n birimlik bir örneklem olsun. (2.17)'i maksimize eden en çok olabilirlik tahmin edicileri,*

$$\begin{cases} \hat{b} = X_{(\hat{r})} \\ \hat{a} = -\dfrac{n}{\log M(\hat{r})} \end{cases}, \tag{2.18}$$

dir. Burada $\hat{r} = \arg\max_{r \in (1,2,\mathbf{L}n)} M(r)$ *ve*

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^{n} \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}} \tag{2.19.}$$

biçimindedir.

3. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ ÜSTEL DAĞILIM

Üstel dağılım daha çok güvenirlilikte yaşam zamanı modellemelerinde kullanılan basit ve önemli bir dağılımdır (Johnson ve ark. 1994, Ahsanullah ve Hamedani, 2010). Diğer disiplinlerde ve istatistikte, basitliği ve işlenebilirliği üstel dağılımı popüler yapmaktadır. Üstel dağılımın, $E(\theta)$ gösterimi altında, oyf, kdf ve bozulma oranı fonksiyonları sırası ile

$$f_E(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \tag{3.1.}$$

$$F_E(x;\theta) = 1 - e^{-x/\theta} \tag{3.2.}$$

$$r(x;\theta) = \frac{f_E(x;\theta)}{1 - F_E(x;\theta)} = \frac{1}{\theta} \tag{3.3.}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $x > 0$ ve dağılımın ölçek parametresi olan $\theta > 0$ dır. Üstel dağılım azalan bir oyf'ye sahip olup, tehlike fonksiyonu sabit olan tek sürekli dağılımdır. Aynı zamanda, $Y \sim$ *Düzgün* $[0,1]$ olmak üzere $X = -\theta \log Y$ rasgele değişkeninin üstel dağılıma sahip olduğu iyi bilinmektedir. Bu dönüşüm üstel dağılımdan rasgele sayı üretiminde de kullanılmaktadır. Genel olarak baktığımızda bir logaritma dönüşümü altında tanımlanan logaritmik dağılımlar istatistikte çok kullanışlıdırlar (Marshall ve Olkin, 2007).

Diğer yandan, literatürde üstel dağılımın kullanılabilirliğini ve esnekliğini artırabilmek için çeşitli yöntemlerle bir çok genelleştirilmesi yapılmıştır. Örneğin Gupta ve Kundu (1999) tarafından, $GE(\alpha,\theta)$ gösterimi ile, üstelleştirilmiş üstel dağılımı, sıradan üstel dağılıma bir biçim parametresi eklenerek sunulmuştur. Bu dağılımın oyf'si

$$f_{GE}(x;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta} e^{-x/\theta} \left(1 - e^{-x/\theta}\right)^{\alpha-1},\ x,\alpha,\theta > 0 \tag{3.4.}$$

ile verilir. Ağırlıklı üstel dağılım Gupta ve Kundu (2009) tarafından $WE(\alpha,\lambda)$ gösterimi ve

$$f_{WE}(x;\alpha,\theta)=\frac{\alpha+1}{\alpha}e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\alpha\lambda x}\right),\ x,\alpha,\lambda>0 \tag{3.5.}$$

oyf'si ile verilmiştir. $BGE(a,b,\alpha,\lambda)$ gösterimi ile beta genelleştirilmiş üstel dağılımı Barretto-Souza ve ark. (2010) tarafından

$$f_{BGE}(x;a,b,\alpha,\lambda)=\frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{a\alpha-1}\left[1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{\alpha}\right]^{b-1},\ x,a,b,\alpha,\lambda>0 \tag{3.6.}$$

oyf'si ile bulunmuştur. Burada $B(\cdot;\cdot)$ ile verilen ifade eşitlik (2.15)'de verilen *Beta* fonksiyonudur. Üstel dağılımın bir başka açılımı Nadarajah ve Haghighi (2001) tarafından verilmiştir. Bu dağılımın oyf'si $NHGE(\alpha,\lambda)$ gösterimi ile

$$f_{NHGE}(x;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda\, e^{-\lambda x}(1+\lambda x)^{\alpha-1}e^{1-(1+\lambda x)^{\alpha}},\ x,\alpha,\lambda>0 \tag{3.7.}$$

biçiminde elde edilmiştir. Aynı zamanda Laplace dağılımı da çifte üstel (*double exponential*) ya da değiştirilmiş iki yönlü üstel dağılımı olarak da bilinir.

Tezin bu bölümünde, 2. bölümde verilen *TSP* dağılımlı bir rasgele değişkenin logaritmik bir dönüşümü kullanılarak, bir iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılım elde edilmiş ve yeni dağılımın temel dağılımsal özellikleri incelenmiştir. Ayrıca dağılım parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiş olup, bir similasyon çalışması ve iki gerçek veri analizi yapılmıştır. Elde edilen yeni iki yönlü dağılım, sıradan üstel dağılımdan daha esnek bir yapıda olup, parametrelerin durumlarına göre daha farklı biçimler alabilmektedir. Bu ise farklı veri setlerini modellemek için, elde edilen dağılıma bir avantaj sağlamaktadır. Bunun yanında bu dağılımın diğer bir avantajı ise dağılımlarda iki yönlülük fikrini sınırlı bir aralıktan sınırsız bir aralığa genişletmiş olmasıdır (Korkmaz ve Genç, 2013).

3.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Üstel Dağılımın Tanımlanması

Bu kısımda iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılım tanımlanmıştır ve dağılımın temel dağılımsal özellikleri çalışılmıştır.

3.1.1. Dağılımın Tanımlanması

Eşitlik (3.1)'de verilen üstel dağılımın bir başka genelleştirilmişini tanımlamak için, bir üstel dağılım dönüşümü olan $X = -\theta \log Y$ dönüşümündeki düzgün dağılımı yerine bunun daha genel hali olan $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımı, yani $Y \sim TSP(\alpha,\beta)$, düşünülmüştür. Buna göre X rasgele değişkenin kdf'si dağılım fonksiyonu tekniği kullanılarak

$$F(x;\alpha,\beta,\theta)=\begin{cases}(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^{\alpha} & 0<x\le -\theta\log\beta\\ 1-\beta^{1-\alpha}e^{-x\alpha/\theta} & -\theta\log\beta\le x<\infty\end{cases} \qquad (3.8.)$$

şeklinde elde edilmiştir. *TSP* dağılımının bir dönüşümünü kullandığımız için bu dağılıma iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılım diyeceğiz. Yeni dağılımın oyf'si aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.1. *Bir X rasgele değişkeni,* α *biçim parametreli,* β *konum parametreli ve* θ *ölçek parametreli iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılıma sahip ise bu dağılımın oyf'si*

$$f(x;\alpha,\beta,\theta)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\theta}(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-x/\theta} & 0<x\le -\theta\log\beta\\ \frac{\alpha}{\theta}\beta^{1-\alpha}e^{-x\alpha/\theta} & -\theta\log\beta\le x<\infty\end{cases} \qquad (3.9.)$$

eşitliği ile verilir. Burada $x\in(0,\infty);\alpha>0,\theta>0,\beta\in(0,1)$ *dir.*

İki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılımı $TSGE(\alpha,\beta,\theta)$ gösterimi ile ifade edeceğiz. Oyf doğal olarak parçalı fonksiyon şeklinde ifade edilmiştir. Oyf'nin ilk parçasına $(1-\beta)$ katkı sağlarken, diğer parçasına β parametresi katkı sağlamaktadır. Oyf'nin ilk parçası $GE(\alpha,\theta)$ dağılımın $(1-\beta)^{1-\alpha}$ ifadesi ile, diğer parçası ise $E(\theta/\alpha)$ dağılımının $\beta^{1-\alpha}$ ifadesi ile çarpılmıştır. Ek olarak *TSGE* dağılımı $GE(\alpha,\theta)$ dağılımının $-\theta\log\beta$ da üst sınırından kesilmiş dağılımı ile $E(\theta/\alpha)$ dağılımının $-\theta\log\beta$ da alt sınırından kesilmiş dağılımının bir karmasıdır. Yani, $E_{(a,b)}$, *a* ve *b* noktasında kesilmiş üstel dağılımı ifade etmek üzere

$$TSGE(\alpha,\beta,\theta)=(1-\beta)GE_{(0,-\theta\log\beta)}(\alpha,\theta)+\beta\,E_{(-\theta\log\beta,\infty)}\left(\frac{\theta}{\alpha}\right) \tag{3.10.}$$

karma formu verilebilir.

3.1.2. Yoğunluk Biçimi

$x\geq-\theta\log\beta$ olduğu zaman $f'(x)=-(\alpha/\theta)^2\beta^{1-\alpha}e^{-\alpha x/\theta}<0$ olmaktadır. Bu yüzden oyf bu tanım kümesinde azalandır. $x\leq-\theta\log\beta$ ve $\alpha<1$ olduğu zaman $f'(x)=\alpha/\left(\theta^2(1-\beta)^{\alpha-1}\right)e^{-x/\theta}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^{\alpha-1}\left(\alpha e^{-x/\theta}-1\right)<0$ olmakta ve oyf bu durum için azalan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $\alpha<1$ ve bütün $x>0$ için oyf her iki tanım kümesinde de azalandır.

f' fonksiyonunun $x=-\theta\log\beta$ noktasındaki sağdan ve soldan limit değerleri sırasıyla

$$\lim_{x\to-\theta\log\beta^{+}}f'(x)=\left(-\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\beta \tag{3.11.}$$

$$\lim_{x\to-\theta\log\beta^{-}}f'(x)=\frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{\theta^2(1-\beta)} \tag{3.12.}$$

biçimindedir. Bu limitler ancak $\alpha = 1$ olduğu zaman, yani üstel dağılım durumunda, birbirine eşittir. Aksi halde bu limitler farklıdır ve $x = -\theta \log \beta$ noktasında $f(-\theta \log \beta)$ tanımlı değildir. Bu yüzden oyf $x = -\theta \log \beta$ da bir köşe noktaya sahiptir. Dahası $x \le -\theta \log \beta$ tanım aralığında $\alpha\beta < 1$ ve $\alpha > 1$ şartıyla, f fonksiyonu $x = \theta \log \alpha$ noktasında maximum olur. Aksi durumda $\alpha\beta \ge 1$ için $f' > 0$ olur ve f bu tanım aralığında artan bir fonksiyon olur. Bu durumda ise f, $x = -\theta \log \beta$ noktasında maximum olur. Sonuç olarak, $\alpha > 1$ için f tanım kümesi boyunca tek tepeli olur.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım kümesinin sınır noktalarındaki durumu

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ 1/\theta, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases} \tag{3.13.}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \tag{3.14.}$$

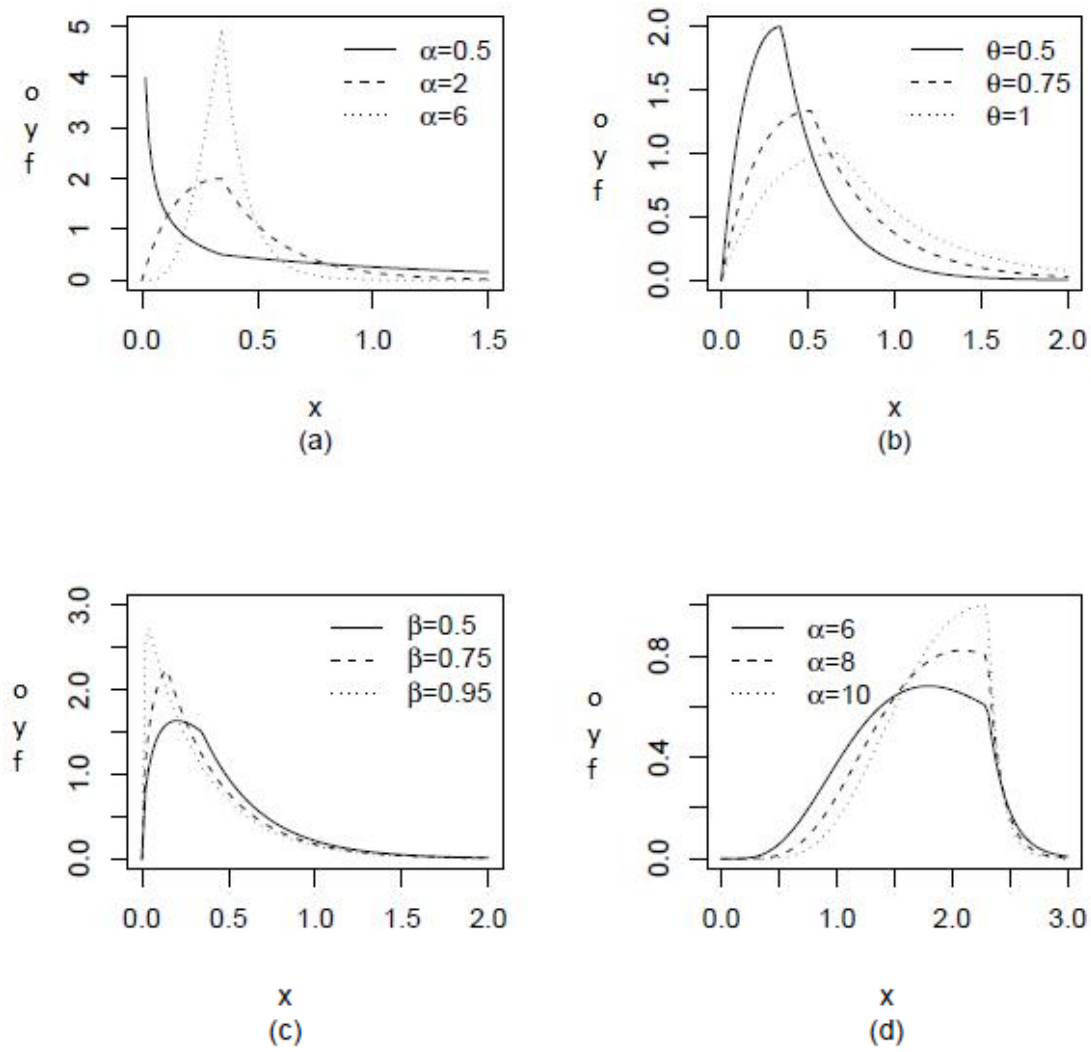
eşitliklerinde gibi elde edilir. Ölçek parametresi olan θ dağılımın kuyruğunu kontrol eder. θ'nın büyük değerleri için dağılım kalın kuyruklu olmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun parametrelerin çeşitli değerlerine göre şekilleri Şekil 3.1. de verilmiştir.

Lemma 3.1. *TSGE dağılımının oyf'si* $(0, -\theta \log \beta)$ *tanım aralığında* $\alpha < 1$ *için log-konveks ve* $\alpha > 1$ *için log-konkav bir yapıdadır.*

İspat. Oyf'nin logaritmasının ikinci türevi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f(x;\alpha,\beta,\theta) = \frac{(1-\alpha)}{\theta^2} \frac{e^{-x/\theta}}{\left(1-e^{-x/\theta}\right)^2} \begin{cases} < 0, & \alpha > 1 \\ > 0, & \alpha < 1 \end{cases} \tag{3.15.}$$

olduğundan istenilen sonuç sağlanır.



Şekil 3.1. Farklı parametre değerlerine göre *TSGE* dağılımının biçimleri;
(a) $\beta = \theta = 0.5$; (b) $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$; (c) $\alpha = 1.5$, $\theta = 0.5$;
(d) $\beta = 0.1$, $\theta = 1$.

3.1.3. Dağılımın Özel ve Limit Durumları

TSGE dağılımı, $\alpha = 1$ durumunda sıradan üstel dağılımı içerir. $\beta \to 0$ iken Gupta ve Kundu (1999) tarafından önerilen $GE(\alpha, \theta)$ dağılımı elde edilir. $\beta \to 1$ $E(\theta/\alpha)$ dağılımı elde edilir. $\alpha \to \infty$ eşitlik (3.8) den X, $x = -\theta \log \beta$ da 1 yoğunluklu dejenere dağılıma yakınsar. $\alpha \to 0$ ve $\beta \to 0$ iken dağılım, x=0 da 1 yoğunluklu dejenere dağılıma yakınsar. Dağılım $\theta \to 0$ iken sabit α ve β içinde, x=0 da 1 yoğunluklu dejenere dağılıma yakınsama gösterir.

3.1.4. Dağılım Fonksiyonu Özellikleri

Stokastik sıralama, yaşam zamanı çalışmalarında ve bir çok alanda rasgele değişkenleri sıralamak için kullanılan bir yöntemdir. Johnson ve ark. (1995) dağılımların sıralanması konusunda güzel bir özet vermişlerdir. Ayrıca Shaked ve Shantikumar (2007) stokastik sıralama için kullanışlı yöntemler göstermiştir.

Üstel dağılım ölçek parametresine göre stokastik artanlık özelliği göstermektedir. *GE* dağılım ailesinin stokastik sıralamanında içerisinde bulunduğu sıralama özelliklerine Gupta ve Kundu (1999) tarafından değinilmiştir. *TSP* dağılımı, biçim parametresinin durumuna göre konum parametresi için stokastik artanlık ve stokastik azalanlık özelliklerinin her ikisine de sahiptir (Van dorp ve Kotz, 2002b). Bu durum Bölüm 2 de verilmişti. *TSGE* dağılımı ise ölçek parametresi θ'ya göre stokastik artanlık özelliği göstermektedir. Diğer yandan, $\theta = 1$ olan *TSGE* dağılımlarının sıralama özelliği genelliğini kaybetmeksizin aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.

(a) *TSGE dağılımının dağılım fonksiyonu* $\beta_1 < \beta_2$ *ve* $\alpha > 1$ *için stokastik azalandır,*

(b) *TSGE dağılımının dağılım fonksiyonu* $\beta_1 < \beta_2$ *ve* $0 < \alpha < 1$ *için stokastik azalandır.*

İspat. $X \sim TSGE$ ile $Y \sim TSP$ dağılımlarının dağılım fonksiyonları arasındaki ilişki

$$F_X(x;\beta,\alpha) = 1 - F_Y(e^{-x};\beta,\alpha) \tag{3.16}$$

eşitliği ile verilir. Bu ilişki ve Van dorp ve Kotz (2002b) tarafından verilen *TSP* dağılımınının stokastik sıralama özellikleri kullanılarak teoremin sonucuna ulaşılır.

3.2. Rastgele Sayı Üretimi

TSGE dağılımından rastgele sayı dönüşüm yöntemi ile üretilebilir.
Bu metodda, ilk önce *R* paket programında *rmutil* paketi içerisindeki *twosidedpower* fonksiyonu kullanılarak *TSP* dağılımından bir *y* rasgele sayısı üretilir. Daha sonra $x = -\theta \log y$ koyularak rasgele sayı üretilmiş olur.

TSGE dağılımının *q.* kantili

$$F^{-1}(q;\alpha,\beta,\theta) = \begin{cases} -\theta \log\left\{1-\left(q(1-\beta)^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}\right\}, & 0 < q \le 1-\beta \\ -(\theta/\alpha)\log\left\{\beta^{\alpha-1}(1-q)\right\}, & 1-\beta \le q < 1 \end{cases} \quad (3.17.)$$

eşitliğindeki quantil fonksiyonu ile verilir. Dağılımın *q.* kantili, dağılımın konum parametresine bağlıdır. Özel olarak dağılımın medyanı

$$m = \begin{cases} -\theta \log\left\{1-\left((1-\beta)^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}/2\right\}, & 0 < q \le 1-\beta \\ -(\theta/\alpha)\log\left\{\beta^{\alpha-1}/2\right\}, & 1-\beta \le q < 1 \end{cases} \quad (3.18.)$$

ile verilir.

TSGE dağılımınından rasgele sayı üretmenin bir başka yolu da ters dönüşüm metodunu kullanmaktır. *U*, $(0,1)$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere,

$$X = \begin{cases} -\theta \log\left\{1-\left(U(1-\beta)^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}\right\}, & 0 < U \le 1-\beta \\ -(\theta/\alpha)\log\left\{(1-U)\beta^{\alpha-1}\right\}, & 1-\beta \le U < 1 \end{cases} \quad (3.19.)$$

rasgele değişkeni, olasılık integral dönüşümü ile $TSGE(\alpha,\beta,\theta)$ dağılımına sahiptir. Bu ilişki dağılımdan sayı üretmek içinde kullanılabilir. Bunun yanında, TSGE dağılımı için (3.10) eşitliğinde verilen karma dağılım eşitliği kullanılarak da sayı üretilebilir. β karma parametreli kesilmiş üstel dağılım ve $1-\beta$ karma parametreli kesilmiş genelleştirilmiş üstel dağılım eşitlik (3.10) gibi düzenlenirse, iki yönlü genelleştirilmiş üstel dağılımdan sayı üretilmiş olur.

3.3. Bozulma Oranı Fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu, elde edilen verinin çeşitliliğinden dolayı özellikle yaşam zamanı çalışmalarında önemli bir yere sahiptir (Barlow ve Proschan, 1975, Cox ve Oakes, 1984 ve Lee ve Wang, 2003). *TSGE* dağılımı, hem iki yönlü hem de karma bir dağılım olduğu için alternatif bir yaşam zaman dağılımıdır. Örneğin, iki farklı bileşenden oluşan ve üretim koşullarından dolayı farklı olan yaşam uzunlukları bir araya getirilmek istenebilir. Bu nedenle böyle bir durumu modellemek bir karma dağılım kullanmayı gerektirir.

Bu dağılımın bozulma oranı fonksiyonu,

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha/\theta)(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-t/\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-t/\theta}}{1-(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-t/\theta}\right)^{\alpha}}, & 0<t<-\theta\log\beta \\ \alpha/\theta, & -\theta\log\beta<t<\infty\end{cases} \qquad (3.20.)$$

eşitliğindeki gibi elde edilir. Bozulma oranı fonksiyonunun biçimleri her iki tanım kümesinde de farklıdır. Ancak $\alpha=1$ durumunda tüm uzay üzerinde sabit bozulma oranı vardır. Öte yandan uzayın $(-\theta\log\beta,\infty)$ aralığında da sabit bir bozulma oranının olduğu görülmektedir. Tanım kümesinin diğer kısmındaki bozulma oranı fonksiyonu biçimi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. *TSGE dağılımının pozitif uzayının* $(0\,;-\theta\log\beta)$ *tanım aralığı üzerinde, dağılım, eğer* $\alpha>1$ *ise artan bozulma oranına, eğer* $\alpha<1$ *ise azalan bozulma oranı fonksiyonuna sahiptir.*

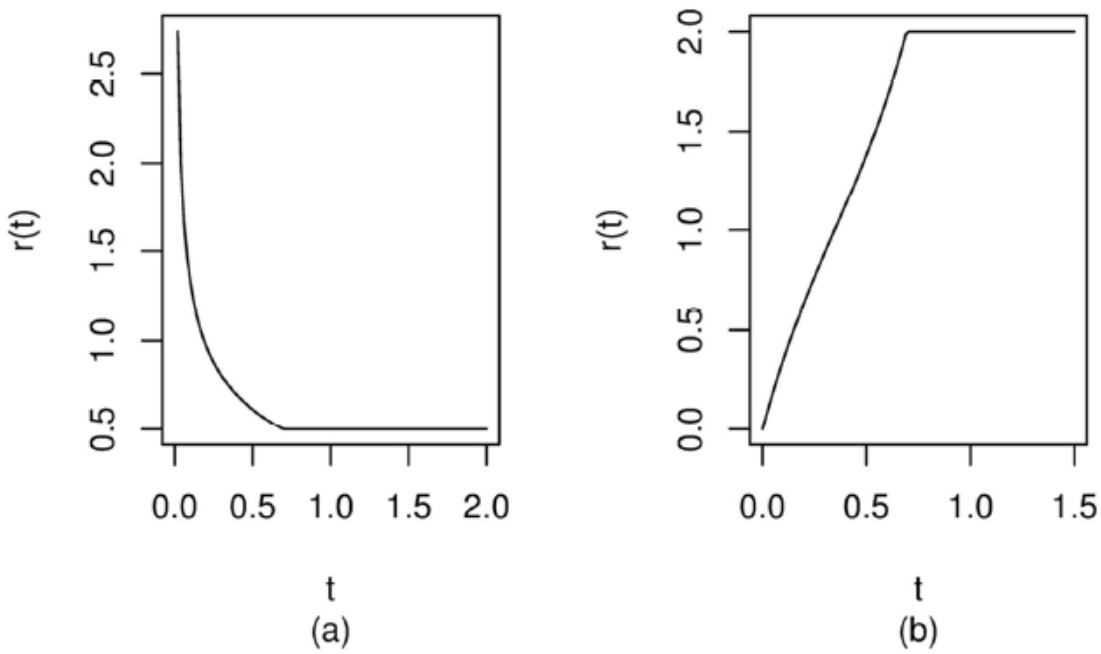
İspat. Lemma (3.1) de verilen log-konvekslik özelliğinden ispat görülebilir (Barlow ve Proschan, 1975).

Ayrıca $r(t)$ nin limit durumlar aşağıda verilmiştir.

$$\lim_{t\to\infty} r(t)=\alpha/\theta \tag{3.21}$$

$$\lim_{t\to 0} r(t)=\begin{cases}0, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1\end{cases} \tag{3.22.}$$

Böylelikle $\alpha<1$ olduğu zaman, bozulma oranı fonksiyonu ilk önce ∞ dan α/θ ya azalır daha sonra ise sabit olarak devam eder. $\alpha>1$ olduğu zaman, bozulma oranı fonksiyonu ilk önce 0 dan α/θ ya artar daha sonra ise sabit olarak devam eder (Şekil 3.2). Bozulma oranı fonksiyonunun değişim noktası ise $-\theta\log\beta$ dır. Sonuç olarak *TSGE* dağılımının bozulma oranı fonksiyonu hem azalamayan hem de artmayandır.



Şekil 3.2. $TSGE(\alpha, 0.5, 1)$ dağılımı için bozulma oranı grafikleri, (a) $\alpha = 0.5$ ve (b) $\alpha = 2$.

3.4. Momentler

Bu kısımda *TSGE* dağılımının momentleri kapalı formda elde edilmiştir. $X \sim TSGE(\alpha, \beta)$ ve $\gamma X \sim TSGE(\alpha, \beta, \gamma)$ olduğu için genelliğini kaybetmeksizin ölçek parametresi $\gamma = 1$ alınarak işlem adımları sadeleştirilmiştir.

Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu $E\left(Y^{-t}\right)$ beklenen değeridir ve bu beklenen değer Gradshteyn ve Ryzhik (2000) tarafından eşitlik (3.194.1) de verilen formül ile,

$$M(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\beta^{1-t} + (1-\beta)\,{}_2F_1(t, \alpha; \alpha+1; 1-\beta)\,,\ t < \alpha \qquad (3.23.)$$

eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Burada ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot)$ ile gösterilen fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyondur ve

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i x^i}{(c)_i \, i!} \tag{3.24.} $$

eşitliği ile verilir. Burada $(z)_i$ ifadesi, $(z)_i = z(z+1)\mathbf{L}(z+i-1)$ ile verilen artan faktöriyeli ifade eder.

Teorem 3.3. *TSGE dağılımının k. momenti*

$$ \nu_k = E(X^k) = \frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{\gamma(k+1, -(j+1)\log\beta)}{(j+1)^{k+1}} + \alpha^{-k} \beta^{1-\alpha} \Gamma(k+1, -\alpha \log\beta) $$

ile verilir. Burada

$$ \Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} w^{\alpha-1} e^{-w} dw \tag{3.25.} $$

$$ \gamma(\alpha, x) = \int_0^{x} w^{\alpha-1} e^{-w} dw \tag{3.26.} $$

ifadeleri tamamlanmamış gamma fonksiyonlarını ifade eder.

İspat. Moment tanımlaması kullanılarak

$$ \nu_k = E(X^k) = \frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_0^{-\log\beta} x^k \left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-1} e^{-x} dx + \frac{\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_{-\log\beta}^{\infty} x^k e^{-x\alpha} dx \tag{3.27.} $$

eşitliği elde edilir. $0 < x < \infty$ için $0 < e^{-x} < 1$ olduğundan dolayı

$$ \left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} e^{-xj} \tag{3.28.} $$

Binom açılımı ile verilen eşitlik elde edilir. Böylece (3.27) deki ilk integral, Gradshteyn ve Ryzhik (2000) tarafından eşitlik (3.381.1) de verilen formül ile,

$$\frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}\frac{\Gamma(k+1,-(j+1)\log\beta)}{(j+1)^{k+1}} \tag{3.29.}$$

ifadesine eşit olur. Böylece (3.27) deki ikinci integral ise Gradshteyn ve Ryzhik (2000) tarafından eşitlik (3.381.3) de verilen formül ile,

$$\alpha^{-k}\beta^{1-\alpha}\Gamma(k+1,-\alpha\log\beta) \tag{3.30.}$$

ifadesine eşittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Kural 3.1. *TSGE dağılımının ilk dört momenti sırasıyla,*

$$E(X)=\frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}\left[\frac{1}{j+1}\beta^{j+1}\log\beta+\frac{(1-\beta^{j+1})}{j+1}\right]$$
$$+\beta(\alpha^{-1}-\log\beta) \tag{3.31.}$$

$$E(X^2)=\frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}\left[\frac{\beta^{j+1}\log^2\beta}{j+1}\left(\frac{2}{j+1}-\log\beta\right)+\frac{2(1-\beta^{j+1})}{(j+1)^3}\right]$$
$$+\beta(2\alpha^{-1}(\alpha^{-1}-\log\beta)+\log^2\beta) \tag{3.32.}$$

$$E(X^3)=\frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}\left[\frac{6}{(j+1)^4}(1-\beta^{j+1})+\frac{\beta^{j+1}\log\beta}{j+1}\left(\frac{6}{(j+1)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\log\beta}{j+1}+\log^2\beta\right)\right]+\beta\left[\frac{6}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}-\log\beta\right)+\left(\frac{3}{\alpha}-\log\beta\right)\log^2\beta\right]$$
(3.33.)

