ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Berrin GÜLTAY

GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE YANLI TAHMİN EDİCİLER

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2014

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE YANLI TAHMİN EDİCİLER

Berrin GÜLTAY

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 26/12/2014 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……	……	……
Prof Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Doç. Dr. M. Revan ÖZKALE	Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
……..	……	
Prof. Dr. Yılmaz AKDİ	Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU	
ÜYE	ÜYE	

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE YANLI TAHMİN EDİCİLER

Berrin GÜLTAY

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl: 2014, Sayfa: 151
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Doç. Dr. M. Revan ÖZKALE
: Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER
: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ
: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Gecikmesi sonlu dağıtılmış modeller, aynı değişkenin gecikmeli ve gecikmesiz değerlerine sahip olduğundan yüksek ilişkili değişkenlere sahip olurlar. Bu durumda bağımsız değişkenler arasında bağımsızlık varsayımı geçerli olmayabilir ve bu da çoklu iç ilişki problemine neden olur. Bu modellere en küçük kareler yöntemi ya da Almon ve Koyck modeli gibi ekonometrik modeller uygulandığında bazı sorunlarla karşılaşılır.

Bu çalışmada Almon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için stokastik olmayan kısıt altında Almon-modified ridge, Almon-kısıtlı ridge, Almon-Liu, Almon-(*r*-*k*) sınıf, Almon-(*r*-*d*) sınıf, Almon-modified Liu tahmin edicileri Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları Monte Carlo simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Ardından bu alternatif yanlı edicilerden bazıları hata kareler ortalama matrisi kriterine göre karşılaştırılmıştır.

Çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için kullanılan başka bir yöntem ise stokastik kısıtlı modeller ile çalışmaktır. Bu anlamda gecikmesi dağıtılmış modellerde stokastik kısıt altında Almon tahmin ediciye alternatif tahmin ediciler incelenmiş ve Bayesyen Liu tipi Shiller ve Bayesyen Liu tipi Lindley tahmin edicileri önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin performansları Almon (1965) veri seti ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gecikmesi dağıtılmış modeller, Çoklu iç ilişki, Almon tahmin edici, Yanlı tahmin ediciler

ABSTRACT

PhD THESIS

BIASED ESTIMATORS FOR THE DISTRIBUTED LAG MODELS

Berrin GÜLTAY

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year: 2014, Pages: 151
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Assoc. Prof. Dr. M. Revan ÖZKALE
: Assoc. Prof. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER
: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ
: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

The finite distributed lag models include highly correlated variables as well as lagged and unlagged values of the same variables. In this case, the assumptions of independence between the explanatory variables cannot be valid, and this leads to multicollinearity problem. Some problems are faced for these models when applying the ordinary least squares method or econometric models such as Almon and Koyck models.

In this study, Almon-kısıtlı ridge, Almon-Liu, Almon-(*r*-*k*) sınıf, Almon-(*r*-*d*) sınıf, Almon-modified Liu estimators are defined under the nonstochastic restriction in order to overcome the problem of multicollinearity occurred in Almon model. In addition, the performances of the defined estimators are examined with a Monte Carlo simulations. Then, some of these alternative biased estimators are compared according to the mean square error matrix criterion.

Another method to eliminate the multicollinearity is to consider the stochastic restricted models. In this sense, the alternative estimators to the Almon estimator are examined under the stochastic restriction and Bayesian Liu type Shiller and Bayesian Liu type Lindley estimators have been proposed. The performance of the proposed estimators is investigated with Almon (1965) data set.

Key Words: Distributed lag models, Multicollinearity, Almon estimator, Biased estimators

TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca başarılı olabilmenin yolunun sabır ve azim olduğunu öğrendim. Ancak bunların kendi başına yeterli olmadığını da gördüm. Eksiklikleri tamamlayan ise her daim size inanan ve destekleyen kişilerin varlığı olduğunu biliyorum.

Tüm lisans, yüksek lisans ve doktora öğrenimim boyunca attığım her adımda güvenini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli hocam, sayın danışmanım Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR' a sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan hocam sayın Doç. Dr. M. Revan ÖZKALE'ye ve güler yüzü ile beni her zaman motive eden Doç. Dr. Ebru Özgür GÜLER'e ve uygulama çalışmalarındaki desteği için Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER hocama çok teşekkür ederim.

Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde görev yapan çok değerli hocam ve arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Gülesen Üstündağ ŞİRAY, Arş. Gör. Selma TOKER ve Arş. Gör. Nimet TÜRKER'e bana verdikleri destekler için çok teşekkürler.

