EULER-BERNOULLI VE TIMOSHENKO TEORİLERİNE DAYALI EKSENEL YÖNDE FONKSİYONEL DERECELENMİŞ KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ

Burkay SİVRİ[1] ve Beytullah TEMEL[2]
[1,2] Çukurova Üniversitesi, Adana

ABSTRACT

In this study, the buckling load of straight column made of functionally graded material in the axial direction is investigated by the Complementary Functions Method (CFM). The canonical equations governing the buckling behavior are obtained with the aid of equilibrium equations based on the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. The set of ordinary differential equations is solved with a program prepared in Python language. The effects of material variation coefficients, length/thickness ratios, and different boundary conditions on the buckling load are investigated parametrically. The buckling loads obtained are compared with the existing methods in the literature and the values found in Abaqus, the finite element program, and the efficiency of the applied method is shown.

Keywords: Buckling; Functionally graded materials; Complementary functions method

ÖZET

Bu çalışmada; eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş malzemeli, doğru eksenli kolonların burkulma yükü Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklemler, Euler-Bernoulli (BKT) ve Timoshenko kiriş teorilerine (TKT) dayalı olarak denge denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Adi diferansiyel denklem takımları, Python dilinde hazırlanan programla çözülmüştür. Malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı sınır koşullarının burkulma yüküne etkisi parametrik olarak araştırılmıştır. Elde edilen burkulma yükleri, literatürde bulunan mevcut yöntemler ve Abaqus sonlu elemanlar programında bulunan değerler ile karşılaştırılmış, uygulanan yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Burkulma; Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler; Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

GİRİŞ

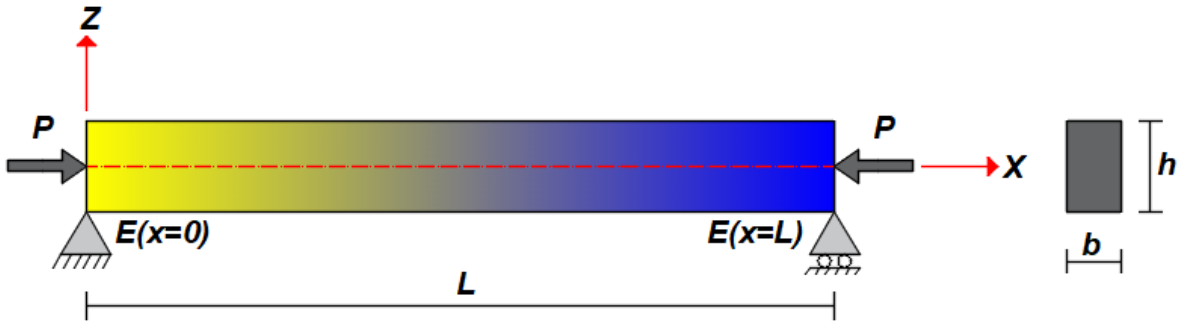
Mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişen fonksiyonel derecelenmiş (FD) malzemeli elemanlar, havacılık ve uzay sanayi, tıp, otomotiv ve modern mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür yapıların; üretim teknikleri, aşınma, yorulma, titreşim, burkulma gibi özelliklerinin belirlenmesine yönelik çalışmalar günümüzde önem kazanmıştır. Bu nedenle FD malzemeli elemanların burkulmasını inceleyen birçok çalışma mevcuttur.