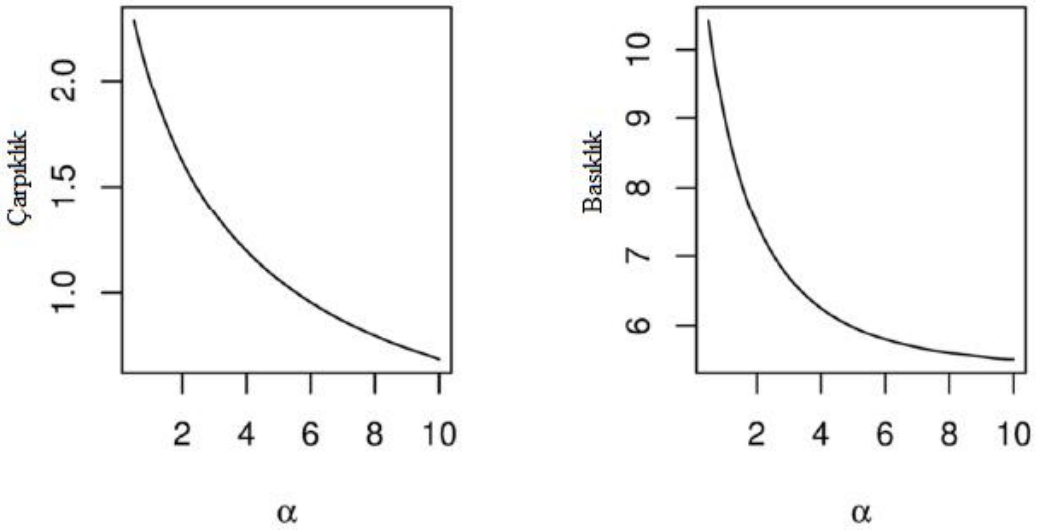
$$E\left(X^4\right)=\frac{a}{\left(1-b\right)^{a-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{a-1}{j}\left[\frac{24}{(j+1)^5}\left(1-b^{j+1}\right)+\frac{b^{j+1}\log b}{j+1}\left(\frac{24}{(j+1)^3}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{12\log b}{(j+1)^2}+\frac{4\log^2 b}{j+1}-\log^3 b\right]+b\left[\frac{24}{a^3}\left(\frac{1}{a}-\log b\right)+\log^2 b\right.$$

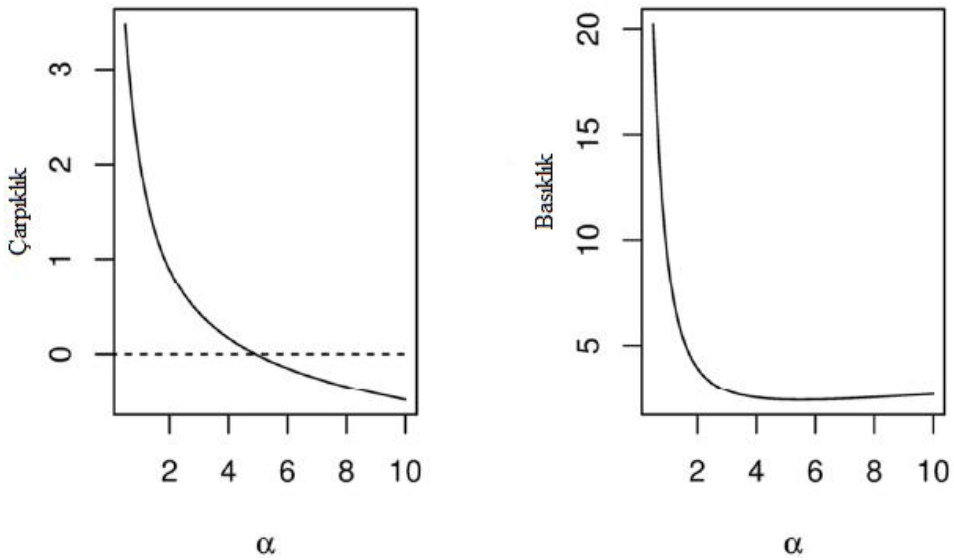
$$\left.\left(\frac{12\log b}{a^2}-\frac{4\log b}{a}+\log^2 b\right)\right] \qquad (3.34.)$$

eşitliklerindeki gibi elde edilir.

Yukarıda elde edilen ilk 4 moment, $\delta_1=\left(\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3\right)/\left(\mu_2-\mu_1^2\right)^{3/2}$ çarpıklık ve $\delta_2=\left(\mu_4-4\mu_1\mu_3+6\mu_2\mu_1^2-3\mu_1^4\right)/\left(\mu_2-\mu_1^2\right)^2$ basıklık formüllerinde yerine koyularak elde edilebilir. Ayrıca, varyasyon katsayısı $CV=\left(\mu_2-\mu_1^2\right)^{1/2}/\mu_1$ ifadesi de hesaplanabilir. Tablo 3.1 de, beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri seçilen bazı parametre değerleri için hesaplanmıştır. $a=1$ üstel dağılım durumunda, ortalama, varyans ve varyasyon katsayısının değerleri 1değerine medyan değeri 0.6931 değerine çarpıklık ölçüsü 2 değerine ve basıklık katsayısı ise 9 değerine eşit olmaktadır. $b=0.5$ için *TSGE* dağılımının medyanı, a değeri ne olursa olsun üstel dağılımın medyanına eşittir. Sabit a değerleri için b arttıkça, dağılımın varyansı ve medyanı artarken varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklığın azaldığı görülmektedir. Sabit b değerleri için a arttıkça, varyans, varyasyon katsayısı ve çarpıklık azalır, medyan ise $b<0.5$ için artar ve $b>0.5$ için azalır. b arttıkça dağılımın beklenen değeri, sabit $a<1$ için artarken sabit $a>1$ için azalmaktadır. Şekil 3.3 de sabit $b=0.5$ için biçim parametresi a nın değerlerine göre çarpıklık ve basıklık grafikleri verilmiştir. Sayısal hesaplamalardan a nın büyük ve b nın küçük değerlerinde, örneğin $b=0.1$ ve $a=5$, dağılım için sola (negatif) çarpıklık gözlemlenmektedir. Bu durumda basıklık katsayısı ilk önce azalır daha sonra yavaşça artar (Şekil 3.4 e bakılabilir).



Şekil 3.3. *TSGE* dağılımı $b = 0.5$ için çarpıklık ve basıklık grafiği



Şekil 3.4. *TSGE* dağılımı $b = 0.1$ için çarpıklık ve basıklık grafiği

Tablo 3.1. *TSGE* dağılımının beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri

b	a	*E(X)*	*Var*	*m*	*CV*	d_1	d_2
0.1	0.5	0.8523	1.9809	0.3254	1.6513	3.4772	20.2565
	1.5	1.1356	0.7313	0.9371	0.7530	1.2929	5.4066
	2	1.2442	0.5954	1.1112	0.6202	0.8878	3.9419
	5	1.6025	0.2979	1.6103	0.3406	-0.0142	2.4391
0.2	0.5	1.0270	2.6015	0.3747	1.5705	2.9628	15.2410
	1.5	1.0480	0.6122	0.8790	0.7466	1.4059	6.1941
	2	1.0976	0.4405	1.0009	0.6047	1.0117	4.7872
0.3	0.5	1.1794	3.0290	0.4418	1.4757	2.6476	12.7838
	1.5	0.9783	0.5477	0.8195	0.7564	1.5473	6.9523
	2	0.9840	0.3625	0.8955	0.6119	1.2170	5.7608
0.4	0.5	1.3180	3.3413	0.5390	1.3869	2.4341	11.3449
	1.5	0.9191	0.5080	0.7570	0.7755	1.6784	7.5886
	2	0.8891	0.3171	0.7935	0.6334	1.4307	6.6813
0.5	0.5	1.4467	3.5727	0.6931	1.3065	2.2821	10.4284
	1.5	0.8669	0.4825	0.6931	0.8012	1.7875	8.0889
	2	0.8069	0.2891	0.6931	0.6664	1.6203	7.4665
0.6	0.5	1.5678	3.7424	0.8755	1.2339	2.1721	9.8239
	1.5	0.8200	0.4658	0.6324	0.8323	1.8719	8.4611
	2	0.7338	0.2715	0.6020	0.7101	1.7715	8.0815
0.7	0.5	1.6828	3.8627	1.0296	1.1679	2.0936	9.4262
	1.5	0.7772	0.4551	0.5810	0.8680	1.9326	8.7209
	2	0.6678	0.2605	0.5249	0.7644	1.8809	8.5227
0.8	0.5	1.7927	3.9419	1.1632	1.1075	2.0407	9.1769
	1.5	0.7378	0.4487	0.5365	0.9080	1.9721	8.8860
	2	0.6074	0.2541	0.4581	0.8299	1.9515	8.8058
0.9	0.5	1.8983	3.9861	1.2809	1.0518	2.0100	9.0418
	1.5	0.7011	0.4454	0.4972	0.9520	1.9935	8.9739
	2	0.5518	0.2509	0.3993	0.9079	1.9890	8.9559

3.5. Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri, istatistik ve ilgili diğer alanlarda çok önemli bir yere sahiptir (bknz. Arnold ve ark., 1992). $X_1, X_2, \mathbf{L}\, X_n$, *TSGE* dağılımından alınmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı *n* birimlik örneklem ve $X_{1:n}, X_{2:n}, \mathbf{L}\, X_{n:n}$ bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. $X_{r:n}$ ile ifade edilen *r*. sıra istatistiğinin dağılımı $1 \le i \le n$ için,

$$f_{r:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n!\alpha(1-\beta)^{r(1-\alpha)}}{\lambda(r-1)!(n-r)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(1-\beta)^{i(1-\alpha)}\left(1-e^{-x/\lambda}\right)^{\alpha(i+r)-1}e^{-x/\lambda}, & 0<x\le -\lambda\log\beta\\ \dfrac{n!\alpha\beta^{(1-\alpha)(1+n-r)}}{\lambda(r-1)!(n-r)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}\beta^{i(1-\alpha)}e^{-x\alpha(n-r+i+1)/\lambda}, & -\lambda\log\beta\le x<\infty\end{cases} \tag{3.35.}$$

eşitliğindeki gibi bulunur. Özel olarak, en büyük ve en küçük sıra istatistiğinin oyfsi sırasıyla,

$$f_{n:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n\alpha(1-\beta)^{n(1-\alpha)}}{\lambda}\left(1-e^{-x/\lambda}\right)^{n\alpha-1}e^{-x/\lambda}, & 0<x\le -\lambda\log\beta\\ \dfrac{n\alpha\beta^{(1-\alpha)}}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\beta^{i(1-\alpha)}e^{-x\alpha(i+1)/\lambda}, & -\lambda\log\beta\le x<\infty\end{cases} \tag{3.36.}$$

$$f_{1:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n\alpha(1-\beta)^{(1-\alpha)}}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{\left(1-e^{-x/\lambda}\right)^{\alpha(i+1)-1}}{(1-\beta)^{i(\alpha-1)}e^{x/\lambda}}, & 0<x\le -\lambda\log\beta\\ \dfrac{n\alpha\beta^{n(1-\alpha)}}{\lambda}e^{-\alpha n x/\lambda}, & -\lambda\log\beta\le x<\infty\end{cases} \tag{3.37.}$$

ile verilir. *r*. sıra istatistiğinin *k*. momenti, *k*=1,2,3,…, olmak üzere aşağıdaki eşitlik gibi bulunmuştur.

$$E\left(X_{r:n}^{k}\right)=\frac{n!\theta^{k}}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{\beta^{(1-\alpha)(1+n-r)}}{\alpha^{r}}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i}\binom{r-1}{i}\frac{\beta^{i(1-\alpha)}}{(1+n-r+i)^{k+1}}\right.$$

$$\times\Gamma\left(k+1,-\alpha(1+n-r+i)\log\beta\right)+\alpha(1-\beta)^{r(1-\alpha)}\sum_{i=0}^{n-r}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}\binom{n-r}{i}\binom{\alpha(i+r)-1}{j}$$

$$\left.\times\frac{(1-\beta)^{i(1-\alpha)}}{(1+j)^{k+1}}\Gamma\left(k+1,-(j+1)\log\beta\right)\right\}.$$

Buradaki gamma fonksiyonları (3.25) ve(3.26) da tanımlanmıştır.

3.6. Entropiler

3.6.1. Rényi Entropisi

f yoğunluklu bir dağılım için Rényi entropisi

$$I_{R}(\omega)=\frac{1}{1-\omega}\log\left\{\int f^{\omega}(x)dx\right\} \qquad (3.38.)$$

ile tanımlanır Burada $\omega>0$ ve $\omega\neq 1$ dir. Rényi entropisi, belirsizlik içinde değişimin bir ölçüsü olup bilgi teorisinde kullanılmaktadır. Nadarajah ve Zografos (2003), *TSP* dağılımını da içeren tek değişkenli bazı dağılımlar için entropi çokluklarını elde etmişlerdir.

Gradshteyn ve Ryzhik (2000) tarafından eşitlik (3.194.1) de verilen integral formülü ile *TSGE* dağılımının Rényi entropisi

$$\begin{aligned}I_{R}(\omega)=\frac{1}{1-\omega}\{&\omega\log(\alpha\beta)-\log(\omega\alpha)+\omega\log\alpha+\log(1-\beta)+2(1-\omega)\log\theta\\&+\log_{2}F_{1}(1-\omega,\omega(\alpha-1)+1;\omega(\alpha-1)+2;1-\beta)\\&-\log(\omega(\alpha-1)+1)\}\end{aligned} \qquad (3.39.)$$

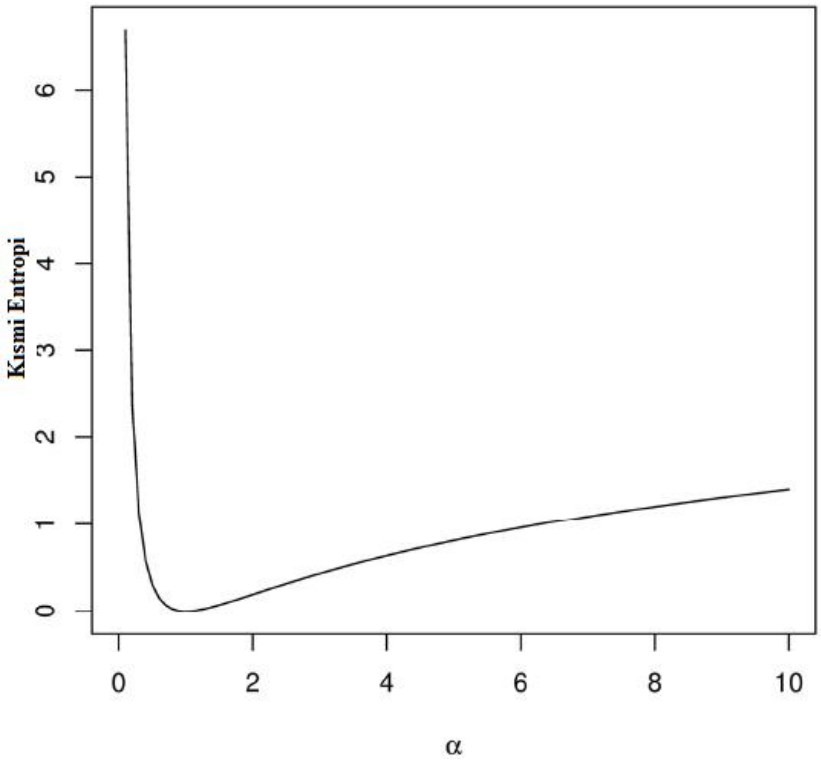
gibi elde edilir. Burada ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot)$ ifadesi (3.24) te verilen Gauss hipergeometrik fonksiyondur.

3.6.2. Kısmi Entropi

Bir dağılımın, içerdiği başka bir dağılıma olan kısmi entropisi, Bölüm 2 de eşitlik (2.13) de verilmiştir. *TSGE* dağılımı, üstel dağılımı içerdiği için *TSGE* dağılım ailesinin içerdiği bilgi ile üstel dağılımın içerdiği bilgiyi karşılaştırabiliriz. Eşitlik (2.13) kullanılarak kısmi entropi,

$$E(f:g\,|\,a,b)=\log a-\frac{a-1}{a} \qquad (3.40.)$$

olarak elde edilir. Kısmi entropi b parametresine bağlı olmayıp sadece a parametresinin bir fonksiyonudur. Bu nedenle b parametresi, üstel dağılıma göre *TSGE* dağılımının içerdiği bilgiye etki etmemektedir. $a=1$ olduğu zaman entropi, beklendiği gibi en küçük değeri olan 0'a eşit olacaktır. a parametresi 0'a yaklaştıkça entropi sonsuza yaklaşacaktır (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. *TSGE* dağılımının üstel dağılıma olan kısmi entropi grafiği

3.7. Parametre Tahmini

3.7.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri ve Bir Algoritma

$x_1, x_2, \mathbf{L}\, x_n$, $TSGE(\alpha, \beta, \theta)$ dağılımından alınmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı *n* birimlik örneklem ve $x_{(1)}, x_{(2)}, \mathbf{L}\, x_{(n)}$ bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. Tanım kümesinin ilk kısmının *r*. sıra istatistiğine, tanım kümesinin ikinci kısmının kalan *n-r*. sıra istatistiğine dayalı olarak oluşturulan olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \beta, \theta) = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^n e^{-n\bar{x}/\theta} \left[\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(1 - e^{-\frac{x_{(i)}}{\theta}}\right)\prod_{i=r+1}^{n} e^{-\frac{x_{(i)}}{\theta}}}{(1-\beta)^r \beta^r}\right]^{\alpha-1} \qquad (3.41.)$$

olarak elde edilmiştir. Burada, $r = 1,2,\mathbf{K},n$ için $x_{(r)} \pounds -q\log b < x_{(r+1)}$ ve $x_{(0)} \circ 0$, $x_{(n+1)} \circ \infty$ dir.

Sivri uçlu dağılımların aksine, düzgünlük şartlarına sahip olasılık yoğunluklu dağılımlar için, en çok olabilirlik tahminleri log-olabilirlik fonksiyonunda parametrelere bağlı kısmi türevlerin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir. Düzgünlük şartları için Roussas (1997)'e bakılabilir. *TSGE* dağılımı, $-q\log b$ noktasında bir sivriliğe yani bir köşe noktasına sahiptir. Diğer yandan, $-q\log b$, bazı $x_{(r)}$ değerlerine eşit olduğu zaman *TSGE* dağılımının log-olabilirlik fonksiyonu, $-q\log b$ noktasında türevlenemez. Ancak $-q\log b$, her hangi iki $x_{(i)}$ arasında olduğu zaman, log-olabilirlik fonksiyonu bu noktada türevlenebilir.

Önce q parametresi bilindiğinde a ve b parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri ile ilgilenelim. Genelliğini kaybetmeksizin $q = 1$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{l}(a,b) = n\log a - n\bar{x} + (a-1)\log\left[\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(1-e^{-x_{(i)}}\right)\prod_{i=r+1}^{n}e^{-x_{(i)}}}{(1-b)^{r}b^{r}}\right] \tag{3.42.}$$

log-olabilirlik fonksiyonu elde edilir. Bölüm 2 de Van dorp ve Kotz (2002b) tarafından verilen eşitlik (2.18) kullanılarak, a ve b parametreleri için

$$\begin{cases}\hat{a} = -\dfrac{n}{\log M(\hat{r})}\\ \hat{b} = e^{-x_{(\hat{r})}},\end{cases} \tag{3.43.}$$

tahminlerini elde ederiz. Burada $\hat{r} = \arg\max_{r\in(1,2,\mathbf{L}n)} M(r)$ ve

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1}\left(\frac{1-e^{-x_{(i)}}}{1-e^{-x_{(r)}}}\right)\prod_{i=r+1}^{n}\frac{e^{-x_{(i)}}}{e^{-x_{(r)}}} \tag{3.44.}$$

biçimindedir.

Şimdi α parametresini biliniyor kabul edelim. $\alpha > 1$ durumunda θ parametresine bağlı log-olabilirlik fonksiyonu θ için $\left[x_{(r)} / \log \beta , - x_{(r+1)} / \log \beta \right]$ aralığında türevlenebilir ve bu aralığın uç noktalarının birinde maximum olur. θ parametresine bağlı log-olabilirlik fonksiyonunun türevini alıp sıfıra eşitlediğimizde θ için,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \left[n\bar{x} + (\alpha - 1) \sum_{i=\hat{r}+1}^{n} x_{(i)} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{\hat{r}} \frac{x_{(i)} e^{- x_{(i)} / \hat{\theta}}}{1 - e^{- x_{(i)} / \hat{\theta}}} \right] \tag{3.45.}$$

biçiminde verilen sabit nokta çözümlü olabilirlik tahmin eşitliği elde edilir. $\alpha = 1$ için tahminin örneklem ortalaması olan $\bar{x}$ değerine eşit olduğu görülmektedir. Tahminleri elde edebilmek için bazı iteratif yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bütün parametreler bilinmediği zaman ise, tahminleri hesaplayan bir iteratif algoritma aşağıdaki gibi verilebilir.

Adım 1: k=0 alınır ve $\hat{\theta}^{(0)}$ başlangıç tahmini log-olabilirlikte yerine koyulur.

Adım 2:

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = e^{- x_{(\hat{r})} / \hat{\theta}^{(k)}}, \tag{3.46.}$$

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = - \frac{n}{\log M\left(\hat{r}, \hat{\theta}^{(k)}\right)} \tag{3.47.}$$

tahminleri elde edilir. Burada $\hat{r} = \arg\max_{r \in (1,2,\ldots,n)} M\left(r, \hat{\theta}^{(k)}\right)$ ve

$$M\left(r, \hat{\theta}^{(k)}\right) = \left(\prod_{i=1}^{r-1} \frac{1 - e^{- x_{(i)} / \hat{\theta}^{(k)}}}{1 - e^{- x_{(r)} / \hat{\theta}^{(k)}}} \right) \left(\prod_{i=r+1}^{n} \frac{e^{- x_{(i)} / \hat{\theta}^{(k)}}}{e^{- x_{(r)} / \hat{\theta}^{(k)}}} \right) \tag{3.48.}$$

biçimindedir.

Adım 3: Eşitlik (3.45) ile $\hat{\theta}^{(k+1)}$ bulunur ve θ güncelleştirilir.

Adım 4: $\left|\mathbf{l}\left(\hat{\alpha}^{(k+1)},\hat{\gamma}^{(k+1)},\hat{\beta}^{(k+1)},\hat{\theta}^{(k+1)}\right)-\mathbf{l}\left(\hat{\alpha}^{(k+1)},\hat{\gamma}^{(k)},\hat{\beta}^{(k+1)},\hat{\theta}^{(k)}\right)\right|$ değeri verilen tolerans değerinden, örneğin 10^{-3} gibi, küçükse algoritma durdurulur, değilse $k=k+1$ alınarak Adım 2'ye gidilir.

Eşitlik (3.45), türevlenebilir ve θ için sabit nokta çözümüdür. İyi bir başlangıç noktası alınıp yakınsama sağlanarak Newton metodu ile θ için çözüme ulaşılabilir. Olabilirlik tahmin eşitlikleri basit bir yapıda olmadığından en çok olabilirlik tahminleri, Newton metodu gibi iteratif prosüdürler içeren nümerik metotlarla hesaplanmalıdır. Ayrıca tahminleri elde etmek için bilgisayar paket programlardaki optimizasyon teknikleri kullanılabilir. Örneğin *R* paket programında *optim* komutu içindeki *L-BFGS-B* optimizasyon metodu kullanılabilir.

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi Fisher bilgi matrisinin tersi ile verilir. Düzgün oyf'ler için Fisher bilgi matrisinin elemanları, parametrelere bağlı log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci kısmı türevlerinin beklenen değerlerinin negatif değerleridir. Buna karşın *TSGE* dağılımı için Fisher bilgi matrisi oluşturulamaz. Bunun nedeni *TSGE* dağılımının tanım kümesinin, β ve θ parametrelerine bağlı olmasından dolayı düzgünlük şartlarına uymamasıdır.

3.7.2. Simülasyon Çalışması

Bu kısımda en çok olabilirlik tahmin edicilerin yanlılık özelliklerini incelemek için, bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bütün hesaplamalar *R* paket programı kullanılarak elde edilmiştir. *TSGE* dağılımının farklı parametre değerleri için 20, 50 ve 100 birimlik 10000'er örneklem üretilmiştir. Tahminler, *R* deki *optim* komutu ile elde edilmiştir. Tablo 3.2. de tahminlere ilişkin ortalama ve standart hatalar verilmiştir.

Tablo 3.2. den, tahminlerin oldukça durağan ve gerçek değerlerine yakın olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca, örneklem birim sayısı arttıkça yanlılık

değerlerinin düştüğü görülmektedir. Son olarak, a parametresi arttıkça, a tahmin yanlılığı artmaktadır.

3.8. Veri Analizi

Bu kısımda, biri sağa çarpık diğeri ise sola çarpık olan iki gerçek veri kümesi analiz edilmiştir. Parametreler in en çok olabilirlik tahminleri önce ***R*** paket programındaki *optim* komutu ile *L-BFGS-B* metodu kullanılarak sonrada algoritma çalıştırılarak elde edilmiştir. Sağa çarpık olan ilk veri kümesi için, önceden tanıtılan *WE, NHGE, BGE, TSGE* dağılımları karşılaştırılmıştır. Sola çarpık olan ikinci veri kümesi içinse, *TSGE* ile *BGE* dağılımları karşılaştırılmıştır.

3.8.1. Kobay Hayvanları Veri Kümesi

Bu kısımda, farklı miktarda tüberküloz bakterisi enjekte edilen kobay hayvanlarının yaşam süreleri (gün olarak) ile ilgilenilmiştir.

Tablo 3.2. Farklı parametre değerleri için *TSGE* dağılımından, simülasyon çalışması sonucu tahminlere ilişkin elde edilen ortalama ve standart sapmalar

			n=20			***n=50***			***n=100***		
a	b	q	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)
0.5	0.3	1	0.5349 (0.1336)	0.3137 (0.1454)	1.0117 (0.3310)	0.5092 (0.0778)	0.3073 (0.1208)	1.0010 (0.2259)	0.5019 (0.0540)	0.3054 (0.0990)	1.0027 (0.1736)
1	0.3	1	1.0426 (0.3599)	0.3256 (0.1809)	0.9896 (0.2976)	1.0189 (0.2114)	0.3313 (0.1771)	0.9947 (0.1853)	1.0126 (0.1399)	0.3324 (0.1808)	0.9969 (0.1251)
1.5	0.3	1	1.7181 (0.5237)	0.3449 (0.1957)	1.0445 (0.3254)	1.6046 (0.2850)	0.3251 (0.1519)	1.0237 (0.2178)	1.5590 (0.1794)	0.3189 (0.1321)	1.0143 (0.1462)
2	0.3	1	2.2790 (0.6408)	0.3251 (0.1617)	1.0452 (0.3372)	2.1382 (0.3575)	0.3200 (0.1346)	1.0309 (0.2203)	2.0724 (0.2287)	0.3103 (0.1042)	1.0133 (0.1526)
0.5	0.5	1	0.5351 (0.1520)	0.4880 (0.1671)	1.0488 (0.3611)	0.5114 (0.0911)	0.4925 (0.1382)	1.0224 (0.2421)	0.5037 (0.0642)	0.4931 (0.1110)	1.0135 (0.1839)
1	0.5	1	1.0371 (0.4129)	0.4855 (0.1864)	0.9930 (0.3494)	1.0178 (0.2504)	0.4966 (0.1840)	0.9970 (0.2231)	1.0120 (0.1783)	0.5013 (0.1884)	1.0006 (0.1634)
1.5	0.5	1	1.7375 (0.6016)	0.5083 (0.2031)	1.0478 (0.3823)	1.6374 (0.3879)	0.4991 (0.1704)	1.0412 (0.2835)	1.5624 (0.2242)	0.4944 (0.1469)	1.0184 (0.1816)
2	0.5	1	2.3337 (0.7585)	0.4853 (0.1737)	1.0526 (0.3991)	2.1541 (0.4143)	0.4936 (0.1409)	1.0340 (0.2536)	2.0735 (0.2673)	0.4885 (0.1169)	1.0107 (0.1725)
0.5	0.3	2	0.5362 (0.1296)	0.3307 (0.1610)	2.0145 (0.5974)	0.5102 (0.0764)	0.3143 (0.1269)	1.9934 (0.4229)	0.5033 (0.0537)	0.3079 (0.1026)	2.0058 (0.3301)
1	0.3	2	1.0427 (0.3612)	0.3523 (0.2012)	1.9775 (0.4821)	1.0100 (0.2043)	0.3287 (0.1830)	1.9859 (0.3281)	1.0128 (0.1419)	0.3317 (0.1832)	1.9936 (0.2603)
1.5	0.3	2	1.7376 (0.5084)	0.3324 (0.1867)	2.0543 (0.5896)	1.6186 (0.2736)	0.3281 (0.1582)	2.0364 (0.3825)	1.5645 (0.1815)	0.3160 (0.1366)	2.0211 (0.2888)
2	0.3	2	2.3023 (0.6533)	0.3150 (0.1585)	2.0626 (0.6731)	2.1501 (0.3562)	0.3135 (0.2284)	2.0323 (0.4214)	2.0812 (0.2284)	0.3061 (0.1074)	2.0159 (0.3191)

Veriler, Bjerkedal (1960) tarafından elde edilmiştir. Gupta ve ark. (1997), bu yaşam verisini lognormal dağılım için analiz etmiş ve Kolmogorov-Smirnov (*K-S*) testi ile dağılıma uygunluğunu test etmişlerdir. Sonuca göre lognormal dağılım (*LN*) uygunluğu reddedilmemiştir. Aynı zamanda bu veri kümesi, Gupta ve Kundu (2009) tarafından sunulan *WE* dağılımı için de analiz edilmiştir. Veriler aşağıda verilmiştir.
X={12, 15, 22, 24, 24, 32, 32, 33, 34, 38, 38, 43, 44, 48, 52, 53, 54, 54, 55, 56, 57, 58, 58, 59, 60,60, 60, 60, 61, 62, 63, 65, 65, 67, 68, 70, 70, 72, 73, 75, 76, 76, 81, 83, 84, 85, 87, 91, 95, 96, 98, 99, 109, 110, 121, 127, 129, 131, 143, 146, 146, 175, 175, 211, 233, 258, 258, 263, 297, 341, 341, 376}.

