ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topolojik Uzayların İdeal Genişlemesi

Mahmut YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran, 2025

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Topolojik Uzayların İdeal Genişlemesi

Mahmut YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Bu Yüksek Lisans Tezi../../…. Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT (Danışman) ……

: Prof. Dr. Tuncay TUNÇ ……

: Dr. Öğrt. Üyesi Sadık EYİDOĞAN ……

Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ II
ABSTRACT III
TEŞEKKÜR IV
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3
2.1. Kuratowski kapanış operatörü 3
2.2. Ayırma Aksiyomları 5
2.3. Kategori ve Funktor. 6
2.4. Filtre 6
2.5. Ölçüm Uzayları 8
3. YEREL FONKSİYON 9
3.1. Topolojik İdeal 9
3.2. Yerel Fonksiyon 10
3.3. Yerel Fonksiyon İle Topoloji Üretme 14
3.4. Yerel Fonksiyon ve Limit Noktaları 18
3.5. Topoloji ile İdealin Uyumlu Olması 23
4. SERBEST İDEAL VE İDEAL GENİŞLEMELERİ 29
4.1.Serbest İdeal 29
4.2.İdeal Genişlemeleri 32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 41
KAYNAKLAR 43
ÖZGEÇMİŞ 45

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İdeal Topolojik Uzaylar ve İdeal Genişlemeleri

Mahmut YILMAZ

Danışman: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT

Matematik Anabilim Dalı

ÖZ

Topoloji elde etmenin yollarından biri Kuratowski kapanış operatörü ile bir kümenin kapalı alt kümelerini belirlemektir. Bir küme üzerindeki topoloji, bu küme üzerinde tanımlanan ideal ve bu idealle tanımlanan yerel fonksiyon ile bir Kuratowski kapanış operatörü elde edilebilir. Elde edilen bu yerel fonksiyonlar ile başlangıçtaki topolojiden daha ince bir topoloji üretebiliriz. Serbest idealler kullanılarak bir topolojik uzaya homeomorfik bir uzay ve bir ideal genişlemesi ile bu uzayın bir genişlemesi elde edilebilir. Serbest idealler ile birlikte tanımlanan yeni kavramlar ile bu uzayın kompaktlığı belirlenebilir.

Bu çalışmamızda bir I ideali ile üretilen ideal topolojik uzay, ideallerin genişlemesi, güç sistemi üzerinde tanımlanan topolojinin kompaktlığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal Genişlemesi, Kuratowski Kapanış Operatörü, Kompaktlık.

CUKUROVA UNIVERSITY

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MSc THESIS

İdeal Topological Spaces and İdeal Extensions

Mahmut YILMAZ

Advisor: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT

Department of Mathematics

ABSTRACT

One way to obtain topology is to determine closed sets on a set with the Kuratowski closure operator. A Kuratowski closure operator can be obtained with the topology on a set, the ideal defined on this set and the local function defined by this ideal. With these local functions obtained, we can produce a finer topology than the initial topology. Using free ideals, a space homeomorphic to a topological space and an extension of this space can be obtained with an ideal extension. With new concepts defined together with free ideals, the compactness of this space can be determined.

In this study, the ideal topological space generated by an ideal I, the extension of ideals, and the compactness of the topology defined on the power system are examined.

Keywords: Ideal Extension, Kuratowski Closure Operator, Compactness

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulmasında her zaman bana destek olan, yol gösteren, ufkumu açan, problemlere farklı bakış açılarıyla bakıp farklı çözümler üreten başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak değerli danışmanım Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Bir topolojik uzayda bir kümenin limit noktalarının ve kompaktlığının belirlenmesi topoloji için büyük önem taşımaktadır. Bu kavramlar uzayın üzerinde tanımlı olan topolojiye göre belirlenmektedir. Aynı kümenin farklı uzaylardaki limit noktaları ve kompaktlığı farklı olabilir.

Herhangi bir kümenin üzerine topoloji tanımlamanın farklı yolları vardır. Bunlardan biri Kuratowski'nin tanımladığı bir küme üzerinde topolojinin kapalı kümelerini belirlememizi sağlayan Kuratowski kapanış operatörüdür. Bir kümenin belirli bir özelliğe sahip olan veya olmayan elemanların oluşturduğu alt kümeler ailesi genellikle bir topolojik ideal oluşturmaktadır. 1990 yılında Jankovic ve Hamlet idealleri kullanarak yerel olarak bu özelliğe ait olmayan noktalar kümesi ile yerel fonksiyonları oluşturup, yerel fonksiyonlar ile Kuratowski kapanış operatörü elde edip daha ince bir topoloji elde etmiştir.

'Kompakt' terimi, 1904 yılında Maurice Frechet tarafından ortaya atılmıştır. Kompaktlığın ilk teoremi kapalı ve sınırlı [a, b] aralığının kompakt olduğunu belirten Heine – Borel teoremidir. Kompaktlığın amacı Reel sayılardaki kapalı ve sınırlı aralıkların özelliklerini herhangi bir topolojik uzaya taşımaktır. Kompaktlığın bugünkü tanımı 1923 yılında Rus matematikçiler P.S. Alexandroff ve Paul Urysohn tarafından verilmiştir.

Bir X uzayının kompaktlaştırılması (K, h) sıralı ikilisidir, burada K kompakt bir Hausdorff uzayı ve h, X uzayının K' nın yoğun bir alt uzayına gömmesidir. Kompaktlaştırma bir uzayın genişlemesi olarak düşünülebilir.

M.N.Mukherjee, Bishwambhar Roy ve Ritu Sen 2007 yılındaki çalışmalarında serbest idealin tanımını yapmış, bu idealler ile de homeomorfik iki uzay arasında güç sistemini tanımlamıştır. İki farklı güç sisteminin denkliği, topolojik uzayın genişlemesi ve ideal genişlemesi kavramları arasındaki ilişki verilmiştir. Güç sistemi üzerine Kuratowski kapanış operatörü ve bir homeomorfizm tanımlayarak bir topoloji tanımlanmış ve bu uzay üzerindeki kompaktlık incelenmiştir.

Bu çalışmada idealler ile üretilen topoloji ve bu topolojinin bazı özellikleri, serbest ideallerin oluşturduğu güç sistemi üzerine tanımlanan topoloji, ideal genişlemesi ve bu topolojinin kompaktlığı ve özellikle M.N. Mukherjee, Bishwambhar Roy ve Ritu Sen'in 2007 yılındaki çalışması incelenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışması içerisinde kullanılan Kuratowski kapanış operatörü, ayırma aksiyomları, kategori ve funktor, filtre, ölçüm uzayının tanımı ve bu kavramlar ile ilgili kullanılan teoremler verilmiştir. Bu bölümdeki bilgiler Stephen Willard' ın 1970 yılımdaki Topology, Zafer Ercan'ın 2020 yılındaki Topoloji, Refail Alizade ve Ali Pancar' ın 1999 yılındaki Homolojik Cebire Giriş ve Gerald B. Folland' ın 1999 yılındaki Reel Analysis kitabından alınmıştır.

2.1. Kuratowski kapanış operatörü

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve φ, X' in her bir A alt kümesini X' in φ(A) alt kümesi ile eşleştiren bir operatör olsun. A,B ⊆ X için φ operatörü;

K1] $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

K2] $A \subseteq \varphi(A)$

K3] $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$

K4] $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$

özelliklerini sağlıyor ise φ operatörüne Kuratowski kapanış operatörü denir.

Kuratowski kapanış operatörü X kümesi üzerinde $A = \varphi(A)$ eşitliğini sağlayan kümelerin kapalı olduğu bir topoloji belirler.

Teorem 2.1.2. X boş olmayan bir küme ve φ X üzerinde bir Kuratowski kapanış operatörü olsun.

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X: \varphi(A) = A\}$$

ailesi X üzerindeki bir topoloji için kapalı kümeler ailesidir.

İspat: $\tau_\varphi = \{X - A: A \in \mathcal{F}\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji için gerekli şartları sağladığını gösterelim.

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ olduğundan X - ∅ = X olup $X \in \tau_\varphi$

K2'den $X \subseteq \varphi(X)$ ve $\varphi(X) \subseteq X$ olduğundan $X = \varphi(X)$ olur. O halde $X \in \mathcal{F}$ olur. Buradan $X - X = \emptyset \in \tau_\varphi$ elde ederiz.

2) i = 1,2,3, … ,n için $A_i \in \mathcal{F}$ olsun.

O halde $X - A_i \in \tau_\varphi$ olur. Şimdi X – A_i kümelerinin arakesitinin de τ_φ içinde olduğunu gösterelim.

$A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow A_i = \varphi(A_i)$ ve K3 özelliğinden dolayı

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(A_i) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

olduğundan

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \text{olur.}$$

De Morgan kuralından,

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i) = X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i) \in \tau_\varphi \text{ olur.}$$

3) λ bir indis kümesi olmak üzere $i \in \lambda$ için $A_i \in \mathcal{F}$ ve $X - A_i \in \tau_\varphi$ olsun.

$$\bigcup_{i\in\lambda} (X - A_i) = X - \bigcap_{i\in\lambda} A_i \text{ olur.}$$

$$\text{İddia: } \bigcap_{i\in\lambda} A_i = \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

Kabul edelim ki;

$$\bigcap_{i\in\lambda} A_i \neq \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

olsun. O halde iki durum vardır.

1. durum: Bir $x \in X$ için,

$$x \in \bigcap_{i\in\lambda} A_i \text{ ve } x \notin \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right) \text{olsun.}$$

K2 den dolayı

$$\bigcap_{i\in\lambda} A_i \subseteq \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

olduğundan

$$x \notin \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

olması çelişkidir.

2. durum: Bir $x \in X$ için

$$x \in \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right) \text{ ve } x \notin \bigcap_{i\in\lambda} A_i \text{ olsun.}$$

Arakesitin özeliğinden dolayı;

$$x \notin \bigcap_{i\in\lambda} A_i \Longrightarrow \exists j \in \lambda \text{ için } x \notin A_j$$

olur.

$$\bigcap_{i\in\lambda} A_i \subseteq A_j$$

olduğundan

$$A_j = \left(A_j - \bigcap_{i\in\lambda} A_i\right) \cup \bigcap_{i\in\lambda} A_i$$

şeklinde yazılabilir.

$A_j \in \mathcal{F}$ olduğundan,

$$A_j = \varphi(A_j) = \varphi\left(A_j - \bigcap_{i\in\lambda} A_i\right) \cup \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

olur. Kabulümüzden dolayı

$$x \in \varphi\left(\bigcap_{i\in\lambda} A_i\right)$$

olduğundan $x \in A_j$ olması gerekir. Bu ise çelişkidir. O halde iddiamız doğrudur.

$$\bigcup_{i\in\lambda}(X - A_i) = X - \bigcap_{i\in\lambda} A_i \in \tau_k$$

olup τ_φ topoloji olma koşullarını sağlar.

2.2. Ayırma Aksiyomları

Tanım 2.2.1. x ve y bir X topolojik uzayının herhangi iki farklı noktası olsun.

$x \in U$, $y \notin U$ veya $x \notin V$, $y \in V$ olacak şekilde U veya V açık kümesi var ise bu topolojik uzaya T_0 uzayı,

$x \in U$, $y \notin U$ ve $x \notin V$, $y \in V$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri var ise bu topolojik uzaya T_1 uzayı,

$x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri var ise bu topolojik uzaya T_2 (Hausdorff) uzayı denir.

Tanım 2.2.2. X bir topolojik uzay A, X içinde kapalı bir küme ve $\forall x \notin A$ iken $x \in U_x$, $A \subseteq V_x$ olacak şekilde ayrık U_x ve V_x açık kümeleri var ise bu uzaya regüler uzay denir.

T_1 uzayı olan regüler uzaylara T_3 uzayı denir.

Tanım 2.2.3. X bir topolojik uzay A, X içinde kapalı bir küme ve $x \notin A$ iken $f: X \to [0,1]$ sürekli bir fonksiyon var öyle ki $f(x) = 0$ ve $f(A) = 1$ oluyor ise bu uzaya tamamen regüler uzay denir. Böyle bir f fonksiyonuna A kümesi ve x noktasını ayırır denir.

T_1uzayı olan tam regüler uzaylara Tychonoff uzay denir.

Tanım 2.2.4. X bir topolojik uzay A ve B, X içinde ayrık kapalı kümeler olsun. $A \subseteq U$ ve $B \subseteq V$ olacak şekilde ayrık U ve V açık kümeleri var ise bu uzaya normal uzay denir.

T_1 uzayı olan normal uzaylara T_4 uzayı denir.

2.3. Kategori ve Funktor.

Tanım 2.3.1. Bir $\mathcal{K}$ kategorisi aşağıda belirtilen koşulları sağlayan 3 içerikten oluşur.

1) $\mathrm{obj}(\mathcal{K})$ ile gösterilen nesneler sınıfı

2) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için $\mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ morfizmalar kümesi, (farklı (A, B) ve (C, D) nesne çiftleri için $\mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B) \cap \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(C,D) = \emptyset$ olur.)

3) $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$, $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(B,C)$ olmak üzere her (g,f) çiftine bunların bileşkesi denilen $gof \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,C)$ morfizmasını karşı getiren $\mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(B,C) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,C)$ işlemlerinden oluşur, öyleki;

a) Her A,B,C nesneleri ve $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$, $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(B,C)$, $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(C,D)$ morfizmaları için $ho(gof) = (hog)of$ eşitliği sağlanır.

b) Her $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{K})$ nesnesinin, her $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$, $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(B,A)$ için $fo1_A = f$, $1_A og = g$ eşitliklerini sağlayan bir ve bir tek $1_A \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,A)$ idantik (birim) morfizması vardır.

Tanım 2.3.2. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ iki kategori olsun. Bir $F: \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ kovaryant funktoru $\mathcal{K}$'nın her A nesnesini $\mathcal{M}$'nin bir F(A) nesnesine, $\mathcal{K}$'nın her $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ morfizmasını $\mathcal{M}$'nin bir $F(f) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{M}}(F(A),F(B))$, morfizmasına karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir kuraldır.

1) $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(A,B), g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{K}}(B,C) \Rightarrow F(gof) = F(g)oF(f)$

2) $\forall A \in \mathrm{obj}(\mathcal{K})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$

2.4. Filtre

Tanım 2.4.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ olsun. $\mathcal{F}$ ailesi

a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

b) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$

c) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ ise $B \in \mathcal{F}$

önermelerini sağlıyor ise $\mathcal{F}$ ye X üzerinde bir filtre denir.

Tanım 2.4.2. X bir topolojik uzay ve $\mathscr{F}$, X üzerinde bir filtre ve $x \in X$ olmak üzere x' i içeren açık kümelerin ailesi $\tau(x)$ olsun. Eğer $\tau(x) \subseteq \mathscr{F}$ ise $\mathscr{F}$ filtresi x' e yakınsıyor denir ve $\mathscr{F} \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.3. $\mathscr{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. Eğer her $A \subset X$ için $A \in \mathscr{F}$ ya da $X - A \in \mathscr{F}$ ise $\mathscr{F}$ ye ultra filtre denir.

Tanım 2.4.4. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$'nin her sonlu $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ alt kümesi için $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$ koşulunu sağlıyor ise $\mathcal{F}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.4.5. Bir X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

a) X kompakttır.

b) X'in sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerin her bir $\mathcal{K}$ ailesi için

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset$$

olur.

c) X içindeki her filtre yığılma noktasına sahiptir.

d) Her ultra filtre yakınsaktır.

Teorem 2.4.6. (X,τ) bir T_2 uzayı, A bu uzayın kompakt bir alt kümesi ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda $x \in U$, $A \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır.

İspat: (X,τ) bir T_2 uzayı, $A \subseteq X$ kompakt bir küme olsun. $x \notin A \Rightarrow \forall y \in A$ için $x \neq y$ olur. X bir T_2 uzayı olduğundan $x \in U_y$ ve $y \in V_y$ olacak şekildeki U_y , V_y açık kümeleri için $U_y \cap V_y = \emptyset$ olur.

$$A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$$

olup A kompakt olduğundan

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

olacak şekilde $\{V_{y_i} : i = 1,2, \dots, n\}$ ailesi vardır. $i = 1,2, \dots, n$ için $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$ olur.