Gören ve Erim [1], değişen kesitli konsol Timoshenko kirişlerinin stabilitesini incelemiştir. On farklı, kademeli ve kademesiz kirişin kritik burkulma yüklerini, sonlu eleman ve sonlu eleman-transfer matris metotlarını kullanarak, Matlab 5.1 programlama diliyle hesaplamışlardır. Coşkun ve Atay [2], sabit ve değişken kesitli Euler kolonlarının burkulma yüklerini bulmak için, doğrusal olmayan adi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Varyasyonel İterasyon Yöntemini kullanmışlardır. Shahba ve ark.[3], homojen olmayan fonksiyonel derecelenmiş Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim ve stabilitesini incelemişlerdir. Huang ve Li [4], uniform olmayan ve eksen boyunca eğilme rijitliği değişen Euler-Bernoulli kolonlarının burkulma davranışlarının incelenmesi için analitik yaklaşım sunmuşlardır. Mafsal uçlu, ankastre uçlu ve konsol kolonların burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklemi, Fredholm integral denklemine indirgemişlerdir. Elishakoff [5], fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davraşını incelemiştir. Çalışmasında konsol kolonların burkulma modunu, farklı polinom varyasyonlarını dikkate alarak vermiştir. Yılmaz ve ark. [6], elastik mesnetli uniform olmayan eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizini Lokalize Diferansiyel Kuadratür Yöntemi ile incelemişlerdir. Filiz ve Aydoğdu [7], Ritz Metodu yardımıyla eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş Euler-Bernoulli kirişlerinin çeşitli sınır koşullarında boyutsuz frekans parametrelerini ve kritik burkulma yüklerini bulmuşlardır. Uluköy [8], malzeme özelliğinin genişlik boyunca değiştiği eksenel basınç yükü altındaki kolonun burkulma analizini sonlu eleman tabanlı Ansys programını kullanarak yapmıştır. Xiao ve Li [9], bir ucunda dönme yayı bulunan homojen olmayan konsol kolonların Euler burkulmasını incelemişlerdir. Burkulma yüklerini kesin olarak bulabilmek için problem bir Bessel denklemine dönüştürülmüştür. Bulunan kesin burkulma yüklerini, moment metodu kullanılarak bulunan yaklaşık burkulma yükü değerleriyle karşılaştırmışlardır. Lee ve Lee [10], kesit ve malzeme özelliklerinin kolon ekseni boyunca doğrusal değiştiği Euler-Bernoulli kolonlarının serbest titreşim ve burkulma analizini birleşik bir modelde sunmuşlardır. Yönetici denklemleri elde edip, bu denklemleri determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Buldukları sonuçları, Adına sonlu eleman yazılımından elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Akgöz [11], kesitlerinin uzunlukları boyunca sürekli değiştiği eksenel basınç altındaki narin kolonların burkulma davranışını incelemiştir. Kolonlar Euler-Bernoulli kiriş teorisiyle modellenmiş ve burkulma yükleri Ritz Metoduyla bulunmuştur. Lee ve Lee [12], burkulma kapasitesini en üst düzeye çıkarmak için eksenel derecelenmiş değişen kesitli kolonların optimizasyonunu incelemişlerdir. Diferansiyel denklemler, determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemi ile çözülmüştür. Rajasekaran [13], fonksiyonel derecelenmiş uniform olmayan kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini diferansiyel transformasyon yöntemini kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmada; kayma deformasyonlarının etkileri de dikkate alınarak, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulması TFY ile incelenmiştir. Malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı sınır koşullarının burkulma yüküne etkisi araştırılmıştır.

TEMEL DENKLEMLER ve ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Şekil 1'de eksenel basınç kuvveti altındaki FD malzemeli kolonda; A dikdörtgen kesitin alanını, I atalet momentini, $E(x)$ ise elastisite modülünün x ekseni boyunca malzeme fonksiyonuyla değişimini göstermektedir.



Şekil 1. Ekseni Yönünde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolon

Eksenel ve düşey yer değiştirmeler, U_x ve U_z ile birim şekil değiştirmeler ε_x ve γ_{xz}; TKT'ye göre denklem (1-4)'deki gibi ifade edilmektedir [14].

$$U_x = u(x) + z\theta(x) \tag{1}$$

$$U_z = w(x) \tag{2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\theta' \tag{3}$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \tag{4}$$

Şekil 1. de verilen dikdörtgen kesit özelliklerine göre iç kuvvetler ile gerilmeler arasındaki ilişkiler denklem (5-7)'de verilmektedir.

$$N_x = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = b\int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x dz \tag{5}$$

$$M_x = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = b\int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x z dz \tag{6}$$

$$Q_z = k_s b\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = bk_s\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x)}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xz} dz \tag{7}$$

Burada k_s, kesite bağlı kayma düzeltme katsayısını, υ ise poisson oranını göstermektedir.