Veriye ait bazı betimsel istatistikler Tablo 3.3 de verilmiştir. Tablo 3den verinin sağa çarpık olduğu görülmektedir.

Tablo 3.3. Kobay hayvanları veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler

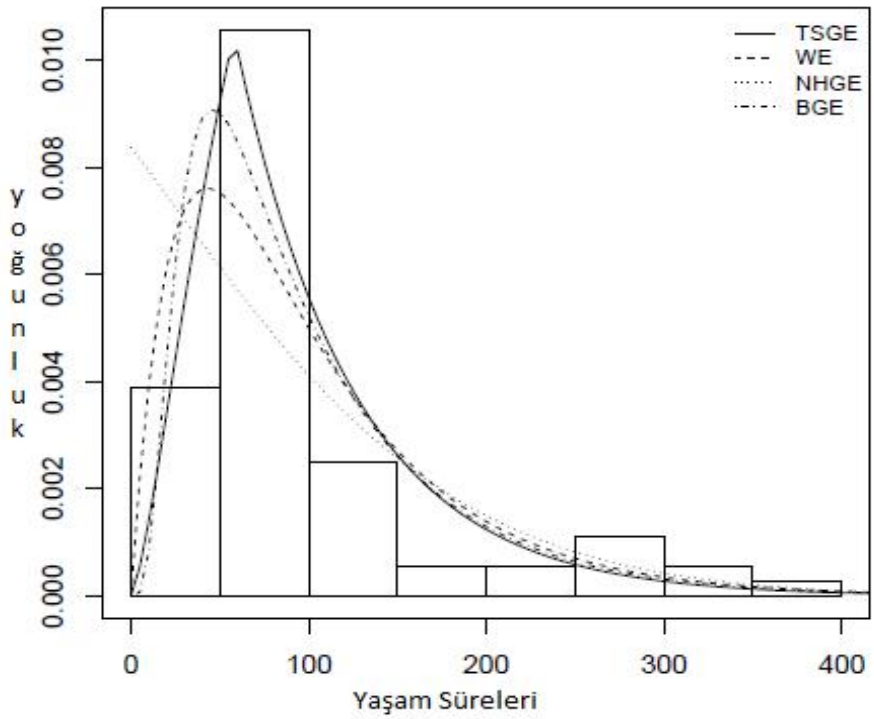
Ortalama	Medyan	Mod	SD	CV	Genişlik	Çarpıklık	Basıklık	*n*
99.82	70	60	80.55	0.8070	364	1.7962	5.6144	72

Veri kümesi, önceden değinilen üç genelleştirilmiş üstel dağılım ve *TSGE* dağılımı için analiz edilmiştir. En çok olabilirlik tahminlerine ilişkin hesaplamalar Tablo 3.4 de verilmiştir. Bunun yanında, *AIC* (*Akaike Information Criterion*) değerleri de $AIC = -2\mathbf{l}(\hat{\theta}) + 2p^*$ formülü kullanılarak hesaplanmıştır. p^*, modelde tahmin edilen parametre sayısını ifade etmektedir.

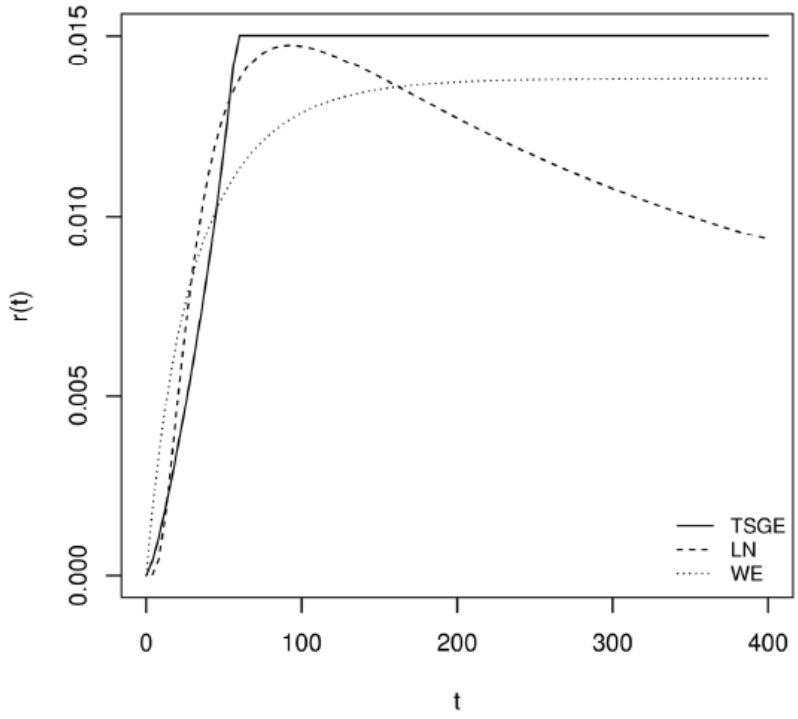
Tablo 3.4. *TSGE* dağılımı ile diğer dağılım modellerinin kobay hayvanları veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar (parantez içinde)

Model	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\mathbf{l}}$	*AIC*
WE			1.6243		0.0138		-393.5689	791.1378
			(1.2406)		(0.0023)			
NHGE			1.6118		0.0052		-401.4905	806.9810
			(0.3805)		(0.0017)			
BGE	1.4756	0.2222	4.0234		0.0631		-390.7999	789.5998
	(1.1674)	(0.1213)	(2.9724)		(0.0301)			
TSGE			2.4351	0.6993		162.1656	-389.4683	784.9366
			(0.2870)	(0.0126)		(0.3096)		

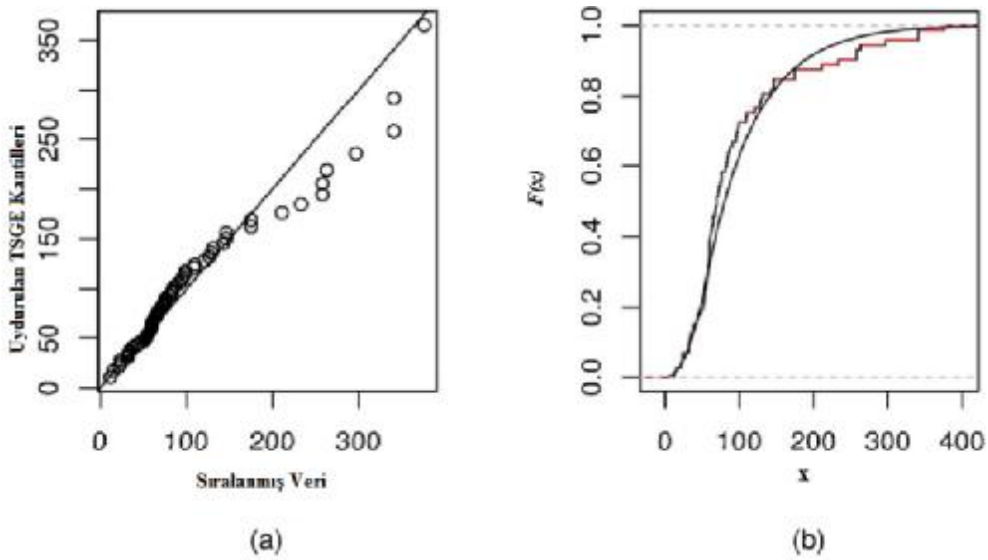
Bu kriterlere göre en iyi model araştırıldığında, en küçük *AIC* değeri ve en büyük log-olabilirlik değerlerine sahip olan model seçilmelidir. Tablo 3.4. incelendiğinde en küçük *AIC* değerine ve en büyük log-olabilirlik değerlerine, bu dağılımlar arasında, *TSGE* dağılımının sahip olduğu görülmektedir. *BGE* dağılımının uyumu, *TSGE* dağılımının uyumuna yakın olduğu söylenebilir (Şekil 3.6). Diğer yandan , Gupta ve ark. (1997) bu veri için, *K-S* ve *p* değerlerini sırasıyla 0.8222, 0.4856 olarak bulmuşlardır. *TSGE* dağılımının *K-S* değeri 0.1170 olarak elde edilmiş olup buna bağlı *p*-değeri ise 0.2776 olarak bulunmuştur. *K-S* değerine göre *TSGE* dağılımı, *LN* dağılıma göre veriye daha iyi uyum sağlamıştır. Şekil 3.7, *TSGE*, *LN* ve *WE* dağılımlarının bozulma oranı grafiğini göstermektedir. Şekil 3.8 de *TSGE* dağılımı için Q-Q plot (a) ve deneysel dağılıma karşı *TSGE* dağılımının dağılım fonksiyonları grafikleri (b) verilmiştir. Diğer yandan, bulunan tahmin sonuçlarına göre $-\hat{q}\log\hat{b} = 58$ olarak elde edilmiştir. Bu değerde 22. sıra istatistiği değerine denktir. Bu ise elde edilen tahminlerin doğruluğunu göstermektedir.



Şekil 3.6. *TSGE*, *WE*, *NHGE* ve *BGE* dağılımlarına göre modellenen kobay hayvanları yaşam sürelerinin veri kümesi grafiği



Şekil 3.7. Verilen üç model için bozulma oranı fonksiyonu grafikleri



Şekil 3.8. Kobay hayvanları veri kümesi için *TSGE* dağılımının (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri

Şimdi ise, bir önceki kısımda verilen algoritma kodları *R* de yazılarak tahminler bulunmuştur. Buna göre 18. iterasyonda yakınsama sağlanmış olup r nin tahmini 22 olarak elde edilmiştir. Öyle ki $-\hat{q}\log\hat{b} = 58 = x_{(22)}$ olmaktadır. Standart

sapmaları parantez içinde verilen tahminler ise, $\hat{a} = 2.4075(0.1866)$, $\hat{b} = 0.6987(0.0517)$, $\hat{q} = 161.7674(11.6585)$ olup bu tahminlere ilişkin log-olabilirlik değeri ise -389.466 olarak hesaplanmıştır. Bu bulgular ise, Tablo 3.4 de verilen değerlere oldukça yakındır.

3.8.2. Cam Liflerin (Fiber) Dirençleri Veri Kümesi

Sola çarpık olan bu veri kümesi, 63 gözlemden oluşmaktadır. Bu gözlemler 1.5 cm olan cam liflerin dirençleri olarak, İngiltere de ulusal fizik laboratuvarında elde edilmiştir. Literatürde bu veri kümesi, çarpık ve kalın kuyruklu dağılımları modellemek için oldukça sık kullanılmıştır (Jones ve Faddy, 2003, Azzalini ve Capitanio, 2003, Wang ve Genton, 2006, Arslan, 2008 ve Genç, 2013). Bu veri kümesi aşağıda verilen gözlemlerden oluşmaktadır ve verinin bazı istatistikleri Tablo 3.5 de verilmiştir.

X={ 0.55, 0.74, 0.77, 0.81, 0.84, 0.93, 1.04, 1.11, 1.13, 1.24, 1.25, 1.27, 1.28, 1.29,1.30, 1.36, 1.39, 1.42, 1.48, 1.48, 1.49, 1.49, 1.50, 1.50, 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.55, 1.58, 1.59, 1.60, 1.61, 1.61, 1.61, 1.61, 1.62, 1.62, 1.63, 1.64, 1.66, 1.66, 1.66, 1.67, 1.68, 1.68, 1.69, 1.70, 1.70, 1.73, 1.76, 1.76, 1.77, 1.78, 1.81, 1.82, 1.84, 1.84, 1.89, 2.00, 2.01, 2.24}

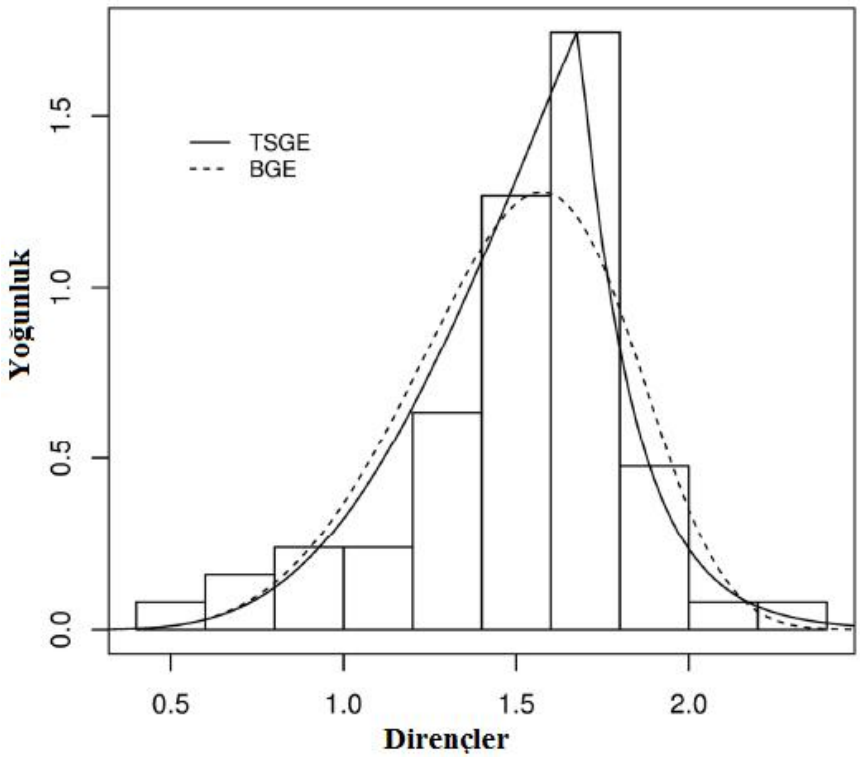
Tablo 3.5. Cam liflerin dirençleri veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler

Ortalama	Medyan	Mod	SD	CV	Genişlik	Çarpıklık	Basıklık	*n*
1.5070	1.5900	1.6100	0.2150	0.8070	1.6900	-0.8999	3.9237	63

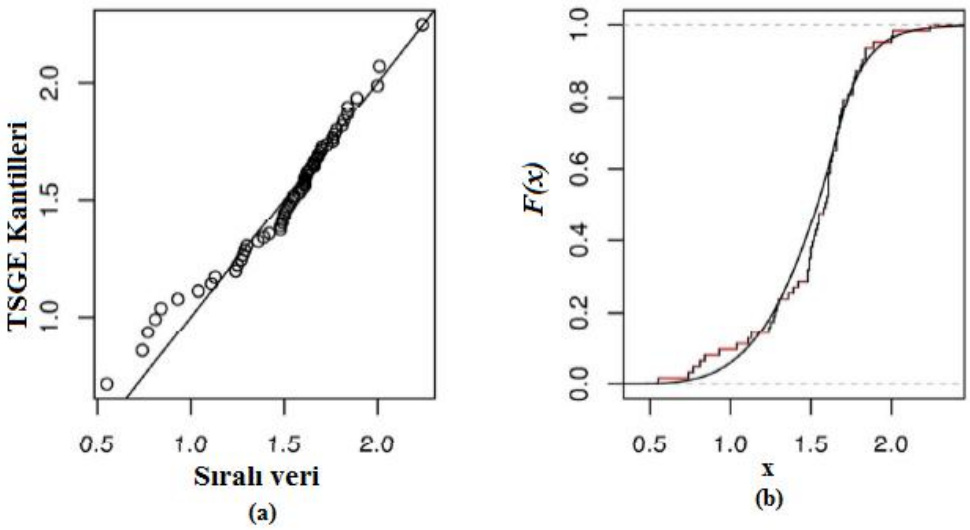
Barreto-Souza ve ark. (2010), *BGE* dağılımı ile klasik üstel ve Nadajarah ve Kotz (2006) tarafından sunulan beta üstel dağılımını bu veri kümesi ile karşılaştırmışlardır. *BGE* dağılımı, bu veriye üstel ve beta üstel dağılımlarından daha iyi uyum sağlamıştır. *BGE* dağılımı için parametreler $\hat{a} = 0.4125$, $\hat{b} = 93.4655$, $\hat{a} = 22.6124$, $\hat{l} = 0.9227$ değerleri ile tahmin edilmiş olup, bu tahminler için log-olabilirlik değeri -15.5995 olarak bulunmuştur (Barreto-Souza ve ark., 2010). Bu verilere göre *AIC* değeri, 39.1990 olarak elde edilir.

Bir önceki veri analizinde *BGE* dağılımı, diğer genelleştirilmiş üstel dağılımlardan daha iyi sonuç verdiği için, bu veri için *TSGE* ile *BGE* dağılımları karşılaştırılacaktır. Bu veri kümesi için *TSGE* dağılımlarının parametre tahminleri, $\hat{\alpha} = 8.2931\,(1.0450)$, $\hat{\beta} = 0.2785\,(0.0066)$, $\hat{\theta} = 1.3140\,(0.0126)$ olarak bulunmuştur. Parantez içindeki değerler tahminlerin standart hatalarını göstermektedir. Bu değerleri için log-olabilirlik değeri -12.3325 ve *AIC* değeri 30.6650 olarak elde edilir. Böylece *TSGE* dağılımı, *BGE* dağılımına göre log-olabilirlik ve *AIC* değerleri için veriye daha iyi uyum sağlamaktadır (Şekil 3.9 ve Şekil 3.10).

Ayrıca bir önceki kısımda verilen algoritma kodları, $\hat{\theta}^{(0)}$ başlangıç değeri örneklem ortalaması alınarak, *R* paket programında yazılıp tahminler bulunmuştur. Buna göre 7. iterasyonda yakınsama sağlanmış olup *r* nin tahmini 47 olarak elde edilmiştir. Öyle ki $-\hat{\theta}\log\hat{\beta} = 1.68 = x_{(47)}$ olmaktadır.



Şekil 3.9. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGE* ve *BGE* dağılımlarının yoğunluğu



Şekil 3.10. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGE* dağılımının (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri

Standart hataları parantez içinde verilen tahminler ise, $\hat{a} = 8.2771(0.0109)$, $\hat{b} = 0.2575(0.0008)$, $\hat{q} = 1.2381(0.0034)$ olup bu tahminlere ilişkin log-olabilirlik değeri ise -12.3679 olarak hesaplanmıştır. Bu bulgular ise yukarıda verilen değerlere oldukça yakındır.

4. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMI

Weibull dağılımı ilk olarak 1939 yılında, İsveçli fizikçi Walodi Weibull tarafından, materyallerin bozulma sürelerinin gösteriminde kullanılmıştır. Weibull dağılımı, günümüzde biyolojik, mühendislik, kalite kontrol, güvenilirlik çalışmaları gibi çok geniş uygulama alanlarına sahiptir (Johnson ve ark., 1995, Murthy ve ark., 2004). Bunun yanında Weibull dağılımı son zamanlarda bozulma sürelerini modellemede kullanılan dağılımların başında gelmektedir (Xie ve Lai, 1996, Xie ve ark., 2002, Lai ve Xie, 2003, Zhang ve Xie, 2007, Lu ve Shi., 2012, Silva ve ark., 2013). Weibull dağılımı sahip olduğu esnek yapıdan dolayı farklı türdeki verileri modellemede etkilidir.

Weibull dağılımı üstel dağılımın genelleştirilmiş bir halidir ve sahip olduğu biçim parametresinden ötürü üstel dağılıma göre daha esnek bir yapıya sahiptir. Aynı zamanda bozulma oranı, yalnızca sabit olmayıp artan veya azalan bir biçimde de olabilmektedir. $W(\gamma,\theta)$ ile ifade edilecek olan iki parametreli klasik Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\gamma,\theta)=\frac{\gamma}{\theta^{\gamma}}x^{\gamma-1}e^{-(x/\theta)^{\gamma}}, \quad x>0 \tag{4.1.}$$

ile verilir. Burada γ parametresi biçim parametresidir ve dağılımın biçimini belirler.θ parametresi ise dağılımın ölçek parametresidir. Weibull dağılımının biçim parametresi $\gamma=1$ alındığında üstel dağılım, $\gamma=2$ alındığında Rayleigh dağılımı elde edilir. Weibull dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırasıyla,

$$F(x;\gamma,\theta)=1-e^{-(x/\theta)^{\gamma}}, \qquad x \geq 0 \tag{4.2.}$$

$$S(x;\gamma,\theta)=e^{-(x/\theta)^{\gamma}}, \qquad x \geq 0 \tag{4.3.}$$

$$r(x;\gamma,\theta)=\frac{\gamma}{\theta^{\gamma}}x^{\gamma-1}, \qquad x \geq 0 \tag{4.4.}$$

eşitlikleriyle verilir. Biçim parametresi, $\gamma<1$ iken bozulma oranı fonksiyonu monoton azalan, $\gamma>1$ iken bozulma oranı fonksiyonu monoton artan ve $\gamma=1$ iken bozulma oranı fonksiyonu sabittir. Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=\theta\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \tag{4.5.}$$

$$V(X)=\theta^{2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)-\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right] \tag{4.6.}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $\Gamma(\cdot)$ fonksiyonu, eşitlik (3.25) de verilen gamma fonksiyonudur. Aynı zamanda, $Y \sim$ *Düzgün* $[0,1]$ olmak üzere $X=\theta(-\log Y)^{1/\gamma}$ rasgele değişkeni $W(\gamma,\theta)$ dağılımına sahiptir. Bu dönüşüm Weibull dağılımdan rasgele sayı üretiminde de kullanılmaktadır.

Diğer yandan, literatürde Weibull dağılımın kullanılabilirliğini ve esnekliğini daha da artırabilmek için çeşitli yöntemlerle birçok genelleştirilmesi yapılmıştır. Lai ve ark. (2011), literatürdeki genelleştirilmiş Weibull modelleri ve Weibull dağılımının genişletilmiş durumları için iyi bir tarama çalışması vermişlerdir. Literatürdeki genelleştirilmiş bazı Weibull modelleri aşağıda verilmiştir.

Mudholkar ve Srivastava (1993) tarafından, $EW(\alpha,\gamma,\theta)$ gösterimi ile, üstelleştirilmiş Weibull dağılımı, sıradan Weibull dağılımına bir biçim parametresi eklenerek sunulmuştur. Bu dağılımın oyf'si

$$f_{EW}(x;\alpha,\gamma,\theta)=\frac{\alpha\gamma\,x^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}}\exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}\right]\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}\right]\right\}^{\alpha-1}, \tag{4.7.}$$

eşitliği ile verilir. Burada $x > 0; \alpha, \gamma, \theta \geq 0$ dir.

Yazarlar bu dağılımın bazı özelliklerini ve en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Nassar ve Eissa (2003), *EW* dağılımının mod, momentler, bozulma oranı ve ortalama geri kalan ömür gibi istatistiksel özelliklerini incelemişlerdir.

$MW(x; \alpha, \beta, \theta)$ ile ifade edilen modifiye edilmiş Weibull dağılımı Lai ve ark. (2003) tarafından $x, \alpha, \beta, \theta > 0$ olmak üzere

$$f_{MW}(x; \alpha, \beta, \theta) = \alpha(\beta + \theta x)x^{\beta-1}\exp(\theta x)\exp\{-\alpha x^{\beta}\exp(\theta x)\} \quad (4.8.)$$

oyf'si ile verilmiştir.

Bir başka genelleştirilmiş Weibull modeli Bebbington ve ark. (2007) tarafından verilmiştir. $FW(\alpha, \beta)$ gösterimi ile esnek Weibull diye adlandırılan bu dağılımın oyf'si

$$f_{FW}(x; \alpha, \beta) = (\alpha + \beta / x^2)\exp(\alpha x - \beta / x)\exp(-e^{\alpha x - \beta / x}) \quad (4.9.)$$

ile verilmiştir. Burada, $x > 0; \alpha, \beta > 0$ dir.

Weibull ve geometrik dağılımın birleştirilmesi ile elde edilen Weibull-geometrik dağılımı Barreto-Souza ve ark., (2011) tarafından verilmiştir. $WG(\gamma, \beta, \theta)$ ile ifade edilen bu dağılımın oyf'si

$$f_{WG}(x; \alpha, \beta, \theta) = \gamma\theta^{\gamma}(1-\beta)x^{\gamma-1}e^{-(\theta x)^{\gamma}}\left(1-\beta e^{-(\theta x)^{\gamma}}\right)^{-2} \quad (4.10.)$$

eşitliğindeki gibidir. Burada, $x > 0$ ve $\gamma, \theta, a, b, > 0$ dir.

Yakın zamanda ise, Cordiero ve ark. (2011) ve Bidram ve ark. (2013) tarafından elde edilen beta Weibull-geometrik dağılımının oyf'si, $BWG(a, b, \gamma, \beta, \theta)$ gösterimi ile

$$f_{BWG}(x;a,b,\gamma,\beta,\theta)=\frac{\gamma(1-\beta)^{b}\theta^{\gamma}x^{\gamma-1}e^{-b(\theta x)^{\gamma}}\left(1-e^{-(\theta x)^{\gamma}}\right)^{a-1}\left(1-\beta e^{-(\theta x)^{\gamma}}\right)^{-(a+b)}}{B(a,b)} \quad (4.11.)$$

eşitliğindeki gibi verilir. Burada, $x>0;\gamma,\theta,a,b,>0$, $\beta\in(0,1)$ ve $B(\cdot;\cdot)$ ile verilen ifade eşitlik (2.15)'de verilen *beta* fonksiyonudur.

Tezin bu bölümünde, Bölüm 3 e paralel biçimde, klasik Weibull dağılımını daha esnek bir yapıya dönüştürmek amacıyla, *TSP* dağılımının bir logaritmik kuvvet dönüşümünü kullanarak genelleştirilmiş bir Weibull dağılımı elde edilmiştir. Elde edilen yeni dağılım iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımı olarak adlandırılmıştır. Yeni dağılım dört parametreye sahiptir. Bu parametrelerden ikisi biçim parametresi olduğu için bu yeni dağılımın, klasik Weibull ve diğer bazı Weibull modellerinden daha esnek bir yapıya sahip olması beklenir. Yeni iki yönlü dağılım, yine parametrelerinden dolayı, üstel, Rayleigh, Weibull, *EW*, *GE*, Burr-X ve tezin üçüncü bölümünde verilen *TSGE* dağılımlarını genellemektedir.

Bundan sonraki kısımlarda, iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımının tanımlanması yapılıp, bu dağılımın yoğunluk biçimi, özel ve limit durumları, dağılım fonksiyonu özellikleri, rastgele sayı üretimi, bozulma oranı fonksiyonu ve biçimi, ortalama geri kalan ömür, momentler, entropiler ve sıra istatistikleri gibi temel dağılımsal özellikleri incelenecektir. Parametrelere ilişkin en çok olabilirlik tahminleri bir algoritmayla verilip, bu algoritmaya yönelik bir simülasyon çalışması verilecektir. İki gerçek veri kümesi için veri analizi yapılmış olup klasik Weibull dağılımı ve literatürdeki diğer genelleştirilmiş Weibull dağılımları ile karşılaştırma yapılmıştır. Sonuçlar verilerek bu bölüm bitirilecektir.

4.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Weibull Dağılımının Tanımlanması

4.1.1. Dağılımın Tanımlanması

$TSP(\alpha,\beta)$ dağılımı, düzgün dağılımın genel bir biçimi olduğu için bu genel durumu klasik Weibull dağılımının bir genellemesini elde etmek için kullanılabiliriz.