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi öğretim üyelerinden çok kıymetli hocam Prof. Dr. Selver Özözen KAHRAMAN'a bana göstermiş olduğu tüm destekleri için teşekkürlerimi sunarım. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi İstatistik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV'a bana olan güveni ve motivasyon desteği için sonsuz teşekkürler.

Beni bugünlere taşıyan ve attığım her adımda arkamda olan sevgili ailem iyi ki varsınız, hayatım boyunca hep yanımda olun.

Tüm tez çalışmam boyunca evdeki huzuru ve mutluluğu sağlayarak yanımda olan sevgili eşim Mehmet GÜLTAY'a sevgilerimle teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ X
SİMGELER VE KISALTMALAR XII
1. GİRİŞ 1
2. LİNEER REGRESYON MODELİ VE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER 5
2.1. Genel Lineer Model 5
2.2. En Küçük Kareler Tahmin Edici ve Alternatif Tahmin Edicilerin Gerekliliği 6
2.3. Çoklu İç İlişkinin Varlığı 10
2.4. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici 13
2.5. Ridge Tahmin Edici 15
2.5.1. Yanlılık Parametresi *k*'nın Seçimi 19
2.6. Modified Ridge Tahmin Edici 21
2.7. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici 23
2.8. Temel Bileşenler Tahmin Edici 25
2.9. *r-k* Sınıf Tahmin Edici 28
2.10. Liu Tahmin Edici 29
2.11. Modified Liu Tahmin Edici 31
2.12. *r-d* Sınıf Tahmin Edici 33
3. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLER 35
3.1. Dinamik Regresyon Modelleri 35
3.2. Dinamik Regresyon Modellerinde Gecikmenin Etkileri 37
3.3. Gecikmesi Dağıtılmış Modeller 38
3.4. Gecikmesi Sonsuz Dağıtılmış Modeller 41
3.4.1. Koyck Modeli 41
3.4.2. Kısmi Uyarlama Modeli 45

3.4.3. Uyarlamalı Beklentiler Modeli 46
3.5. Gecikmesi Sonlu Dağıtılmış Modeller 48
3.5.1. Almon Modeli 49
3.5.2. Gecikme Uzunluğunun Belirlenmesi 54
3.5.2.1. Düzeltilmiş Belirleyicilik Katsayısı $(\overline{R}^2)$ 54
3.5.2.2. Akaike Bilgi Kriteri *(AIC)* 56
3.5.2.3. Schwarz Bilgi Kriteri *(SIC)* 56
3.5.3. Polinomun Derecesinin Belirlenmesi 57
4. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK OLMAYAN KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİ İLE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KOMBİNASYONLARI 61
4.1. Almon-Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici 61
4.2. Almon-Ridge Tahmin Edici 62
4.3. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici 64
4.4. Almon-Kısıtlı Ridge Tahmin Edici 65
4.5. Almon-Liu Tahmin Edici 65
4.6. Almon-Temel Bileşenler Tahmin Edici 68
4.7. Almon-*(r-k)* Tahmin Edici 69
4.8. Almon-*(r-d)* Tahmin Edici 70
4.9. Almon- Modified Liu Tahmin Edici 70
4.10. Sayısal Örnek 71
4.11. Monte Carlo Deneyi 77
5. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE BAZI ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN HATA KARELER ORTALAMA MATRİSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI 89
5.1. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon Tahmin Edicinin Karşılaştırılması 91
5.2. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon-Ridge Tahmin Edicinin Karşılaştırılması 92
5.3. Almon-Modified Liu Tahmin Edici ile Almon Tahmin Edicinin Karşılaştırılması 93

5.4. Almon-Modified Liu Tahmin Edici ile Almon-Liu Tahmin Edicinin Karşılaştırılması 95
5.5. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon-Liu Tahmin Edicinin Karşılaştırılması 96
5.6. Sayısal Örnek 100
6. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİYE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLER 109
6.1. Stokastik Kısıtlı Modelde Mixed Regresyon 109
6.2. Regresyonun Bayesyen Analizi.....113
6.3. Bazı Ön Dağılım Çeşitleri 116
6.3.1. Eşlenik Ön Dağılım 117
6.3.2. Belirsiz Ön Dağılım.....121
6.4. Bayesyen Regresyon Tahmin Edici 122
6.5. Lindley'in Bayesyen Regresyon Modeli 124
6.6. Stokastik Düzgün Önbilgi Altında Shiller Tahmin Edici.....128
6.7. Stokastik Düzgün Ön Bilginin Bayesyen Yorumu 129
6.8. Bayesyen Liu Tipi Tahmin Ediciler 132
6.9. Sayısal Örnek 135
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 143
KAYNAKLAR 145
ÖZGEÇMİŞ 151