Denklem (3-4), iç kuvvet-gerilme bağıntılarında yerine yazılarak (8-10) denklemleri elde edilir. Normal kuvvet, kesme kuvveti ve momentteki değişimler ise, (11-13) denklemlerinde verilmektedir [15]. Bu çalışmada burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklem takımı (8-13)'deki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{K_{11}} \tag{8}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{K_{22}} \tag{10}$$

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_z - P\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \tag{13}$$

Burada K_{11} , K_{22} ve K_{33} kesit rijitlik sabitleri olup, denklem (14-15)'de verilmiştir.

$$\{K_{11}, K_{22}\} = \{E(x)A,\ E(x)I\} \tag{14}$$

$$K_{33} = k_s G(x)A \tag{15}$$

Çalışmada özel olarak, BKT'ye dayalı burkulma yükü hesabında denklem (9) ve (13) eşitliklerindeki, $K_{33} / (K_{33} - P) = 1$ alınmaktadır.

$$S(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 \tag{16}$$

Denklem (16)'da genel formu verilen sınır değer problemi, n adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımına indirgenir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemiyle diferansiyel denklem takımının çözümü [14,16,17]; n adet homojen, bir adet homojen olmayan başlangıç değer problemi çözümü şeklinde denklem (17)'deki gibi yazılır. Çalışmada başlangıç değer problemlerinin çözümünde beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır [18].

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{17}$$

Denklem (17)'de; $y_0(x)$ homojen olmayan çözümü, $y_n(x)$ homojen çözüm fonksiyonlarını, c_n terimleri ise integrasyon sabitlerini ifade etmektedir. İntegrasyon sabitleri problemin sınır koşullarından elde edilir. Bu çalışmada ele alınan problemler çözülürken Çizelge 1'de verilen sınır koşulları dikkate alınmıştır.

Çizelge 1. Sınır Koşulları

Sınır Koşulları	Serbestlikler		
Ankastre Mesnet (A)	$u = 0$	$w = 0$	$\theta = 0$
Sabit Mesnet (S)	$u = 0$	$w = 0$	$M_x = 0$
Serbest Uç (Se)	$u = 0$	$Q_z = 0$	$M_x = 0$

Analizi yapılan problemin burkulma yükleri, sınır koşulları dikkate alınarak, diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerden elde edilmektedir. Burkulma yükleri, Secant metoduyla iteratif olarak bulunmaktadır.

SAYISAL UYGULAMALAR

Uygulama 1

Kullanılan çözüm yönteminin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliğini göstermek için literatürde analitik çözümü verilen homojen-izotrop malzemeye sahip bir kolon ele alınmıştır. Kolonun geometri ve malzeme özellikleri denklem (18)'de verilmiştir. Burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklem takımı TFY ile $N=\{5,10,20,50\}$ adım aralıkları ve çeşitli sınır koşulları (SK) için çözülmüştür.

$$r=\frac{I}{AL^2}=0.01,\quad k_s=5/6,\quad \upsilon=0.3 \tag{18}$$

Çizelge 2. Homojen-İzotrop Euler-Bernoulli Kolonlarının Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}}=P_{cr}L^2/EI$)

SK	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
S-S	9.86920	9.86960	9.86960	9.86960	9.86960
A-S	20.18424	20.19060	20.19072	20.19072	20.19073
A-A	39.41029	39.47681	39.47839	39.47842	39.47842
A-Se	2.46740	2.46740	2.46740	2.46740	2.46740

Çizelge 2'de BKT'ye dayalı homojen izotrop kolonların TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir. Çizelge 3'de ise kayma deformasyonlarının etkisinin dikkate alındığı TKT'ye dayalı homojen izotrop kolonların boyutsuz burkulma yükleri sunulmuştur.