$Y \sim TSP(\alpha,\beta)$ olsun. $X = \theta(-\log Y)^{1/\gamma}$ logaritmik kuvvet dönüşümlü bir rasgele değişken tanımlandığında, bu rasgele değişkenin kdf'si,

$$F(x;\alpha,\gamma,\beta,\theta)=\begin{cases}(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha}, & 0<x<\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\\ 1-\beta^{1-\alpha}e^{-\alpha\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}, & \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}<x<\infty.\end{cases} \quad (4.12.)$$

şeklinde elde edilir. *TSP* dağılımının bir dönüşümünü kullandığımız için bu dağılıma iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımı diyeceğiz. Yeni dağılımın oyf'si aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 4.1. *Bir X rasgele değişkeni,* α *ve* γ *biçim parametreli,* β *konum parametreli ve* θ *ölçek parametreli iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımına sahip ise bu dağılımın oyf'si*

$$f(x;\alpha,\gamma,\beta,\theta)=\begin{cases}\frac{\alpha\gamma(1-\beta)^{1-\alpha}}{\theta^{\gamma}}x^{\gamma-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha-1}, & 0<x<\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\\ \frac{\alpha\gamma\beta^{1-\alpha}}{\theta^{\gamma}}x^{\gamma-1}e^{-\alpha\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}, & \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}<x<\infty\end{cases} \quad (4.13.)$$

eşitliği ile verilir. Burada $x \in (0,\infty); \alpha>0, \gamma>0, \theta>0, \beta \in (0,1)$ *dir.*

$\alpha=1$ olduğu zaman (4.13) de verilen oyf klasik Weibull dağılımına indirgenir. Böylelikle Weibull dağılımı genelleştirilmiş olmaktadır. İki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımını $TSGW(\alpha,\gamma,\beta,\theta)$ gösterimi ile ifade edilecektir. *TSGE* dağılımına benzer bir şekilde, oyf'nin ilk parçasına $(1-\beta)$ etki ederken, diğer parçasına β parametresi etki etmektedir. *TSGW* dağılımı, $EW(\alpha,\gamma,\theta)$ dağılımının $\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ da üst sınırından kesilmiş dağılımı ile $W(\theta\alpha^{-1/\gamma},\gamma)$ dağılımının

$\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ da alt sınırından kesilmiş dağılımının bir karmasıdır. Yani, $W_{(a,b)}$, benzer şeklide $EW_{(a,b)}$, *a* ve *b* noktasında kesilmiş Weibull dağılımlarını ifade etmek üzere *TSGW* dağılımı için,

$$TSGW(\alpha,\beta,\gamma,\theta) = (1-\beta)EW_{(0,-\theta\log\beta)}(\alpha,\gamma,\theta) + \beta W_{(-\theta\log\beta,\infty)}(\theta\alpha^{-1/\gamma},\gamma) \quad (4.14.)$$

eşitliği verilebilir.

4.1.2. Yoğunluk Biçimi

TSGW dağılımı iki biçim parametresine sahip olduğu için farklı biçimlerde olabilmektedir. Yoğunluk biçimi aşağıda incelenmiştir. $x > \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ olduğu zaman $(d\log f)/dx = (\gamma-1)/x - \alpha\gamma\theta^{-\gamma}x^{\gamma-1}$ olmaktadır. $\gamma \le 1$ için oyf bu tanım kümesinde azalandır. $\gamma > 1$ için, $(d\log f)/dx$ ifadesinin kökü $x^* = \theta((\gamma-1)/(\alpha\gamma))^{1/\gamma}$ dir ve bu noktadaki ikinci türevin değeri

$$(d^2\log f)/dx^2 = -(\gamma-1)/(x^*)^2 - \alpha\gamma(\gamma-1)\theta^{-\gamma}(x^*)^{\gamma-2} < 0 \quad (4.15.)$$

olmaktadır. Dolayısıyla oyf tek tepeli (log-konkav) bir yapıya sahiptir ve x^* noktası bu tanım kümesinin mod noktası olur. $x < \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ olduğu zaman,

$$(d\log f)/dx = (\gamma-1)/x - \gamma(1-\alpha)x^{\gamma-1}e^{-(x/\theta)^\gamma}\theta^{-\gamma}\left(1-e^{-(x/\theta)^\gamma}\right)^{-1} - \gamma x^{\gamma-1}\theta^{-\gamma} \quad (4.16.)$$

olmaktadır. $\gamma \le 1$ ve $\alpha \le 1$ için oyf azalan bir fonksiyondur. Aksi halde bir mod noktası vardır ve mod noktasının çözümü

$$\alpha\gamma\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma + \gamma e^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma}\left[1-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right] - \gamma - e^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma} + 1 = 0 \quad (4.17.)$$

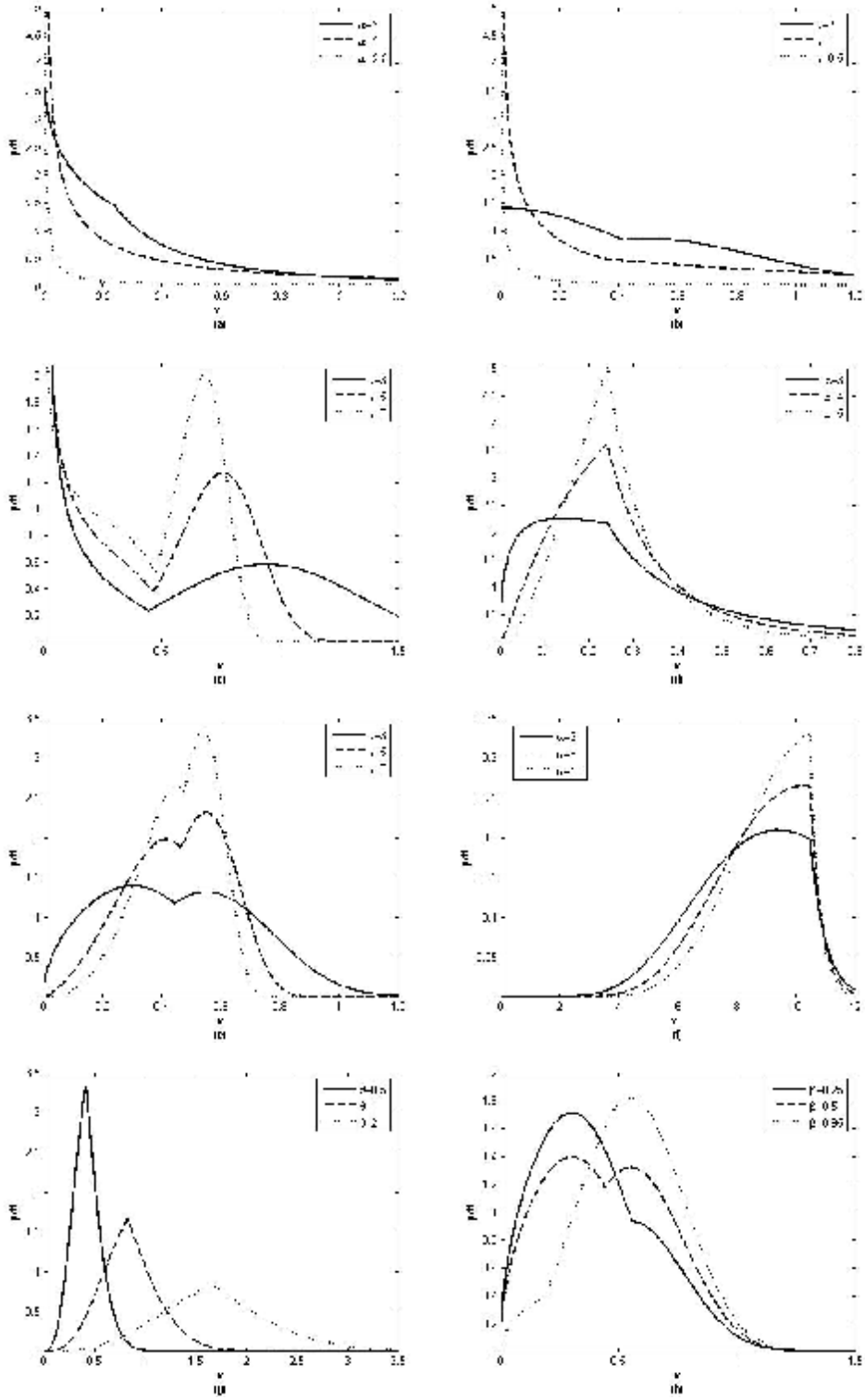
ile verilen lineer olmayan eşitliğin çözümüdür. *TSGW* dağılımı kesilmiş *EW* ve kesilmiş *W* dağılımlarının bir karması olduğu için bazı yoğunluk biçimleri literatürdeki bilgilerden yararlanılarak verilebilir. Mudholkar ve Hudson (1996)'ya göre, *EW* dağılımı $\alpha\gamma \le 1$ için azalan ve $\alpha\gamma > 1$ içinse tek tepeli bir bir biçime sahip olmaktadır. Böylece *TSGW* dağılımı için, $\alpha\gamma > 1$ ve $\gamma > 1$ olmak üzere çift tepeli (bimodal) bir dağılım olur. Bu durum ise, *TSGW* dağılımının hem *EW* hem de *W* dağılımlarından daha esnek olduğuna vurgu yapar. Bunun yanında, $\alpha\gamma > 1$ ve $\gamma < 1$ olmak üzere ilk tanım kümesi üzerinde, $\alpha\gamma \le 1$ ve $\gamma > 1$ olmak üzere ikinci tanım kümesinde tek tepeli bir yoğunluk vardır. *TSGW* dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı parametre değerleri için biçimleri Şekil 4.1 de verilmiştir.

$x = \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ noktasında, f' fonksiyonunun sağdan ve soldan limitleri sırasıyla,

$$\lim_{x \to \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}+} f'(x) = \frac{\alpha\gamma\beta}{\theta^2}(-\log\beta)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\frac{\gamma-1}{(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} - \alpha\gamma(-\log\beta)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \qquad (4.18.)$$

$$\lim_{x \to \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}-} f'(x) = \frac{\alpha\gamma\beta}{\theta^2(1-\beta)}(-\log\beta)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}}\{(\gamma-1)(1-\beta)+\gamma(1-\alpha\beta)\log\beta\} \qquad (4.19.)$$

biçimindedir. Bu limitler ancak $\alpha = 1$ ve $\gamma = 1$ olduğu zaman, yani üstel dağılım durumunda, birbirine eşittir. Aksi halde bu limitler farklıdır ve $x = \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ noktasında $f'\left(\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\right)$ tanımlı değildir. Bu yüzden oyf $x = \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ da bir köşe noktaya sahiptir. Aynı zamanda, bu limitler, $\gamma \le 1$ olduğu zaman $\alpha \to 0$ iken eşittir ve köşe nokta gittikçe kaybolacaktır. Benzer biçimde, $\alpha\gamma \le 1$ için $\gamma \to 0$ iken aynı durum söz konusudur (Şekil 4.1).



Şekil 4.1.*TSGW* dağılımı oyf biçimleri (a) $\gamma = \beta = \theta = 0.5$, (b) $\alpha = \beta = \theta = 0.5$
(c) $\alpha = 0.1,\ \beta = \theta = 0.5$, (d) $\alpha = \beta = \theta = 0.5$, (e) $\alpha = \beta = \theta = 0.5$,
(f) $\gamma = 1.5, \theta = 6,\ \beta = 0.1$, (g) $\alpha = \gamma = 2,\ \beta = 0.5$, (h) $\gamma = 3, \alpha = \theta = 0.5$.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun, tanım kümesinin sınır noktalarındaki davranışları

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \tag{4.20.}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}0, & \alpha\gamma>1\\ \theta^{-\gamma}, & \alpha\gamma=1\\ \infty, & \alpha\gamma<1.\end{cases} \tag{4.21.}$$

eşitliklerinde gibi elde edilir. Ölçek parametresi olan θ dağılımın kuyruğunu kontrol eder. θ'nın büyük değerleri için dağılım kalın kuyruklu olmaktadır.

4.1.3. Dağılımın Özel ve Limit Durumları

TSGW dağılımı, parametrelerin durumuna ya da parametrelerin limit durumlarına göre iyi bilinen birçok dağılımı içermektedir. *TSGW* dağılımı,

- $\alpha=1$ ve $\gamma=1$ için, θ ölçek parametreli üstel dağılıma,
- $\alpha=1$ ve $\gamma=2$ için, θ ölçek parametreli Rayleigh dağılımına,
- $\alpha=1$ için $W(\gamma,\theta)$ dağılımına,
- $\gamma=1$ için, *TSGE* dağılımına (Korkmaz ve Genç, 2013),
- $\gamma=2$ için, aşağıda oyf si verilen iki yönlü genelleştirilmiş Rayleigh (*TSGR*) dağılımına

.

$$f_{TSGR}(x;\alpha,\beta,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha(1-\beta)^{1-\alpha}}{\theta^2}xe^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}\right)^{\alpha-1}, & 0<x<\theta\sqrt{-\log\beta}\\ \dfrac{2\alpha\beta^{1-\alpha}}{\theta^2}xe^{-\alpha\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}, & \theta\sqrt{-\log\beta}<x<\infty\end{cases} \tag{4.22.}$$

- $\beta \to 0$ iken, $EW(\alpha,\gamma,\theta)$ dağılımına,
- $\gamma = 1$ için, $\beta \to 0$ iken, $GE(\alpha,\theta)$ dağılımına (Gupta ve Kundu, 1999),
- $\gamma = 2$ için, $\beta \to 0$ iken, Burr-X dağılımına (genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı),
- $\beta \to 1$ iken, $W(\theta\alpha^{-1/\gamma},\gamma)$ dağılımına

dönüşmektedir.

4.2. Rasgele Sayı Üretimi

TSGW dağılımının *q.* quantili

$$F^{-1}(q;\alpha,\gamma,\beta,\theta) = \begin{cases} \theta\left[-\log\left(1-\left\{q(1-\beta)^{\alpha-1}\right\}^{1/\alpha}\right)\right]^{1/\gamma}, & 0 < q < 1-\beta \\ \theta\left[-\alpha^{-1}\log\left((1-q)\beta^{\alpha-1}\right)\right]^{1/\gamma}, & 1-\beta < q < 1. \end{cases} \quad (4.23.)$$

eşitliğindeki kantil fonksiyonu ile verilir. Dağılımın *q.* kantili, dağılımın konum parametresine bağlıdır. Özel olarak dağılımın medyanı ise

$$m = \begin{cases} \theta\left[-\log\left(1-\left\{(1-\beta)^{\alpha-1}/2\right\}^{1/\alpha}\right)\right]^{1/\gamma}, & \beta < 1/2 \\ \theta\left[-\alpha^{-1}\log\left(\beta^{\alpha-1}/2\right)\right]^{1/\gamma}, & \beta \geq 1/2. \end{cases} \quad (4.24.)$$

ile verilir.

TSGW dağılımınından rasgele sayı üretmenin bir başka yolu da ters dönüşüm metodunu kullanmaktır. *U,* $(0,1)$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere,

$$X=\begin{cases}\theta\left[-\log\left(1-\left\{U\left(1-\beta\right)^{\alpha-1}\right\}^{1/\alpha}\right)\right]^{1/\gamma}, & 0<U<1-\beta\\ \theta\left[-\alpha^{-1}\log\left((1-U)\beta^{\alpha-1}\right)\right]^{1/\gamma}, & 1-\beta<U<1\end{cases} \qquad (4.25.)$$

rasgele değişkeni, olasılık integral dönüşümü ile $TSGW(\alpha,\gamma,\beta,\theta)$ dağılımına sahiptir. Ayrıca, *TSGW* dağılımı için (4.14) eşitliğinde verilen karma dağılım eşitliği kullanılarak da sayı üretilebilir. β karma parametreli kesilmiş Weibull dağılımı ve $1-\beta$ karma parametreli üstelleştirilmiş Weibull dağılımı, eşitlik (4.14) gibi düzenlenirse, iki yönlü genelleştirilmiş Weibull dağılımından sayı üretilmiş olur.

4.3. Bozulma Oranı Fonksiyonu

TSGW dağılımı, hem iki yönlü hem karma hem de iki biçim parametresine sahip olduğundan dolayı farklı tipteki bozulma oranı biçimlerini modellemek için daha kullanışlı bir dağılım olabilir. Bu dağılımın bozulma oranı fonksiyonu,

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\gamma\left(1-\beta\right)^{1-\alpha}t^{\gamma-1}\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\theta^{\gamma}\left[1-\left(1-\beta\right)^{1-\alpha}\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha}\right]}, & t\le\theta\left(-\log\beta\right)^{1/\gamma}\\ \dfrac{\alpha\gamma t^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}}, & t>\theta\left(-\log\beta\right)^{1/\gamma}\end{cases} \qquad (4.26.)$$

eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Bozulma oranı fonksiyonun biçimleri her iki tanım kümesinde farklı biçimlerdedir. Ancak $\alpha=1$ ve $\gamma=1$ durumunda sabit bozulma oranı vardır. $\left(\theta\left(-\log\beta\right)^{1/\gamma};\infty\right)$ tanım aralığında bozulma oranı klasik Weibull dağılımı ile aynıdır. Bu durumda sabit, artan veya azalan bozulma oranları $\gamma=1$, $\gamma>1$ ve $\gamma<1$ için sırasıyla gözlenebilir. Tanım kümesinin diğer kısmında, bozulma

oranının biçimleri *EW* dağılımının biçimiyle aynıdır. Mudholkar ve Hutson (1996), *EW* dağılımının bozulma oranı fonksiyonunun biçimleri için Teorem 4.1.'i vermişlerdir. Bu Teorem şöyle verilmiştir.

Teorem 4.1. *EW dağılımı,*

- $\gamma > 1$ *ve* $\alpha\gamma > 1$ *için, artan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma \leq 1$ *ve* $\alpha\gamma \leq 1$ *için, azalan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma > 1$ *ve* $\alpha\gamma < 1$ *için, küvet eğrisi biçimli bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma < 1$ *ve* $\alpha\gamma > 1$ *için, tek tepeli bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\alpha = 1$ *ve* $\gamma = 1$ *için, sabit bozulma oranı fonksiyonuna sahiptir.*

Buna göre, *TSGW* dağılımının bozulma oranı fonksiyonu için Teorem 4.2. verilebilir.

Teorem 4.2. *TSGW dağılımı,*

- $\gamma > 1$ *ve* $\alpha\gamma > 1$ *için, tüm tanım aralığında artan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma \leq 1$ *ve* $\alpha\gamma \leq 1$ *için, tüm tanım aralığında azalan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma = 1$ *ve* $\alpha\gamma > 1\ (\alpha\gamma \leq 1)$ *için, önce artan (azalan) sonra sabit bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma > 1$ *ve* $\alpha\gamma < 1$ *için, önce küvet eğrisi biçimli sonra artan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\gamma < 1$ *ve* $\alpha\gamma > 1$ *için, önce tek tepeli sonra azalan bozulma oranı fonksiyonuna,*
- $\alpha = 1$ *ve* $\gamma = 1$ *için, sabit bozulma oranı fonksiyonuna sahiptir.*

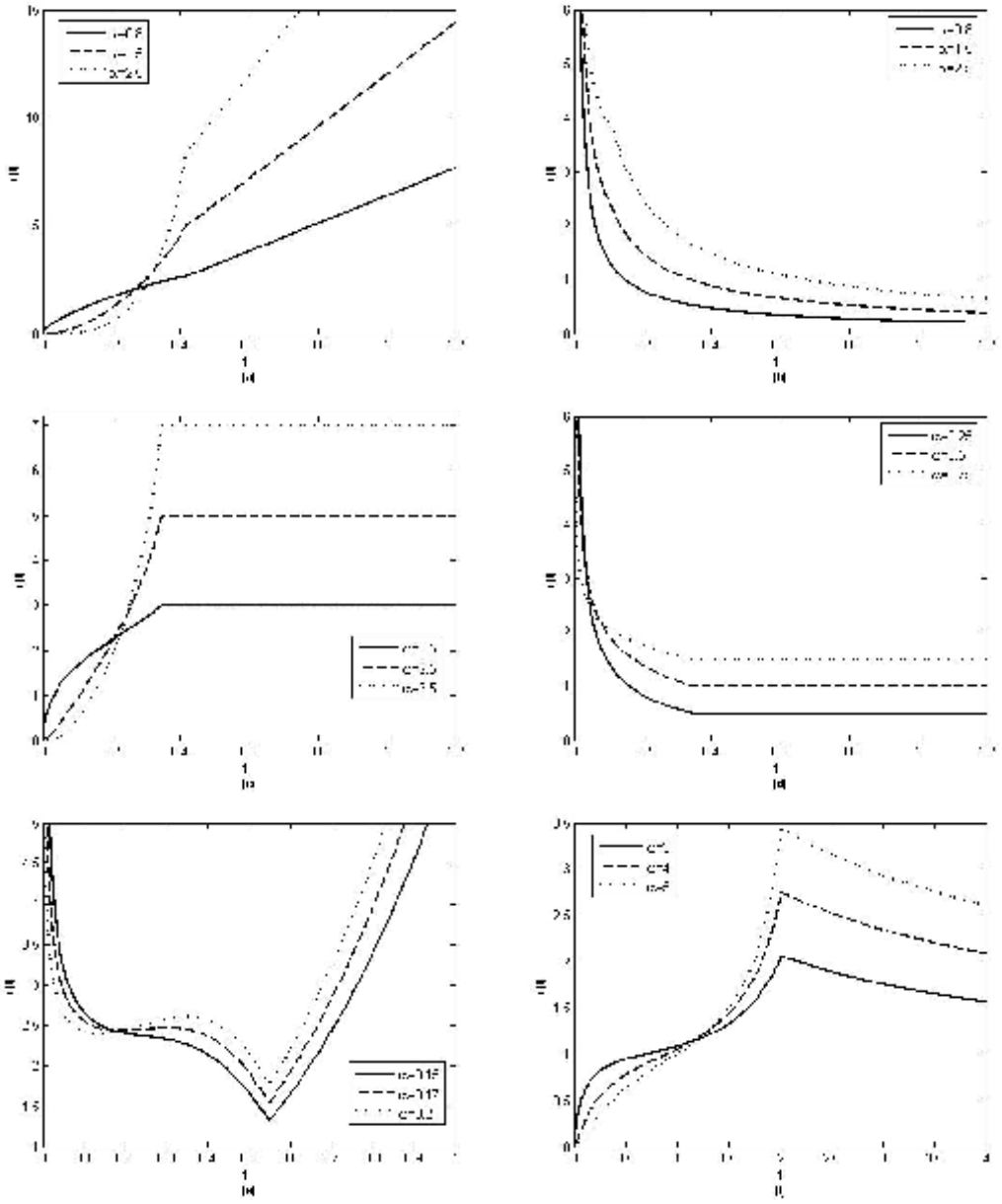
İspat: Mudholkar ve Hutson (1996)'nın verdiği Teorem 4.1 ve Weibull dağılımının bozulma oranı özellikleri ile sonuca ulaşılır.

$r(t)$, ilk tanım aralığında α ve γ biçim parametrelerine bağlıyken, ikinci tanım aralığında γ biçim parametresine bağlıdır. Öte yandan, $r(t)$ nin limit durumları aşağıda verilmiştir.

$$\lim_{t \to 0} r(t) = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \text{ ve } \gamma > 1 \\ \theta^{-1}, & \alpha = \gamma = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \text{ ve } \gamma < 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = \begin{cases} \infty, & \gamma > 1 \\ \theta^{-1}, & \alpha = \gamma = 1 \\ 0, & \gamma < 1 \quad . \end{cases} \tag{4.28.}$$

Böylelikle $\alpha\gamma > 1$ ve $\gamma > 1$ olduğu zaman, bozulma oranı fonksiyonu 0 dan ∞ a artarak gider. $\alpha\gamma \leq 1$ ve $\gamma \leq 1$ olduğu zaman ise bozulma oranı fonksiyonu ∞ dan 0 a azalandır. Bozulma oranı fonksiyonunun değişim noktası ise $\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}$ değeridir. Bozulma oranı fonksiyonunun farklı parametre değerlerine göre aldığı biçimler Şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.2. *TSGW* dağılımının $r(t)$ çizimleri: (a), $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 2$ (b) $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 0.25$, (c),(d) $\beta = 0.5, \theta = 0.5, \gamma = 1$, (e) $\beta = 0.25, \theta = 0.5, \gamma = 3.5$ (f) $\beta = 0.1, \theta = 0.5, \gamma = 0.6$

4.4. Ortalama Geriye Kalan Ömür

Güvenirlik teorisi ve yaşam analizi çalışmalarında, bir sistemin yaşam zamanı karakterizasyonu, ortalama geri kalan ömür gibi tanımlanan bazı ölçülerle

yapılabilmektedir .Verilen bir t_0 zamanına kadar sağ kalan bir sistemin ortalama geri kalan ömrü $m(t_0)$ ile ifade edilir ve sistemin t_0 zamanından bozulma zamanına kadar ki yaşadığı süredir. Aynı zamanda, $m(t_0)$ fonksiyonu, bir *F* dağılım fonksiyonunun tekliğini karakterize eder (Kotz ve Shanbhag, 1980). Bu konu ile detaylı bilgi için Barlow ve Proschan (1975)'e bakılabilir.

$S(t)=1-F(t)$ yaşam fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişkenin ortalama geri kalan ömrü,

$$m(t_0)=E(T-t_0 \mid T>t_0)=\int_{t_0}^{\infty}\frac{(t-t_0)f(t)dt}{S(t_0)}=\frac{1}{S(t_0)}\int_{t_0}^{\infty}S(t)dt \qquad (4.29.)$$

eşitliği ile verilir. Ek olarak, $t_0=0$ alınırsa $m(t_0)$, dağılımın beklenen değerine eşit olur.

Teorem 4.3. *TSGW dağılımının* $m(t_0)$ *fonksiyonu,*

$$m(t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_1(t_0)}\Big\{\theta\Big(-\log\beta\Big)^{\frac{1}{\gamma}}-t_0 \\ \quad -(1-\beta)^{1-\alpha}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\frac{(-1)^{j+k}j^k}{k!(\gamma k+1)\theta^{\gamma k}}\theta^{\gamma k+1}\Big(-\log\beta\Big)^{\frac{\gamma k+1}{\gamma}}-t_0^{\gamma k+1}\Big]\Big\} \\ \quad +\dfrac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\theta^{\gamma+1}e^{\alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\gamma}\Gamma\Big(\frac{1}{\gamma},-\alpha\log\beta\Big), & t_0\le\theta\Big(-\log\beta\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \dfrac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\theta^{\gamma+1}e^{\alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\gamma}\Gamma\Big(\frac{1}{\gamma},\alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}\Big), & t_0>\theta\Big(-\log\beta\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\end{cases} \qquad (4.30.)$$

eşitliği ile verilir. Burada ki $S_1(t_0)$*, ilk tanım kümesinin yaşam fonksiyonu ve*

$$\Gamma(v,u\mu)=\mu^{v}\int_{u}^{\infty}p^{v-1}e^{-p\mu}dp \qquad (4.31.)$$

ile verilen ifade tamamlanmamış gamma fonksiyonudur.

İspat. TSGW dağılımının ortalama geri kalan ömür fonksiyonu

$$m(t_0)=\begin{cases} m_1(t_0)=\dfrac{1}{S_1(t_0)}\displaystyle\int_{t_0}^{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}} S_1(t)dt+\dfrac{1}{S_2(t_0)}\int_{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}}^{\infty} S_2(t)dt \ , t_0 \le \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}} \\ m_2(t_0)=\dfrac{1}{S_2(t_0)}\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} S_2(t)dt \quad , \quad t_0 > \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases} \tag{4.32.}$$

eşitliği ile yazılır. $S_1(t_0)$ ve $S_2(t_0)$ sırasıyla, ilk ve ikinci tanım kümesindeki yaşam fonksiyonlarıdır. İlk tanım kümesindeki birinci integral aşağıda belirtilen işlemler yapılarak,

$$I_1=\frac{1}{S_1(t_0)}\int_{t_0}^{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}} S_1(t)dt=\frac{1}{S_1(t_0)}\left[\int_0^{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}} S_1(t)dt-\int_0^{t_0} S_1(t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{S_1(t_0)}\left[\int_0^{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}} \left[1-(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha}\right]dt\right]$$

$$-\frac{1}{S_1(t_0)}\int_0^{t_0}\left[1-(1-\beta)^{1-\alpha}\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha}\right]dt \tag{4.33.}$$

biçiminde elde edilir. $0<e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}<1$ olduğu için

$$\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}e^{-j\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}, \tag{4.34}$$

eşitliği ile verilen binomial seri açılımı kullanılarak ve bu açılımdaki $e^{-j\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}}$ ifadesi

$$e^{-j\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{jt^{\gamma}}{\theta^{\gamma}}\right)^k \tag{4.35.}$$

verilen eşitlikteki seriye açılarak eşitlik (4.33) için,

$$\frac{1}{S_1(t_0)} \left[\theta(-\log\beta)^{1/\gamma} - t_0 - (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \left(\frac{\alpha}{j}\right) \frac{j^k}{\theta^{\gamma k} k!} \left[\int_0^{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}} t^{\gamma k} dt - \int_0^{t_0} t^{\gamma k} dt \right] \right] \tag{4.36.}$$

eşitliği elde edilir. Buradaki integraller alınarak,

$$\frac{1}{S_1(t_0)} \left[\theta(-\log\beta)^{1/\gamma} - t_0 - (1-\beta)^{1-\alpha} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{k}\right) \frac{(-1)^{j+k} j^k}{(\gamma k+1)\theta^{\gamma k} k!} \theta^{\gamma k+1} (-\log\beta)^{\frac{\gamma k+1}{\gamma}} - t_0^{\gamma k+1} \right] \right] \tag{4.37.}$$

eşitliği elde edilir ve ilk tanım kümesindeki birinci integral değeri hesaplanmış olur. Öte yandan, ilk tanım kümesindeki

$$I_2 = \frac{1}{S_2(t_0)} \int_{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}}^{\infty} S_2(t)dt = \frac{\beta^{1-\alpha}}{S_2(t_0)} \int_{\theta(-\log\beta)^{1/\gamma}}^{\infty} e^{-\alpha\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma}} dt \tag{4.38.}$$

eşitliği ile verilen ikinci integral, $y = \alpha(t/\theta)^{\gamma}$ ve $u = y/\alpha$ dönüşümleri yapılarak,

$$I_2 = \frac{\beta^{1-\alpha}\theta^{\gamma+1}}{\gamma S_2(t_0)} \int_{-\log\beta}^{\infty} u^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-\alpha u} du \tag{4.39.}$$

İntegrali elde edilir ve sonuç olarak bu integralde,

$$I_2 = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\theta^{\gamma+1}e^{\alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, -\alpha\log\beta\right) \tag{4.40.}$$

eşitliği ile bulunur. Buradaki tamamlanmamış gamma fonksiyonu, (4.31) de verilmiştir (Gradshteyn and Ryzhik, 2000, Eşitlik, 3.381.3). İkinci tanım kümesindeki integral ise I_2 integrali gibi elde edilir. Aynı zamanda bu integral, eşitlik (4.1) de verilen klasik Weibull dağılımının ortalama geri kalan ömür fonksiyonudur. Buna göre bu integral,

$$m_2(t_0) = \frac{1}{S_2(t_0)}\int_{t_0}^{\infty} S_2(t)dt = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\theta^{\gamma+1}e^{\alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \alpha\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^{\gamma}\right) \tag{4.41.}$$

eşitliği ile verilir ki böylece ispat tamamlanmış olur.