$U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \dots U_{y_n}$ ve $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n}$ olsun. $\forall i = 1,2, \dots, n$ için $x \in U_{y_i}$ olup $x \in U$ ve $A \subseteq V$ olur. $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. $z \in U \cap V$ olsun. O halde $z \in U$ ve $z \in V$ dir. $\forall i = 1,2, \dots, n$ için $z \in U_{y_i}$ ve $\exists j = 1,2, \dots, n$ için $z \in V_{y_j}$ olup $z \in U_{y_j} \cap V_{y_j} = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. O halde $U \cap V = \emptyset$ olur.

2.5. Ölçüm Uzayları

Tanım 2.5.1. X ≠ ∅ bir küme ve $\mathcal{M}$, X' in alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{M}$ ailesi

(i) $X \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow X - A \in \mathcal{M}$

$(iii)\ \{A_n\}_{n\in N} \subseteq \mathcal{M} \Longrightarrow A = \bigcup_{n\in N} A_n \in \mathcal{M}$

koşullarını sağlıyor ise $\mathcal{M}$ ailesine X üzerinde bir σ – cebiri denir.

Tanım 2.5.2. X herhangi bir topolojik uzay olsun, X içindeki açık kümeleri içeren en küçük σ – cebrine X üzerindeki Borel σ – cebri ve Borel σ – cebrinin elemanlarına da Borel kümesi denir. Borel σ – cebri $\mathfrak{B}_X$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.3. Eğer X üzerinde bir $\mathcal{M}$ σ – cebri var ise $(X, \mathcal{M})$ sıralı ikilisine bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{M}$ kümesine ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.5.4. $(X, \mathcal{M})$ ölçülebilir uzay ve $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ olsun. Eğer $\{A_n\}_{n\in N} \subseteq \mathcal{M}$ ve $\{A_n\}_{n\in N}$ ailesi n, m ∈ N için $n \neq m$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ iken;

$$\mu\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

oluyor ise μ'ye sayılabilir toplamsallık özelliğini sağlıyor denir.

En az bir $E \in \mathcal{M}$ için $\mu(E) < \infty$ ve μ sayılabilir toplamsallık özelliğini sağlıyor ise μ fonksiyonuna $(X, \mathcal{M})$ ölçülebilir uzayı üzerinde bir ölçüm ve $(X, \mathcal{M}, \mu)$ üçlüsüne de ölçüm uzayı denir.

Tanım 2.5.5. Reel sayılardaki herhangi bir ℓ aralığı için, ℓ'nin uzunluğunu L(ℓ) ile gösterelim. Bu yüzden L(ℓ) ≥ 0 olur. Bir $E \subseteq (a, b)$ kümesinin Lebegue dış ölçüsü, E'nin bütün açık örtülerinin toplam uzunluklarının infumumu olarak tanımlanır. Yani

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum L(\ell_i) : E \subseteq \bigcup \ell_i\right\}$$

olur. Bura da L([a,b]) = L((a,b]) = L([a,b)) = L((a,b)) = b – a olur.

3. YEREL FONKSİYON

3.1. Topolojik İdeal

Tanım 3.1.1. (Jankovic ve Hamlet, 1990) Bir X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir I koleksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise I' ya X üzerinde bir ideal denir.

(1) $A \in I$ ve $B \subseteq A$ ise $B \in I$ (Kalıtımsallık özelliği)

(2) $A, B \in I$ ise $A \cup B \in I$ (Sonlu Toplamsallık)

Tanımdan anlaşılacağı üzere $I = \{\emptyset\}$ ve $I = P(X)$, X üzerinde birer idealdir.

Önerme 3.1.2. $\mathcal{F}$, X üzerinde bir filtre ise $I = \{X - K: K \in \mathcal{F}\}$ koleksiyonu bir ideal olur.

İspat: $A \in I$ ve $B \subseteq A$ olsun. $A \in I$ ise $A = X - K$ olacak şekilde $K \in \mathcal{F}$ vardır.

$B \subseteq A \Rightarrow X - A \subseteq X - B \Rightarrow K \subseteq X - B$ olup $X - B \in \mathcal{F}$ olur. $X - (X - B) = B \in I$ olur.

$A, B \in I$ olsun. O halde $A = X - K$ ve $B = X - L$ olacak şekilde $K, L \in \mathcal{F}$ vardır.

$K, L \in \mathcal{F} \Rightarrow K \cap L = (X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) \in \mathcal{F}$ olduğundan

$X - (X - (A \cup B)) = A \cup B \in I$ olur.

Örnek 3.1.3. $I_f = \{A \subseteq X: A \text{ sonlu}\}$ koleksiyonu X üzerinde bir idealdir. Bu ideale sonlu alt kümeler ideali denir.

$\emptyset \subseteq X$ ve $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in I_f$ olup $I_f \neq \emptyset$ olur.

X sonlu ise bütün alt kümeleri sonlu olacağından X' i sonsuz olarak alabiliriz.

$A \in I_f$ ve $B \subseteq A$ olsun.

Sonlu bir kümenin her alt kümesi sonlu olduğundan $B \in I_f$ olur.

$A, B \in I_f$ olsun. Sonlu sayıdaki sonlu kümenin birleşimi sonlu olduğundan $A \cup B \in I_f$ olur.

Örnek 3.1.4. $I_c = \{A \subseteq X: A \text{ sayılabilir}\}$ koleksiyonu X üzerinde bir idealdir. Bu ideale sayılabilir alt kümeler ideali denir.

$\emptyset \subseteq X$ ve sayılabilir olduğundan $\emptyset \in I_c$ olup $I_c \neq \emptyset$ olur.

X sayılabilir ise bütün alt kümeleri sayılabilir olacağından X' i sayılamaz olarak alalım.

$A \in I_c$ ve $B \subseteq A$ olsun.

Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi sayılabilir olduğundan $B \in I_c$ olur.

$A, B \in I_c$ olsun. Sonlu sayıdaki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan $A \cup B \in I_c$ olur.

Örnek 3.1.5. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin kapanışını clA ile içini de intA ile gösterelim. $I_n = \{A \subseteq X: \text{int}(\text{cl}A) = \emptyset\}$ koleksiyonu X üzerinde bir idealdir. Bu ideale hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümelerin (nowhere dense set) ideali denir.

$\text{Int}(\text{cl}\emptyset) = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in I_n$ olup $I_n \neq \emptyset$ olur.

$A \in I_n$ ve $B \subseteq A$ olsun.

$A \in I_n \Rightarrow \text{int}(\text{cl}A) = \emptyset$ olur.

$B \subseteq A \Rightarrow \text{cl}B \subseteq \text{cl}A \Rightarrow \text{int}(\text{cl}B) \subseteq \text{int}(\text{cl}A) = \emptyset$ olup $\text{int}(\text{cl}B) = \emptyset$ olur. O halde $B \in I_n$ olur.

$A, B \in I_n$ olsun. $A \cup B \in I_n$ olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki ki $A \cup B \in I_n$ olsun.

$A \cup B \in I_n \Rightarrow \text{int}(\text{cl}(A \cup B)) = \emptyset$ olur.

İddia: $A \in I_n$ ve $B \in I_n$ olur.

Kabul edelim ki $A \notin I_n$ veya $B \notin I_n$ olsun.

$A \notin I_n \Rightarrow \text{int}(\text{cl}A) \neq \emptyset$ olur.

$B \notin I_n \Rightarrow \text{int}(\text{cl}B) \neq \emptyset$ olur.

En az biri boş kümeden farklı olan iki kümenin birleşimi boş kümeden farklı olacağından;

$\emptyset \neq \text{int}(\text{cl}A) \cup \text{int}(\text{cl}B) \subseteq \text{int}(\text{cl}A \cup \text{cl}B) \subseteq \text{int}(\text{cl}(A \cup B))$ olur.

Bu ise $\text{int}(\text{cl}(A \cup B)) = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde iddiamız doğru olup I_n ideal olma koşulunu sağlar.

Örnek 3.1.6. (R, τ_s) standart topoloji ve $I_\mu = \{A \subseteq X: \mu(A) = 0\}$ Lebesgue ölçümü sıfır olan kümeler ailesi olsun. I_μ R üzerinde bir idealdir.

$\mu(\emptyset) = 0$ olduğundan $\emptyset \in I_\mu$ olup $I_\mu \neq \emptyset$ olur.

$A \in I_\mu$ ve $B \subseteq A$ olsun.

$B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A) \Longrightarrow \mu(B) \leq 0$ olduğundan $\mu(B) = 0$ olup $B \in I_\mu$ olur.

$A, B \in I_\mu$ olsun. $\mu(A) = 0$ ve $\mu(B) = 0$ olur.

$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$ olduğundan $\mu(A \cup B) = 0$ olup $A \cup B \in I_\mu$ olur.

3.2. Yerel Fonksiyon

Bir X uzayının herhangi bir x noktasının öyle bir U komşuluğu var ki U bir $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ise x noktası yerel olarak bu $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir denir. Bu düşünceyi genişleterek sadece bir nokta için değil verilen her hangi bir X' in A alt kümesi içinde yerel olarak $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olan yada olmayan noktalar kümesi belirlenebilir. N(x) ile bir τ topolojik uzayındaki x noktasının komşuluk sistemini gösterelim.

Tanım 3.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman;

$$A^\star(\tau, I) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I\}$$

kümesine A kümesinin τ topolojisi ve I idealine göre yerel fonksiyonu ve (X, τ, I) üçlüsüne de ideal topolojik uzay denir. X üzerindeki topoloji belli ise $A^\star(\tau, I)$ yerine kısaca $A^\star(I)$ veya $A^\star$ yazacağız.

Örnek 3.2.2. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Buna göre;

(i) $I = \{\emptyset\}$ için

$A^\star(I) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I\}$

$A^\star(I) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \neq \emptyset\}$

$A^\star(I) = cl(A)$ olur.

(ii) $I = P(X)$ için

$A^\star(I) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I\}$

$A^\star(I) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \nsubseteq X\}$

$A^\star(I) = \emptyset$ olur.

Teorem 3.2.3. (Jankovic ve Hamlet, 1990) (X, τ) bir topolojik uzay I, I_1 ve I_2, X üzerinde idealler ve A, $B \subseteq X$ olsun.

(a) $A \subseteq B \implies A^\star(I) \subseteq B^\star(I)$

(b) $I_1 \subseteq I_2 \implies A^\star(I_2) \subseteq A^\star(I_1)$

(c) $A^\star = cl(A^\star) \subseteq clA$ olup A^* kapalı bir kümedir.

(d) $(A^\star)^\star \subseteq A^\star$

(e) $(A \cup B)^\star = A^\star \cup B^\star$

(f) $A^\star - B^\star = (A - B)^\star - B^\star \subseteq (A - B)^\star$

(g) $U \in \tau$ olsun. $U \cap A^\star = U \cap (U \cap A)^\star \subseteq (U \cap A)^\star$

(h) $K \in I$ ise $(K \cup A)^\star = A^\star = (A - K)^\star$

İspat. (a) $A \subseteq B$ olsun. Kabul edelim ki bir $x \in X$ için $x \notin B^\star(I)$ olsun. $x \notin A^\star(I)$ olduğunu gösterelim.

$x \notin B^\star(I)$ ise en az bir $U \in N(x)$ için $U \cap B \in I$ olur.

$A \subseteq B$ olduğundan $A \cap U \subseteq B \cap U$ olur.

I bir ideal olduğundan $A \cap U \in I$ olur.

$U \cap A \in I$ ise $x \notin A^\star(I)$ olup $A^\star(I) \subseteq B^\star(I)$ olur.

(b) $I_1 \subseteq I_2$ ve kabul edelim ki $x \notin A^\star(I_1)$ olsun. $x \notin A^\star(I_2)$ olduğunu gösterelim.

$x \notin A^\star(I_1)$ ise en az bir $U \in N(x)$ için $U \cap A \in I_1$ olur.

$I_1 \subseteq I_2$ olduğundan $U \cap A \in I_2$ olup $x \notin A^\star(I_2)$ olur. Buradan $A^\star(I_2) \subseteq A^\star(I_1)$ elde edilir.

Yani ideal inceldikçe yerel fonksiyon kabalaşır.

(c) $A^\star \subseteq cl(A)$ ve $A^\star \subseteq cl(A^\star)$ olduğu açıktır.

$cl(A^\star) \subseteq A^\star$ olduğunu göstermemiz yeterli.

$x \in X$ için $x \notin A^\star$ olsun. Kabul edelim ki $x \in cl(A^\star)$ olsun.

$x \in cl(A^\star) \Longrightarrow \forall U \in N(x)$ için $U \cap A^\star \neq \emptyset$ olur. O halde $\exists y \in X$ için $y \in U \cap A^\star$ olur.

$y \in U \cap A^\star \Longrightarrow y \in U \ \wedge \ y \in A^\star$ olur.

$y \in A^\star \Longrightarrow \forall V \in N(y)$ için $V \cap A \notin I$ olur.

$x \notin A^\star \Longrightarrow \exists W \in N(x)$ için $W \cap A \in I$ olur ki $U = W = V$ alırsak bu $V \cap A \notin I$ olması ile çelişir. O halde $x \notin cl(A^\star)$ olup $cl(A^\star) \subseteq A^\star$ olur.

(d) $x \in X$ için $x \notin A^\star$ olsun. Kabul edelim ki $x \in (A^\star)^\star$olsun.

$x \notin A^\star \Longrightarrow \exists U \in N(x)$ için $U \cap A \in I$

$x \in (A^\star)^\star \Longrightarrow \forall V \in N(x)$ için $V \cap A^\star \notin I$ olur.

$V \cap A^\star \notin I$ ise $V \cap A^\star \neq \emptyset$ olur.

O zaman $y \in V \cap A^\star$ olacak şekilde $\exists y \in X$ vardır.

$y \in V \cap A^\star \Longrightarrow y \in V$ ve $y \in A^\star$ olur.

$y \in A^\star$ ise $\forall W \in N(y)$ için $W \cap A \notin I$ olmalı ama $y \in V \in N(x)$ olduğundan $U = W$ alırsak bu durum $x \notin A^\star$ olması ile çelişir. O halde $x \notin (A^\star)^\star$ olup $(A^\star)^\star \subseteq A^\star$ olur.

(e) $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olup (a) özelliğinden;

$A^\star(I) \subseteq (A \cup B)^\star(I)$ ve $B^\star(I) \subseteq (A \cup B)^\star(I)$ olduğundan

$A^\star(I) \cup B^\star(I) \subseteq (A \cup B)^\star(I)$ olur.

$x \in (A \cup B)^\star(I)$ ve kabul edelim ki $x \notin A^\star(I) \cup B^\star(I)$ olsun.

$x \notin A^\star(I) \cup B^\star(I)$ ise $x \notin A^\star(I)$ veya $x \notin B^\star(I)$ olur.

$x \notin A^\star(I) \Leftrightarrow \exists U \in N(x)$ için $U \cap A \in I$,

$x \notin B^\star(I) \Leftrightarrow \exists V \in N(x)$ için $V \cap B \in I$ olur.

$W = U \cap V$ olsun. $W \subseteq U$ ve $W \subseteq V$ olur.

İdealin özelliğinden $W \cap A \in I$, $W \cap B \in I$ olur.

$(W \cap A) \cup (W \cap B) = W \cap (A \cup B) \in I$ ve $W \in N(x)$ olduğundan $x \in (A \cup B)^\star(I)$ olması çelişkidir. O halde $x \in A^\star(I) \cup B^\star(I)$ olup $(A \cup B)^\star(I) \subseteq A^\star(I) \cup B^\star(I)$ olur.

$A^\star(I) \cup B^\star(I) \subseteq (A \cup B)^\star(I)$ ve $(A \cup B)^\star(I) \subseteq A^\star(I) \cup B^\star(I)$ olduğundan;

$(A \cup B)^\star(I) = A^\star(I) \cup B^\star(I)$ olur.

(f) $(A - B)^\star - B^\star \subseteq (A - B)^\star$ olduğu açıktır.