Çizelge 3. Homojen-İzotrop Timoshenko Kolonlarının Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}}=P_{cr}L^2/EI$)

SK	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
S-S	7.54573	7.54596	7.54596	7.54596	7.54596
A-S	12.38488	12.38727	12.38732	12.38732	12.38732
A-A	17.67594	17.68931	17.68962	17.68963	17.68963
A-Se	2.29102	2.29102	2.29102	2.29102	2.29103

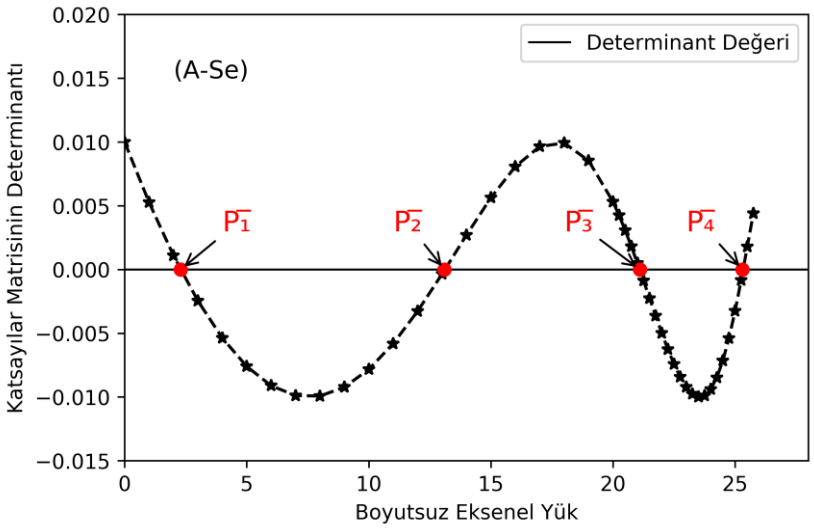
TKT'ye dayalı homojen-izotrop konsol kolunun dört burkulma moduna ait boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4'de verilmiştir. Bu sınır koşuluna sahip kolonun P eksenel yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi ise Şekil 2'de gösterilmiştir.

Çizelge (2-4) incelendiğinde, TFY ile elde edilen burkulma yüklerinin, literatürde bulunan mevcut burkulma yükleriyle çok uyumlu olduğu görülmektedir. S-S sınır koşuluna sahip; homojen-izotrop Euler-Bernoulli kolonunun $N=5$ adım aralığında literatür ile birebir uyum

sağladığı görülmektedir. Timoshenko kolonu için çözüm aralığı $N=10$ adım alındığında yeterli hassasiyet sağlanmıştır.

Çizelge 4. Homojen-İzotrop Timoshenko Konsol Kolonunun Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_i}=P_iL^2/EI$)

A-Se	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
$\overline{P_1}$	2.29102	2.29102	2.29102	2.29102	2.29103
$\overline{P_2}$	13.11484	13.11785	13.11791	13.11791	13.11791
$\overline{P_3}$	21.06022	21.09093	21.09196	21.09198	21.09198
$\overline{P_4}$	25.33910	25.33024	25.33488	25.33498	25.33498



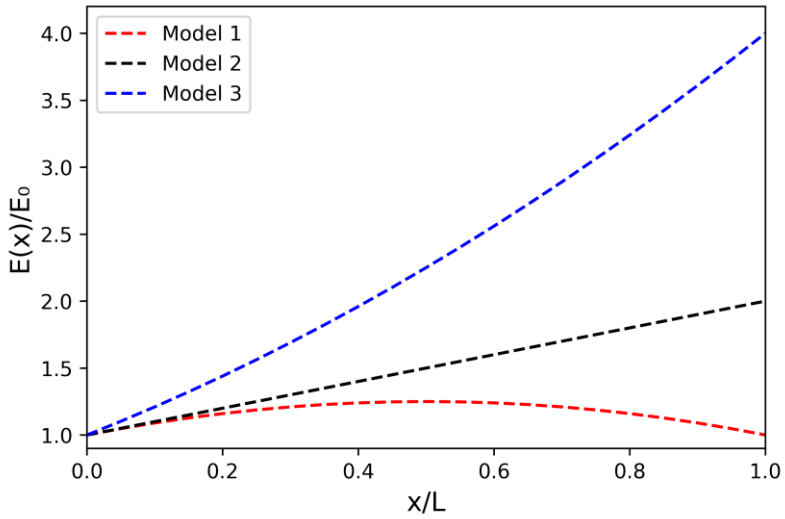
Şekil 2. A-Se Sınır Koşulu için Katsayılar Matrisi Determinantının Değişimi