4.5. Momentler

Bu kısımda *TSGW* dağılımının kapalı bir formda momentleri elde edilmiştir. Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, $E\left(e^{\theta t(-\log Y)^{1/\gamma}}\right)$ beklenen değerine eşittir. Bu beklenen değerde (4.34) ve (4.35) de verilen seri açılımları kullanılarak,

$$M(t) = \beta^{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta t)^k\Gamma(k/\gamma+1, -\alpha\log\beta)}{\alpha^{k/\gamma}k!} + \frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}(\theta t)^k\gamma^*(k/\gamma+1, -(j+1)\log\beta)}{k!(j+1)^{k/\gamma+1}} \tag{4.42.}$$

verilen eşitlikle elde edilir. Buradaki $\Gamma(\cdot,\cdot)$ ile verilen fonksiyon (4.31) de verilen tamamlanmamış gamma fonksiyonu ve $\gamma^*(\cdot,\cdot)$ ile belirtilen fonksiyon ise,

$$\gamma^*(v,u\mu)=\mu^{v}\int_0^{u}p^{v-1}e^{-p\mu}dp\,,\ v>0,\mu>0 \qquad (4.43.)$$

ile verilen tamamlanmamış gamma fonksiyonunu ifade eder (Gradshteyn and Ryzhik, 2000, Eşitlik, 3.381.3).

TSGW dağılımının *k.* momenti, *TSGE* dağılımındaki gibi benzer işlemler kullanılarak,

$$E\left(X^{k}\right)=\frac{\theta^{k}\alpha}{\left(1-\beta\right)^{\alpha-1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{\alpha-1}{j}\frac{\gamma^*\left(k/\gamma+1,-(j+1)\log\beta\right)}{(j+1)^{k/\gamma+1}}$$

$$+\frac{\theta^{k}}{\alpha^{k/\gamma}\beta^{\alpha-1}}\Gamma\left(k/\gamma+1,-\alpha\log\beta\right) \qquad (4.44.)$$

eşitliği ile verilebilir.

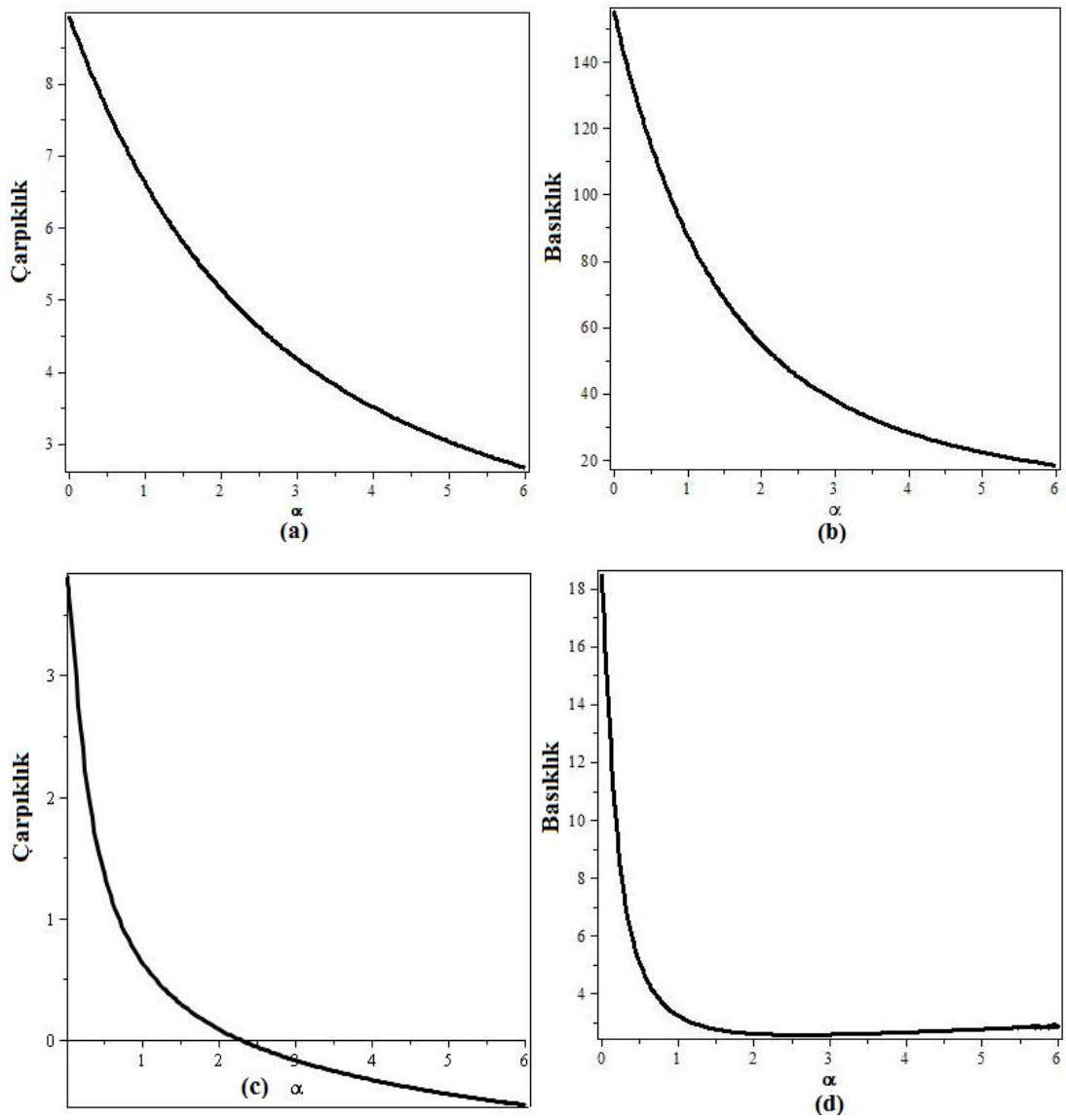
Tablo 4.1 de, seçilen parametre değerlerine göre eşitlik (4.44) den yararlanılarak, *TSGW* dağılımı için beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler hesaplanırken, $X\sim TSGW(\alpha,\gamma,\beta)$ ve $\theta X\sim TSGW(\alpha,\gamma,\beta,\theta)$ olduğundan dolayı genelliğini kaybetmeksizin $\theta=1$ alınmıştır.

Tablo 4.1 incelendiğinde, $\beta=0.5$ için *TSGW* dağılımının medyanı, α ve γ parametrelerinden bağımsız olarak, klasik Weibull dağılımının medyanına eşit olmaktadır. Sabit büyük α ve sabit γ değerleri için, β parametresi arttıkça, dağılımın beklenen değer ve medyan değerleri, azalmaktadır. Küçük α ve sabit γ değerlerinde, β parametresi arttıkça, dağılımın beklenen değer ve medyan değerleri ise artmaktadır. Diğer yandan, α parametresinin artan değerlerinde, küçük β değerleri ve sabit γ değerleri için negatif çarpıklık gözlenmektedir(Şekil 4.3). Sabit α ve sabit β (γ) değerleri için, artan γ (β) değerlerinde yine çarpıklık negatif olmaktadır. Dağılımın basıklık değerleri, küçük α ve küçük γ değerleri için büyük olmaktadır.

Tablo 4.1. *TSGW* dağılımının beklenen değer, varyans, medyan, varyasyon katsayısı, çarpıklık ve basıklık değerleri

b	a	g	$E(X)$	$V(X)$	m	CV	d_1	d_2
0.1	0.5	0.5	2.7073	114.3693	0.1058	3.9501	11.1385	237.8726
		2	0.7109	0.3468	0.5704	0.8283	1.3524	5.1089
		5	0.7906	0.5704	0.7988	0.3904	-0.1889	3.1111
	2	0.5	2.1433	6.7598	1.2346	1.2130	2.9256	19.8121
		2	1.0584	0.1237	1.0541	0.3323	0.0865	2.6206
		5	1.0079	0.0206	1.0213	0.1426	-0.4799	3.0868
	4	0.5	2.6602	3.7038	2.2518	0.7234	1.0812	4.8599
		2	1.2052	0.0647	1.2250	0.2111	-0.3269	2.6685
		5	1.0712	0.0091	1.0845	0.0891	-06857	3.3320
0.25	0.5	0.5	4.0544	175.5937	0.1644	3.2683	8.9553	155.8528
		2	0.8129	0.4443	0.6367	0.8199	1.1163	3.9541
		5	0.8332	0.1072	0.8348	0.3920	-0.1912	2.8550
	2	0.5	1.4731	3.5233	0.8981	1.2742	3.9256	34.3274
		2	0.9705	0.0958	0.9735	0.3190	0.1401	3.0049
		5	0.9448	0.0176	0.9893	0.1362	-0.4894	3.3586
	4	0.5	1.4351	0.9918	1.2820	0.6939	1.7795	10.6898
		2	1.0436	0.0387	1.0640	0.1886	-0.3048	3.2535
		5	1.0125	0.0064	1.0251	0.0791	-0.7207	3.9028
0.5	0.5	0.5	5.6655	239.4315	0.4804	2.7311	7.6472	115.2935
		2	0.9652	0.5149	0.8325	0.7345	0.7687	3.0891
		5	0.9016	0.1123	0.9293	0.3717	-0.3879	2.7903
	2	0.5	0.9401	2.1061	0.4804	1.5436	5.1455	54.9894
		2	0.8520	0.0808	0.8325	0.3337	0.4798	3.5543
		5	0.9248	0.0164	0.9293	0.1387	-0.2321	3.4170
	4	0.5	0.6192	0.3040	0.4804	0.8903	3.5141	28.2507
		2	0.8390	0.0273	0.8325	0.1971	0.3402	4.0107
		5	0.9277	0.0055	0.9293	0.0799	-0.1786	3.9664
0.75	0.5	0.5	6.9289	284.5438	1.2069	2.4344	7.0125	97.8431
		2	1.1087	0.5090	1.0481	0.6434	0.5563	2.9601
		5	0.9719	0.1004	1.0189	0.3261	-0.6491	3.2841
	2	0.5	0.6625	1.5608	0.2405	1.8855	5.9519	71.8038
		2	0.7440	0.0833	0.7002	0.3879	0.7517	3.6752
		5	0.8724	0.0188	0.8671	0.1575	0.0642	3.0317
	4	0.5	0.2769	0.1448	0.1513	1.3745	4.9878	51.4105
		2	0.6555	0.0295	0.6237	0.2622	0.9161	4.2610
		5	0.8379	0.0074	0.8279	0.1026	0.4141	3.3878

Buna karşın, a ve g parametrelerinin artan değerlerinde, basıklık değerleri azalmaktadır. Sabit a ve sabit b değerleri için g parametresinin artan büyük değerlerinde, beklenen değer artarken, varyans ve varyasyon katsayısı azalmaktadır.



Şekil 4.3. *TSGW* için çarpıklık ve basıklık grafikleri: (a), (b) $\gamma = \beta = 0.5$, (c), (d) $\gamma = 2, \beta = 0.1$

Büyük α ve büyük γ parametrelerinde küçük varyans değerleri elde edilmiştir. β parametresinin artan değerlerinde, küçük α ve küçük γ değerlerinde varyans değerleri artmaktadır.

4.6. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \mathbf{L}\, X_n$, *TSGW* dağılımından alınmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı *n*

birimlik örneklem ve $X_{1:n}, X_{2:n}, \mathbf{L}\, X_{n:n}$ bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. $X_{r:n}$ ile ifade edilen *r*. sıra istatistiğinin dağılımı $1 \le i \le n$ için,

$$f_{r:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n!\alpha\gamma x^{\gamma-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\theta^{\gamma}(r-1)!(n-r)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^{i}\binom{n-r}{i}(1-\beta)^{(1-\alpha)(r+i)}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha(r+i)-1}, & x \le \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\\ \dfrac{n!\alpha\gamma x^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}(r-1)!(n-r)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i}\binom{r-1}{i}\beta^{(1-\alpha)(n-r+i+1)}e^{-\alpha(n-r+i+1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}, & x > \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\end{cases} \tag{4.45.}$$

eşitliğindeki gibi bulunur. Özel olarak, en büyük ve en küçük sıra istatistiğinin dağılımı sırasıyla,

$$f_{1:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n\alpha\gamma x^{\gamma-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\theta^{\gamma}}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{n-1}{i}(1-\beta)^{(1-\alpha)(1+i)}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha(i+1)-1}, & x \le \theta(-\log\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\\ \dfrac{n\alpha\gamma x^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}}\beta^{n(1-\alpha)}e^{-\alpha n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}, & x > \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\end{cases} \tag{4.46.}$$

$$f_{n:n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n\alpha\gamma x^{\gamma-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}}{\theta^{\gamma}}(1-\beta)^{n(1-\alpha)}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{\alpha n-1}, & x \le \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\\ \dfrac{n\alpha\gamma x^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{n-1}{i}\beta^{(1-\alpha)(i+1)}e^{-\alpha(i+1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma}}, & x > \theta(-\log\beta)^{1/\gamma}\end{cases} \tag{4.47.}$$

gibi elde edilir. *r*. sıra istatistiğinin *k*. momenti, *k*=1,2,3,…, olmak üzere,

$$E\left(X_{r:n}^{k}\right)=\frac{n!\alpha\theta^{k}}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i}\binom{r-1}{i}\frac{\beta^{(1-\alpha)(n-r+i+1)}}{\{\alpha(n-r+i+1)\}^{k/\gamma+1}}\right.$$

$$\times\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1,-\alpha(n-r+i+1)\log\beta\right)+\sum_{i=0}^{n-r}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+i}\binom{n-r}{i}\binom{\alpha(r+i)-1}{j}$$

$$\left.\times\frac{(1-\beta)^{(1-\alpha)(r+i)}}{(j+1)^{k/\gamma+1}}\gamma^{*}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1,-(j+1)\log\beta\right)\right\} \qquad (4.48.)$$

eşitlikleri ile verilir. Buradaki gamma fonksiyonları (4.1) ve (4.43) te tanımlanmıştır.

4.7. Entropiler

4.7.1. Renyi Entropisi

TSGW dağılımı için eşitlik (3.38) de tanımlanan Rényi entropisi

$$I_{R}(s)=\frac{1}{(1-w)}\left\{w\log\alpha+(w-1)\log\left(\frac{\gamma}{\theta^{\alpha}}\right)\right.$$

$$+\log\left[\frac{1}{\left(w\alpha\right)^{\frac{(w-1)(\gamma-1)}{\gamma}+1}}\right]\frac{\Gamma\left(\frac{(w-1)(\gamma-1)}{\gamma}+1,-w\alpha\log\beta\right)}{\beta^{w(\alpha-1)}}$$

$$+\frac{1}{(1-\beta)^{w(\alpha-1)}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{w(\alpha-1)}{j}$$

$$\left.\times\frac{\gamma^{*}\Gamma\left(\frac{(w-1)(\gamma-1)}{\gamma}+1,-(w+j)\log\beta\right)}{(w+j)^{\frac{(w-1)(\gamma-1)}{\gamma}+1}}\right\} \qquad (4.49.)$$

$(w-1)(\gamma-1)\geq 0$ olmak üzere verilen eşitlikteki gibi elde edilir.

4.7.2. Kısmi Entropi

Weibull dağılımı, *TSGW* dağılımının özel bir durumu olduğu için, *TSGW* dağılım ailesinin içerdiği bilgi ile Weibull dağılımının içerdiği bilgiyi kısmi entropi kullanarak karşılaştırabiliriz. Eşitlik (2.13) kullanılarak *TSGW* dağılımının, Weibull dağılımına olan kısmi entropisi,

$$E(f:g\,|\,\alpha,\beta)=\log\alpha-\frac{\alpha-1}{\alpha} \tag{4.50.}$$

biçiminde elde edilir. Bulunan kısmi entropi, γ, β ve θ parametresine bağlı olmayıp sadece α parametresinin bir fonksiyonudur. Bu parametreler, *TSGE* dağılımındaki gibi, *TSGW* dağılımının içerdiği bilgiye etki etmemektedir.

4.8. Parametre Tahmini

4.8.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri ve Bir Algoritma

$x_1, x_2, \ldots x_n$, $TSGW(\alpha,\gamma,\beta,\theta)$ dağılımından alınmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı *n* birimlik örneklem ve $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots x_{(n)}$ bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olsun. Buna göre oluşturulan log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\alpha,\gamma,\beta,\theta)=n\log\alpha+n\log\gamma-\gamma n\log\theta+(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\gamma}$$
$$+(\alpha-1)\log\left[\frac{\left(1-e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta}\right)^{\gamma}}\right)^{r}\prod_{i=r+1}^{n}e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta}\right)^{\gamma}}}{(1-\beta)^{r}\beta^{n-r}}\right] \tag{4.51.}$$

eşitliği ile verilir. Burada, r=1,2,3,… için $x_{(r)} \le q(-\log b)^{1/g} \le x_{(r+1)}$ ve $x_{(0)} = 0$, $x_{(n+1)} = \infty$ dır.

TSGW dağılımı, *TSGE* dağılımının genel bir durumu olduğu için *TSGE* dağılımı gibi düzgün bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip değildir. Bu nedenle, *TSGW* dağılımının log-olabilirlik fonksiyonu, köşe noktası olan $q(-\log b)^{1/g}$ noktasında türevlenemez ve parametrelerinin tahmini *TSGE* dağılımına benzer şekilde yapılır. Dolayısıyla, a ve b parametrelerinin en çok olabilirlik tahmini Van dorp ve Kotz (2002b) ile sırasıyla,

$$\hat{a} = -\frac{n}{\log M(\hat{r},g,q)} \tag{4.52.}$$

$$\hat{b} = \exp\left\{-\left(\frac{x_{\hat{r}}}{q}\right)^{g}\right\} \tag{4.53.}$$

burada , $\hat{r} = \arg\max M(r,g,q)$ ve

$$M(r,g,q) = \sum_{i=1}^{r-1}\frac{1-e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g}}}{1-e^{-\left(\frac{x_{(r)}}{q}\right)^{g}}} + \sum_{i=r+1}^{n}\frac{e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g}}}{e^{-\left(\frac{x_{(r)}}{q}\right)^{g}}} \tag{4.54.}$$

eşitliklerindeki gibi verilir. g ve q parametreleri için olabilirlik tahmin denklemleri sırasıyla,

$$\frac{\partial l}{\partial g} = \frac{n}{g} - n\log q + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{q}\right)^{g}\log\frac{x_i}{q} + (a-1)\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g} e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g}}\log\frac{x_{(i)}}{q}}{1-e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g}}}$$

$$-(a-1)\sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{x_{(i)}}{q}\right)^{g}\log\frac{x_{(i)}}{q} = 0 \tag{4.55.}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{\gamma n}{\theta} + \frac{\gamma}{\theta^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} - \frac{\gamma(\alpha - 1)}{\theta^{\gamma+1}} \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{x_{(i)}^{\gamma} e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta}\right)^{\gamma}}}{1 - e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta}\right)^{\gamma}}} - \sum_{i=r+1}^{n} x_{(i)}^{\gamma} \right) = 0 \qquad (4.56.)$$

gibi elde edilir. Eşitlik (4.56) da, $\alpha = \gamma = 1$ olursa, θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\bar{x}$ olacaktır. γ ve θ parametreleri için olabilirlik eşitlikleri açık çözümlerle bu parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek için iteratif bir prosedüre ihtiyaç duyulur. Bu prosedür, *TSGE* dağılımında verilen algoritmaya paralel bir biçimde aşağıdaki algoritmayla açıklanmıştır.

Adım 1: k=0 alınır ve $\hat{\gamma}^{(0)}$ ve $\hat{\theta}^{(0)}$ başlangıç tahmini log-olabilirlikte yerine koyulur.
Adım 2:

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = \exp\left\{ -\left(\frac{x_{\hat{r}}}{\theta^{(k)}} \right)^{\gamma^{(k)}} \right\}, \qquad (4.57.)$$

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = -\frac{n}{\log M\left(\hat{r}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}\right)}, \qquad (4.58.)$$

tahminleri elde edilir. Burada $\hat{r} = \arg\max M\left(r, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}\right)$ ve

$$M\left(r, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}\right) = \prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta^{(k)}}\right)^{\gamma^{(k)}}}}{1 - e^{-\left(\frac{x_{(r)}}{\theta^{(k)}}\right)^{\gamma^{(k)}}}} \right) \prod_{i=r+1}^{n} \frac{e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\theta^{(k)}}\right)^{\gamma^{(k)}}}}{e^{-\left(\frac{x_{(r)}}{\theta^{(k)}}\right)^{\gamma^{(k)}}}} \qquad (4.59.)$$

biçimindedir.

Adım 3: Eşitlik (4.55) ve (4.56) ile $\hat{\gamma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\theta}^{(k+1)}$ tahminleri bulunur ve γ ve θ parametreleri güncelleştirilir.

Adım 4: $\left|\mathbf{l}\left(\hat{\alpha}^{(k+1)},\hat{\gamma}^{(k+1)},\hat{\beta}^{(k+1)},\hat{\theta}^{(k+1)}\right)-\mathbf{l}\left(\hat{\alpha}^{(k+1)},\hat{\gamma}^{(k)},\hat{\beta}^{(k+1)},\hat{\theta}^{(k)}\right)\right|$ değeri verilen tolerans değerinden, örneğin 10^{-3} gibi, küçükse algoritma durdurulur, değilse $k=k+1$ alınarak Adım 2'ye gidilir.

Eşitlik (4.55) ve (4.56) kolayca türevlenebilir ve γ ve θ parametreleri için sabit nokta çözümü, Newton metodu gibi iteratif yöntemlerle yapılabilir. Bu parametrelere ilişkin iyi başlangıç değerleri verilerek yakınsama sağlanabilir. Bu prosedür için *Matlab*, *Maple*, *SAS* ve *R* gibi paket programlarından herhangi biri kullanılabilir. Tahminlere ilişkin verilen bu algoritma *Matlab* programı ile yazılmış, similasyon ve veri analizi kısmında kullanılmıştır. Bu kodlar EK-1 de verilmiştir.

4.8.2. Simülasyon Çalışması

Bu kısımda *TSGW* dağılımının en çok olabilirlik parametre kestirimlerinin etkinliğini görmek için, *TSGW* dağılımından alınan ve dağılımın farklı parametre değerlerinden üretilmiş 20 ve 100 birimlik örneklemler alınmıştır. Her bir örneklem için 10000 deneme yapılmış olup tahminlerin ortalaması ve standart sapması Tablo 4.2. de verilmiştir. Bütün hesaplamalar *Matlab* paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Her bir tahminde kullanılan iterasyon arasındaki mutlak fark 10^{-3} olarak alınmıştır. Tablo 4.2. den elde edilen tahminlerin durağan ve gerçek değere yakın olduğu görülmektedir. Bunun yanında örneklem sayısı arttıkça tahminlerin standart sapmalarının ve yanlarının giderek azaldığı da gözlemlenmektedir.

4.9. Veri Analizi

Bu kısımda, *TSGW* dağılımı, iki gerçek veri kümesi için analiz edilmiştir ve diğer bazı genelleştirilmiş Weibull dağılımları ile karşılaştırma yapılmıştır. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri, tahmin kısmında verilen algoritmayla *Matlab* paket programı kullanılarak elde edilmiştir (EK-1). İlk veri kümesi için, önceden tanıtılan *EW, MW, FW, WG* ve *TSGW* dağılımları kullanılmıştır. İkinci veri kümesi içinse, *TSGW* ile *BWG* ve *WG* dağılımları kullanılmıştır.

4.9.1. Karbon Liflerinin Gerilme Dirençleri Veri Kümesi

Bu veri kümesi Nicholas ve Padgett (2006) tarafından, 50 mm lik karbon liflerinin gerilme dirençleri olarak verilmiştir. Aynı zamanda yazarlar, bu veri kümesini kullanarak, önerdikleri bootstrap yüzdelik grafikleri ile Weibull dağılımı yüzdelik grafiklerini karşılaştırmışlardır. Veri kümesi 100 gözlemden oluşmaktadır. Literatürde iyi bilinen bu veri kümesi, dağılım modelleri çalışmalarında sık kullanılmaktadır (Lemonte ve Cordeiro, 2011, Hemmati ve ark., 2011, Cordeiro ve Lemonte, 2011, Barretto-Souza ve ark., 2011, Lemonte, 2013, Bidram ve ark. 2013). Tablo 4.3 de bazı betimsel istatistikleri verilen karbon veri kümesi şu şekildedir.