$(A – B) \subseteq A$ olduğundan $(A - B)^\star \subseteq A^\star$ ve$(A - B)^\star - B^\star \subseteq A^\star - B^\star$ olur. …(i)

$A^\star - B^\star \subseteq (A - B)^\star - B^\star$olduğunu gösterelim.

$x \in A^\star - B^\star$olsun. O halde $x \in A^\star$ ve $x \notin B^\star$dur.

$x \in A^\star \Rightarrow \forall U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I$ olur.

$x \notin B^\star \Rightarrow \exists V \in N(x)$ için $V \cap B \in I$ olur.

Kabul edelim ki $x \notin (A - B)^\star - B^\star$ olsun.

$x \notin (A - B)^\star - B^\star \Rightarrow x \notin (A - B)^\star$ veya $x \in B^\star$ olur.

$x \notin (A - B)^\star$ olsun.

$\exists W \in N(x)$ için $W \cap (A - B) \in I$ olur.

$T = V \cap W$ olsun. $T \subseteq V$ ve $T \in N(x)$ olduğundan $T \cap B \in I$ ve $T \cap (A - B) \in I$ olur.

$(T \cap B) \cup (T \cap (A - B)) = T \cap (A \cup B) \in I$ olur.

$T \cap A \subseteq T \cap (A \cup B)$ olduğundan $T \cap A \in I$ olur. Ama bu durum $x \in A^\star$ ile çelişir. O halde $x \in (A - B)^\star - B^\star$ olur.

$x \in B^\star$ olması $x \notin B^\star$ olması ile çelişir. O halde $x \in (A - B)^\star - B^\star$ ve x keyfi bir eleman olduğundan $A^\star - B^\star \subseteq (A - B)^\star - B^\star$ olur. …(ii)

(i) ve (ii) den $A^\star - B^\star = (A - B)^\star - B^\star$ olur. Bu da ispat için yeterlidir.

(g) $U \cap (U \cap A)^\star \subseteq (U \cap A)^\star$,

$U \cap A \subseteq A \Rightarrow (U \cap A)^\star \subseteq (A)^\star \Rightarrow U \cap (U \cap A)^\star \subseteq U \cap (A)^\star$olur.

$U \cap A^\star \subseteq U \cap (U \cap A)^\star$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x \notin U \cap (U \cap A)^\star$ olsun.

$x \notin U \cap (U \cap A)^\star \Longrightarrow x \notin U \vee x \notin (U \cap A)^\star$ olup iki durumu da inceleyelim

1. durum: $x \notin U \Longrightarrow x \notin U \cap (A)^\star$ olup $U \cap A^\star \subseteq U \cap (U \cap A)^\star$ olur.

2. durum: $x \notin (U \cap A)^\star \Longrightarrow \exists V \in N(x)$ için $V \cap (A \cap U) \in I$ olur. Burada U için iki durum vardır.

$x \in U$ ise $V \cap U \in N(x)$ olup $V \cap (A \cap U) = A \cap (V \cap U) \in I$ olduğundan $x \notin A^\star$ olur. O halde $x \notin A^\star \cap U$ olup $U \cap A^\star \subseteq U \cap (U \cap A)^\star$ olur. $x \notin U$ ise 1. durum ile aynı olur.

Sonuç olarak $U \cap (U \cap A)^\star = U \cap A^\star \subseteq (U \cap A)^\star$ elde ederiz.

(h) $V \cap K \subseteq K$ olduğundan $K \in I \Longrightarrow V \cap K \in I$ olur.

$K \in I \Longrightarrow K^\star = \{x \in X: \forall V \in N(x)$ için $V \cap K \notin I\} = \emptyset$

$(A \cup K)^\star = \{x \in X: \forall U \in N(x)$ için $U \cap (A \cup K) \notin I\}$

$(A \cup K)^\star = \{x \in X: \forall U \in N(x)$ için $(U \cap A) \cup (U \cap K) \notin I\}$,$U \cap K \in I$ olduğundan

$(A \cup K)^\star = \{x \in X: \forall U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I\}$

$(A \cup K)^\star = A^\star$olur.

$A \cup K = (A - K) \cup K \Rightarrow (A \cup K)^\star = (A - K)^\star \cup K^\star$ ve $K^\star = \emptyset$ olduğundan

$(A \cup K)^\star = (A - K)^\star = A^\star$ olur.

Örnek 3.2.5. (X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ ve X üzerinde I_n hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümeler ideali olsun.

$A^\star(I_n) = \{x \in X: \forall U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I_n\}$

$A^{\star}(I_n) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } int(cl(U \cap A)) \neq \emptyset\}$ (Vaidyanathaswamy, 1960)

$A^{\star}(I_n) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap int(cl(A) \neq \emptyset\}$

$A^{\star}(I_n) = cl\big(int(cl(A))\big)$olur.

3.3. Yerel Fonksiyon İle Topoloji Üretme

Yerel fonksiyonu kullanarak tanımlanacak olan bir Kuratowski kapanış operatörü ile verilen bir topolojiden daha ince bir topoloji elde edilebilir.

Lemma 3.3.1. (Jankovic ve Hamlet, 1990) X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere d: P(X) → P(X) fonksiyonu eğer,

1) $d(\emptyset) = \emptyset$

2) $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

3) $d(d(A)) \subseteq d(A)$

Koşullarını sağlıyor ise $(\ )^c$: P(X) → P(X), $A^c = A \cup d(A)$ fonksiyonu P(X) üzerinde bir Kuratowski kapanış operatörü belirler.

İspat: $(\ )^c$: P(X) → P(X) fonksiyonunun Kuratowski kapanış operatörü olma özelliklerini sağladığını gösterelim.

[K1]: $\emptyset^c = \emptyset \cup d(\emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ olur.

[K2]: $A^c = A \cup d(A)$ olduğundan $A \subseteq A^c$ olur.

[K3]: $(A \cup B)^c = (A \cup B) \cup d(A \cup B)$ olup 2. özellikten dolayı

$(A \cup B)^c = (A \cup B) \cup \big(d(A) \cup d(B)\big) = \big(A \cup d(A)\big) \cup \big(B \cup d(B)\big) = A^c \cup B^c$ olur.

[K4]: $(d(A))^c = d(A) \cup d(d(A))$ olup 3. özellikten dolayı $(d(A))^c = d(A)$ olur

$(A^c)^c = (A \cup d(A))^c = A^c \cup \big(d(A)\big)^c = A^c \cup d(A) = A^c$ olduğundan $(\ )^c$: P(X) → P(X) fonksiyonu Kuratowski kapanış operatörü olma özelliklerini sağlar.

$\emptyset^{\star} = \emptyset$, $(A \cup B)^{\star} = A^{\star} \cup B^{\star}$ ve $(A^{\star})^{\star} \subseteq A^{\star}$ olduğundan yerel fonksiyon d fonksiyonu için gerekli şartları sağlar ve $\forall A \subseteq X$ için $cl^{\star}$: P(X) → P(X), $cl^{\star}(A) = A \cup A^{\star}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon Kuratowski kapanış operatörü olur. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde herhangi bir ideal olmak üzere $cl^{\star}$ ile üretilen topolojiyi $\tau^{\star}(I)$ ile göstereceğiz. $cl^{\star}$ operatörü $\tau^{\star}(I)$ üzerindeki kapalı kümeleri belirler yani

$$\tau^{\star}(I) = \{U \subseteq X: cl^{\star}(X - U) = X - U\}$$

veya

$$\tau^{\star}(I) = \{X - K: K \subseteq X \text{ ve } cl^{\star}(K) = K\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.3.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $I = \{\emptyset\}$ olsun.

$\forall A \subseteq X$ için $A^{\star}(I) = cl(A)$ olduğundan $cl^{\star}(A) = A \cup A^{\star} = A \cup cl(A) = cl(A)$ olur.

$cl^{\star}(A) = cl(A) = A$ koşulu A kümesinin (X, τ) topolojik uzayında kapalı küme olması ile sağlanır dolayısıyla $\tau^{\star}(I)$ topolojisinin kapalı kümeleri ile (X, τ) topolojik uzayının kapalı kümeleri aynı olduğundan $\tau^{\star}(I) = \tau$ olur.

Örnek 3.3.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve I = P(X) olsun.

$\forall A \subseteq X$ için $A^{\star}(I) = \emptyset$ olduğundan $cl^{\star}(A) = A \cup A^{\star} = A \cup \emptyset = A$ olur.

$cl^{\star}(A) = A$ olduğundan A kümesi $\tau^{\star}(I)$ topolojisinde kapalı olup $\tau^{\star}(I) = \tau_d$ (ayrık topoloji) olur.

(X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde herhangi bir ideal olsun.

$\{\emptyset\} \subseteq I \subseteq P(X)$ olduğundan $\tau^{\star}(\{\emptyset\}) \subseteq \tau^{\star}(I) \subseteq \tau^{\star}(P(X))$ olur.

Örnek 3.3.4. τ, R üzerinde standart topoloji ve R üzerinde I_μ Lebesgue ölçümü sıfır olan alt kümeler ideal verilsin.

$A \subseteq X$ için;

$A^{\star}(I_\mu) = \{x \in R: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I_\mu\}$

$A^{\star}(I_\mu) = \{x \in R: \forall U \in N(x) \text{ için } \mu(U \cap A) \neq 0\}$

$A^{\star}(I_\mu) = X$ üzerindeki $\tau^{\star}(I_\mu)$ topolojisinde Borel kümesidir. (Scheinberg, 1971)

Açıklama 3.3.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $I \neq P(X)$ iken de $\tau^{\star}(I) = \tau_d$ olabilir. Örneğin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $\{\{2n+1,2n\}: n \in \mathbb{N}\}$ bazı tarafından üretilen topoloji τ olsun. I ideali olarak I_f sonlu alt kümeler idealini alalım.

$\{2n+1,2n\} \cap \mathbb{N} = \{2n+1,2n\}$ olup sonlu olduğundan,

$N^{\star}(I_f) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap N \notin I_f\} = \emptyset$,

$\forall A \subseteq \mathbb{N}$ için $A^{\star}(I_f) \subseteq \mathbb{N}^{\star}(I_f)$ olduğundan $A^{\star}(I_f) = \emptyset$ ve

$cl^{\star}(A) = A \cup A^{\star}(I_f) = A \cup \emptyset = A$ olduğu için $\mathbb{N}^{\star}(I_f) = \tau_d$ olur.

Örnek 3.3.6. $X \neq \emptyset$ bir küme, X üzerinde $\psi = \{\emptyset, X\}$ ayrık olmayan topoloji ve ideal olarak ta I_c sayılabilir alt kümeler ideali olsun. Herhangi bir $A \subseteq X$ için;

$A^{\star}(I_c) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I_c\}$ olur.

$\psi = \{\emptyset, X\}$ ayrık olmayan topolojide açık kümeler $\emptyset$ ve X olduğundan;

$U = \emptyset$ için $\emptyset \cap A = \emptyset$ olduğundan $U \cap A \notin I_c$ koşulunu sağlayan x noktası yoktur.

$U = X$ için $A^{\star}(I_c) = \{x \in X: X \cap A \notin I_c\} = \{x \in X: A \notin I_c\}$ olur.

$$A^\star(I_c) = \begin{cases} \emptyset, & A \in I_c \\ X, & A \notin I_c \end{cases} \text{ve}$$

$$cl^\star(A) = A \cup A^\star(I_c) = \begin{cases} A, & A \in I_c \\ X, & A \notin I_c \end{cases} \text{ olur.}$$

$\psi^\star(I_c)$ topolojisinin kapalı kümeleri $cl^\star(A) = A$ koşulunu sağlayan kümelerdir ayrıca A = X için $cl^\star(X) = X \cup X^\star(I_c) = X$ olduğundan

$$\psi^\star(I_c) = \{X - A : A \in I_c\} \cup \{\emptyset\} = \{A^c : A \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\} = \{U : U^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

yani sayılabilir tümleyenler topolojisi olur.

(X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal ve I idealinin ürettiği topoloji $\tau^\star(I)$ olsun. X üzerindeki bu topolojinin bir bazını belirleyelim. Bunun için herhangi bir açık kümeyi hangi türdeki açık kümeler cinsinden yazabileceğimizi belirleyelim.

$A \subseteq X$ için A kümesi $\tau^\star(I)$ da kapalı olsun.

O halde $cl^\star(A) = A \cup A^\star = A$ olur.

$A \cup A^\star = A \Longrightarrow A^\star \subseteq A$ olur.

$X - A = W$ olsun.

W, $\tau^\star(I)$ topolojisinde açık bir küme olup $x \notin A \implies x \in W$ olur.

W kümesindeki her bir nokta için noktaya bağlı olarak değişen ve bu noktayı içine alıp W'nun alt kümesi olan açık bir küme bulmaya çalışalım.

$A^\star \subseteq A$ olduğundan

$x \notin A \implies x \notin A^\star \implies \exists U \in N(x)$ için $U \cap A \in I$ olur.

$x \notin A \implies x \notin A \cap U$ ve $x \in U$ olduğundan $x \in U - (U \cap A) = U - A$ olur.

$U \cap A = K$ diyelim, o zaman $K \in I$ ve $x \in U - K$ olur.

$A \cap (U - A) = \emptyset$ olduğundan $U - A \subseteq X - A = W$ olur.

$U \in \tau$ ve $K \in I$ için $x \in U - K \subseteq W$ olur.

U – K kümesinin $\tau^\star(I)$ topolojisinde açık olduğunu gösterelim.

$X - (U - K) = (X - U) \cup K$ olur.

X – U τ topolojisinde kapalı olduğu için $\tau^\star(I)$ topolojisinde de kapalı olur.

Teorem 3.2.2. nin h şıkkından

$((X - U) \cup K)^\star = (X - U)^\star \subseteq X - U$ olur.

$((X - U) \cup K)^\star \subseteq (X - U) \cup K$ olduğundan $X - (U - K)$ kümesi $\tau^\star(I)$ da kapalı olup U – K kümesi $\tau^\star(I)$ da açık bir kümedir.

o halde U ve K kümesi x noktasına bağlı olarak değişeceği için $U_x \in \tau$ ve $K_x \in I$ için

$$W = \bigcup_{x \in W} (U_x - K_x)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.3.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun.

$\mathfrak{V} = \{V - K: V \in \tau, K \in I\}$

ailesi X üzerindeki $\tau^*(I)$ topolojisi için baz olur.

İspat: $\mathfrak{V}$ ailesinin baz olma koşullarını sağladığını gösterelim.

$X \in \tau$ ve $\emptyset \in I$ olduğundan $X - \emptyset = X$ olacağından $X \in \mathfrak{B}$ olup $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ olur.

i) X kümesinin her bir noktası için $\mathfrak{B}$'nin bu noktayı içeren en az bir elemanı olduğunu göstermeliyiz. $\forall x \in X$ için, $X \in \mathfrak{B}$ olduğundan $x \in X \in \mathfrak{V}$ olup $x \in B$ olacak şekilde en az bir tane $B \in \mathfrak{V}$ vardır.

ii) $V_1, V_2 \in \tau$ ve $K_1, K_2 \in I$ için $B_1 = V_1 - K_1$ ve $B_2 = V_2 - K_2$ olsun. $B_1, B_2 \in \mathfrak{V}$ olur. $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ise $\forall x \in B_1 \cap B_2$ için $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_x \in \mathfrak{V}$ bulmalıyız.

$x \in B_1 \cap B_2 \Longrightarrow x \in B_1 \wedge x \in B_2$ olur.

$x \in B_1 \Longrightarrow x \in V_1 - K_1 \Longrightarrow x \in V_1 \wedge x \notin K_1$

$x \in B_2 \Longrightarrow x \in V_2 - K_2 \Longrightarrow x \in V_2 \wedge x \notin K_2$

$x \in V_1$, $x \in V_2$ ve $V_1, V_2 \in \tau$ olduğundan $x \in V_1 \cap V_2 \in \tau$ olur.

$x \notin K_1$, $x \notin K_2$ ve $K_1, K_2 \in I$ olduğundan $x \notin K_1 \cup K_2 \in I$ olur.