Uygulama 2

Bu uygulamada, eksenel yönde FD malzemeli kolonların analizleri için malzeme modelleri Çizelge 5'de ve değişim fonksiyon grafikleri Şekil 3'de verilen üç farklı model ele alınmıştır [3,13]. FD malzemeli kolonlarda $k_s=0.85$, $\upsilon=0.3$ olarak sabit alınmıştır. Bu uygulama için TFY ile yapılan analizlerde $N=20$ adım aralığı kullanılmıştır.

Çizelge 5. Malzeme Değişimi Fonksiyonları

Model No	Değişim Fonksiyonları
Model 1	$1+x-x^2$
Model 2	$1+x$
Model 3	$1+2x+x^2$



Şekil 3. Elastisite Modülünün Kolon Boyunca Değişimi

Eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş BKT'ye göre kolonların boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge 6'da verilmiştir.

Çizelge 6. BKT'ye göre FD Malzemeli Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

SK	Model 1		Model 2		Model 3	
	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]
S-S	12.00000	12.00000	14.51125	14.51125	20.79229	20.79229
A-S	23.66437	23.66438	29.44896	29.44897	42.10915	42.10919
A-A	45.39557	45.39565	57.39388	57.39401	81.92314	81.92347
A-Se	2.86537	2.86375	3.11770	3.11770	3.83638	3.83638

BKT'ye dayalı FD malzemeli kolonların çeşitli sınır koşulları için TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin literatürde verilen sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. A-A sınır koşulunda; bu çalışmadan elde edilen sonuçlarla literatürde bulunan mevcut sonuçların, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla, $\{\%-1.76x10^{-4}, \%-2.27x10^{-4}, \%-4.03x10^{-4}\}$ olarak bulunmuştur.

Timoshenko teorisine dayalı eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizi için TFY ve Abaqus sonlu elemanlar paket programı kullanılmıştır. Sonlu elemanlar programında, malzeme değişiminin hassas olarak modellenebilmesi için kolon, uzunluğu boyunca 200 adet homojen-izotrop elemana bölünmüştür. Abaqus ile analizlerde, kayma deformasyonlarının dikkate alındığı B21 elemanı kullanılmıştır. Farklı sınır koşullarına sahip, FD malzemeli Timoshenko kolonlarının çeşitli L/h oranlarında boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge (7-10)'da sunulmuştur.

Çizelge 7. TKT'ye göre FD Malzemeli (S-S) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

S-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	10.80851	10.80795	11.67826	11.67756	11.91792	11.91715	11.98679	11.99003
Model 2	13.09563	13.09508	14.13040	14.12970	14.41419	14.41373	14.49563	14.49653
Model 3	18.44967	18.44918	20.15927	20.15850	20.63077	20.62978	20.76629	20.76825

Çizelge 8. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-S) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	19.52678	19.15028	22.47451	22.24680	23.35530	23.18256	23.61438	23.46390
Model 2	24.45475	23.79053	28.02424	27.69678	29.07975	28.87166	29.38927	29.22015
Model 3	34.49752	33.37868	39.94574	39.45156	41.54909	41.27102	42.01864	41.80950

Çizelge 9. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-A) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-A	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	32.55260	32.55503	41.32260	41.32656	44.30405	44.30837	45.21734	45.22418
Model 2	40.50100	40.54020	52.01028	52.03872	55.94869	55.96512	57.15777	57.17063
Model 3	55.70032	55.88985	73.53695	73.67220	79.66902	79.72704	81.55473	81.58725