Tablo 4.2. *TSGW* dağılımı farklı parametre değerleri tahminleri için simülasyon sonuçları

				n=20				*n*=100			
q	b	g	a	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{g}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{g}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)
1	0.4	0.5	1.5	1.7084 (0.3874)	0.5296 (0.0367)	0.3934 (0.2545)	0.9937 (0.2439)	1.5307 (0.1484)	0.5119 (0.0104)	0.3971 (0.1139)	0.9963 (0.1387)
			2.5	2.7635 (0.6419)	0.5436 (0.0325)	0.4107 (0.0888)	0.9530 (0.2184)	2.5514 (0.2781)	0.5083 (0.0066)	0.4034 (0.0386)	1.0132 (0.0997)
		1	1.5	1.6860 (0.3858)	1.0562 (0.0790)	0.4052 (0.2672)	0.9723 (0.1425)	1.5394 (0.1657)	1.0321 (0.0258)	0.4020 (0.1303)	1.0081 (0.0673)
			2.5	2.8292 (0.6563)	1.1007 (0.0759)	0.3865 (0.0825)	0.9937 (0.1170)	2.5537 (0.2455)	1.0213 (0.0153)	0.4055 (0.0455)	1.0011 (0.0497)
		2	1.5	1.7668 (0.4027)	2.1007 (0.1293)	0.3883 (0.2506)	1.0022 (0.0700)	1.5131 (0.1482)	2.0617 (0.0454)	0.4121 (0.1282)	1.0022 (0.0316)
			2.5	2.7369 (0.6292)	2.1645 (0.1063)	0.3980 (0.1014)	0.9930 (0.0488)	2.5304 (0.2552)	2.0198 (0.0264)	0.4004 (0.0320)	0.9990 (0.0223)
	0.5	0.5	1.5	1.7444 (0.4244)	0.5280 (0.0381)	0.4550 (0.2603)	0.8512 (0.4419)	1.5193 (0.1465)	0.5144 (0.0145)	0.4991 (0.1388)	0.9498 (0.1772)
			2.5	2.7211 (0.6231)	0.5297 (0.0358)	0.5180 (0.0956)	0.8623 (0.2623)	2.5683 (0.2854)	0.5076 (0.0125)	0.5047 (0.0406)	0.9970 (0.1229)
		1	1.5	1.7031 (0.3973)	1.0403 (0.0686)	0.4966 (0.2601)	0.9323 (0.1577)	1.5763 (0.1654)	1.0221 (0.0281)	0.4942 (0.1056)	0.9816 (0.0636)
			2.5	2.6325 (0.5086)	1.0889 (0.0573)	0.5051 (0.0966)	0.9428 (0.1113)	2.5234 (0.2792)	1.0037 (0.0222)	0.4997 (0.0375)	0.9854 (0.0470)
		2	1.5	1.7603 (0.4175)	2.1246 (0.1382)	0.4824 (0.2492)	0.9897 (0.0602)	1.5356 (0.1488)	2.0505 (0.0634)	0.5265 (0.1309)	0.9799 (0.0334)
			2.5	2.6730 (0.5881)	2.0852 (0.1113)	0.5112 (0.0916)	0.9694 (0.0497)	2.5546 (0.2374)	2.0092 (0.0435)	0.5021 (0.0357)	0.9833 (0.0251)
	0.6	0.5	1.5	1.6947 (0.3423)	0.5122 (0.0384)	0.5993 (0.2512)	0.9112 (3.2997)	1.5314 (0.1524)	0.5081 (0.0166)	0.5992 (0.1289)	0.9688 (0.2116)
			2.5	2.8127 (0.5967)	0.5018 (0.0404)	0.6045 (0.0869)	0.9285 (1.7427)	2.5766 (0.2827)	0.5105 (0.0162)	0.5976 (0.0366)	0.9772 (0.1043)
		1	1.5	1.7269 (0.4195)	1.0124 (0.0816)	0.6278 (0.2390)	0.9136 (0.1440)	1.5288 (0.1521)	1.0090 (0.0388)	0.6008 (0.1314)	0.9649 (0.0874)
			2.5	2.6862 (0.6442)	1.0344 (0.0669)	0.6057 (0.1079)	0.9000 (0.1592)	2.5794 (0.2872)	0.9919 (0.0345)	0.6001 (0.0369)	0.9698 (0.0529)
		2	1.5	1.7254 (0.4448)	2.0409 (0.1412)	0.6060 (0.2418)	0.9424 (0.0746)	1.5291 (0.1458)	2.0161 (0.0607)	0.6007 (0.1094)	0.9847 (0.0325)
			2.5	2.7763 (0.6867)	2.0202 (0.1612)	0.5929 (0.0901)	0.9362 (0.0618)	2.5160 (0.2401)	2.0028 (0.0593)	0.5985 (0.0379)	0.9879 (0.0257)
2	0.4	0.5	1.5	1.7113 (0.4160)	0.5289 (0.0376)	0.3970 (0.2703)	1.9245 (0.6078)	1.5678 (0.1657)	0.5153 (0.0112)	0.3976 (0.1172)	2.0310 (0.2938)
			2.5	2.7724 (0.7403)	0.5598 (0.0439)	0.4110 (0.1041)	2.0316 (0.4432)	2.5917 (0.2586)	0.5053 (0.0071)	0.4026 (0.0337)	2.0084 (0.1898)
		1	1.5	1.6987 (0.3785)	1.0560 (0.0680)	0.4262 (0.2806)	1.9500 (0.3270)	1.5199 (0.1550)	1.0393 (0.0249)	0.4253 (0.1294)	2.0230 (0.1204)
			2.5	2.6653 (0.5777)	1.0782 (0.0571)	0.4184 (0.0915)	1.9756 (0.2064)	2.5343 (0.2752)	1.0222 (0.0173)	0.4056 (0.0377)	2.0239 (0.0981)
		2	1.5	1.7628 (0.3726)	2.1233 (0.1312)	0.4011 (0.2310)	2.0021 (0.1234)	1.5498 (0.1538)	2.0632 (0.0431)	0.4125 (0.1273)	2.0101 (0.0633)
			2.5	2.7710 (0.5894)	2.2356 (0.1685)	0.3941 (0.0980)	1.9946 (0.0958)	2.5752 (0.2475)	2.0504 (0.0415)	0.4106 (0.0372)	2.0012 (0.0476)
	0.5	0.5	1.5	1.7248 (0.3388)	0.5154 (0.0410)	0.4950 (0.2819)	1.9080 (4.6528)	1.5320 (0.1428)	0.5081 (0.0132)	0.4982 (0.1109)	1.9230 (0.2751)
			2.5	2.7481 (0.5455)	0.5392 (0.0357)	0.5113 (0.0976)	1.8075 (0.5984)	2.5294 (0.2796)	0.5101 (0.0133)	0.4999 (0.0399)	1.9924 (0.2053)
		1	1.5	1.6774 (0.3753)	1.0447 (0.0697)	0.5098 (0.2806)	1.9479 (0.2928)	1.5523 (0.1507)	1.0380 (0.0268)	0.4873 (0.1181)	1.9764 (0.1194)
			2.5	2.8816 (0.7418)	1.0582 (0.0608)	0.5046 (0.0847)	1.9488 (0.2098)	2.5548 (0.2554)	1.0181 (0.0269)	0.5019 (0.0431)	1.9729 (0.1194)
		2	1.5	1.7731 (0.3881)	2.1186 (0.1630)	0.4888 (0.2502)	1.9698 (0.1336)	1.5258 (0.1457)	2.0492 (0.0503)	0.4992 (0.1153)	1.9857 (0.0642)
			2.5	2.7038 (0.6155)	2.1804 (0.1371)	0.4953 (0.0962)	1.9837 (0.1079)	2.5178 (0.2328)	2.0245 (0.0491)	0.4981 (0.0349)	2.0058 (0.0473)
	0.6	0.5	1.5	1.7234 (0.4023)	0.5124 (0.0405)	0.5672 (0.2653)	1.8246 (4.7764)	1.5543 (0.1637)	0.5040 (0.0185)	0.5995 (0.1164)	1.9659 (0.2412)
			2.5	2.8328 (0.7888)	0.5187 (0.0321)	0.5908 (0.0959)	1.8871 (4.0879)	2.5426 (0.2487)	0.5018 (0.0156)	0.5997 (0.0366)	1.9696 (0.2206)
		1	1.5	1.6860 (0.3303)	1.0144 (0.0861)	0.6025 (0.2681)	1.8396 (0.3314)	1.5277 (0.1291)	1.0034 (0.0349)	0.5993 (0.1121)	1.9339 (0.1483)
			2.5	2.7641 (0.6544)	1.0090 (0.0637)	0.5854 (0.0921)	1.8193 (0.2430)	2.5198 (0.2603)	0.9978 (0.0362)	0.6002 (0.0376)	1.9459 (0.1131)
		2	1.5	1.7705 (0.4324)	2.0254 (0.1880)	0.6277 (0.2322)	1.8887 (0.1532)	1.5272 (0.1607)	2.0014 (0.0678)	0.6023 (0.1291)	1.9728 (0.0721)
			2.5	2.7843 (0.5960)	2.0288 (0.1461)	0.5828 (0.0816)	1.8996 (0.1270)	2.5224 (0.2564)	2.0032 (0.0684)	0.5986 (0.0375)	1.9882 (0.0563)

X={0.39,0.81,0.85,0.98,1.08,1.12,1.17,1.18,1.22,1.25,1.36,1.41,1.47,1.57,1.57,1.59, 1.59,1.61,1.61,1.69,1.69,1.71,1.73,1.8,1.84,1.84,1.87,1.89,1.92,2,2.03,2.03,2.05,2.12, 2.17,2.17,2.17,2.35,2.38,2.41,2.43,2.48,2.48,2.5,2.53,2.55,2.55,2.56,2.59,2.67,2.73,2. 74,2.76,2.77,2.79,2.81,2.81,2.82,2.83,2.85,2.87,2.88,2.93,2.95,2.96,2.97,2.97,3.09,3. 11,3.11,3.15,3.15,3.19,3.19,3.22,3.22,3.27,3.28,3.31,3.31,3.33,3.39,3.39,3.51,3.56,3. 6,3.65,3.68,3.68,3.68,3.7,3.75,4.20,4.38,4.42,4.7,4.9,4.91,5.08,5.56}.

Tablo 4.3. Karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesine ait bazı istatistikler

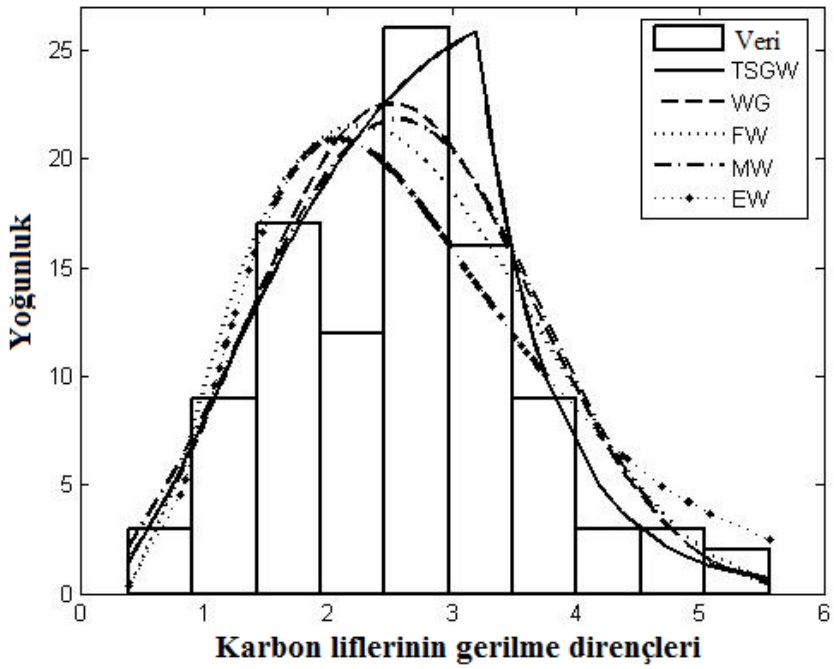
Ortalama	Medyan	SD	CV	Genişlik	Çarpıklık	Basıklık	*n*
2.6210	2.7000	1.0138	0.3867	5.17	0.3681	3.1049	100

Bu veri kümesi için *TSGW* dağılımına ve diğer genelleştirilmiş Weibull dağılımlarına ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, *AIC* ve *K-S* değerleri Tablo 4.4 de verilmiştir.

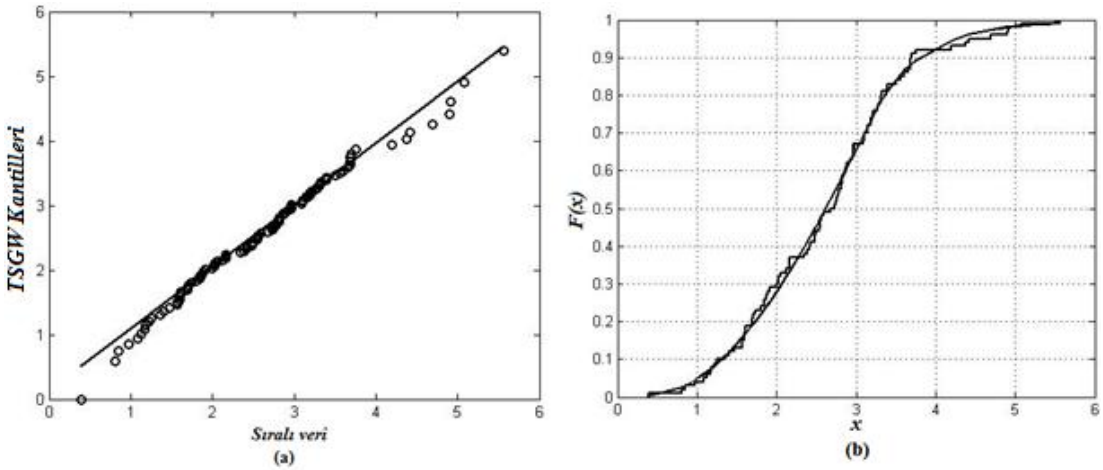
Tablo 4.4. *TSGW* dağılımı ile diğer dağılım modellerinin karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log-olabilirlik, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart hatalar (parantez)

Model	$\hat{a}$	$\hat{g}$	$\hat{b}$	$\hat{q}$	$\hat{\imath}$	AIC	*K-S* (p-value)
TSGW	6.2895 (0.1245)	0.6241 (0.0014)	0.2618 (0.0253)	1.9954 (0.0033)	-139.9114	287.8229	0.0469 (0.9822)
WG	-	2.7934 (1.2143)	0.0009 (0.0030)	0.3396 (0.1026)	-141.5291	289.0582	0.0605 (0.8469)
FW	0.4345 (0.1881)	-	3.6557 (1.6069)	-	-143.2819	290.5639	0.0796 (0.5330)
MW	2.4048 (0.4595)	-	0.0514 (0.1298)	0.1203 (0.1053)	-142.0487	290.0974	0.0648 (0.7816)
EW	6.8091 (2.1364)	0.9628 (0.0193)	-	1.0702 (0.0224)	-148.0784	302.1497	0.1370 (0.0426)

Tablo 4.4 de verilen modeller arasında en iyi modeli belirlemek için üç kriter verilmiştir. En iyi model, en büyük log-olabilirlik ve en küçük *AIC* ve *K-S* değerine sahip olan modeldir. Tablo 4.4. incelendiğinde bu kriterlere göre en iyi model *TSGW* modelidir ve diğer dağılım modellerine göre veriye daha iyi uyum sağlamıştır. Şekil 4.4. ve Şekil 4.5. te sırasıyla, *TSGW* dağılımının tahminlerine ilişkin elde edilen modelin yoğunluk fonksiyonu ve dağılımın kantiline ilişkin Q-Q plot grafiği (a) ile deneysel dağılıma karşı çizilen dağılım fonksiyonu grafiği (b) verilmiştir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 den *TSGW* dağılımının veriye iyi uyduğu görülür.



Şekil 4.4. *TSGW*, *WG*, *FW* ve *EW* dağılımlarına göre modellenen karbon liflerinin gerilme dirençleri veri kümesi grafiği



Şekil 4.5. Karbon liflerin gerilme dirençleri veri kümesi için *TSGW* dağılımı (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri

Matlab paket programında elde edilen *TSGW* tahmin sonuçlara göre; 9. iterasyonda yakınsama sağlanmış olup r nin tahmini 74 olarak elde edilmiştir. 74. sıra istatistiğine karşılık gelen değer ise 3.19 değeridir. Diğer yandan, elde edilen tahminlere göre $\hat{q}\left(-\log\hat{b}\right)^{1/\hat{g}} = 3.19$ olmaktadır ve bu değer de 74. sıra istatistiğidir.

4.9.2. Hava Kirliliği Veri Kümesi

Bu veri kümesi 1973 yılında mayıs ve eylül ayları arası, New York da ölçülen havadaki günlük ozon konstre seviyesi ölçümlerinden oluşmaktadır. Veriler Nadarajah (2008) tarafından ters beta dağılımı için modellenmiştir ve veriler bu çalışmadan alınmıştır. Ayrıca bu veri kümesi, Levia ve ark, (2010) ve Vilca ve ark., (2011) tarafından sırasıyla, çarpık sinh-normal ve Birnbaum-Saunders dağılımlarını modellemek için kullanılmıştır. Veriler aşağıda verilen gözlem değerlerinden oluşmaktadır ve Tablo 4.5 te bazı özet istatistikleri verilmiştir

X={41,36,12,18,28,23,19,8,7,16,11,14,18,14,34,6,30,11,1,11,4,32,23,45,115,37,29,71,39,23,21,37,20,12,13,135,49,32,64,40,77,97,97,85,10,27,7,48,35,61,79,63,16,80,108,20,52,82,50,64,59,39,9,16,78,35,66,122,89,110,44,28,65,22,59,23,31,44,21,9,45,168,73,76,118,84,85,96,78,73,91,47,32,23,21,24,44,21,28,9,13,46,18,13,24,16,13,23,36,7,14,30,14,18,20}.

Tablo 4.5. Hava kirliliği veri kümesine ait bazı betimsel istatistikler

Ortalama	Medyan	SD	CV	Genişlik	Çarpıklık	Basıklık	*n*
42.1300	31.5000	32.9900	0.7830	167	1.2100	3.1100	116

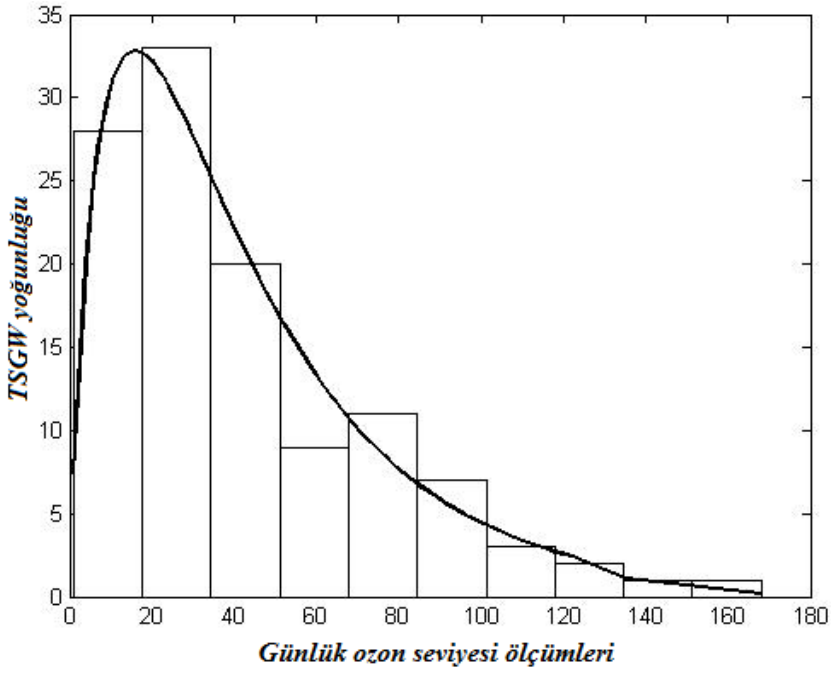
Diğer yandan, Cordeiro ve ark., (2011), bu veri kümesini kullanarak önceden tanıtılan *BWG* dağılımını modellemişlerdir ve *BWG* dağılımı ile *WG*, beta Weibull (Famoye ve ark., 2005), klasik Weibull, Birbaum-Saunders *t* student dağılımı (Diaz-Garcia ve Leiva, 2005), ters beta ve kesilmiş ters beta dağılımları (Nadarajah, 2008) ve sinh-normal dağılımlarını (Leiva ve ark., 2010) karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırma log-olabirlik ve *AIC* kriterlerine göre yapılmıştır ve *BWG* dağılımı diğer dağılımlardan daha iyi sonuç vermiştir.

Diğer yandan, *TSGW* dağılımı, bu veri kümesi ile modellemiş ve *BWG* dağılımı ile *AIC* ve log-olabilirlik değerlerine göre karşılaştırma yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.6 te verilmiştir. Tahminlerin standart hataları parantez içinde verilmiştir. *BWG* dağılımı için verilen değerler, Cordeiro ve ark., (2011) tarafından elde edilmiştir.

Tablo 4.6. *TSGW* dağılımı ile *BWG* dağılım modelinin hava kirliliği veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log olabilirlik, *AIC* değerleri ve tahminlere ilişkin standart sapmaları (parantez içinde)

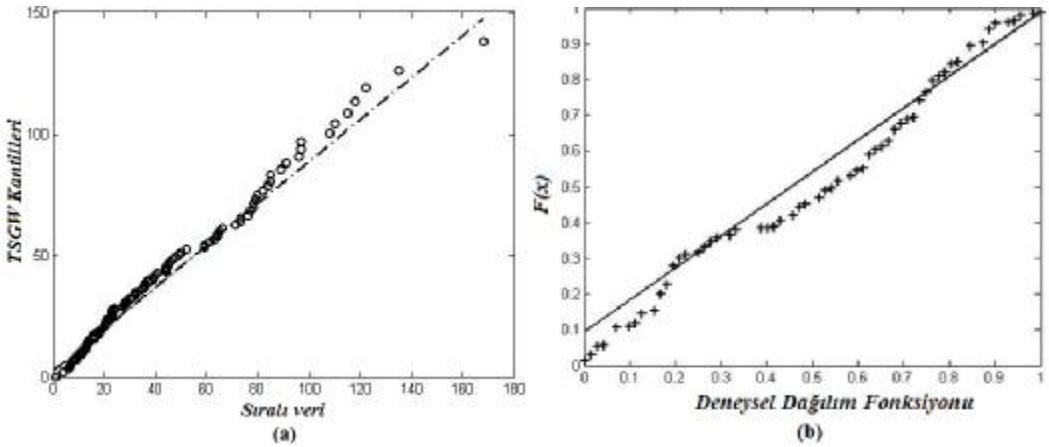
Model	*a*	*b*	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{l}$	*AIC*
TSGW	-	-	2.2314 (0.0785)	0.8471 (0.0182)	0.0219 (0.0306)	25.1020 (0.2862)	-536.5	1081.1
BWG	0.8619 (0.3788)	0.3367 (0.1064)	-	2.6166 (0.7082)	0.9580 (0.0482)	0.0175 (0.0040)	-538.3	1086.6

Tablo 4.6. incelendiğinde, büyük log-olabilirlik değerine ve küçük *AIC* değerine, *TSGW* dağılımının sahip olduğu gözlemlenir. Böylece, bu kriterlere göre *TSGW* dağılımının, *BWG* dağılımından ve *BWG* dağılımının daha başarılı bulunduğu belirten modellerden, üstün olduğu söylenebilir. Şekil 4.6., elde edilen parametrelere ilişkin *TSGW* dağılımına uyan yoğunluk fonksiyonunun grafiğini veri histogramı üzerinde vermektedir. Şekil 4.7 de ise, *TSGW* dağılımı için, Q-Q grafiği (a) ve deneysel dağılıma karşı çizilen grafikler (b) verilmiştir.



Şekil 4.6. *TSGW* dağılımına göre modellenen hava kirliliği veri kümesi grafiği

Matlab paket programında elde edilen *TSGW* tahmin sonuçlara göre; 21. iterasyonda yakınsama sağlanmış olup *r* nin tahmini 113 olarak elde edilmiştir.



Şekil 4.7. Hava kirliliği veri kümesi için *TSGW* dağılımı (a) Q-Q plot ve (b) deneysel dağılım fonksiyonu grafikleri

113.sıra istatistiğine karşılık gelen değer ise 122 değeridir ve elde edilen tahminlere göre $\hat{q}\left(-\log \hat{b}\right)^{1/\hat{g}} = 121.9982$ olmaktadır ve bu değerde 113. sıra istatistiğine oldukça yakın bir değerdir.

5. İKİ YÖNLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ SLASH DAĞILIMI

Normal dağılım, birçok alanda pratik uygulaması olan, çok önemli sürekli bir dağılım ailesidir. İstatistikte, birçok sonuç çıkarımı ve testler normal dağılıma dayalı olarak yapılmaktadır. Bu yüzden normal dağılım istatistikte çok önemli bir yere sahiptir ve bu dağılımın uygulama alanları çok geniş olmaktadır. Ancak veride olabilecek sapan değerler normalden daha kalın kuyruklu bir dağılım ürettiklerinden, normal dağılıma dayalı çıkarılan bu sonuçlar bu durumdan kötü yönde etkilenirler. Bu gibi durumlarda normal dağılıma alternatif kalın kuyruklu bir dağılım kullanmak çözüm olabilir. Bu yüzden normal dağılıma alternatif kalın kuyruklu olabilen dağılımlar üretmek birçok istatistikçinin dikkatini çekmiştir. Normal dağılıma alternatif olarak bilinen kalın kuyruklu dağılımların en başında dayanıklı istatistiksel analizlerde de popüler olan, *t* ve slash dağılımları gelmektedir (Rogers ve Tukey, 1972, Morgenthaler, 1986, Lange ve ark., 1989). Slash dağılımı literarürde, normal dağılıma alternatif, kalın kuyruklu bir model olarak ve dayanıklılık çalışmalarında kullanılmak üzere Rogers ve Tukey (1972) tarafından bir oransal dağılım olarak tanımlanmış ve bu dağılımın özellikleri yazarlar tarafından incelenmiştir. Morgenthaler (1986), sapan değer durumunda, dayanıklı güven aralıkları oluşturmuş ve normal dağılım ve slash dağılımlarını karşılaştırmıştır. Ayrıca literatürde, hataların kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, dayanıklı regresyon analizi çalışmaları yapılmıştır (Jamshidian, 2001, Kashid ve Kulkarni, 2003).

Sözel olarak klasik slash dağılımı, standart normal dağılım değişkeninin, (0,1) aralığında tanımlı ve standart normal dağılımından bağımsız düzgün dağılımlı bir rasgele değişkenin kuvvetine oranı olarak tanımlanır. Stokastik bir ifadeyle, bağımsız $Z \sim N(0,1)$ ve $U \sim Uniform(0,1)$ rasgele değişkenleri için

$$X = \frac{Z}{U^{1/q}} \tag{5.1.}$$

oranı, klasik slash dağılımı olarak adlandırılır ve $Sl(q)$ olarak ifade edilir. Klasik slash dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(x) = q\int_0^1 t^q \phi(xt)dt, \; -\infty < x < \infty \tag{5.2.}$$

biçiminde olup, burada q dağılımın kuyruk kalınlığını kontrol eden biçim parametresi ve $\phi(\cdot)$ ifadesi ise

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \; -\infty < z < \infty, \tag{5.3.}$$

ile verilen 0 ortalama ve 1 varyansa sahip olan standart normal dağılımın, $N(0,1)$ gösterimi ile, olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedir.

Klasik slash dağılımı, normal dağılım gibi simetrik bir dağılım olup, benzer şekilde dağılımın tek momentleri sıfıra eşittir. Eşitlik (5.2) de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen kümülatif dağılım fonksiyonu ise

$$G(x) = q\int_0^1 t^{q-1} \Phi(xt)dt, \; -\infty < x < \infty, \tag{5.4.}$$

eşitliği ile verilir. Buradaki, $\Phi(\cdot)$ ifadesi ise

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw, \; -\infty < z < \infty \tag{5.5.}$$

ile verilen 0 ortalama ve 1 varyansa sahip olan standart normal dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Slash dağılımında q=1 için elde edilen yoğunluk

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,x^{2}}\left(1-\exp\left(-x^{2}/2\right)\right), & x\neq 0;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}, & \textit{aksi halde}.\end{cases} \tag{5.6}$$

şeklindedir ve standart slash dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Aynı zamanda slash dağılımının bu biçimine, ***kanonik slash*** dağılımı da denmektedir. Kanonik slash dağılımının özellikleri Rogers ve Tukey (1972) tarafından çalışılmıştır. Ek olarak, $q \to \infty$ iken (5.2) de verilen olasılık yoğunluğu, normal dağılıma yakınsamaktadır.

Kafadar (1982), standart slash dağılımını, konum ve ölçek ile parametrelendirerek bu parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmiştir. Wang ve Genton (2006), çok değişkenli çarpık bir slash dağılımını, Azzalini (1985) tarafından verilen çarpık normal dağılımı kullanarak tanımlayıp, çarpık veri kümesi üzerinde modelleme yapmışlardır. Genç (2007), üstel kuvvet dağılımı ile düzgün dağılımı kullanarak, genel bir slash dağılımı önermiştir. Arslan (2008), çok değişkenli bir slash dağılımını, çok değişkenli normal dağılım ve *TSP* dağılımının özel bir durumu olan kuvvet fonksiyonu dağılımını kullanarak tanımlamıştır. Arslan ve Genç (2009), Kotz (1975) tarafından verilen Kotz tipi çok değişkenli normal dağılımı kullanarak, çok değişkenli bir slash dağılımı tanımlayıp, bu dağılıma ilişkin uygulama vermişlerdir. Reyes ve ark. (2012), normal dağılım ve ölçek parametresi 2 olan üstel dağılımı kullanarak modifiye edilmiş bir slash dağılımı elde edip, dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminine ilişkin bir uygulama yapmışlardır. Genç (2013), beta normal dağılımını (Eugene ve ark., 2002) kullanarak, beta tipli ve çarpık olabilen genelleştirilmiş bir slash dağılımı elde etmiştir ve parametrelere ilişkin en çok olabilirlik tahminlerini elde edip bu dağılıma uygulamalar vermiştir.

Tezin bu bölümünde klasik slash dağılımından daha esnek bir yapıya (daha kalın veya daha ince kuyruk) sahip olmasını beklediğimiz ve normal dağılıma alternatif genelleştirilmiş bir slash dağılımı elde edilmiştir. *TSP* dağılımı, düzgün dağılımın genel bir hali olduğu için elde edilmiş yeni dağılımda klasik slash dağılımının genişletilmiş bir genel durumudur. Öncelikle dağılımın tanımlanması yapılmış, daha sonra dağılımsal özellikler incelenip, en çok olabilirlik tahminleri

üzerinde durulmuştur. Gerçek bir veri kümesi üzerinde uygulama sonuçları elde edilip, bu dağılıma ilişkin sonuçlar verilip bu bölüm bitirilmiştir

5.1. İki Yönlü Genelleştirilmiş Slash Dağılımının Tanımlanması

Klasik slash dağılımının tanımlamasına benzer olarak yeni genelleştirilmiş dağılım da bir oransal dağılımdır. *TSP* dağılımı düzgün dağılımın genelleştirilmiş bir durumu olduğu için, eşitlik (5.1) de verilen stokastik tanımlamada düzgün dağılım yerine *TSP* dağılımı kullanılmıştır.