$B_1 \cap B_2 = (V_1 - K_1) \cap (V_2 - K_2) = (V_1 \cap V_2) - (K_1 \cup K_2)$ olduğundan

$B_x = (V_1 \cap V_2) - (K_1 \cup K_2)$ için $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ koşulu sağlanır.

Seçilen x noktası keyfi olup B_x kümesi x noktasına göre değiştiğinden $\mathfrak{V}$ ailesi X üzerindeki bir topoloji için baz olur.

Örnek 3.3.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve I_f, X üzerinde sonlu alt kümelerin ideali olsun.

$\mathfrak{V} = \{V - K: V \in \tau, K \in I_f\}$

X üzerindeki $\tau^*(I_f)$ topolojisi için baz olur. $\tau^*(I_f)$ topolojisinin açık kümeleri bazdaki elemanların keyfi sayıdaki birleşiminden oluşacağından yani λ keyfi bir indis kümesi olmak üzere $\alpha \in \lambda$ için $V_\alpha \in \tau$ ve $K_\alpha \in I_f$ için $V_\alpha - K_\alpha \in \mathfrak{V}$ olmak üzere;

$$\bigcup_{\alpha\in\lambda}(V_\alpha - K_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha - \bigcap_{\alpha\in\lambda} K_\alpha$$

şeklindeki kümeler $\tau^*(I_f)$ topolojisinde açık olur. Burada

$$U = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha \in \tau \text{ ve } K = \bigcap_{\alpha\in\lambda} K_\alpha \in I_f$$

olduğundan topolojinin her bir elemanı bazında elemanı olur.

Özel olarak $\tau = \{\emptyset, X\}$ seçersek $U = \emptyset$ veya $U = X$ olacağından açık kümeleri $\emptyset$ ve $K \in I_f$ olmak üzere X – K şeklindeki kümelerden oluşur.

$$\tau^\star(I_f) = \{X - K: K \in I_f\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau^\star(I_f) = \{A \subseteq X: X - A \in I_f\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau^\star(I_f) = \{A \subseteq X: X - A \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$$

sonlu tümleyenler topolojisi olur.

Açıklama 3.3.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve I_1 ve I_2 X üzerinde $I_1 \subseteq I_2$ olacak şekilde iki ideal olsun. $A \subseteq X$ için $A^\star(I_2) \subseteq A^\star(I_1)$ olduğundan A kümesi $\tau^\star(I_1)$ topolojisinde kapalı ise

$$cl^\star(A) = A \cup A^\star(I_1) = A \Longrightarrow A \cup A^\star(I_2) = A \text{ olur.}$$

Öyle ise A kümesi $\tau^\star(I_2)$ topolojisinde de kapalı olup $\tau^\star(I_1) \subseteq \tau^\star(I_2)$ olur.

Örnek 3.3.10. (X, τ) ayrık olmayan topolojik uzay, I_f X üzerinde sonlu alt kümeler ve I_c de X üzerinde sayılabilir alt kümeler ideali olsun. $\forall A \in I_f$ için $A \in I_c$ olup $\tau^\star(I_f) \subseteq \tau^\star(I_c)$ olur.

Açıklama 3.3.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. I idealinin X üzerinde ürettiği topolojinin tabanı $\mathfrak{B}$ olsun. Eğer $\mathfrak{B}$, X üzerinde bir topoloji ise $\mathfrak{B} = \tau^\star(I)$ olur. Örnek olarak X üzerinde ayrık olmayan topoloji ve I_f sonlu alt kümeler idealinin ürettiği $\tau^\star(I_f)$ sonlu tümleyenler topolojisini verebiliriz.

Her zaman $\mathfrak{B}$ bazı bir topoloji olmak zorunda değildir. Reel sayılar üzerinde ki $\tau = \{(-\infty, a): a \in R\} \cup \{\emptyset, R\}$ sol ışın topolojisini düşünelim. I_f reel sayıların sonlu alt kümeler ideali,

$$U_n = \left(-\infty, n + \frac{1}{2}\right) \text{ ve } I_n = \{1,2, \dots, n\}$$

olsun.

$$\bigcup_{n \in N} (U_n - I_n) = R - N$$

olduğundan $R - N \in \tau^\star(I_f)$ olduğu halde N sonlu olmadığından I_f sonlu alt kümeler idealinin elemanı olmadığından $R - N \notin \mathfrak{B}$ olup $\mathfrak{B} \neq \tau^\star(I_f)$ olur.

3.4. Yerel Fonksiyon ve Limit Noktaları

(X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. $A \subseteq X$ için A kümesinin τ topolojisine göre limit noktalarını A^d, $\tau^\star(I)$ topolojisine göre limit noktalarını $A^{d^\star}$ ile göstereceğiz. Yani;

$$x \in A^d \Leftrightarrow \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$$

$x \in A^{d^\star} \Leftrightarrow x \in V$ olacak şekildeki $\forall V \in \tau^\star(I)$ için $V \cap A - \{x\} \neq \emptyset$

olur.

$x \in X$ için $I_x = \{\emptyset, \{x\}\}$ olsun. $\emptyset \neq I_x$ ve $\{x\}$ kümesinin alt kümeleri $\emptyset$ ve $\{x\}$ olup I_x'in elemanıdır. İki elemanın birleşimi de I_x'in elemanı olduğundan I_x, X üzerinde bir idealdir.

$A = \{x\}$ ise $A \in I_x$ olduğundan $A^\star(I_x) = \emptyset$ olur.

Şimdi limit noktaları ile I_x ideali arasındaki ilişkiyi inceleyelim

$A \subseteq X$ ve $x \in A^d$ olsun.

$x \in A^d \Leftrightarrow \forall U \in N(x)$ için $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$

$x \in A^d \Rightarrow \forall U \in N(x)$ için $U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A \neq \{x\}$ olduğundan $U \cap A \notin I_x$ olur.

$x \in A^d \Rightarrow x \in A^\star(I_x)$ olur.

Öte yandan $x \in A^\star(I_x)$ ise $\forall U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I_x$ olur.

$U \cap A \notin I_x \Longrightarrow U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A \neq \{x\}$ olur. Sonuç olarak $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ elde ederiz. Böylece $x \in A^d$ olur.

$x \in A^d \Leftrightarrow x \in A^\star(I_x)$ olur.

$\{ A^\star(I_x): x \in X\}$ ailesi A'nın yığılma noktalarını ayırır.

Gözlem; Aslında I ideali $\{x\}$ kümesini içeriyor ise $x \in A^d \Leftrightarrow x \in A^\star(I)$ olduğuna dikkat edelim.

Önerme 3.4.1 X topolojik uzay, $\emptyset \neq A \subseteq X$ ve I ile J, X topolojik uzayında iki ideal olsun.
$f: X \to X$ sürekli ve $f(A) \subseteq A$ ve $\forall j \in J$ için $f^{-1}(j) \in I$ olsun.

$$x \in A^\star(I) \Longrightarrow f(x) \in A^\star(J) \text{ olur.}$$

İspat: $x \in A^\star(I)$ ve kabul edelim ki $f(x) \notin A^\star(J)$ olsun.

$f(x) \notin A^\star(J) \Rightarrow \exists V \in N(f(x))$ için $V \cap A \in J$ olur.

f sürekli olduğundan $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x' i içeren açık bir U kümesi vardır.

$f(A) \subseteq A$ olduğundan

$f(U \cap A) \subseteq f(U) \cap f(A) \subseteq f(U) \cap A \subseteq V \cap A$ olur.

$V \cap A \in J$ olduğundan ideal olma özelliğinden $f(U \cap A) \in J$ elde ederiz.

$\forall j \in J$ için $f^{-1}(j) \in I$ olacağından $f^{-1}(f(U \cap A)) \in I$ olur.

$U \cap A \subseteq f^{-1}(f(U \cap A))$ olduğundan $U \cap A \in I$ olur. Bu ise $x \in A^\star(I)$ olması ile çelişir. O halde $f(x) \in A^\star(J)$ olur.

Şimdi bir X kümesi üzerinde tanımlı τ ve I ideali ile üretilen $\tau^\star(I)$ topolojisinde X'in herhangi bir alt kümesinin limit noktaları ile bu kümenin τ topolojisindeki limit noktaları arasındaki ilişkiyi kategorik olarak inceleyelim. X topolojik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. Öncelikle 3 farklı kategori tanımlayalım.

1. Kategori: X

Nesneleri X kümesinin noktaları,

x, y ∈ obj(X) olsun.

mor(x,y) = {f: f:X→X birebir, sürekli ve f(A) ⊆ A, f(x) =y},

çarpma işlemi: bileşke işlemi

2. Kategori: I_A

Nesneleri X topolojik uzayında ki idealler,

I, J ∈ obj(I_A) olsun.

mor(I,J) ={f: f:X→X sürekli ve f(A) ⊆ A, ∀j ∈ J için $f^{-1}(j) \in I$},

çarpma işlemi: bileşke işlemi

3. Kategori: P(X)

Nesneleri X kümesinin alt kümeleri

A, B ∈ obj(P(X)) olsun.

mor(A,B) ={f: f:X→X sürekli ve f(A) ⊆ B},

çarpma işlemi: bileşke işlemi

Şimdi bu kategoriler üzerinde iki funktor tanımlayalım

T: X → I_A, x ∈ X için T(x) = I_x = {∅, {x}} olsun.

x, y ∈ obj(X) ve f ∈ mor(x, y) ise f(x) = y olur.

T(y)= I_y = {∅, {y}}

$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \in I_x$

$f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \in I_x$

olduğundan ∀j ∈ I_y için $f^{-1}(j) \in I_x$ olur. Yani f I_x ideali ile I_y ideali arasında bir morfizmdir yani;

T(f) = f ∈ mor(T(x), T(y)) = mor(I_x, I_y) dir.

O halde T: X → I_A bir kovaryant funktor olur.

S: I_A → P(X), I ∈ obj(I_A) olsun. S(I) = $A^\star(I)$ ∈ obj(P(X)) olsun.

I, J ∈ obj(I_A) ve f ∈ mor(I, J) olsun. f:X→X sürekli ve f(A) ⊆ A, ∀j ∈ J için $f^{-1}(j) \in I$ olur.

Önerme 3.4.1 den x ∈ $A^\star(I)$ için f(x) ∈ $A^\star(J)$ olduğundan f($A^\star(I)$) ⊆ $A^\star(J)$ olur.

S(f) = f ∈ mor(S(I), S(J)) = mor($A^\star(I)$, $A^\star(J)$) dir. O halde S: I_A → P(X) bir kovaryant funktor olur.

x ∈ obj(X) için S o T(x) = $A^\star(I_x)$ olur.

x, y ∈ obj(X) için f ∈ mor(x, y) ise f: X → X birebir, sürekli, f(A) ⊆ A ve f(x) = y olur.

S o T(f) = f: X → X sürekli f(A) ⊆ A, $f(A^\star(I_x)) \subseteq A^\star(I_y)$ olur. O halde

S o T(f) = f ∈ mor(S o T(x),S o T(y)) = $mor(A^\star(I_x), A^\star(I_y))$ olup

S o T: X → P(X)

S o T(f)=f: $A^\star(I_x) \to A^\star(I_y)$ olur. O halde SoT kovaryant funktor olur.

Sonuç 3.4.2. $f(A^d) \subseteq A^d$ olur.

$x \in A^d$ ve y = f(x) olsun.

S o T(f) = f: $A^\star(I_x) \to A^\star(I_y)$ olur.

$x \in A^d \Longrightarrow x \in A^\star(I_x) \Longrightarrow f(x) \in f(A^\star(I_x)) \subseteq A^\star(I_{f(x)}) \Longrightarrow f(x) \in A^d$

Sonuç 3.4.3. $A^d = \{x\}$ tek nokta kümesi ise f(x) = x olur.

$x \in A^d \Longrightarrow f(x) \in f(A^d)$ olacağından Sonuç 3.4.2 den $f(x) \in A^d$ dir. A^d kümesi tek elemanlı olduğundan f(x) = x olur.

Uygulama 3.4.4.X = R ve X üzerinde standart topoloji olsun.

$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ olsun. $A^d = \{0\}$ olur.

f: R→ R birebir, sürekli ve $f_A: A \to A$ ise f(0) = 0 olur.

Teorem 3.4.5.(X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. $\tau^\star(I)$, X üzerinde I idealinin belirlediği topoloji ve A ⊆ X olsun.

$A^{d^\star} \subseteq A^d$ olur.

İspat: $A^\star{}_{\tau^\star}(I)$, A'nın $\tau^\star$ topolojisine göre I idealinin belirlediği yerel fonksiyonu,

$A^\star{}_\tau(I)$'da A'nın τ topolojisine göre I idealinin belirlediği yerel fonksiyonu olsun.

Öncelikle $A^\star{}_{\tau^\star}(I) \subseteq A^\star{}_\tau(I)$ olduğunu gösterelim.

$x \in A^\star{}_{\tau^\star}(I)$ olsun. O zaman her U ∈ N(x) için U ∩ A ∉ I, varsayalım ki $x \notin A^\star{}_\tau(I)$ olsun. Bu durumda ∃U ∈ N(x) için U ∩ A ∈ I olur. Genelliği bozmaksızın $U \in \tau$ varsayabiliriz. $\tau \subseteq \tau^\star(I)$ olduğundan $U \in \tau^\star(I)$ olup bu durum $x \in A^\star{}_{\tau^\star}(I)$ olması ile çelişir.

Şimdi $x \in A^{d^\star}$ alalım. $I_x = \{\emptyset, \{x\}\}$ ideali olmak üzere;

$x \in A^\star{}_{\tau^\star}(I_x) \subseteq A^\star{}_\tau(I_x) \Longrightarrow x \in A^\star{}_\tau(I_x) \Longrightarrow x \in A^d$ olup $A^{d^\star} \subseteq A^d$ elde edilir.

Sonuç 3.4.6. ∀x ∈ X için {x} ∈ I ise $A^\star(I) = A^{d^\star}$ olur.

Tanım 3.4.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. x ∈ X ve ∀U ∈ N(x) için U ∩ A sonsuz oluyor ise x noktasına A kümesinin bir w-yığılma noktası denir ve A kümesinin w-yığılma noktalarının kümesi A^w ile gösterilir.

Örnek 3.4.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve I_f, X üzerinde sonlu alt kümeler ideali olsun. A ⊆ X için

$A^\star(I_f) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \notin I_f\}$

$A^\star(I_f) = \{x \in X: \forall U \in N(x) \text{ için } U \cap A \text{ sonsuz}\}$

$A^\star(I_f) = A^w$

olur. $\forall x \in X$ için $\{x\} \in I_f$ olduğundan $A^\star(I_f) = A^{d^\star}$ olur. O halde $(X, \tau^\star(I_f))$ içindeki A'nın limit noktaları ile (X, τ) içindeki A'nın w-yığılma noktaları aynıdır.

$cl^\star(\{x\}) = \{x\} \cup \{x\}^\star = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}$ olduğundan tek nokta kümeleri $(X, \tau^\star(I_f))$ içinde kapalıdır. O halde $\tau^\star(I_f)$ T_1 uzayıdır.

T_1 uzayı içinde limit noktaları ve w-yığılma noktaları aynıdır.

Tanım 3.4.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A^d = \emptyset$ şeklindeki kümelere kapalı ve ayrık kümeler denir.

Önerme 3.4.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $I_{cd} = \{A \subseteq X: A^d = \emptyset\}$ olsun. I_{cd} ailesi X üzerinde bir idealdir.

İspat: $\emptyset^d = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in I_{cd}$ olup $I_{cd} \neq \emptyset$ olur.

$A \in I_{cd} \Longrightarrow A^d = \emptyset$ olur. $B \subseteq A \Longrightarrow B^d \subseteq A^d = \emptyset \Longrightarrow B^d = \emptyset \Longrightarrow B \in I_{cd}$ olur.

$A, B \in I_{cd} \Longrightarrow A^d = \emptyset$ ve $B^d = \emptyset$ olur. $(A \cup B)^d = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $A, B \in I_{cd}$ ve $(A \cup B)^d \neq \emptyset$ olsun. O halde $\exists x \in X$ için $x \in (A \cup B)^d$ olur.