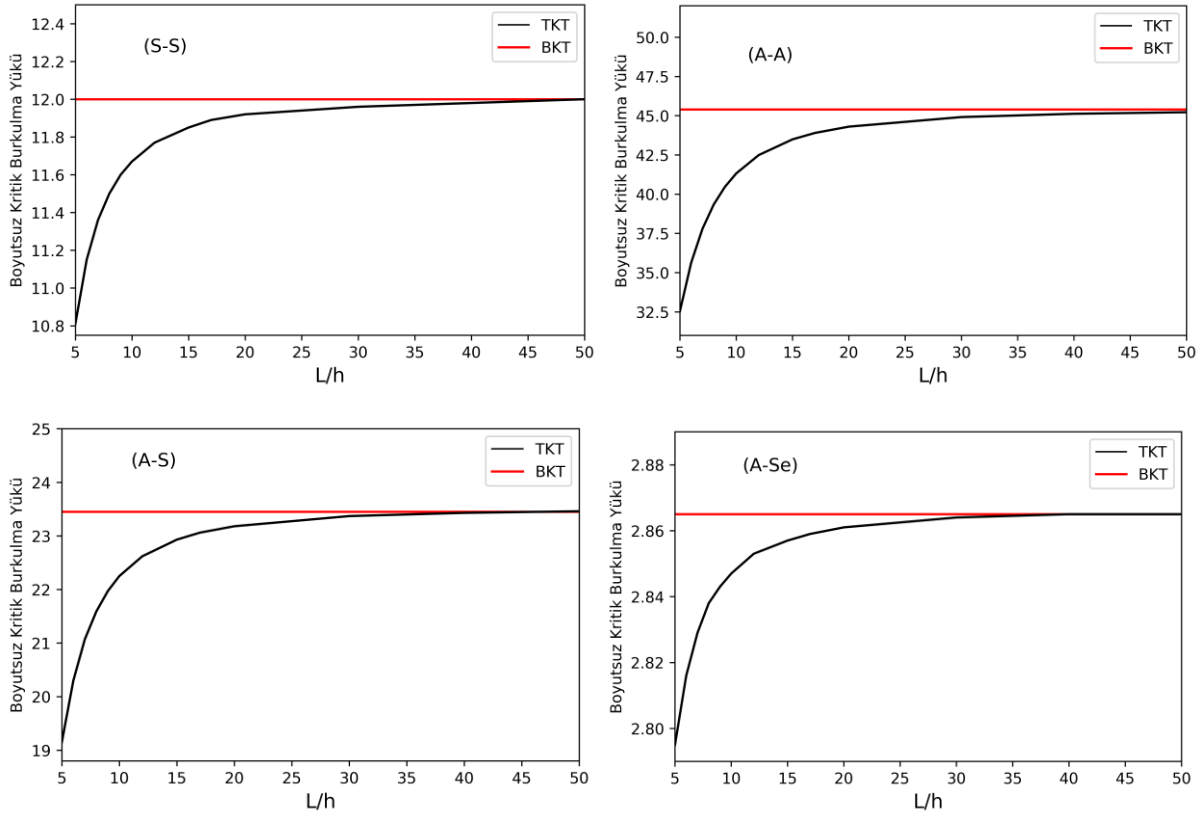
A-A sınır koşuluna sahip, $L/h = 5$ olan FD Timoshenko kolonun; TFY ve Abaqus ile bulunan burkulma yüklerinin, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla,$\{\%-7.46x10^{-3}, \%-9.68x10^{-2}, \%-3.40x10^{-1}\}$ olarak bulunmuştur.