Tanım 5.1. $Z \sim N(0,1)$ *ve* $V \sim TSP(\alpha, \beta)$ *olsun.* $q > 0$ *için*

$$X = \frac{Z}{V^{1/q}} \tag{5.7.}$$

rasgele değişkeni tanımlansın. Z ve V birbirinden bağımsız olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;\alpha,\beta,q) = \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha-1} \phi(xt)\,dt + \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q-1}\left(1-t^q\right)^{\alpha-1} \phi(xt)\,dt \tag{5.8.}$$

biçiminde elde edilir. Burada $-\infty < x < \infty$, $q, \alpha > 0$ *ve biçim parametreleri,* $0 < \beta < 1$ *ve* $\phi(.)$ *ifadesi ise eşitlik (5.3) de verilen standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade eder.*

İspat: *Z* ve *V*'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z,v) = \begin{cases} \phi(z)\alpha\left(\dfrac{v}{\beta}\right)^{\alpha-1} & , -\infty < z < \infty, 0 < v \le \beta \\ \phi(z)\alpha\left(\dfrac{1-v}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} & , -\infty < z < \infty, \beta < v \le 1 \end{cases} \tag{5.9.}$$

şeklindedir. $z = xv^{1/q}$ dönüşümü yapılarak

$$f(x,v)=\begin{cases} f\left(xv^{1/q}\right)a\left(\frac{v}{b}\right)^{a-1} v^{1/q} & ,-\infty<x<\infty\,,0<v\le b \\ f\left(xv^{1/q}\right)a\left(\frac{1-v}{1-b}\right)^{a-1} v^{1/q} & ,-\infty<x<\infty\,,b<v\le 1 \end{cases} \qquad (5.10.)$$

elde edilir. Buradan *X* rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\int_0^b f\left(xv^{1/q}\right)a\left(\frac{v}{b}\right)^{a-1} v^{1/q}dv + \int_b^1 f\left(xv^{1/q}\right)a\left(\frac{1-v}{1-b}\right)^{a-1} v^{1/q}dv \quad ,-\infty<x<\infty \qquad (5.11.)$$

dir. Burada $t = v^{1/q}$ dönüşümü yapıldığında (5.8) eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Elde edilen bu yeni dağılım $TSGS(a,b,q)$ ile ifade edilecektir. *TSGS* dağılımı, önceki bölümlerde verilen *TSGE* ve *TSGW* dağılımlarının sahip olduğu benzer tanım kümelerine sahip değildir. Bunun nedeni *TSGS* dağılımını tanımlarken, olasılık integral dönüşümünün kullanılmamasıdır. Burada iki yönlülük kavramı, *TSGE* ve *TSGW* dağılımlarındaki tanım kümelerinin iki yönlü olmasının aksine, klasik slash dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunda yer alan integralin dağılım parametreleriyle iki parçaya bölünmesidir.

Eşitlik (5.7) de verilen stokastik ifadede, (0,1) aralığında tanımlı düzgün dağılım yerine, *TSP* dağılımı kullanmak tanımlanan dağılımın basıklığını artırabilir. Yani, *TSP* dağılımı tanımlanan dağılımın kuyruklarına düzgün dağılımdan daha fazla ağırlık verebilir. Böylece uç noktada bulunan veriler bu dağılım modeliyle daha uyumlu olabilir. Bunun sonucunda ise normal dağılım ve slash dağılımlarından daha kalın kuyruklu dağılım elde edilmiş olur.

TSGS dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u;\alpha,\beta,q)\,du \\
&= \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_{0}^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha} \int_{-\infty}^{x} f(ut)\,du\,dt \\
&+ \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q} \left(1-t^{q}\right)^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{x} f(ut)\,du\,dt, \quad w = ut \\
&= \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_{0}^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha-1} \int_{-\infty}^{xt} f(w)\,dw\,dt \\
&+ \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q-1} \left(1-t^{q}\right)^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{xt} f(w)\,dw\,dt \\
&= \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_{0}^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha-1} \Phi(xt)\,dt\,dt \\
&+ \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q-1} \left(1-t^{q}\right)^{\alpha-1} \Phi(xt)
\end{aligned}
\qquad (5.12.)
$$

eşitliği ile verilir. Burada $-\infty < x < \infty$, $q,\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ ve $\Phi(\cdot)$ ifadesi ise eşitlik (5.4) de verilen standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu ifade eder.

5.2. Yoğunluk Biçimi ve Özel Durumlar

Standart normal dağılım 0 a göre simetrik olduğu için, *TSGS* dağılımı da benzer simetrik bir yapıya sahiptir. Ayrıca eşitlik (5.8) den $f(-x) = f(x)$ olduğu görülmektedir. Bu durumda dağılımın moddaki değeri,

$$
f(0) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{q\beta^{1+1/q}}{q\alpha+1} + (1-\beta)^{1-\alpha} \left[B(1+1/q,\alpha) - B_{\beta}(1+1/q,\alpha) \right] \right\} \qquad (5.13.)
$$

ile verilen değerdir. Burada $B(\cdot,\cdot)$ ifadesi, (2.15) de verilen beta fonksiyonunu ve $B_c(\cdot,\cdot)$ ile gösterilen ifade

$$B_c(a,b)=\int_0^c w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw \tag{5.14.}$$

eşitliği ile verilen tamamlanmamış beta fonksiyonunu ifade etmektedir.

Diğer yandan, *TSGS* dağılımında, $\alpha=1$ için $Sl(q)$ dağılımı elde edilir. $\beta \to 1$ iken ise dağılım, $Sl(q\alpha)$ dağılımına yakınsar. $\beta \to 0$ iken *TSGS* dağılımı, aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip slash biçimli bir dağılıma indirgenir.

$$f(x;\alpha,q)=q\alpha\int_0^1 t^q\left(1-t^q\right)^{\alpha-1}\phi(xt)dt\,. \tag{5.15.}$$

Ayrıca, eşitlik 5.15 te verilen olasılık yoğunluğunun asimptotik açılımı,

$$\alpha\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha-1}{j}f_{Sl}(x;(j+1)q) \tag{5.16.}$$

eşitliği ile verilir. Burada $f_{Sl}(x;(j+1)q)$ ifadesi, $q(j+1)$ şekil parametreli klasik slash dağılımının olasılık yoğunluğunu ifade eder. Ayrıca, $\beta \to 0$ iken, $TSP \to Beta(1,\alpha)$ dağılımına yakınsar. Dolayısıyla, $TSGS(\alpha,\beta,q)$ dağılımı beta dağılımı ile ölçeklendirilmiş normal dağılıma yakınsar. $\alpha=1$ ve $q \to \infty$ iken $N(0,1)$ dağılımı elde edilir.

Diğer yandan, eşitlik (5.1) de verilen stokastik gösterimde, eşitlik 2.15 de ifade edilen $V \sim Beta(\alpha,\beta)$ dağılımı alınırsa,

$$f_{GSl\,II}(x;\alpha,\lambda,q)=\frac{q}{B(\alpha,\lambda)}\int_0^1 t^{q\alpha}\left(1-t^q\right)^{\lambda-1}\phi(xt)dt \tag{5.17.}$$

eşitliği ile verilen olasılık yoğunluğuna sahip bir başka genelleştirilmiş beta tipli slash dağılımı elde edilir. Bu durumu kullanarak $TSGS(\alpha,\beta,q)$ dağılımı için,

$$f_{TSGS}(x)=\beta^{1-\alpha}\left(1-f_{Sl_{\beta^{1/q}}}(x;q\alpha)\right)+(1-\beta)^{1-\alpha}\,f_{GSl\,II_{\beta^{1/q}}}(x;1,\alpha,q) \qquad (5.18.)$$

eşitliği verilebilir. Burada $f_{Sl_a}(x,q)$,

$$f_{Sl_a}(x,q)=q\int_a^1 t^{q-1}f(xt)dt \qquad (5.19.)$$

eşitliği ile verilen klasik slash olasılık yoğuluğunun tamamlanmamışı ve $f_{GSl\,II_b}(x;\alpha,\lambda,q)$ ise

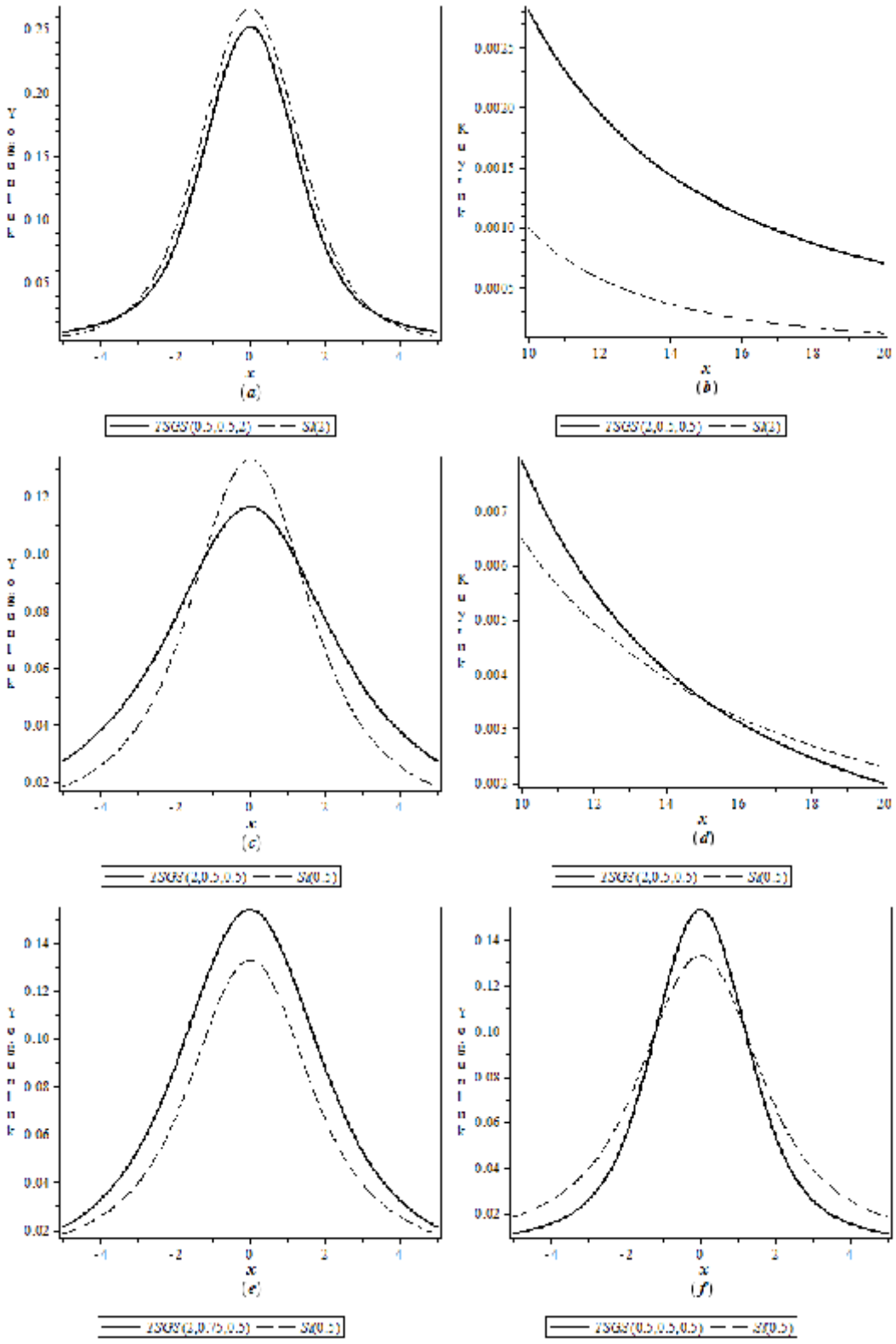
$$f_{GSl\,II_b}(x;\alpha,\lambda,q)=\frac{q}{B(\alpha,\lambda)}\int_b^1 t^{q\alpha-1}\left(1-t^q\right)^{\lambda-1}f(xt)dt \qquad (5.20.)$$

ile verilir. Bu ise (5.17) de verilen olasılık yoğunluğunun tamamlanmamış biçimidir. Ek olarak, $q\to\infty$ iken, *TSGS* dağılımı $N(0,1)$ dağılımına yakınsar. $q\to 1$ iken ise, *TSGS* dağılımı, eşitlik (5.18) de verilen biçime yakınsar. Şekil 5.1 de $TSGS(\alpha,\beta,q)$ ve $Sl(q)$ dağılımlarının grafikleri farklı parametre değerleri için verilmiştir.

Şekil 5.1. incelendiğinde genelleştirilmiş slash dağılımının, klasik slash dağılımına göre daha kalın kuyruklu ya da daha ince kuyruklu bir biçime sahip olduğu görülmektedir. Bu da genelleştirilmiş slash dağılımının daha esnek yapıda olduğunu göstermektedir.

5.3. Momentler

Bu bölümde *TSGS* dağılımının moment çıkaran fonksiyonu ve momentleri elde edilecektir.



Şekil 5.1. $TSGS(\mathrm{a},\mathrm{b},q)$ ve $Sl(q)$ dağılımlarının farklı parametre değerleri için yoğunluk ve kuyruk grafikleri.

Teorem 5.1. *TSGS dağılımının moment çıkaran fonksiyonu,* $q\alpha > 2i$, $q > 2i$ *ve* h *olmak üzere,*

$$M_X(h) = E\left(e^{hX}\right) = q\alpha\beta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(h^2 \beta^{-2/q}\right)^i}{2^i (q\alpha - 2i) i!}$$

$$+ \frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^{2i}}{2^i i!} \left[B\left(1 - \frac{2i}{q}, \alpha\right) - B_\beta\left(1 - \frac{2i}{q}, \alpha\right) \right] \qquad (5.21.)$$

dir.

İspat. Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(h) = \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(xt)\, dx\, dt .$$

$$+ \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^q \left(1 - t^q\right)^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(xt)\, dx\, dt \qquad (5.22.)$$

eşitliği ile verilir. $xt = u$ dönüşümünü kullanarak

$$M_X(h) = \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{h}{t}u} f(u)\, du\, dt$$

$$+ \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q-1} \left(1 - t^q\right)^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{h}{t}u} f(u)\, du\, dt \qquad (5.23.)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{h}{t}u} f(u)\, du = e^{\frac{h^2}{2t^2}} \qquad (5.24.)$$

dir ve standart normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ile aynıdır. Bu değerin seri açılımını kullanarak

$$e^{\frac{h^2}{2t^2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(h^2/2t^2\right)^i}{i!} \tag{5.25.}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece moment çıkaran fonksiyon

$$M_X(h) = \frac{q\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(h^2/2\right)^i}{i!} \int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha-1-2i}\,dt + \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(h^2/2\right)^i}{i!} \int_{\beta^{1/q}}^{1} t^{q-1-2i}\left(1-t^q\right)^{\alpha-1}\,dt \tag{5.26.}$$

eşitliğine dönüşür. Buradaki integraller (2.15) ve (5.14) ile alındığında ispat tamamlanmış olur.

Diğer taraftan, *TSGS* dağılımı simetrik olduğundan tek momentleri sıfırdır. Aşağıda verilen teoremde *TSGS* dağılımının ve bu dağılımın konum-ölçek biçiminin momentleri elde edilmiştir.

Teorem 5.2. *$X \sim TSGS(\alpha,\beta,q)$ ve $Y = \sigma\frac{Z}{V^{1/q}} + \mu \sim TSGS(\alpha,\beta,q,\mu,\sigma)$ konum ölçek formlu rasgele değişkenleri için r = 1, 2, 3, . . . , $q > 2r$ ve $\alpha > 2r/q$ olmak üzere r. momentler*

$$\mu_{2r-1} = E\left(X^{2r-1}\right) = 0 \tag{5.27.}$$

$$\mu_{2r} = E\left(X^{2r}\right) = \frac{(2r)!}{2^r r!}\left[\frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\left[B(1-2r/q,\alpha) - B_\beta(1-2r/q,\alpha)\right] + \frac{\alpha\beta^{1-2r/q}}{\alpha-2r/q}\right] \tag{5.28.}$$

$$E\left(Y^r\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}s^k\mu^{r-k}\mu_k \tag{5.29.}$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat: Z ve V bağımsız olduğundan dolayı eşitlik (5.1) den

$$\mu_{2r}=E\left(X^{2r}\right)=E\left(\frac{Z}{V^{1/q}}\right)^{2r}=E\left(Z^{2r}\right)E\left(V^{-2r/q}\right) \tag{5.30.}$$

elde edilir. Buradaki $E\left(Z^{2r}\right)$ beklenen değeri standart normal dağılımın çift momentlerine denktir ki bu da $E\left(Z^{2r}\right)=(2r)!/\left(2^r r!\right)$ ifadesine eşittir. Öte yandan diğer beklenen değer ise,

$$\begin{aligned}E\left(V^{-2r/q}\right)&=\int_0^b v^{-2r/q}a\left(\frac{v}{b}\right)^{a-1}dv+\int_b^1 v^{-2r/q}a\left(\frac{1-v}{1-b}\right)^{a-1}dv\\&=\frac{ab^{1-2r/q}}{a-2r/q}\\&\quad+\frac{a}{(1-b)^{a-1}}\left[B(1-2r/q,a)-B_b(1-2r/q,a)\right]\end{aligned} \tag{5.31.}$$

ifadesine eşittir ki X rasgele değişkenin çift momentleri elde edilmiş olur. Y'nin momentleri ise binom açılımından elde edilir. Yani,

$$E\left(Y^r\right)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}s^k E\left(\frac{Z}{V^{1/q}}\right)^k\mu^{r-k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}s^k\mu_k\mu^{r-k} \tag{5.32.}$$

ifadesine eşittir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1. *$TSGS(a,b,q)$ dağılımı için, $q>4$ ve $a>4/q$ olmak üzere beklenen değer, varyans ve dağılımın basıklık katsayısı sırasıyla,*

$$E(X)=0 \tag{5.33.}$$

$$\mu_2 = V(X) = \frac{\alpha\beta^{1-2/q}}{\alpha-2/q} + \frac{\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\left[B(1-2/q,\alpha) - B_{\beta}(1-2/q,\alpha)\right] \tag{5.34.}$$

$$\delta_2 = \left\{ \frac{3\alpha\beta^{1-4/q}}{\alpha-4/q} + \frac{3\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}\left[B(1-4/q,\alpha) - B_{\beta}(1-4/q,\alpha)\right] \right\} \Big/ \mu_2^2 \tag{5.35.}$$

eşitlikleri ile verilir.

Sonuç 5.2. *$TSGS(\alpha,\beta,q,\mu,\sigma)$ dağılımı için, $q>4$ ve $\alpha > 4/q$ olmak üzere ilk dört momenti sırasıyla,*

$$E(Y) = \mu_0\mu = \mu \tag{5.36.}$$

$$E(Y^2) = \mu^2 + \sigma^2\mu_2 \tag{5.37.}$$

$$E(Y^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2\mu_2 \tag{5.38.}$$

$$E(Y^4) = \mu^4 + 6\sigma^2\mu^2\mu_2 + \sigma^4\mu_4 \tag{5.39.}$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, μ_2 ve μ_4 değerleri sırasıyla, eşitlik (5.34) *ve* (5.35) *de verilmiştir.*

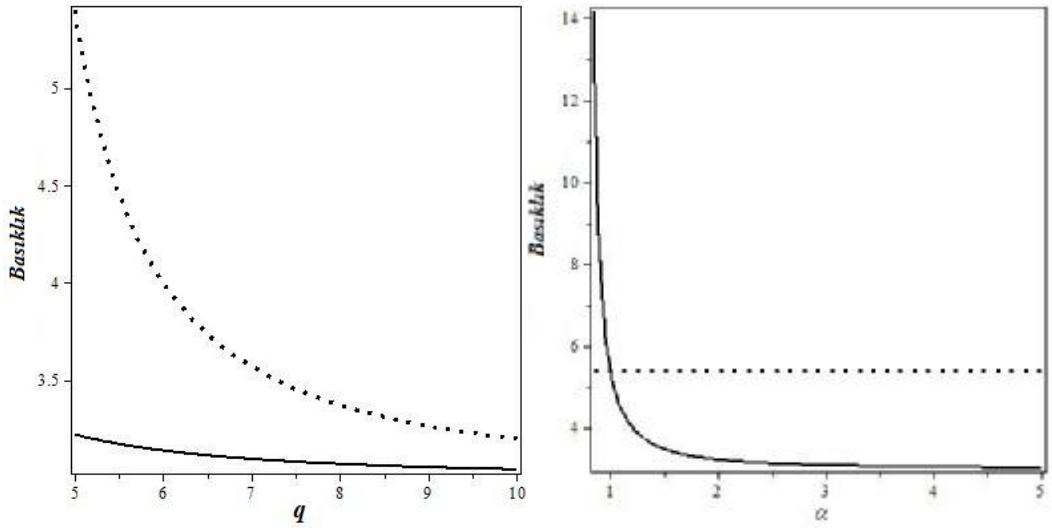
$\alpha \to \infty$ için, beta fonksiyonun değeri sıfıra yaklaşacağından, eşitlik (5.34) ve (5.35) de verilen varyans ve basıklık katsayısı değerleri sırasıyla, 1 ve 3 değerine yakınsayacaktır. O halde $\alpha \to \infty$ için dağılımın, normal dağılıma yakınsadığı söylenebilir.

Tablo 5.1 de $TSGS(\alpha,\beta,q)$ dağılımının çeşitli parametre değerine göre varyansı ve basıklık değerleri hesaplanmıştır. Tablo 5.1 e bakıldığında, $\alpha<1$ için basıklık değerleri büyüktür. Dağılımın varyansı ve basıklığı, sabit q ve sabit β

değerleri için a arttıkça azalmaktadır. Bunun yanında, sabit a ve sabit b değerlerinde q arttıkça yine varyans ve basıklık azalmaktadır. Buna ek olarak, bu değerler sabit beta ve sabit alfa için q değerleri arttıkça azalmaktadır. Diğer yandan, bu değerler, sabit q ve $a<1$ için betanın artan değerlerinde artmaktadır. Basıklık değerleri, a, b, q parametrelerinin büyük değerlerinde normal dağılımın basıklık değerine yakındır. Şekil 5.2 de basıklık değerleri için çizimler verilmiştir.

Tablo 5.1. $TSGS(a, b, q)$ dağılımının çeşitli parametre değerine göre varyansı ve basıklık değerleri

b	a	q	$V(X)$	d_2	b	a	q	$V(X)$	d_2	b	a	q	$V(X)$	d_2
0.25	0.85	5	1.745	13.836	0.5	0.85	5	1.807	14.174	0.75	0.85	5	1.852	14.273
		6	1.543	5.034			6	1.586	5.110			6	1.618	5.133
		7	1.427	3.977			7	1.460	4.018			7	1.485	4.031
		8	1.352	3.592			8	1.379	3.619			8	1.399	3.628
	1	5	1.666	5.399		1	5	1.666	5.399		1	5	1.666	5.399
		6	1.500	4.000			6	1.500	4.000			6	1.500	4.000
		7	1.400	3.571			7	1.400	3.571			7	1.400	3.571
		8	1.333	3.375			8	1.333	3.375			8	1.333	3.375
	2	5	1.568	3.280		2	5	1.417	3.220		2	5	1.321	3.203
		6	1.447	3.178			6	1.332	3.138			6	1.256	3.127
		7	1.368	3.124			7	1.275	3.095			7	1.213	3.087
		8	1.313	3.091			8	1.235	3.070			8	1.182	3.063



Şekil 5.2. *TSGS* (kesiksiz) ve *Sl* (kesikli) dağılımlarının basıklık grafikleri. *TSGS*(2,0.5,q) , *Sl*(q) (sol), *TSGS*(a ,0.5,5) , *Sl*(5) (sağ)

5.4. Rasgele Sayı Üretimi

$TSGS(\alpha,\beta,q)$ dağılımından sayı üretmek için, önce $N(0,1)$ dağılımından bir *z* sayısı üretilir. Daha sonra $TSP(\alpha,\beta)$ dağılımından, *v* rasgele sayısı üretilir. *v* rasgele sayısı eşitlik (2.8) yardımı ile üretilebilir. Böylece $x = z/v^{1/q}$ oranı, $TSGS(\alpha,\beta,q)$ dağılımından üretilmiş bir sayı olacaktır.

5.5. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmini

Bu kısımda, *TSGS* dağılımına μ konum ve σ ölçek parametreleri eklenerek, *TSGS* dağılımının konum-ölçek formlu biçimiyle ilgilenilmiştir. Bu durumda $\alpha = 1$ ve $q \to \infty$ iken *TSGS* dağılımı, $N(\mu,\sigma)$ dağılımına yakınsamaktadır. Konum-ölçek biçimli olan olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;\theta) = \frac{q\alpha}{\sigma\beta^{\alpha-1}}\int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}t\right)dt + \frac{q\alpha}{\sigma(1-\beta)^{\alpha-1}}\int_{\beta^{1/q}}^{1}\left(1-t^q\right)^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}t\right)dt \qquad (5.40.)$$

eşitliği ile verilir. Burada, $\theta = (\alpha,\beta,q,\mu,\sigma)$ olan parametre vektörüdür.

$x_1, x_2, \ldots x_n$, $TSGS(\alpha,\beta,q,\mu,\sigma)$ dağılımından alınmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı *n* birimlik örneklem olmak üzere, oluşturulan log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{q\alpha}{\sigma\beta^{\alpha-1}}\int_0^{\beta^{1/q}} t^{q\alpha}\varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}t\right)dt + \frac{q\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}\sigma}\int_{\beta^{1/q}}^{1}\left(1-t^q\right)^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}t\right)dt\right\} \qquad (5.41.)$$

eşitliğindeki gibidir. Buna göre beş parametreye bağlı oluşturulan log-olabilirlik fonksiyonundan bu parametreler için elde edilen log-olabilirlik tahmin denklemleri,

$$\mathbf{l}_{\alpha} = n + \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{w_1(x_i)}{w(x_i)} = 0 \tag{5.42.}$$

$$\mathbf{l}_{\beta} = (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \frac{w_2(x_i)}{w(x_i)} = 0 \tag{5.43.}$$

$$\mathbf{l}_{q} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{w_3(x_i)}{w(x_i)} = 0 \tag{5.44.}$$

$$\mathbf{l}_{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu) w_4(x_i)}{w(x_i)} = 0 \tag{5.45.}$$

$$\mathbf{l}_{\sigma} = -n\sigma^{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2 w_4(x_i)}{w(x_i)} = 0 \tag{5.46.}$$

şeklinde elde edilir. Burada eşitlikler içinde verilen gösterimler i=12,….n için,

$$w(x_i) = \left(\beta^{1-\alpha} I_{1i} + (1-\beta)^{1-\alpha} I_{2i}\right) \tag{5.47.}$$

$$w_1(x_i) = \beta^{1-\alpha} \left(I_{3i} - I_{1i} \log\beta\right) + (1-\beta)^{1-\alpha} \left(I_{4i} - I_{2i}\right) \log(1-\beta) \tag{5.48.}$$

$$w_2(x) = \beta^{-\alpha} I_{1i} - (1-\beta)^{-\alpha} I_{2i} \tag{5.49.}$$

$$w_3(x_i) = \beta^{1-\alpha} \alpha I_{3i} + (1-\beta)^{1-\alpha} \left(I_{5i} - (\alpha - 1) I_{6i}\right) \tag{5.50.}$$

$$w_4(x) = \beta^{1-\alpha} I_{7i} - (1-\beta)^{1-\alpha} I_{8i} \tag{5.51.}$$

biçiminde olup ve

$$I_{1i} = \int_0^{b^{1/q}} t^{q\alpha} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) dt \ , \tag{5.52.}$$

$$I_{2i} = \int_{b^{1/q}}^{1} t^{q} \left(1 - t^{q}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) dt \tag{5.53.}$$

$$I_{3i} = \int_0^{b^{1/q}} t^{q\alpha} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) \log t \, dt \ , \tag{5.54.}$$

$$I_{4i} = \int_{b^{1/q}}^{1} t^{q} \left(1 - t^{q}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) \log\left(1 - t^{q}\right) dt \ , \tag{5.55.}$$

$$I_{5i} = \int_{b^{1/q}}^{1} t^{q} \left(1 - t^{q}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) \log t \, dt \ , \tag{5.56.}$$

$$I_{6i} = \int_{b^{1/q}}^{1} t^{2q} \left(1 - t^{q}\right)^{\alpha-2} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) \log t \, dt \ , \tag{5.57.}$$

$$I_{7i} = \int_0^{b^{1/q}} t^{q\alpha+2} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) dt \ , \tag{5.58.}$$

$$I_{8i} = \int_{b^{1/q}}^{1} t^{q+2} \left(1 - t^{q}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} t\right) dt \tag{5.59.}$$

şeklinde verilir.

Burada elde edilen olabilirlik tahmin eşitlikleri basit kapalı bir formda değillerdir. Bu yüzden tahminleri doğrudan elde edemeyiz. Tahminleri elde etmek için, Newton-Raphson metodu gibi nümerik prosedürlere ihtiyaç vardır. Bu prosedür için *Matlab*, *Maple*, *SAS* ve *R* gibi paket programlarında bulunan lineer olmayan optimizasyon yöntemleri iyi bir başlangıç değeriyle kullanılabilir.