$x \in (A \cup B)^d \Longrightarrow \forall U \in N(x)$ için $(A \cup B) \cap U - \{x\} \neq \emptyset$

$(A \cup B) \cap U - \{x\} = (A \cap U - \{x\}) \cup (B \cap U - \{x\}) \neq \emptyset$ olduğundan

$A \cap U - \{x\} \neq \emptyset$ veya $B \cap U - \{x\} \neq \emptyset$ olmalı.

$A \cap U - \{x\} \neq \emptyset \Longrightarrow x \in A^d$ olup $A \in I_{cd}$ olması ile çelişir.

$B \cap U - \{x\} \neq \emptyset \Longrightarrow x \in B^d$ olup $B \in I_{cd}$ olması ile çelişir.

O halde $(A \cup B)^d = \emptyset$ olup $A \cup B \in I_{cd}$ olur.

Lemma 3.4.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. $A \in I$ ise A, $(X, \tau^\star(I))$ içinde kapalı ve ayrık olur.

İspat: $A \in I \Longrightarrow A^\star = \emptyset \Longrightarrow A^{d^\star} \subseteq A^\star = \emptyset$ olduğundan $A^{d^\star} = \emptyset$ olur.

Örnek 3.4.12. (R, τ_s) reel sayılar üzerindeki standart topoloji ve $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ olsun. P(K) ailesi bir idealdir.

$\tau_s{}^\star(P(K))$ topolojisinin bazı

$\mathfrak{B} = \{U - A: U \in \tau_s, A \in P(K), K = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}\}$ şeklinde olur.

$\tau_s{}^\star(P(K))$ topolojisinin açık kümeleri τ_s'nın açık kümeleri ve τ_s'nın elemanlarından en az bir tane $\frac{1}{n}$ içermeyenlerden oluşur.

$\tau_s{}^\star(P(K))$ topolojisinin kapalı kümeleri τ_s'nın kapalı kümeleri ve τ_s'a göre kapalı olanlardan $\frac{1}{n}$'lerin hiç birini içermeyenlerden oluşur.

$\tau_s{}^\star(P(K))$ topolojisinde $R - K$ kümesi bazın bir elemanı olduğu açıktır. O halde K kümesi bu topolojide kapalıdır. $K^d = \{0\}$ ve $K^{d^\star} \subseteq K^d = \{0\}$ ve K kapalı bir küme olduğu için $K^{d^\star} \subseteq K^\star$ olacağından $K^{d^\star} = \emptyset$ olur.

Bu örnekteki $\tau_s{}^\star(P(K))$ topolojisine Smirnov topolojisi denir.

3.5. Topoloji ile İdealin Uyumlu Olması

Tanım 3.5.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. $\forall x \in A$ için $\exists U \in N(x)$ var öyle ki $U \cap A \in I$ koşulunu sağlayan $\forall A \subseteq X$ için $A \in I$ oluyor ise τ topolojisi ile I ideali uyumludur denir ve $\tau \backsim I$ ile gösterilir.

İdealler bir kümenin belirli bir özelliğine sahip olan ya da olmayan alt kümeler ailesi gibi düşünülebilir. Topoloji ile idealin uyumlu olması aslında bir küme yerel olarak bir özelliğe sahip olduğunda global olarak ta bu özelliğe sahip olması anlamına gelir.

Örnek 3.5.2. N doğal sayılar kümesi üzerinde $n \in N$ olmak üzere τ topolojisi açık kümeleri $E_n=\{n,n+1,\ldots\}$ şeklinde olan kümelerden oluşan topoloji ve I_f de N üzerinde ki sonlu alt kümeler ideali olsun. $A \subseteq N$ ve $\forall x \in A$ için bir $U \in N(x)$ var öyle ki $U \cap A \in I_f$ olsun. $U \in N(x)$ olduğundan U kümesinin eleman sayısı sonsuzdur. $U \cap A \in I_f$ olabilmesi için A kümesinin eleman sayısının sonlu olması gerekir yani $A \in I_f$ olup $\tau \backsim I_f$ olur.

Tanım 3.5.3. Bir I ideali sayılabilir toplamsal ise bu ideale σ-ideal denir. Yani $\forall i \in N$ için $I_i \in I$ iken

$$\bigcup\{I_i : i \in N\} \in I$$

oluyor ise I idealine bir σ-ideal denir.

Örnek 3.5.4. τ, R üzerinde standart topoloji ve I_μ Lebesgue ölçümü sıfır olan kümelerin σ- ideali olsun, $\tau \backsim I_\mu$ olduğunu gösterelim.

$A \subseteq R$ kümesi $\forall x \in A$ için $\exists U_x \in N(x)$ var öyle ki $U_x \cap A \in I_\mu$ olsun.

O halde $\forall x \in A$ için $\mu(U_x \cap A) = 0$ olur.

$$A \subseteq \bigcup_{x\in A}(U_x \cap A) \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{x\in A}(U_x \cap A)\right) \leq \sum_{x\in A} \mu(U_x \cap A) = 0$$

olduğundan $\mu(A) = 0$ olacağından $A \in I_\mu$ olup $\tau \backsim I_\mu$ olur.

Teorem 3.5.5. (X, τ) uzayı kalıtsal Lindelöf uzay ve I, X üzerinde bir σ-ideal ise o zaman $\tau \backsim I$ olur.

İspat: $A \subseteq X$ olsun. Kabul edelim ki $\forall x \in A$ için $\exists U \in N(x)$ var öyle ki $U \cap A \in I$ olsun.

$\{U_x \cap A : x \in A\}$ ailesi A kümesinin bir açık örtüsü olur. (X, τ) kalıtsal Lindelöf olduğundan bu örtünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır. Yani,

$$A \subseteq \bigcup\{U_{x_i} \cap A : i \in N\}$$

olacak şekilde $\{U_{x_i} \cap A: i \in N\}$ sayılabilir bir alt ailesi vardır. Her $i \in N$ için $U_{x_i} \cap A \in I$ ve I bir σ-ideal olduğundan,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in N} U_{x_i} \cap A \in I$$

olduğundan $A \in I$ olup $\tau \backsim I$ olur.

Teorem 3.5.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

a) $\tau \backsim I$

b) A' nın her birinin A ile kesişimi I içinde olan açık kümelerden oluşan bir örtüsü var ise o zaman A, I içindedir.

c) $\forall A \subseteq X$ için $A \cap A^\star = \emptyset \Rightarrow A \in I$

d) $\forall A \subseteq X$ için $A - A^\star \in I$

e) Her $\tau^\star$ kapalı A alt kümesi için $A - A^\star \in I$

f) $\forall A \subseteq X$ için A, $B \subseteq B^\star$ şeklinde boştan farklı B alt kümesi içermiyor ise o zaman $A \in I$ olur.

İspat: (a) ⇒ (b) tanımdan açıktır.

(b) ⇒ (c)Kabul edelim ki $A \cap A^\star = \emptyset$ olsun. $x \in A$ için $x \notin A^\star$ olur.

$x \notin A^\star \Longrightarrow \exists U_x \in N(x)$ için $U_x \cap A \in I$ olur. Kabulümüzden dolayı $A \in I$ olur.

(c) ⇒ (d) $A \cap A^\star = \emptyset \Rightarrow A \in I$ olsun.

$A - A^\star \subseteq A \Longrightarrow (A - A^\star)^\star \subseteq A^\star$

$(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star \subseteq (A - A^\star) \cap A^\star = \emptyset$ olduğundan

$(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star = \emptyset$ olup kabulümüzden dolayı $A - A^\star \in I$ olur.

(d) ⇒ (e) Açıktır.

(e) ⇒ (f) Her $\tau^\star$ kapalı A alt kümesi için $A - A^\star \in I$ olsun. $\forall K \subseteq X$ için K, $B \subseteq B^\star$ şeklinde boştan farklı B alt kümesi içermesin.

$K = A^\star$, $\tau^\star$ kapalı bir kümedir. O halde $K \subseteq X$ ve $K - K^\star \in I$ olur.

$K = (K - K^\star) \cup (K \cap K^\star)$ şeklinde yazılabilir.

$K - K^\star \in I \Longrightarrow (K - K^\star)^\star = \emptyset$

$K^\star = (K - K^\star)^\star \cup (K \cap K^\star)^\star = (K \cap K^\star)^\star$

$K^\star \cap K = (K \cap K^\star)^\star \cap K$ olur. Buradan

$K^\star \cap K \subseteq (K \cap K^\star)^\star ve K^\star \cap K \subseteq K$ olur.

Kabulümüzden dolayı K kümesi $K^\star \cap K \subseteq (K \cap K^\star)^\star$ olacak şekilde boştan farklı bir alt küme içermemeli. O halde $K^\star \cap K = \emptyset$ olmalı. Buradan $K = K - K^\star \in I$ olur.

(f) ⇒ (a) $A \subseteq X$ için A, $B \subseteq B^\star$ şeklinde boştan farklı B alt kümesi içermiyor ise o zaman $A \in I$ olsun. $\tau \backsim I$ olduğunu gösterelim.

$A \subseteq X$ ve $\forall x \in A$ için $\exists U_x \in N(x)$ var öyle ki $U_x \cap A \in I$ olsun.

O halde $x \notin A^\star$ olduğundan $A \cap A^\star = \emptyset$ olur. $A \in I$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $B \subseteq B^\star$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq B \subseteq A$ olsun.

$B \subseteq A \Longrightarrow B^\star \subseteq A^\star$ olur.

$B = B \cap B^\star \subseteq A \cap A^\star = \emptyset$ olup $\emptyset = B$ olup $\emptyset \neq B$ olması ile çelişir. O halde A kümesi $B \subseteq B^\star$ olacak şekilde boştan farklı bir B kümesi içermez, o halde kabulden dolayı $A \in I$ olur.

Teorem 3.5.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman aşağıdakiler $\tau \backsim I$ koşulunun gerektirdiği birbirine denk önermelerdir.

(a) $\forall A \subseteq X$ için, $A \cap A^\star = \emptyset \Longrightarrow A^\star = \emptyset$

(b) $\forall A \subseteq X$ için $(A - A^\star)^\star = \emptyset$

(c) $\forall A \subseteq X$ için $(A \cap A^\star)^\star = A^\star$

İspat:(a) ⇒ (b) $A \subseteq X$ için, $A \cap A^\star = \emptyset \Longrightarrow A^\star = \emptyset$ olsun

$A - A^\star \subseteq A \Longrightarrow (A - A^\star)^\star \subseteq A^\star$

$A - A^\star \subseteq A - (A - A^\star)^\star$

$(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star \subseteq (A - (A - A^\star)^\star) \cap (A - A^\star)^\star = \emptyset$

olduğundan $(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star = \emptyset$ olur. Kabulümüzden dolayı $(A - A^\star)^\star = \emptyset$ olur.

(b) ⇒ (c) $A \subseteq X$ için $(A - A^\star)^\star = \emptyset$ olsun.

$A = (A - A^\star) \cup (A \cap A^\star) \Longrightarrow A^\star = (A - A^\star)^\star \cup (A \cap A^\star)^\star$

$A^\star = \emptyset \cup (A \cap A^\star)^\star \Longrightarrow A^\star = (A \cap A^\star)^\star$ elde edilir.

(c) ⇒ (a) $A \subseteq X$ için $(A \cap A^\star)^\star = A^\star$ olsun.

$A \cap A^\star = \emptyset$ olsun.

$(A \cap A^\star)^\star = \emptyset^\star = \emptyset = A^\star$olur.

Teorem 3.5.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde $\tau \backsim I$ olacak şekilde bir ideal olsun. $A \subseteq X$ için $A = K \cup L$ olacak şekilde τ topolojisinde kapalı K kümesi ve $L \in I$ var ise A kümesi $\tau^{\star}(I)$ topolojisinde kapalı olur.

İspat: A kümesi $\tau^{\star}(I)$ topolojisinde kapalı bir küme olsun o halde $A^{\star} \subseteq A$ olur.

$A = (A - A^{\star}) \cup A^{\star}$ şeklinde yazılabileceğinden ve $\tau \backsim I \Longrightarrow A - A^{\star} \in I$ olacağından $K = A^{\star}$ ve $L = A - A^{\star}$ için K, τ topolojisinde kapalı, $L \in I$ ve $A = K \cup L$ olur.

Tersine $A = B \cup C$ olacak şekilde B τ-kapalı ve $C \in I$ olsun. A kümesinin $\tau^{\star}(I)$ topolojisinde kapalı olduğunu göstermek için $A^{\star} \subseteq A$ olduğunu gösterelim.

B τ-kapalı $\Longrightarrow B^{\star} \subseteq B$

$C \in I \Longrightarrow C^{\star} = \emptyset$

$A^{\star} = (B \cup C)^{\star} = B^{\star} \cup C^{\star} \subseteq B \cup C^{\star} = B$ olur.

$A^{\star} \subseteq B \Longrightarrow A^{\star} \subseteq B \cup C \Longrightarrow A^{\star} \subseteq A$ olup A, $\tau^{\star}(I)$ da kapalı olur.

Tanım 3.5.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq A^{d}$ ise A kümesine kendi içinde yoğundur denir. Kendi içinde yoğun ve kapalı olan bir kümeye mükemmel küme denir.

Teorem 3.5.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal öyle ki $\tau \backsim I$ ve $\forall x \in X$ için $\{x\} \in I$ olsun. Bir $A \subseteq X$ kümesi $\tau^{\star}$-a göre kapalı ise, o zaman A τ' ya göre mükemmel bir küme ve I içindeki bir kümenin birleşimi şeklindedir.

İspat: $A \subseteq X$ ve A $\tau^{\star}$-a göre kapalı olsun.

Teorem 3.5.8 den dolayı $A = K \cup L$ olacak şekilde K τ-kapalı ve $L \in I$ olacak şekilde X'in K ve L alt kümeleri vardır. K τ-kapalı bir küme olduğu için $\tau^{\star}$- a göre de kapalı bir küme olur.

$K, \tau - \text{kapalı} \Longrightarrow K^{\star} \subseteq K \Longrightarrow (K^{\star})^{\star} \subseteq K^{\star}$olur.

$\tau \backsim I$ olduğundan $(K - K^{\star})^{\star} = \emptyset$ olur.

Teorem 3.2.2.'nin f şıkkından $K^{\star} - (K^{\star})^{\star} \subseteq (K - K^{\star})^{\star}$ olduğundan

$K^{\star} - (K^{\star})^{\star} = \emptyset \Longrightarrow K^{\star} \subseteq (K^{\star})^{\star}$ olur.

$(K^{\star})^{\star} \subseteq K^{\star}$ ve $K^{\star} \subseteq (K^{\star})^{\star}$ olduğundan $K^{\star} = (K^{\star})^{\star}$ olur.

$\forall x \in X$ için $\{x\} \in I$ olduğundan Sonuç 3.4.6.'dan $\forall A \subseteq X$ için $A^{\star} = A^{d^{\star}}$olup

$K^{\star} = (K^{\star})^{\star} = (K^{\star})^{d^{\star}} \subseteq (K^{\star})^{d}$ olacığından $K^{\star}$ τ' ya göre mükemmel bir küme olur.

Örnek 3.5.11. $X = R^{k}$ ve $\mathcal{M}$ Borel kümelerini içeren bir σ-cebri ve μ, $\mathcal{M}$ üzerinde Lebesgue ölçümü olsun. $I_{\mu} = \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$ olsun. O halde $\tau \backsim I_{\mu}$ olur. Dolayısıyla A $\tau^{\star}$-a göre kapalı bir küme ise, $A = F \cup E$ olacak şekilde mükemmel bir F kümesi ve ölçümü sıfır olan bir E kümesi vardır.

Teorem 3.5.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun.

$$\tau \backsim I \Longrightarrow \mathfrak{V} = \tau^{\star}$$

olur.

İspat: $\mathfrak{V} = \tau^{\star}$olduğunu göstermek için $\mathfrak{V} \subseteq \tau^{\star}$ ve $\tau^{\star} \subseteq \mathfrak{V}$ olduğunu gösterelim.

$\mathfrak{V}$, $\tau^{\star}$ topolojisinin bir bazı olduğundan $\mathfrak{V} \subseteq \tau^{\star}$ olur.

$\tau^{\star} \subseteq \mathfrak{V}$ olduğunu gösterelim.