Çizelge 10. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-Se) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-Se	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	2.79511	2.79513	2.84748	2.84752	2.86088	2.86084	2.86465	2.86834
Model 2	3.05877	3.05880	3.10275	3.10279	3.11394	3.11408	3.11709	3.11900
Model 3	3.77934	3.77941	3.82197	3.82210	3.83277	3.83278	3.83580	3.83954

Bu çalışmada, FD malzemeli kolonlar için bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Model 1 malzeme değişim fonksiyonu için BKT ve TKT'ye dayalı olarak modellenen FD malzemeli kolonlarda L/h oranlarının farklı sınır koşullarında boyutsuz burkulma yüklerine etkisi Şekil 4'de gösterilmiştir. FD kolonlarda L/h oranı arttıkça TKT'den elde edilen sonuçların BKT sonuçlarına yaklaştığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4. Farklı Sınır Koşullarına Sahip Model 1 FD Malzemeli Kolonlarda L/h Oranının Boyutsuz Burkulma Yüklerine Etkisi

SONUÇLAR

Bu çalışmada, basınç kuvveti altında eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davranışı incelenmiştir. Analizlerde, hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Homojen-izotrop kolonlar üzerinde yöntemin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliği gösterilmiştir. Bu çalışmada bulunan burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. FD kolonlarda en büyük boyutsuz burkulma yükleri, Model 3 malzeme değişim fonksiyonu için bulunmuştur. L/h oranı arttıkça Timoshenko teorisinden elde edilen sonuçların Euler-Bernoulli kiriş teorisi sonuçlarına yaklaştığı; bu oran azaldıkça kayma deformasyonlarının kritik burkulma yüküne etkisinin arttığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, uygulanan yöntemin farklı sınır koşullarına sahip FD kolonların burkulma analizlerinde etkin olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] B. Gören, S. Erim, Değişken kesitli ankastre Timoshenko kirişin statik stabilite analizi, *DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*. 2(2) (2000) 75-86**.**

[2] S.F. Coşkun, M.T. Atay, Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications.* 58 (2009) 2260 2266.

[3] A. Shahbaa, R. Attarnejada, S. Hajilara, Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams, *Shock and Vibration*. 18 (2011) 683-696.

[4] Y. Huang, X-F. Li, Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity, *J. Eng. Mech*.. 137(1) (2011) 73-81.

[5] I. Elishakoff, Buckling of a column made of functionally graded material, *Arch Appl Mech*.. 82 (2012) 1355–1360.

[6] Y. Yılmaz, Z. Girgin, S. Evran, Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Mathematical Problems in Engineering.* (2013), Article ID 793062 http://dx.doi.org/10.1155/2013/793062.

[7] S. Filiz, M. Aydoğdu, Eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin titreşim ve burkulma analizi, *XIX. Ulusal Mekanik Kongresi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.Türkiye, 2015: s.483-491.

[8] A. Uluköy, Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin lineer burkulma analizi, *AKU J. Sci. Eng.*. 16 (2016) Özel Sayı (122-127).

[9] B.J. Xiao, X.F. Li, Exact solution of buckling load of axially exponentially graded columns and its approximation, *Mechanics Research Communications.* 101 (2019) 103414.

[10] J.K. Lee, B.K. Lee, Free vibration and buckling of tapered columns made of axially functionally graded materials, *Applied Mathematical Modelling.* 75 (2019) 73–87.

[11] B. Akgöz, Ritz yöntemi ile değişken kesitli kolonların burkulma analizi, *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*. 7(2) (2019) 452 – 458.

[12] J.K. Lee, B.K. Lee, Buckling optimization of axially functionally graded columns having constant volume**,** *Engineering Optimization*. DOI:10.1080/0305215X.2020.1862824

[13] S. Rajasekaran**,** Buckling and vibration of axially functionally graded nonuniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach, *Meccanica.* 48 (2013) 1053–1070.

[14] A.R. Noori, H. Rasooli, T.A. Aslan, B. Temel, Fonksiyonel derecelenmiş sandviç kirişlerin tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile statik analizi, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*. 35(4) (2020) 1091-1101.

[15] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill; 1961.

[16] A.R. Noori, T.A. Aslan, B. Temel, Static analysis of FG beams via complemantary functions method, *European Mechanical Science,* 4(1) (2020) 1-6.

[17] A.R. Noori, T.A. Aslan, B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section, *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710.

[18] S.C. Chapra, R. P. Canale, *Yazılım Ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*, Literatür Yayınevi, 2003.

[19] Dassault Systèmes, ABAQUS/CAE v6.14, 2016.

[20] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N.Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. Florida: CRC Press, 2005.