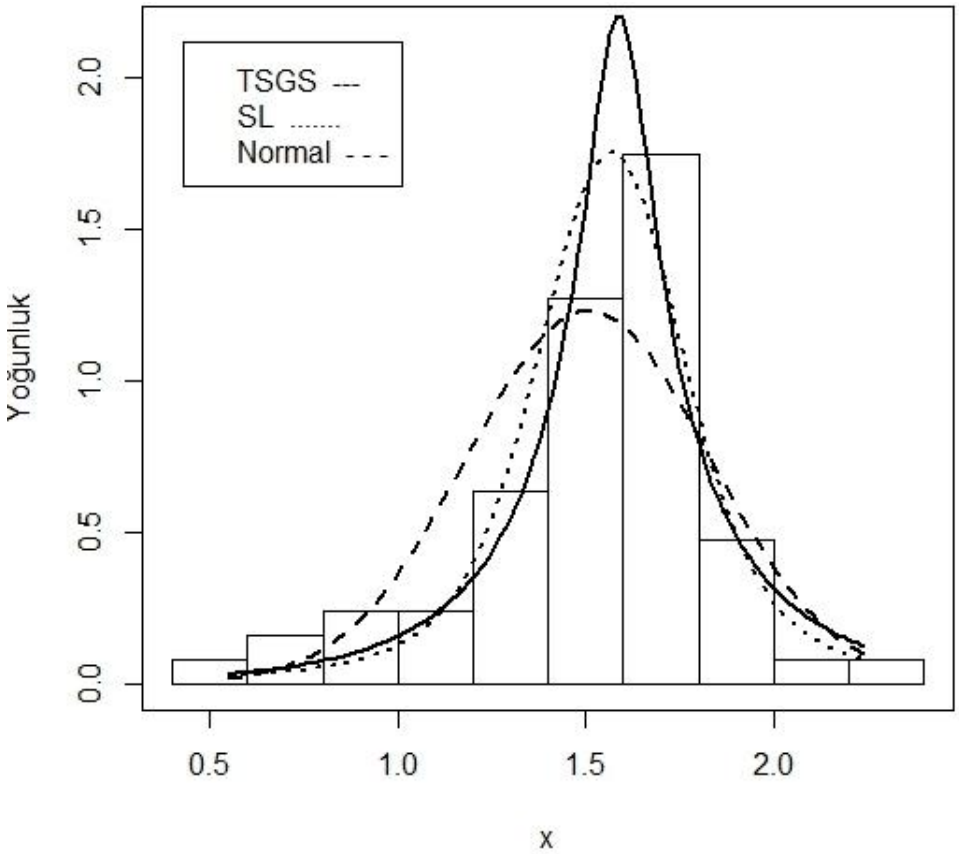
5.6. Veri Analizi

Bu kısımda *TSGS* dağılımı için bir reel veri kümesi üzerinde modelleme yapılmıştır. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminini elde etmek için *R* paket programı kullanılmıştır. Bu programda lineer olmayan optimizasyon fonksiyonlarından *optim* komutu seçilerek nümerik bir yöntem olan "*L-BFGS-B*" metodu kullanılmıştır. Parametrelerin başlangıç değerleri ise, veri histogramı üzerine, çeşitli parametre değerleri için çizdirilen *TSGS* dağılımlarından, veriye iyi uyum sağlayan modelin parametre değerleri olarak seçilmiştir.

Bu kısımda kullanılacak olan veri, Bölüm 3 te, *TSGE* dağılımı için de kullanılan cam liflerin dirençleri verisi olacaktır. Veri hakkındaki bilgiler kısım 3.8.2. de verilmiştir. Bu veri kümesi literatürde kalın kuyruklu bir veri olarak bilinmektedir (Jones ve Faddy, 2003, Azzalini ve Capitanio, 2003, Wang ve Genton, 2006, Arslan, 2009 ve Genç, 2013). *TSGS* dağılımının kalın kuyruklu bir veriyi modelleyebileceğini göstermek için, bu veri kümesi ile *TSGS*, *Sl* ve normal dağılımları modellenmiştir. *TSGS* ve *Sl* dağılımlarının parametre tahminleri, konum-ölçek formlu olarak elde edilmiştir. Model parametrelerine ilişkin sonuçlar Tablo 5.2 de verilmiştir.

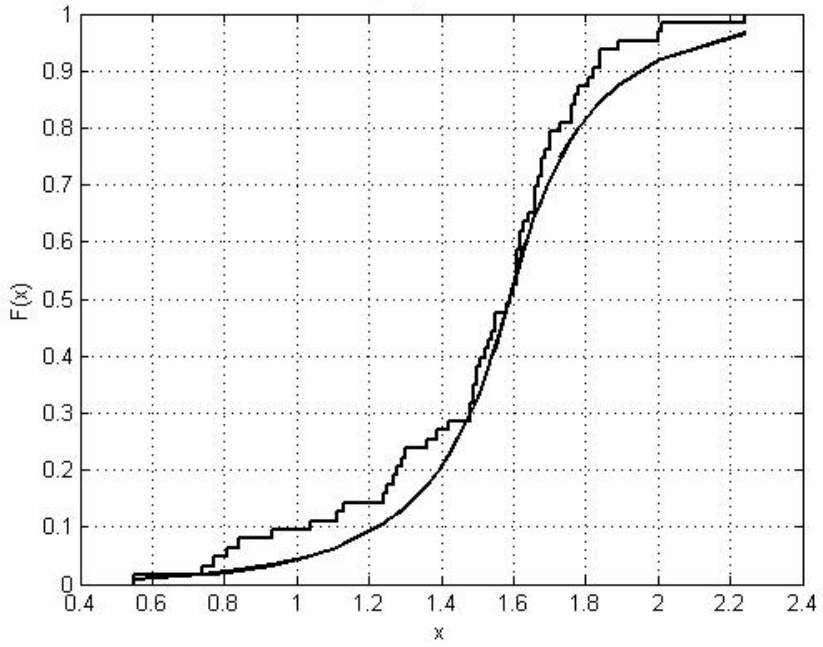
Tablo 5.2. *TSGS*, *Sl* ve normal dağılıma ilişkin, cam liflerin dirençleri veri kümesine ilişkin en çok olabilirlik tahminleri, log-olabilirlik, *AIC* ve K-S değerleri (tahminlere ilişkin standart hatalar parantez içerisinde verilmiştir)

Model	$\hat{a}$ (SD)	$\hat{b}$ (SD)	$\hat{q}$ (SD)	$\hat{m}$ (SD)	$\hat{s}$ (SD)	$\hat{l}$	*AIC*	*K-S* *(p-value)*
TSGS	10.9999 (7.0085)	0.0481 (0.0263)	0.7868 (0.0519)	1.58812 (0.0259)	0.0133 (0.0082)	-13.3346	36.6692	0.1038 (0.4836)
Sl	-	-	1.8181 (0.6387)	1.5689 (0.0358)	0.1466 (0.0413)	-15.8259	37.6518	0.1238 (0.2709)
Normal	-	-	-	1.5068 (0.0405)	0.3241 (0.0286)	-17.9158	39.8316	0.1813 (0.0276)



Şekil 5.3. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGS*, *Sl* ve normal dağılım yoğunluğu

Tablo 5.2. de uygulama modellerini karşılaştırmak için kriter olarak log-olabilirlik, *AIC* ve *K-S* test istatistiği değerleri verilmiştir. Bu kriterlere bakılacak olursa, en büyük log-olabilirlik, en küçük *AIC* ve *K-S* değerinin *TSGS* dağılımına ait olduğu görülür.



Şekil 5.4. Cam liflerin dirençleri veri kümesi için *TSGS* dağılım fonksiyonu ve deneysel dağılım fonksiyonu çizimleri

Ayrıca *K-S* değeri için hesaplanan *p* değerinin de büyük olduğu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla, karşılaştırma kriterleri için bu dağılımlar arasında en iyi model *TSGS* dağılımıdır. Öte yandan uygulama modellerine ilişkin yoğunluklar Şekil 5.3 te, *TSGS* dağılım fonksiyonunun deneysel dağılıma karşı çizilen grafiği ise Şekil 5.4 de verilmiştir. Verilen şekiller incelendiğinde *TSGS* dağılımının veriye iyi uyduğu söylenebilir. Böylece *TSGS* dağılımının kalın kuyruklu dağılımlara alternatif bir dağılım olduğu söylenebilir.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İki yönlü genelleştirilmiş dağılımlar adı altındaki bu tez çalışmasında, sınırlı bir aralıkta tanımlı olan standart iki yönlü güç dağılımı kullanılarak, sınırlandırılmış dağılımlarda iki yönlülük kavramı, sınırlı bir aralıktan sınırsız bir aralığa taşınmış bulunulmaktadır. Bununla beraber, iki yönlülük özelliği taşıyan, klasik dağılımlarından daha genel yapıya sahip üç yeni dağılım modeli elde edilmiştir. Bunlardan ikisi $(0,\infty)$ aralığında, diğeri ise $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanmıştır. $(0,\infty)$ aralığında tanımlanmış iki dağılım modeli için, her iki tanım aralığında da kendi klasik dağılımlarının daha genel durumlarını içerdiklerinden ve elde edilen dağılımlara biçim parametresi eklenmesinden dolayı, klasik dağılımların esnekliğinin artırıldığı gözlemlenmiştir. $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanan dağılım içinde içerdiği dağılımlardan daha esnek olduğu görülmüştür. Böylece üstel, Weibull ve slash dağılımlarına *TSP* dağılım özellikleri eklenmiştir.

Bu tez çalışmasında önerilen genelleştirilmiş iki yönlü dağılımların tanımlamasında, *TSP* dağılımı kullanıldığı için; genelleştirilmiş bir biçimde elde edilmiş bu dağılımlar, genelledikleri dağılımların kesilmiş biçimlerinin toplamı olarak yani karma bir modeli olarak elde edilmişlerdir. Ayrıca, verilerin modellenmesindeki üstünlükleri nedeniyle klasik üstel, Weibull ve slash dağılımlarına güçlü bir alternatif olarak gösterilmişlerdir.

TSP dağılımı ya da *TSP* dağılımının genel durumları; normal, gamma, Gompertz, gibi başka istatistiksel dağılımlar için kullanılarak orjindeki sıradan dağılımdan daha esnek olabilen bir başka iki yönlü genelleştirilmiş dağılımlar elde edilebilir. Bununla beraber heterojen yapıdaki veriler burada verilen karma model eşitlikleri kullanılarak modellenebilir.

KAYNAKLAR

ADAMIDIS, K., and LOUKAS, S., 1998. A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate. Statist. Probab. Lett., 39:35-42.

AHSANULLAH, M., and HAMEDANI, G., G., 2010. Exponential Distribution: Theory and Methods, Nova Science Publishers, Inc.New York 2010, 144p.

ARNOLD, B., C., BALAKRİSHNAN, N., and NAGARAJA, H., N., 1992. A First Course in Order Statistics, Wiley, NewYork, 279p.

AYYANGAR, A.,S.,K., 1941. The Traingular Distribution Math. Student, 9:85-87.

AZZALINI, A., 1985. A Class of Distributions which Includes the Normal ones. Scand J Stat 12:171–178

AZZALINI, A., CAPITANIO, A., 2003. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 65: 367-389.

ARSLAN, O., 2008. An Alternative Multivariate Skew-Slash distribution. Stat Probab Lett 78:2756–2761.

ARSLAN, O., 2009. Maximum Likelihood Parameter Estimation for the Multivariate Skew Slash Distribution. Stat Probab Lett 79:2158–2165

ARSLAN, O., and Genç, A., İ., 2009. A Generalization of the Multivariate Slash Distribution, Journal of Statistical Planning and Inference, 139:1164-1170.

BARLOW, R., E., and PROSCHAN, F.,1975. Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, Holt, Rinehart and Winston, New York, 290p.

BARRETO-SOUZA, W., SANTOS, A., H., S., and CORDEIRO, 2010. The Beta Generalized Exponential Distribution, J. Statistical Comput. and Simul. 80:159–172.

BARRETO-SOUZA, W., CORDEIRO, G., M., and SIMAS, A., B., 2011. Some results for Beta Frécher Distribution, Comm. Stat. Theory and Methods, 40:798:811.

BARRETO-SOUZA, W., MORAIS, M., and CORDEIRO, 2011. The Weibull-Geometric Distribution, J. Stat. Comput. Simul. 81: 645-657.

BEBBINGTON, M., LAI, C.D., and ZITIKIS, R., 2007. A Flexible Weibull Extension, Reliab. Eng. Syst. Saf 92:719–726.

BIDRAM, H., BEHBOODIAN, J., and TOWHIDI, M., 2013. The Beta Weibull-Geometric Distribution, J. Stat. Comp. and Sim., 83:52-67.

BJERKEDAL, T., 1960. Acquisition of Resistance in Guinea Pigs Infected with Different Doses of Virulent Tubercle Bacilli, Amer. J. Hyg. 72:130–148.

CORDEIRO, G., M., and LEMONTE, A., J., 2011. Beta Birnbaum-Saunders Distribution: An Improved Distribution for Fatigue Life Modeling, Comp. Stat. and Data Analy., 55:1445-1461.

CORDEIRO, G., M., SILVA, G., O.and ORTEGA, E., M., M., 2011. The Beta-Weibull Geometric Distribution, Statistics, DOI:10.1080/0233188 8.2011.577897.

COX, D.R., and OAKES, D., 1984. Analysis of Survival Data. Chapman and Hall, London, 201p.

DIAZ-GARCIA, J., A., and LEIVA., V., 2005. A New Family of Life Distributions Based on Elliptically Contoured Distributions, J. Statist. Plann. Inference 128:pp. 445–457.

EUGENE, N., LEE C., and FAMOYE, F., 2002. Beta-Normal Distribution and its Applications, Commun. Stat. Theory Methods. 31:497–512.

FAMOYE, F., LEE, C., and OLUMOLADE, O., 2005. The beta-Weibull Distribution, J. Statist. Theory Appl., 4:121–136.

GENÇ, A., İ., 2007. A Generalization of the Univariate Slash by a Scale-Mixtured Exponential Power Distribution, Communications in Statistics Simulation and Computation, 36:937-947.

GENÇ, A., İ., 2013. A Skew Extension of the Slash Distribution via Beta-Normal Distribution, Statistical Papers, 54:427-442.

GRADSHTEYN, I., S., and RYZHIK, M., 2000. Table of Integrals, Series, and Products, 6th ed. Academic Press, San Diego, 1160p.

GUPTA, R., C., KANNAN, N., RAYCHAUDHURI, A. 1997. Analysis of Log-Normal Survival Data, *Mathematical Biosciences* 139: 103-115.

GUPTA, R., D., and KUNDU, D., 1999. Generalized Exponential Distributions, Aust. N. Z. J. Stat., 41:173–188.

GUPTA, R., D., and KUNDU, D., 2009. A New Class of Weighted Exponential Distributions, Statistics,43:621–634.

HARRIS, B., 1966. Theory of Probability, Reading, MA: Addison, Wesley, 294p.

HEMMATI, F., KHORRAM, E., and REZAKHAH, S., 2011. A New three-Parameter Ageing Distribution, J. Stat. Plan. And Inf., 141:2266:2275.

JAMSHIDIAN, M., 2001. A Note on Parameter and Standard Error Estimation in Adaptive Robust Regression, J. Stat. Comput. Simul. 71:11–27.

JOHNSON, D., 1997. The Triangular Distribution as a Proxy for the Beta Distribution in Risk Analysis, Statistician, 46:387–398.

JOHNSON, N.L., KOTZ, S., and BALAKRISHNAN, N., 1994. Continuous Univariate Distributions Volume 1, John Wiley & Sons, New York, 756p.

JOHNSON, N.L., KOTZ, S., and BALAKRISHNAN, N., 1995. Continuous Univariate Distributions Volume 2, John Wiley & Sons, New York, 717p.

JOHNSON, N.L., KOTZ, S., 1999. Non-Smooth Sailing or Triangular Distributions Revisited After Some 50 Years, The Statistician, 48:179-187.

JONES, M., C., and FADDY, M., J., 2003. A skew extension of the t-distribution, with applications,J. R. Stat. Soc. Ser. B. 65:159-174.

KAFADAR, K., 1982. A biweight approach to the one-sample problem, J. Amer. Stat. Assoc. 77:416–424.

KASHID, D., N., and KULKARNI, S., R., 2003. Subset selection in multiple linear regression with heavy tailed error distribution, J. Stat. Comput. Simul. 73:791–805.

KORKMAZ, M., Ç., and GENÇ, A., İ., 2013. The Two Sided Generalized Exponential Distribution, Comm. Statist. Theory Meth., DOI:10.1080/03610926.2013.81341.

KOTZ, S., 1975. Multivariate Distributions at a cross-road. In: Patil, G.P., Kotz, S., Ord, J.K. (Eds.), Statistical Distributions in Scientific Work, I. Reidel, Dordrecht,pp. 247–270.

KOTZ, S. and SHANBHAG, D., N., 1980. Some New Approaches to Probability Distributions, Advanced Applied Probability,12:903-921.

KOZUBOWSKI, T., J., and PODORSKI, K., 1999. A Class of Assymetric Distributions, in Actuarial Research Clearing House, 1:113-134.

KULLBACK, S., 1959. Information Theory and Statistics, Wiley, New York, 1959, (reprinted in 1968 by Dover), 393p.

LAI, C., D., MURTHY, D., N., P., and XIE, M., 2011. Weibull Distributions, Wiley Interdisciplinary Reviews: Comput. Stat., 3:282-287.

LAI, C., D., XIE, M., MURTHY, D., N., P., 2003. A Modified Weibull Distributions, IEEE Trans. On Reliab. 52:33-37.

LANGE, K., L., LITTLE, R., J., A., and TAYLOR, J., M., G., 1989. Robust Statistical Modelling Using *t* Distribution, J. amer. Statist. Assoc. 84:881-896.

LEE, E.T., and WANG, J.W., 2003. Statistical Methods For Survival Data Analysis. Third Edition, John Wiley &Sons, New York, 513p.

LEIVA, V., VILCA, F., BALAKRISHNAN, N. and SANHUEZA, A. 2010. A Skewed Sinh-Normal Distribution and its Properties and Application to Air Pollution, Comm. Statist. Theory Meth., 39:426–443.

LEMONTE, A., J., 2013. A New Extension of the Birnbaum-Saunders Distribution, Braz. J. Probab. Stat., 27:133-149.

LEMONTE, A., J., and CORDEIRO, G., M., 2011. The Exponetiated Generalized Inverse Gaussian Distribution, Staistics and Probability Letters, 81:506-517.

LU, W., and SHI, D., 2012. A New Compounding Life Distribution: the Weibull–Poisson Distribution, J. of App Stat, 39:21-38.

MARSHALL, A., W., and OLKIN, I., 2007. Lifetime Distributions: Structure of Nonparametric, Semiparametric and Parametric Families, Springer, New York, 782p.

MORGENTHALER, S., 1986. Robust Confidence Intervals for a Location Parameter: the Configural Approach, J. Amer. Stat. Assoc. 81:518–525.

MURTHY, D.N.P., XIE, M., and JIANG, R., 2004. Weibull Models. John Wiley & Sons, New Jersey, 383p.

MUDHOLKAR, G., S., and .SRIVASTAVA, D., K., 1993. Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-rate Data, IEEE Trans Reliability 42:299-302.

MUDHOLKAR, G., S., and HUTSON, A., D., 1996. The Exponentiated Weibull Family: Some Properties and a Flood Data Application, Comm. Statist. Theory Meth. 25:3059–3083.

NADARAJAH, S., 2005. On The Two Sided Distributions, Metrika, 61:309-321.

NADARAJAH, S., 2008. A Truncated Inverted Beta Distribution with Application to Air Pollution Data, Stoch. Environ. Res. Risk Assess., 22:285–289.

NADARAJAH, S., and HAGHIGHI, F., 2011. An Extension of the Exponential Distribution, Statistics, 45:543-558.

NADARAJAH, S., and KOTZ, S., 2006. *The beta exponential distribution*, Reliab. Eng. Syst. Saf., 91:689–697.

NADARAJAH, S., and ZOGRAFOS, K., 2003. Formulas for Rényi Information and Related Measures for Univariate Distributions, Inf. Sci., 155:119-138.

NASSAR, M., M., and EISSA, M., M., 2003.On The Exponentiated Weibull Distribution, Comm. in Stat. Theory-Methods 32:1317-1336.

NICHOLAS, M., D., AND PADGETT, W., J., 2006. A Botstrap Control Chart for Weibull Percentiles, Quality and Reliab Engin Inter, 22:141-151.

ORUÇ, Ö., E., and BAIRAMOV, I., 2005. On the General Class of Two Sided Power Distribution, Communications in Statistics Theory and Methods, 34:1009-1017.

REYES, J., GOMEZ, H., W., and BOLFARINE, H., 2012. Modified slash distribution, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics 47:929-941.

ROGERS, W., H., and TUKEY, J.,W., 1972. Understanding some long-tailed symmetrical distributions, Stat. Neerlandica 26:211–226.

ROUSSAS, G., G., 1997. A Course in Mathematical Statistics, Academic Press, London, 572p.

SCHMIDT, R., 1934. Statistical Analysis of One-Dimensinonal Distributions Ann. Math. Statist., 5:30-43.

SHAKED, M., and SHATHIKUMAR, 2007. J., G., Stochastic Orders, Springer, New York, 467p.

SILVA, R., B., BURGUIGNIN, M., DIAS, C., R., B., and CORDEIRO, G., M., 2013. The Compound Class of Extended Weibull Power Series Distributions, Comput. Stat. Data Anal., 58:352–367.

SOOFI, E., S., and RETZER, J., J., 2002. Information indices: unication and applications, Journal of Econometric, 107:17–40.

SULTANI, A., R., and HOMEI, H., 2009. A Generalization for Two Sided Power Distributions and Adjusted method of Moments, Statistics, 6:611-620.

VAN DORP, J.,R., and KOTZ, S., 2002a. A Novel Extension of the Triangular Distribution and Its Parameter Estimation, Statistican, 56:63-79.

VAN DORP, J., R., and KOTZ, S., 2002b. The Standard Two Sided Power Distribution and Its Properties: With Applications in Financial Engineering, The Amr. Statistican, 56:90-99.

VAN DORP, J., and R., KOTZ, S., 2003. Generalizations of Two Sided Power Distributions and Their Convolution, Communications in Statistics Theory and Methods, 9:1703-1723.

VAN DORP, J.,R., and KOTZ, S., 2004. Beyond Beta, Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications, World Scientific Press, Singapore, 290 p.

VAN DORP, J.,R., and MAZZUCHI, T., A., 2000. Solving for the Parameters of a Beta Distribution under Two Quantile Constraints, J. Stat. Comp. And Simul., 67:189:201.

VELASCO, J., M., H., PLEGUZUELO, R., H., and VAN DORP, J., R., 2009. The generalized two sided power distribution, Journal of Applied Statistics, 36:573-587.

VICARI, D., VAN DORP, J., R., and KOTZ, S., 2008. Two-Sided Generalized Topp and Leone distributions, Journal of Applied Statistics, 35:115-1129.

VILCA, F., SANTANA, L, LEIVA, V. and BALAKRISHNAN, N., 2011. Estimation of Extreme Percentiles in Birnbaum–Saunders Distributions, Comp. Stat. and Data Analy., 55:1665-1678.

WANG, J.,and GENTON, M., G., 2006. The multivariate skew-slash distribution, J. Stat. Plan Inference 136:209–220.

XIE, M.,and LAI, C., D., 1996. Reliability Analysis Using an Additive Weibull Model with Bathtub-Shaped Failure Rate Function, Reliab Eng Syst Saf., 52:87–93.

XIE, M., TANG, Y., and GOH, T., N., 2002. A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function, Reliab. Eng. Syst. Saf., 76:279–285.

ZHANG, T., and XIE, M., 2007. Failure Data Analysis with Extended Weibull Distribution, Comm. Stat. Sim. and Comp., 36:579-592.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Gaziantep'in Nizip ilçesinde doğdu. İlköğrenim, orta öğrenim ve lise öğrenimini Nizip'te tamamladı. 2004 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünü kazandı. Lisans eğitimini 2008 yılında tamamlayarak aynı yıl Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine ve yine aynı yılın sonunda Artvin Çoruh Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Yüksek lisans eğitimini 2010 yılında bitirdi ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı.

EKLER

EK 1

TSGW dağılımı için parametre tahminlerini veren *Matlab* kodları

```
clear all
clc
load data
x=data;
n=length(x);
for i=1:n
   for j=1:n
     if x(i)<x(j)
        yedek=x(j);
        x(j)=x(i);
        x(i)=yedek;
        end
   end
end

t(1)=2;
b(1)=0.2;
a(1)=5;
g(1)=0.5;
m=1;
for i=1:n
if x(i)< t(m)*(-log(b(m)))^(1/g(m));
f(i)=a(m)*g(m)*(1-b(m))^(1-a(m))/t(m)^g(m)*(1-exp(-(x(i)/t(m))^g(m)))^(a(m)-
1)*x(i)^(g(m)-1)*exp(-(x(i)/t(m))^g(m));
else x(i)>= t(m)*(-log(b(m)))^(1/g(m));
 f(i)=a(m)*g(m)*b(m)^(1-a(m))/t(m)^g(m)*x(i)^(g(m)-1)*exp(-
a(m)*(x(i)/t(m))^g(m));
end
end
```

```
l1=sum(log(f));
gfark=1000;
eps=0.001;
while gfark>eps
  for r=1:n
      for i=1:r
        mr11(r)=prod((1-exp(-(x(1:i)/t(m)).^(g(m))))/(1-exp(-(x(r)/t(m))^(g(m)))));
        mr21(r)=prod((exp(-(x(i+1:n)/t(m)).^g(m)))/(exp(-(x(r)/t(m))^g(m))));
        end
      Mr(r)=mr11(r)*mr21(r);
end
eb=max(Mr);
for i=1:n
if Mr(i)==eb
      rmax=i;
      end
  end
  rmax;
m=m+1;
%betanın tahmini
b(m)=exp(-(x(rmax)/t(m-1))^g(m-1));
% alfanın tahmini
a(m)=-n/log(max(Mr));
%tetanın tahmini yenileniyor
for i=1:n
    T1(i)=(x(i))^(g(m-1));
end
for i=1:rmax
    T2(i)=((x(i))^(g(m-1))*exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))))/(1-exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-
1))));
end
```

```
for i=rmax+1:n
   T3(i)=(x(i))^(g(m-1));
end
Payt=-g(m-1)*n/(t(m-1))+g(m-1)/(t(m-1))^(g(m-1)+1)*sum(T1)-(a(m)-1)*g(m-
1)/(t(m-1))^(g(m-1)+1)*sum(T2)+(a(m)-1)*g(m-1)/(t(m-1))^(g(m-1)+1)*sum(T3);

for i=1:rmax
T4(i)=((x(i))^(2*g(m-1)))*(exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))))/(1-exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-
1))));
T5(i)=((x(i))^(2*g(m-1)))*(exp(-2*(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))))/(1-exp(-(x(i)/t(m-
1))^(g(m-1))))^2;
end

Paydat=n*g(m-1)/(t(m-1))^2-g(m-1)*(1+g(m-1))/(t(m-1))^(g(m-
1)+2)*sum(T1)+(a(m)-1)*(g(m-1)*(1+g(m-1))/((t(m-1))^(g(m-1)+2))*sum(T2)-
(g(m-1)/t(m-1)^(g(m-1)+1))^2*sum(T4)-(g(m-1)/t(m-1)^(g(m-1)+1))^2*sum(T5)-
g(m-1)*(1+g(m-1))/((t(m-1))^(g(m-1)+2))*sum(T3));
t(m)=t(m-1)-(Payt/Paydat);
 % gammanın tahmini yenileniyor
 for i=1:n
   T6(i)=log(x(i));
   T7(i)=(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*log(x(i)/t(m-1));
end
for i=1:rmax
   T8(i)=(exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1)))*(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*log(x(i)/t(m-1)))/(1-
exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))));
end
for i=rmax+1:n
   T9(i)=(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*log(x(i)/t(m-1));
end
Payg=n/g(m-1)-n*log(t(m-1))+sum(T6)-sum(T7)+(a(m)-1)*(sum(T8)-sum(T9));
```

```
for i=1:n
   T10(i)=(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*(log(x(i)/t(m-1)))^2;
end
for i=1:rmax
T11(i)=(exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1)))*(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*(log(x(i)/t(m-1)))^2)/(1-
exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))));
T12(i)=(exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1)))*(x(i)/t(m-1))^(2*g(m-1))*(log(x(i)/t(m-
1)))^2)/(1-exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))));
T13(i)=((exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1)))*(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*log(x(i)/t(m-1)))/(1-
exp(-(x(i)/t(m-1))^(g(m-1)))))^2;
end
for i=rmax+1:n
   T14(i)=(x(i)/t(m-1))^(g(m-1))*(log(x(i)/t(m-1)))^2;
end
Paydag=-n/(g(m-1))^2-sum(T10)+(a(m)-1)*(sum(T11)-sum(T12)-sum(T13)-
sum(T14));
g(m)=g(m-1)-(Payg/Paydag);
for i=1:n
if x(i)< t(m)*(-log(b(m)))^(1/g(m));
  f(i)=a(m)*g(m)*(1-b(m))^(1-a(m))/t(m)^g(m)*(1-exp(-(x(i)/t(m))^g(m)))^(a(m)-
1)*x(i)^(g(m)-1)*exp(-(x(i)/t(m))^g(m));
else x(i)>= t(m)*(-log(b(m)))^(1/g(m));
 f(i)=a(m)*g(m)*b(m)^(1-a(m))/t(m)^g(m)*x(i)^(g(m)-1)*exp(-
a(m)*(x(i)/t(m))^g(m));
end
end
l3=sum(log(f));
gfark=abs(l1-l3);
  if gfark > eps
      l1=l3;
  end
```

```
  rmax
  t(m)*(-log(b(m)))^(1/g(m))
  x(rmax)
end
```