$U \in \tau^{\star}$ olsun. O halde X – U, $\tau^{\star}$ topolojisinde kapalı bir küme olur. Teorem 3.5.8 den dolayı X – U = B ∪ L olacak şekilde τ topolojisinde kapalı B kümesi ve L ∈ I vardır. Dolayısıyla U = X – (B ∪ L) = (X – B) – L ∈$\mathfrak{V}$ olup $\tau^{\star} \subseteq \mathfrak{V}$ olur.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani $\mathfrak{V} = \tau^{\star}$ ise $\tau \backsim I$ olmak zorunda değildir. Örnek olarak ($\mathbb{R}$, τ_{dis}) reel sayılar üzerindeki ayrık topoloji ve I_c reel sayılar üzerindeki sayılabilir alt kümelerin σ – ideali olsun. $\tau = \mathfrak{V} = \tau^{\star}$ olur. Ancak reel sayılar her noktasında yerel olarak sayılabilir olduğu halde reel sayılar sayılabilir olmadığından τ ile I uyumlu değildir.

$A^{\star} = \emptyset$ olacak şekildeki $\forall A \subseteq X$ için $A \in I$ oluyor ise $\tau \backsim I$ olur.

Teorem 3.5.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve I_c X üzerinde sayılabilir alt kümelerin ideali olsun.

$$\tau \backsim I_c \Leftrightarrow \textbf{(}X, \tau\textbf{)} \text{ kalıtsal Lindelöff}$$

olur.

İspat:(⇐**)** (X, τ) kalıtsal Lindelöff olsun.

Dolayısıyla $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise A Lindelöftür

$\emptyset \neq A$ ve $\forall x \in A$ için $U_x \cap A \in I_c$ olacak şekilde $U_x \in N(x)$ olsun.

$\{U_x \cap A : x \in A\}$ A'nın açık örtüsü ve A Lindelöff olduğundan

$$A = \bigcup_{n \in N} U_{x_n} \cap A$$

olacak şekilde $\{U_{x_n} \cap A\}$ sayılabilir alt örtüsü vardır. Sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan A sayılabilirdir. Dolayısıyla $A \in I_c$ olup $\tau \backsim I_c$ olur.

(⇒)$\tau \backsim I_c$ olsun. Varsayalım ki (X, τ) kalıtsal Lindelöff olmasın. Bu durumda (Kuratowski and Sierpinski, 1921) her $x \in A$ için $U_x \cap A$ sayılabilir olacak şekilde $U_x \in N(x)$ koşulunun var olduğu sayılamaz bir $A \subseteq X$ vardır. Bu ise $\tau \backsim I_c$ olması ile çelişir.

Teorem 3.5.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve I_n X üzerinde hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümelerin ideali ise $\tau \backsim I_n$olur.

İspat: $\tau \backsim I_n$ olduğunu göstermek için Teorem 3.5.7 in (c) şıkkının sağlandığını gösterelim.

Kabul edelim ki $A \cap A^{\star} = \emptyset$ olsun.

$A^{\star} = \text{cl}\left(\text{int}\left(\text{cl}(A)\right)\right)$ olduğundan

$A \cap A^{\star} = A \cap \text{cl}\left(\text{int}\left(\text{cl}(A)\right)\right) = \emptyset$ olur.

$\text{int}\left(\text{cl}\left(\text{int}(\text{clA})\right)\right) \subseteq \text{cl}\left(\text{int}(\text{clA})\right)$ olduğundan

$\text{A} \cap \text{int}\left(\text{cl}\left(\text{int}(\text{clA})\right)\right) = \emptyset$ olur.

$\text{A} \cap \text{int}\left(\text{cl}(\text{A})\right) = \emptyset \Longrightarrow \text{int}\left(\text{cl}(\text{A})\right) = \emptyset$

$\text{int}\left(\text{cl}(\text{A})\right) = \emptyset$ olduğundan $\text{A} \in \text{I}_\text{n}$ olup $\tau \backsim \text{I}_\text{n}$ olur.

4. SERBEST İDEAL VE İDEAL GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde M.N. Mukherjee, Bishwambhar Roy ve Ritu Sen'in 2007 yılındaki çalışması incelenmiştir. Bu çalışmada topolojik idealler yardımı ile topolojik uzayların bir çeşit genişlemesi tanımlanmıştır.

4.1.Serbest İdeal

Önerme 4.1.1. c, X üzerinde kapanış operatörü, (X, c) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere,

$$S_k(x) = \{A \subseteq X: x \notin c(A)\}$$

ailesi X üzerinde bir idealdir.

İspat: $c(\emptyset) = \emptyset$ ve $\forall x \in X$ için $x \notin c(\emptyset)$ olduğundan $\emptyset \in S_k(x)$ olup $S_k(x) \neq \emptyset$ olur.

$A \in S_k(x)$olsun. $\forall B \subseteq A$ için $c(B) \subseteq c(A)$ olduğundan,

$A \in S_k(x) \Rightarrow x \notin c(A) \Rightarrow x \notin c(B) \Rightarrow B \in S_k(x)$ olur.

$A, B \in S_k(x)$ olsun. $x \notin c(A)$ ve $x \notin c(B)$ olur. $c(A) \cup c(B) = c(A \cup B)$ olduğundan $x \notin c(A \cup B)$ olup $A \cup B \in S_k(x)$ olur. Yani $S_k(x)$ ideal olma koşullarını sağlar.

Tanım 4.1.2: (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) $x \in X$ olmak üzere $S_k(x) = \{A \subseteq X: x \notin c(A)\}$ idealine X üzerinde serbest ideal denir.

Önerme 4.1.3: (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) (X, c) bir T_0 topolojik uzayıdır $\Leftrightarrow$ x ve y bu topolojik uzayın iki farklı noktası ise

$$S_k(x) \neq S_k(y)$$

olur.

İspat: (X, c) bir T_0 topolojik uzayı olduğundan herhangi farklı iki noktasından birini içerip diğerini içermeyen açık bir küme vardır.

$x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Kabul edelim ki $x \in U$ ve $y \notin U$ olsun.

$y \notin U \Rightarrow U \cap \{y\} = \emptyset$

$x \in U$ ve U açık bir küme olduğundan $x \notin cl(\{y\})$ olur.

$x \notin cl(\{y\}) \Rightarrow \{y\} \in S_k(x)$ ve $y \in cl(\{y\})$ olduğundan $\{y\} \notin S_k(y)$ olup $S_k(x) \neq S_k(y)$ elde edilir.

Şimdi $S_k(x) \neq S_k(y)$ ise (X,c) uzayının bir T_0 uzayı olduğunu gösterelim. Bunun X topolojik uzayının birbirinden farklı iki noktasından birini içerip diğerini içermeyen açık bir küme bulmalıyız.

$S_k(x) \neq S_k(y) \Rightarrow \exists A \subseteq X$ için $(A \in S_k(x) \wedge A \notin S_k(y)) \vee (A \notin S_k(x) \wedge A \in S_k(y))$

Kabul edelim ki $A \in S_k(x) \wedge A \notin S_k(y)$ olsun.

$A \in S_k(x) \Rightarrow x \notin c(A)$ ve $A \notin S_k(y) \Rightarrow y \in c(A)$ olur.

$c(A)$ kapalı bir küme olduğundan $X - c(A)$ açık bir küme olur. Dolayısıyla $x \in X - c(A)$ ve $y \notin X - c(A)$ olacağından (X,c) bir T_0 uzayı olur. $A \notin S_k(x) \wedge A \in S_k(y)$ durumu da benzer şekilde gösterilir.

Tanım 4.1.4: (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) S bir ideal, $A \in S$ iken $c(A) \in S$ oluyor ise S idealine c-ideal denir.

Not: Her serbest ideal bir c-idealdir.

Bir (X, c) topolojik uzayının bir genişlemesinden bir $E \equiv (\psi, (Y, k))$ sıralı ikilisini anlayacağız (k, Y üzerindeki kapanış operatörü), burada ψ, (X, c) nin (Y, k) nın bir alt uzayına homeomorfizmidir öyle ki $k(\psi(X)) = Y$ olur. $E_1 \equiv (\psi_1, (Y_1, k_1))$ ve $E_2 \equiv (\psi_2, (Y_2, k_2))$ bir X topolojik uzayının iki genişlemesi olsun. Eğer (Y_1, k_1) den (Y_2, k_2) üzerine $h o \psi_1 = \psi_2$ olacak şekilde bir h homeomorfizmi var ise E_1 ve E_2 genişlemeleri topolojik olarak denktir diyeceğiz.

Tanım 4.1.5: (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) $E \equiv (\psi, (Y, k))$, (X, c) uzayının bir genişlemesi olsun. O zaman (X, c) üzerinde Y'nin keyfi bir y noktası için $G(y, E)$ gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$G(y, E) = \{A \subseteq X : y \notin k\psi(A)\} = \{A \subseteq X : \psi(A) \in S_k(y)\}$$

$\widehat{X} = \{G(y, E) : y \in Y\}$ koleksiyonuna E genişlemesinin güç sistemi denir.

Önerme 4.1.6: (X, c) uzayının herhangi bir $E \equiv (\psi, (Y, k))$ genişlemesi ve $\forall x \in X$ için $G(\psi(x), E) = S_k(x)$ olur.

İspat: ψ bir homeomorfizm olduğundan $k\psi(A) = \psi(c(A))$ olur.

$G(\psi(x), E) = \{A \subseteq X : \psi(x) \notin k\psi(A)\}$

$G(\psi(x), E) = \{A \subseteq X : \psi(x) \notin \psi(c(A))\}$

$G(\psi(x), E) = \{A \subseteq X : x \notin c(A)\}$

$G(\psi(x), E) = S_k(x)$ olur.

Teorem 4.1.7: (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) Bir topolojik uzayın iki denk genişlemesi aynı güç sistemine sahiptir.

İspat: $E_1 \equiv (\psi_1, (Y_1, k_1))$ ve $E_2 \equiv (\psi_2, (Y_2, k_2))$ bir (X, c) topolojik uzayının iki denk genişlemesi olsun. O zaman $h : (Y_1, k_1) \to (Y_2, k_2)$ ve $h o \psi_1 = \psi_2$ olacak şekilde bir h homeomorfizmi vardır. $y \in Y_1$ için;

$G(y, E_1) = \{A \subseteq X : y \notin k_1\psi_1(A)\}$

$G(y, E_1) = \{A \subseteq X : h(y) \notin h(k_1\psi_1(A))\}$

$G(y, E_1) = \{A \subseteq X : h(y) \notin h(\psi_1(c(A)))\}$ ve $h o \psi_1 = \psi_2$ olduğundan

$G(y, E_1) = \{A \subseteq X : h(y) \notin \psi_2(c(A))\}$

$G(y, E_1) = G(h(y), E_2)$ olur.

Bundan sonra bir TychonoffX uzayının αX kompaktlamasından bir $(\alpha, (Y, k))$ genişlemesini anlayacağız, burada $Y = \alpha X$ bir kompakt uzay, $\alpha: X \to \alpha(X)$ bir homeomorfizm ve $k(\alpha(X)) = Y$ dir. Bundan sonra $B \subseteq Y$ için k(B) yi $\overline{B}$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.8: Bir Tychonoff X uzayın herhangi bir αX kompaktlamasının farklı noktaların güçleri farklıdır.

İspat: y_1 ve y_2 bir αX kompakt uzayının herhangi farklı iki noktası olsun. O halde αX Hausdorff olma özelliğini sağladığından $y_1 \in G$ ve $y_2 \in H$ için $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır. G ve H açık kümeler ve $y_2 \notin \overline{G \cap \alpha(X)}$ dır. $A = \alpha^{-1}(G)$ olsun. α(A) = G ∩ α(X) olup $y_2 \notin \overline{\alpha(A)} \Rightarrow A \in G(y_2, \alpha X)$ olur. $y_1 \in \overline{\alpha(A)} \Rightarrow A \notin G(y_1, \alpha X)$ olup $G(y_1, \alpha X) \neq G(y_2, \alpha X)$ olur.

Teorem 4.1.9. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) αX ve γX bir Tychonoff uzayının aynı güç sistemine sahip iki kompaktlaması olsun. O zaman αX ve γX topolojik olarak denktir.

İspat: αX ve γX uzaylarının topolojik olarak denk olduğunu göstermek için bu iki uzay arasında tanımlı foα = γ olacak şekilde f homeomorfizmi bulmalıyız.

$$\mathcal{A} = \{G(y, \alpha X): y \in \alpha X\}$$

ve

$$\mathcal{B} = \{G(z, \gamma X): z \in \gamma X\}$$

kümeleri sırasıyla αX ve γX' in güç sistemleri olsun, o halde $\mathcal{A}$ = $\mathcal{B}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{A}$ kümesindeki her bir eleman ile $\mathcal{B}$ kümesindeki bir tek eleman eşleşir.

$y \in \alpha X$ için $G(y, \alpha X)$ bir tek $z \in \gamma X$ için $G(z, \gamma X)$ ile eşleştiğinden $f: \alpha X \to \gamma X, f(y) = z$ dönüşümü tanımlanabilir ve Teorem 4.1.7 den $G(y, \alpha X) = G(f(y), \gamma X)$ olur.

αX, Tychonoff uzayı olduğundan farklı noktalarının güçleri birbirinden farklı olur yani $y_1, y_2 \in \alpha X$ ve $y_1 \neq y_2$ için $G(y_1, \alpha X) \neq G(y_2, \alpha X)$ olur. $G(y_1, \alpha X) = G(f(y_1), \gamma X)$ ve $G(y_2, \alpha X) = G(f(y_2), \gamma X)$ olduğundan $G(f(y_1), \gamma X) \neq G(f(y_2), \gamma X)$ olur. γX bir Tychonoff uzay olduğundan farklı noktaların güç sistemleri farklıdır. O halde $f(y_1) \neq f(y_2)$ olup f fonksiyonun birebirdir. $\forall z \in \gamma X$ için bir $y \in \alpha X$ elemanı $f(y) = z$ olacak şekilde eşleştiğinden f fonksiyonu örtendir.

$x \in X$ için $S_k(x) = G(\alpha(x), \alpha X) = G(f(\alpha(x)), \gamma X) = G(\gamma(x), \gamma X)$ olduğundan foα = γ olur.

Şimdi f' nin bir homeomorfizm olduğunu gösterelim. Bunun için αX kapalı kümelerinin bazındaki her bir elemanın görüntüsünün γX in kapalı kümelerinin bazında olduğunu gösterelim.

$A \subseteq X$ için $y \in \alpha(A) \Leftrightarrow f(y) \in f(\alpha(A)) = \gamma(A)$ olur.

$\{\overline{\alpha(A)}: A \subseteq X\}$ ve $\{\overline{\gamma(A)}: A \subseteq X\}$ kümeleri sırasıyla αX ve γX kompakt uzayları için kapalı kümelerin bir bazı olup,

$A \in G(y, \alpha X) \Leftrightarrow y \notin \overline{\alpha(A)} \Leftrightarrow f(y) \notin \overline{\gamma(A)} \Leftrightarrow A \in G(f(y), \gamma X)$

olacağından $f\left(\overline{\alpha(A)}\right) = \overline{\gamma(A)}$ olup f bir homeomorfizmdir.

4.2.İdeal Genişlemeleri

Tanım 4.2.1. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) Bir (X, c) topolojik uzayının $E \equiv (\psi, (Y, k))$ genişlemesi;

(i) $y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ için $G(y_1, E) \neq G(y_2, E)$

(ii) $\{k\psi(A): A \subseteq X\}$, (Y, k) içindeki kapalı kümeler için bir bazdır,

koşullarını sağlıyor ise E genişlemesine bir ideal genişlemesi denir.

Açıklama 4.2.2.

a) Bir (X, c) topolojik uzayının bir $E \equiv (\psi, (Y, k))$ ideal genişlemesi olabilmesi için bu uzayın T_0 olması gerekir. $x_1, x_2 \in X$ için;

$S_k(x_1) = S_k(x_2) \Rightarrow G(\psi(x_1), E) = G(\psi(x_2), E) \Rightarrow \psi(x_1) = \psi(x_2)$ olur.

b) Bir T_0 uzayın herhangi bir $E = (\psi, (Y, k))$ ideal genişlemesi de T_0 uzaydır.

$y_1, y_2 \in Y$ ve $S_k(y_1) = S_k(y_2)$ olsun.

$G(y_1, E) = \{A \subseteq X: y_1 \notin k\psi(A)\}$

$G(y_1, E) = \{A \subseteq X: \psi(A) \in S_k(y_1)\}$

$G(y_1, E) = \{A \subseteq X: \psi(A) \in S_k(y_2)\}$

$G(y_1, E) = \{A \subseteq X: y_2 \notin k\psi(A)\}$

$G(y_1, E) = G(y_2, E)$ olup $E \equiv (\psi, (Y, k))$ bir ideal genişlemesi olduğundan $y_1 = y_2$ olup (Y, k) uzayı T_0 uzayı olur.

Teorem 4.2.3. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) $E \equiv (\psi, (Y, k))$ bir (X, c) T_0 - topolojik uzayının ideal genişlemesi olsun. O zaman E, X'in serbest ideallerinin tamamını içeren (X, c) üzerindeki c-ideallerinin bazı uygun X^* koleksiyonu için (X, c) nin $E^* \equiv (\phi, (X^*, d))$ genişlemesine denktir.

İspat: E ≡ (ψ, (Y, k)) ile $E^* \equiv (\phi, (X^*, d))$ genişlemelerinin denk olduğunu göstermek için (Y,k) ile (X, c) uzayının (X^*,d) genişlemesi üzerinde tanımlı bir topoloji arasında foψ = ϕ olacak şekilde bir f homeomorfizmi bulmalıyız. Bunun için önce (X^*, d) üzerindeki topolojiyi belirleyelim.

$X^* = \widehat{X} = \{G(y, E): y \in Y\}$, (X, c) üzerindeki E'nin güç sistemi olsun.

$\forall x \in X$ için $\psi(x) = y \in Y$ olacağından X^* aynı anda her serbest ideali içeren (X, c) üzerindeki c-ideallerin bir kümesidir.

Öncelikle X^* üzerinde $\forall x \in X$ için $\phi: X \to X^*, \phi(x) = S_k(x)$ şeklinde tanımlanan birebir dönüşüm ile birlikte bir Kuratowski kapanış operatörü tanımlayalım.

$\forall A \subseteq X$ için $A^k = \{I \in X^*: A \notin I\}$ olsun.

$\mathfrak{B} = \{A^k: A \subseteq X\}$ ailesi X^* üzerindeki bir topolojiye göre kapalı kümelerin bir bazıdır.

$\emptyset^k = \{I \in X^*: \emptyset \notin I\} = \emptyset$ olup $\emptyset \in \mathfrak{B}$ olup $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ olur.

A,B $\subseteq X$ için $(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$ olduğunu gösterelim.

$I \in (A \cup B)^k \Rightarrow A \cup B \notin I \Rightarrow A \notin I$ veya $B \notin I \Rightarrow I \in A^k$ veya $I \in B^k \Rightarrow I \in A^k \cup B^k$ olduğundan $(A \cup B)^k \subseteq A^k \cup B^k$…(i) olur.

$I \in A^k \cup B^k \Rightarrow I \in A^k$ veya $I \in B^k \Rightarrow A \notin I$ veya $B \notin I$ olur. İdeal olma özelliğinden dolayı $A \cup B \notin I \Rightarrow I \in (A \cup B)^k$ olduğundan $A^k \cup B^k \subseteq (A \cup B)^k$…(ii) olur.

(i) ve (ii) den $(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$ elde edilir.

d X^* üzerinde $\mathfrak{B}$ ailesini baz kabul eden topolojinin kuratowski kapanış operatörü olsun. $\forall \alpha \subseteq X^*$için

$$d(\alpha) = \bigcap \{B^k: \alpha \subseteq B^k, B \subseteq X\}$$

olur. Şimdi $\phi(x)$ ile d arasındaki ilişkileri inceleyelim.

i) $\forall A \subseteq X$ için;

$\phi(c(A)) = \{\phi(x): x \in c(A)\} = \{S_k(x): A \notin S_k(x)\} = \{I \in X^*: I \in A^k\} = A^k \cap \phi(X)$ olur.

ii)) $\forall A \subseteq X$ için $\phi(A) \subseteq \phi(c(A)) \subseteq A^k$ olup $\phi(A) \subseteq A^k$ olur.

iii) $d(\phi(A)) = A^k$ olur.

$$d(\phi(A)) = \bigcap \{B^k: \phi(A) \subseteq B^k, B \subseteq X\}$$

ve $\phi(A) \subseteq A^k$ olduğundan $d(\phi(A)) \subseteq A^k$ olur. …(i)

Şimdi $A^k \subseteq d(\phi(A))$ olduğunu gösterelim.

$B \subseteq X$, $\phi(A) \subseteq B^k$ ve $x \in A$ olsun. $\phi(x) \in \phi(A)$ ve $\phi(x) = S_k(x) \in B^k$ olur. Buradan $B \notin S_k(x)$ olup $x \in c(B)$ elde ederiz. O halde, $\phi(A) \subseteq B^k$ ise $A \subseteq c(B)$ olur.

$A \subseteq B$ olsun. $I \in A^k \Rightarrow A \notin I \Rightarrow B \notin I \Rightarrow I \in B^k$ olup $A^k \subseteq B^k$ olur. Öte yandan $I \in (c(B))^k$ olsun. $c(B) \notin I$ ve I bir c-ideal olduğundan $B \notin I$ olup $I \in B^k$ olur. Buradan I keyfi bir eleman olduğundan $(c(B))^k \subseteq B^k$ ve $B \subseteq c(B)$ olduğundan $B^k \subseteq (c(B))^k$ olup $(c(B))^k = B^k$ elde ederiz. O halde $(c(B))^k = B^k$ olur.

Sonuç olarak $\phi(A) \subseteq B^k \Rightarrow A \subseteq c(B) \Rightarrow A^k \subseteq (c(B))^k \Rightarrow A^k \subseteq B^k$ olup,

$\phi(A) \subseteq B^k \Rightarrow A^k \subseteq B^k$ olur. d kapanış operatörü

$$d\big(\phi(A)\big) = \bigcap\{B^k: \phi(A) \subseteq B^k, B \subseteq X\}$$

şeklinde tanımlı olduğundan $A^k \subseteq d(\phi(A))$ olur. …(ii)

Sonuç olarak (i) ve (ii) den $d\big(\phi(A)\big) = A^k$ elde edilir.

$A \subseteq X$ kapalı bir küme olsun. $A = c(A)$ ve $\phi\big(c(A)\big) = A^k \cap \phi(X)$ olduğundan $\phi(c(A))$, $\phi(X)$ de kapalı bir küme ve $\phi\big(c(A)\big) \subseteq A^k$ olur. $x \in X$ için $\phi(x) \in A^k$ ise $A \notin \phi(x) = S_k(x)$ olup $x \in c(A)$ ve $\phi(x) \in \phi(c(A))$ olacağından $A^k \subseteq \phi\big(c(A)\big)$ olur. Sonuç olarak $\phi\big(c(A)\big) = A^k$ elde ederiz.

$$d\big(\phi(A)\big) = A^k = \phi\big(c(A)\big)$$

olduğundan $\phi: (X, c) \to (X^*, d)$ bir homeomorfizm olur.

$d\big(\phi(X)\big) = X^k = \{I \in X^*: X \notin I\}$ olduğundan $X^k \subseteq X^*$ olur. $y \in Y$ için $G(y, E) \in X^*$ olsun. $y \in \phi(c(X)) \Rightarrow X \notin G(y, E) \Rightarrow G(y, E) \in X^k$ olup G(y, E) keyfi bir eleman olduğundan $X^* \subseteq X^k$ olur. $d\big(\phi(X)\big) = X^k = X^*$ olduğundan (X^*, d) uzayı (X, c) uzayının bir genişlemesi olur.

$f: (Y, k) \to (X^*, d)$ $f(y) = G(y, E)$ olarak tanımlayalım. $f\circ\psi = \phi$ olduğu açıktır. Öte yandan $A \subseteq X$ ve $y \in k(\psi(A)) \Leftrightarrow A \notin S(y, E) = f(y) \Leftrightarrow f(y) \in A^k$ olduğundan $f: (Y, k) \to (X^*, d)$ birebir örten dönüşümü temel kapalı kümeler üzerinde bir birebir örten eşleme belirlediğinden f bir homeomorfizmdir.

Teorem 4.2.4. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) (C) koşulu: I, X üzerinde bir ideal ve $\mathcal{F}$, X' in kapalı alt kümelerinin sonlu bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$ nin elemanlarının kesişimi boş küme ise bu elemanlardan en az biri I idealine aittir.

(X, c) kompaktır $\Leftrightarrow$ (C) koşulunu sağlayan her I ideali için $S_k(x) \subseteq I$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

İspat: (⇒) (X, c) kompakt bir uzay ve I ideali (C) koşulunu sağlasın.

I ideali (C) koşulunu sağladığından $\{c(A): A \in P(X)\backslash I\}$ ailesinin elemanları I idealine ait olmadığından sonlu tanesinin arakesiti boş kümeden farklıdır yani i = 1,2, … , n için A_i kümeleri X' in kapalı alt kümeleri ve $A_i \in P(X)\backslash I$ olmak üzere

$$\bigcap_{i=1}^{n} c(A_i) \neq \emptyset$$

olur. $A_i \in P(X)\backslash I$ ise $A_i \notin I$ olur.

$$\bigcap_{i=1}^{n} c(A_i) = \emptyset$$

olsa idi I (C) koşulunu sağladığından bu kümelerden en az biri I idealine ait olacaktı, yani bir $p \in \{1,2,\dots,n\}$ için $c(A_p) \in I$ olup ideal olma özelliğinden $A_p \in I$ olacaktı ki bu da $A_p \in P(X)\backslash I$ olması ile çelişir. Dolayısıyla (X, c) kompakt uzay olduğundan kapalı kümelerin sonlu arakesit özelliğinden sonlu tanesinin arakesiti boş kümeden farklı ise bu ailenin tüm elemanlarının da arakesiti de boş kümeden farklı olacağından

$$\bigcap \{c(A): A \in P(X)\backslash I\} \neq \emptyset$$

olup bu kümenin en az bir tane elemanı vardır.

$$x \in \bigcap \{c(A): A \in P(X)\backslash I\}$$

olsun. O zaman $\forall A \in P(X)\backslash I$ için $x \in c(A)$. Dolayısıyla $\forall A \notin I$ için $A \notin S_k(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $S_k(x) \subseteq I$ elde edilir.

($\Leftarrow$) (C) koşulunu sağlayan her I ideali için $S_k(x) \subseteq$ I olacak şekilde $x \in X$ var olsun. (X, c)' nin kompakt olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$, (X, c) uzayının bir ultra filtresi olsun. Kompakt uzaylarda her filtre yığılma noktasına sahip olduğundan bu filtrenin bir yığılma noktası olduğunu gösterelim.

Filtrenin elemanlarının tümleyenleri ideal olduğundan $I = \{A \subseteq X: X - A \in \mathcal{U}\}$ ailesi X üzerinde bir idealdir.

$i = 1,2,\dots,n$ için A_i'ler X' in kapalı alt kümeleri olsun. I idealinin (C) koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için idealin elemanı olmayan kapalı kümelerin arakesitinin boştan farklı olduğunu gösterebiliriz. Yani i = 1,2, …, n için;

$$A_i \notin I \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

olduğunu gösterelim. i = 1,2, …, n için $A_i \notin I \implies X - A_i \notin \mathcal{U}$ olur. $\mathcal{U}$ bir ultra filtre olduğundan i=1,2, …, n için $X - A_i \notin \mathcal{U}$ ise $A_i \in \mathcal{U}$ olur. O halde filtrenin özelliğinden

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$$

olur. $\mathcal{U}$ bir ultra filtre olduğundan boş küme $\mathcal{U}$ ailesinin içinde olamaz. Sonuç olarak

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \notin I \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

elde ederiz. I, (C) koşulunu sağladığından bir $x \in X$ için $S_k(x) \subseteq I$ olur. Dolayısıyla eğer $A \in S_k(x) \Longrightarrow A \in I$ olur bir başka ifade ile $x \notin c(A)$ ve $X - A \in \mathcal{U}$ olur. Şimdi $\mathcal{U}$ filtresinin x noktasına yakınsadığını gösterelim. $U \in N(x)$ açık bir küme olsun. $x \in U$ ve $x \notin X - U = c(X - U)$ olur. $U = X - (X - U) \in \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{U}$ filtresi x noktasına yakınsar. Buradan (X, c) uzayı kompakt bir uzay olur.

Tanım 4.2.5. (X, c) üzerindeki bir I ideali $A, B \in P(X) - I$ iken $c(A) \cap c(B) \neq \emptyset$ koşulunu sağlıyor ise I idealine c-joined ideal ve (X, c) üzerindeki her I c-joined ideali için $x \in X$ olmak üzere $S_k(x) \subseteq I$ oluyor ise (X,c) uzayına c-joined kompakt denir.

c – joined ideallerde ideale ait olmayan kümelerin kapanışlarının kesişimi boş kümeden farklı olur.

Not 4.2.6. c-joined ideallerin kümesi, (C) koşulunu sağlayan ideallerin sınıfından kesinlikle daha geniştir. A = {1, 2, 4}, B = {2, 3, 5} ve C = {1, 3, 6} ve X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} olsun. X üzerinde kapalı kümeleri $\mathcal{K}$={∅, X, A, B, C, A∩B, A∩C, B∩C, A∪B, A∪C, B∪C} olan topolojiyi tanımlayalım. X üzerinde I = P({1, 2, 3}) ideali olsun. $A \cap B \cap C = \emptyset$ ve $A \notin I$, $B \notin I$ ve $C \notin I$ olduğundan yani A, B ve C kapalı kümelerinin kesişimi boş küme olduğu halde bunlardan I idealine ait olan olmadığından I ideali (C) koşulunu sağlamaz. $\emptyset \neq K, L \in P(X) - I$ olsun. $\overline{K} \cap \overline{L} \neq \emptyset$ ise I ideali c-joined ideali olma koşulunu sağlar. $K, L \in P(X) - I$ ise $\overline{K}, \overline{L} \in \{A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$ olur. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2\} \neq \emptyset$ olur. Diğer durumlarda da benzer işlemler yapılıp I idealinin c-joined olduğu görülür.

Teorem 4.2.7. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) Regüler uzaylar içinde, kompaktlık ve c- joined kompaktlık kavramları aynıdır.

İspat: Her c- joined kompakt uzay kompakt olduğundan bir (X, c) uzayı c- joined kompakt ise kompaktır.

(X, c) uzayı kompakt ve regüler bir uzay ise c- joined kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için (X, c) üzerindeki her I c-joined ideali için $x \in X$ olmak üzere $S_k(x) \subseteq I$ olduğunu göstermeliyiz.

$X \in I$ ise $I = P(X)$ olup $S_k(x) \subseteq I$ olacağından $X \notin I$ varsayabiliriz. Kabul edelim ki her $x \in X$ için $S_k(x) \not\subseteq I$ olsun. O zaman $\forall x \in X$ için bir $A_x \in S_k(x)$ vardır öyle ki $A_x \notin I$ olur. $A_x \in S_k(x) \Rightarrow x \notin c(A_x)$ olur.

$c(A_x)$ kapalı bir küme ve (X,c) regüler bir uzay olduğundan kapalı kümeler ile noktalar açık kümeler ile ayrılır. Yani $x \in V_x$, $c(A_x) \subseteq U_x$ ve $V_x \cap U_x = \emptyset$ olacak şekilde $V_x, U_x \subset X$ açık kümeleri vardır.

$\forall x \in X$ için $c(A_x) \cap c(V_x) = \emptyset$ olup $\{V_x : x \in X\}$ ailesi X'in açık bir örtüsü olur. X kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani $\{V_{x_i} : i = 1,2,\dots,n\}$ için

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

olup her bir i için (X, c) uzayı regüler olduğundan $c(A_{x_i}) \cap c(V_{x_i}) = \emptyset$ ve I c-joined ideal olduğundan $A_{x_i} \in I$ veya $V_{x_i} \in I$ olmalı ama $A_{x_i} \notin I$ olduğundan $V_{x_i} \in I$ olur.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \in I$$

olup bu durum $X \notin I$ olması ile çelişir. Buradan $\forall x \in X$ için $S_k(x) \subseteq I$ olup (X,c) c-joined kompakt olur.

Tanım 4.2.8. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) $\mathcal{F} = \{I_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ (X,c) üzerindeki ideallerin bir ailesi ve I bir ideal olsun. A, $B \notin I$ ve bir $\alpha \in \Lambda$ için A, $B \notin I_\alpha$ olduğunda bir $\beta \in \Lambda$ için $I_\beta \subseteq I$ oluyor ise $\mathcal{F}$ ailesi (*) koşulunu sağlıyor denir.

Teorem 4.2.9. (Mukherjee, Roy ve Sen, 2007) Bir (X, c) uzayının $E \equiv (\phi, (X^*, d))$ ideal genişlemesinin c-joined kompakt olması için gerek ve yeter koşul X^*, (*) koşulunu sağlayan (X, c) üzerindeki ideallerin bir koleksiyonu olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki X^* c-joined kompakt olsun. (X^*,d)'nin (*) koşulunu sağladığını gösterelim. I, X üzerinde bir ideal olsun öyle ki X' in herhangi iki alt kümesi I ideali içinde olmasın ve bu elemanlar X^* ın bazı elemanları tarafından da içerilmesin. Bir $I_0 \in X^*$ bulmalıyız öyle ki $I_0 \subseteq I$ olmalı.

Önce X^* üzerinde bir $\mathcal{A}$ c-joined ideali tanımlayalım.

$$\mathcal{A} = \{\alpha \subseteq X^* : \phi(A) \cap (X^* - \alpha) \neq \emptyset, \forall A \notin I\}$$

bir c-joined idealdir.

Öncelikle $\mathcal{A}$ ailesinin bir ideal olduğunu gösterelim.

$A \notin I$ ise $A \neq \emptyset$ olur. $\phi(A) \cap (X^* - \emptyset) = \phi(A) \cap X^* \neq \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{A}$ ve $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olur.

$\alpha \in \mathcal{A}$ olsun. $\forall \beta \subseteq \alpha$ için $\beta \in \mathcal{A}$ olduğunu gösterelim.

$\alpha \in \mathcal{A}$ ise $\forall A \notin I$ için $\phi(A) \cap (X^* - \alpha) \neq \emptyset$ olduğundan $\beta \subseteq \alpha$ ise $(X^* - \alpha) \subseteq (X^* - \beta)$ olacağından $\phi(A) \cap (X^* - \alpha) \subseteq \phi(A) \cap (X^* - \beta) \neq \emptyset$ olup $\beta \in \mathcal{A}$ olur.

$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ise $\alpha \cup \beta \in \mathcal{A}$ olduğunu gösterelim.

$\alpha \in \mathcal{A}$ ise $\forall A \notin I$ için $\phi(A) \cap (X^* - \alpha) \neq \emptyset$ ve $\beta \in \mathcal{A}$ ise $\forall B \notin I$ için $\phi(B) \cap (X^* - \beta) \neq \emptyset$ olur. Kabul edelim ki $\alpha \cup \beta \notin \mathcal{A}$ olsun. O zaman bir $C \notin I$ için $\phi(C) \cap (X^* - (\alpha \cup \beta)) = \emptyset$ olur. Buradan $\phi(C) \subseteq X^* \backslash \big(X^* - (\alpha \cup \beta)\big)$ yani $\phi(C) \subseteq \alpha \cup \beta$ olur.

$$C_1 = \{x \in C: \phi(x) \in \alpha\}$$

ve

$$C_2 = \{x \in C: \phi(x) \in \beta\}$$

olsun. $C = C_1 \cup C_2$ ve $C \notin I$ olduğundan ideal olma özelliğinden dolayı $C_1 \notin I$ veya $C_2 \notin I$ olur. $x \in C_1$ ise $\phi(x) \in \alpha$ ve $\phi(x) \in \phi(C_1)$ olup $\phi(x) \notin X^* - \alpha$ olduğundan $\phi(C_1) \cap (X^* - \alpha) = \emptyset$ olur. $C_1 \notin I$ ise $\phi(C_1) \cap (X^* - \alpha) \neq \emptyset$ olur ki bu da çelişkidir. C_2 içinde benzer şekilde işlem yapılır ise sonuç olarak $\alpha \cup \beta \in \mathcal{A}$ elde edilip $\mathcal{A}$ bir ideal olur.

Şimdi $\mathcal{A}$'nın c-joined ideal olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \notin \mathcal{A}$ için $d(\alpha) \cap d(\beta) \neq \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha \notin \mathcal{A}$ ise $\exists A \notin I$ için $\phi(A) \cap (X^* - \alpha) = \emptyset$ olup $\phi(A) \subseteq \alpha$ ve $A^k = d(\phi(A)) \subseteq d(\alpha)$ olur.

$\beta \notin \mathcal{A}$ ise $\exists B \notin I$ için $\phi(B) \cap (X^* - \beta) = \emptyset$ olup $\phi(B) \subseteq \beta$ ve $B^k = d(\phi(B)) \subseteq d(\beta)$ olur.

$A \notin I \Rightarrow I \in A^k$ ve $B \notin I \Rightarrow I \in B^k$ olduğundan $I \in A^k \cap B^k$ olur.

$A^k \cap B^k \subseteq d(\alpha) \cap d(\beta)$ olduğundan $d(\alpha) \cap d(\beta) \neq \emptyset$ olup $\mathcal{A}$ bir c-joined ideal olur.

(X^*,d) c- joined kompakt olduğundan $I_d(I_0) \subseteq \mathcal{A}$ olacak şekilde bir $I_0 \in X^*$ vardır. $I_0 \subseteq I$ olduğunu gösterelim. $A \notin I$ olsun. $\phi(A) \in \mathcal{A}$ olsa $\phi(A) \cap (X^* - \phi(A)) \neq \emptyset$ olması gerekir ki bu da bir çelişkidir. O halde $A \notin I \Rightarrow \phi(A) \notin \mathcal{A} \Longrightarrow \phi(A) \notin I_d(I_0) \Longrightarrow I_0 \in d(\phi(A)) = A^k \Longrightarrow A \notin I_0$ olduğundan $I_0 \subseteq I$ olur. O halde X^* (*) koşulunu sağlar.

Tersine kabul edelim ki X^*, (*) koşulunu sağlasın, c-joined kompakt olduğunu gösterelim.

$\mathcal{A}$, (X^*,d) üzerinde herhangi bir c-joined ideal olsun bir $I_0 \in X^*$ bulmalıyız ki $I_d(I_0) \subseteq \mathcal{A}$ olsun.

$$\mathcal{A}_X = \{A \subseteq X: \phi(A) \in \mathcal{A}\}$$

olsun. $\mathcal{A}_X$'in ideal olduğunu gösterelim.

$\emptyset \in \mathcal{A}$ olduğundan $\emptyset = \phi(\emptyset) \in \mathcal{A}$ olup $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$ olur.

$A \in \mathcal{A}_X$ olsun. $\forall B \subseteq A$ için $\phi(B) \subseteq \phi(A)$ olup $\phi(A) \in \mathcal{A}$ olduğundan ve $\mathcal{A}$ bir ideal olduğundan $\phi(B) \in \mathcal{A}$ olacağından $B \in \mathcal{A}_X$ olur.

$A, B \in \mathcal{A}_X$ için $A \cup B \in \mathcal{A}_X$ olduğunu gösterelim. $\phi(A) \cup \phi(B) \subseteq \phi(A \cup B)$ olur. $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$ dir. $x \in A$ ise $\phi(x) \in \phi(A)$, $x \in B$ ise $\phi(x) \in \phi(B)$ olup $\phi(x) \in \phi(A) \cup \phi(B)$ olacağından $\phi(A \cup B) \subseteq \phi(A) \cup \phi(B)$ olup $\phi(A) \cup \phi(B) = \phi(A \cup B)$ olur.

$$\mathcal{A}_Y = \{A \subseteq X: A^k - \phi(X) \in \mathcal{A}\}$$

olsun. $\mathcal{A}_Y$'nin ideal olduğunu gösterelim. $\emptyset \in \mathcal{A}$ ve $\emptyset^k = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{A}_Y$ olup $\mathcal{A}_Y \neq \emptyset$ olur.

$A \in \mathcal{A}_Y$ olsun. $\forall B \subseteq A$ için $B^k \subseteq A^k$ ve $A^k - \phi(X) \in \mathcal{A}$ olduğundan $B^k - \phi(X) \in \mathcal{A}$ olup $B \in \mathcal{A}_Y$ olur.

$A, B \in \mathcal{A}_Y$ olsun. $A^k - \phi(X) \in \mathcal{A}$ ve $B^k - \phi(X) \in \mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}$ bir ideal ve $A^k \cup B^k = (A \cup B)^k$ olduğundan $(A \cup B)^k - \phi(X) \in \mathcal{A}$ olur ki bu da $A \cup B \in \mathcal{A}$ demektir. Sonuç olarak $\mathcal{A}_Y$ bir ideal olur.

$\mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_Y$ bir idealdir. Bu idealin c-joined ideal olduğunu gösterelim. $A, B \subseteq X$ olsun. $A, B \notin \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_Y$ için $d(\phi(A)) \cap d(\phi(B)) \neq \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \notin \mathcal{A}_X$ ve $B \notin \mathcal{A}_Y$ olsun. $A \notin \mathcal{A}_X$ ise $\phi(A) \notin \mathcal{A}$ ve $B \notin \mathcal{A}_Y$ ise $B^k - \phi(X) \notin \mathcal{A}$ olur. $\mathcal{A}$ bir c-joined ideal olduğundan $d(\phi(A)) \cap d(B^k - \phi(X)) \neq \emptyset$ dir.

$d(\phi(A)) = A^k$ ve $d\left(B^k - \phi(X)\right) \subseteq B^k$ olduğundan $d(\phi(A)) \cap d(B^k - \phi(X)) \subseteq A^k \cap B^k$ ve $A^k \cap B^k \neq \emptyset$ olur.

$A, B \notin \mathcal{A}_X$ veya $A, B \notin \mathcal{A}_Y$ olsun. $A, B \notin \mathcal{A}_X$ ise $\phi(A), \phi(B) \notin \mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}$ bir c-joined ideal olduğundan $d(\phi(A)) \cap d(\phi(B)) \neq \emptyset \neq A^k \cap B^k$ olur. $A, B \notin \mathcal{A}_Y$ durumu da benzerdir.

$A^k \cap B^k \neq \emptyset$ olduğundan $\exists I \in X^*$ için $I \in A^k \cap B^k$ olsun. $I \in A^k$ ve $I \in B^k$ olup, $A \notin I$ ve $B \notin I$ olur. $A, B \notin \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_Y$ ve X^* (*) koşulunu sağladığından bir $I_0 \in X^*$ için $I_0 \subseteq \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}_Y$ olur. $I_d(I_0) \subseteq \mathcal{A}$ olduğunu gösterelim. $\alpha \notin \mathcal{A}$ olsun.

$$\alpha = (\phi(X) \cap \alpha) \cup (\alpha \backslash \phi(X))$$

şeklinde yazılabileceğinden ve $\alpha \notin \mathcal{A}$ olduğundan $\phi(X) \cap \alpha \notin \mathcal{A}$ veya $\alpha \backslash \phi(X) \notin \mathcal{A}$ olur. $\phi(X) \cap \alpha \notin \mathcal{A}$ ise o zaman $\phi^{-1}(\phi(X) \cap \alpha) = X \cap \phi^{-1}(\alpha) \notin \mathcal{A}_X$ ve $\mathcal{A}_X$ bir ideal olduğundan $\phi^{-1}(\alpha) \notin \mathcal{A}_X$ olur. $\phi^{-1}(\alpha) \notin \mathcal{A}_X \Rightarrow \phi^{-1}(\alpha) \notin I_0$ olup $I_0 \in \left(\phi^{-1}(\alpha)\right)^k \subseteq d\left(\phi\phi^{-1}(\alpha)\right) = d(\alpha)$ olduğundan $\alpha \notin I_d(I_0)$ olur. α keyfi bir küme olduğundan $I_d(I_0) \subseteq \mathcal{A}$ olur. $\alpha - \phi(X) \notin \mathcal{A}$ olsun.

İddia:

$$I_0 \in \bigcap\{A^k: \alpha \subseteq A^k\} = d(\alpha)$$

olur.

$d(\phi(A)) = A^k$ olduğundan

$$A^k \in \bigcap\{A^k: \alpha \subseteq A^k\}$$

olup $\alpha - \phi(X) \subseteq A^k - \phi(X)$ ve $\alpha - \phi(X) \notin \mathcal{A}$ olup ideal olma özelliğinden $A^k - \phi(X) \notin \mathcal{A}$ olur. $A \notin \mathcal{A}_Y$ olup $A \notin I_0$ olur. O halde $I_0 \in A^k$ ve

$$I_0 \in \bigcap\{A^k: \alpha \subseteq A^k\} = d(\alpha)$$

olduğundan $\alpha \notin I_d(I_0)$ olup $I_d(I_0) \subseteq \mathcal{A}$ olup (X^*, d) c – joined kompakt olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ideal topolojik uzaylarda yerel fonksiyonun özellikleri incelenmiş ve bir X uzayındaki τ topolojisi ve I ideali ile yerel fonksiyon kullanılarak X uzayı üzerinde bu uzaydan daha ince bir topoloji olan $\tau^*(I)$ topolojisi göz önüne alınarak, X'in herhangi bir alt kümesinin τ ve $\tau^*(I)$ topolojisindeki limit noktaları kategorik olarak incelenmiş ve $\tau^*(I)$ topolojisindeki limit noktaları kümesinin τ topolojisindeki limit noktalarının alt kümesi olduğu gerçeği kategorik yaklaşımla gösterilmiştir.

Topoloji ile idealin uyumu ile yerel olarak sağlanan bir özelliğin hangi şartlar altında global olarak sağlanabileceği incelenmiş ve bazı sonuçları verilmiştir.

Son olarak M.N. Mukherjee, Bishwambhar Roy ve Ritu Sen'in 2007 yılındaki çalışmasında yer alan serbest ideal, güç sistemi kavramları ve bu kavramların kompaktlamalarla ilişkisi incelenmiştir.

Serbest ideal ve güç sistemleri ile bir küme üzerindeki tüm topolojiler üzerinde ayrık olmayan metrik tanımlanabileceğini öngörmekteyiz.

KAYNAKLAR

Alizade, R. ve Pancar, A. 1999. Homoloji Cebire Giriş. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 176.

Ercan, Z, 2020, Topoloji, ODTÜ Yayıncılık, Ankara, 480

Folland, G, 1999, Real Analysis, Wiley - interscience, New York, 388

Jankovic D. Hamlet T.R. 1990. New Topologies from Old via Ideals.The American Mathematical Monthly, 97(4):295-310

K. Kuratowski and W. Sierpinski, Le theoreme de Borel-Lebesgue dans la theoriedes Ensembles Abstraits, Fund. Math., 2 (1921) 172-178.

Mukherjee M.N.,Roy Bishwambhar, Sen Ritu. 2007. On extension of topologicalspaces in terms of ideals.

R. Vaidyanathaswamy, Set Topology, Chelsea Publishing Company, 1960.

S. Scheinberg, Topologies which generate a complete measure algebra, Advances in Math. 7 (1971) 231-239.

Willard S. 1970, General Topology, Addison-Wesley publishing company, California-London, 369

ÖZGEÇMİŞ

Mahmut YILMAZ, İlk öğretimini Adana'da, orta öğretimini Konya'da tamamladı. Lisans eğitimini 2014 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünde tamamladı. 2014-2019 yılları arasında Şırnak ilinin Cizre ilçesinde, 2019-2022 yılları arasında Kahramanmaraş ilinin Andırın ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2022 yılından itibaren Kozan Anadolu Lisesinde görev yapmaktadır. 2023 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğretimine başladı ve 2025 yılında mezun oldu.