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 3.1. Seçilen polinom derecelerine göre test istatistiği değerleri 59
Çizelge 4.1. EKK, Almon ve Almon-TB tahmin edicilerinin katsayı tahminleri 73
Çizelge 4.2. Almon-ridge tahmin edici ile elde edilen çeşitli k değerleri için katsayı tahminleri.....73
Çizelge 4.3. Çeşitli k değerleri için Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin edici ile elde edilen katsayı tahminleri.....74
Çizelge 4.4. Çeşitli k değerleri için Almon-modified ridge tahmin edici ile elde edilen katsayı tahminleri 74
Çizelge 4.5. $0<d<1$ için Almon-Liu tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri 75
Çizelge 4.6. $0<d<1$ için Almon-$(r-d)$ sınıf tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri 76
Çizelge 4.7. $0<d<1$ için Almon-modified Liu tahmin tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri.....76
Çizelge 4.8. Monte Carlo denemelerinde kullanılan gerçek regresyon katsayıları. 80
Çizelge 4.9. Deney I için elde edilen RMSE değerleri. 81
Çizelge 4.10. Deney II için elde edilen RMSE değerleri 82
Çizelge 4.11. Deney III için elde edilen RMSE değerleri.....83
Çizelge 4.12. Deney I için elde edilen PMSE değerleri.....85
Çizelge 4.13. Deney II için elde edilen PMSE değerleri 86
Çizelge 4.14. Deney III için elde edilen PMSE değerleri 87
Çizelge 5.1. Almon, Almon-ridge ve Almon-modified ridge tahmin edicilerinin tahmin edilen SMSE değerleri.....102
Çizelge 5.2. Almon, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin tahmin edilen SMSE değerleri 103
Çizelge 5.3. Almon-modified ridge, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin SMSE değerlerinin karşılaştırılması.....104

Çizelge 6.1. Liu tipi Shiller tahmin edicisi ($\hat{b}_{LT}(SH)$) kullanılarak elde edilen katsayıların tahminleri.....137
Çizelge 6.2. Liu tipi Lindley tahmin edicisi ($\hat{b}_{LT}(L)$) kullanılarak elde edilen katsayıların tahminleri..... 138
Çizelge 6.3. EKK, Almon**,** ridge tipi Shiller ve Liu tipi Shiller tahmin edicilerinin karşılaştırılması.....139
Çizelge 6.4. EKK, Almon**,** ridge tipi Lindley ve Liu tipi Lindley tahmin edicilerinin karşılaştırılması.....140

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 3.1. Koyck şeması 42
Şekil 3.2. Almon polinom gecikme şeması 49
Şekil 4.1. Monte Carlo denemelerinde kullanılan gerçek regresyon katsayılarının dağılımlarının şekilleri 80
Şekil 5.1. k değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_k)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(k))$ grafikleri 102
Şekil 5.2. d değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_d)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(d))$ grafikleri 103
Şekil 5.3. k-d değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_m(k))$, $SMSE(\hat{g}_d)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(d))$ grafikleri 104
Şekil 6.1. EKK, Almon, ridge tipi Shiller ve Liu tipi Shiller tahmin edicileri kullanılarak elde edilen gecikme yapıları 139
Şekil 6.2. EKK, Almon, ridge tipi Lindley ve Liu tipi Lindley tahmin edicileri kullanılarak elde edilen gecikme yapıları 140

SİMGELER VE KISALTMALAR

EKK : En küçük kareler

BLUE : En iyi doğrusal yansız tahmin edici (Best Linear Unbiased Estimator)

MSE : Hata kareler ortalaması (Mean Squared Error)

SMSE : Skaler hata kareler ortalaması (Scalar Mean Squared Error)

VIF : Varyans şişirme faktörü (Variance Inflation Factor)

KEKK : Kısıtlı en küçük kareler

GEKK : Genelleştirilmiş en küçük kareler

MR : Modified ridge

TB : Temel bileşenler

AIC : Akaike bilgi kriteri (Akaike Information Criteria)

SIC : Schwarz bilgi kriteri (Schwarz Information Criteria)

$\overline{R}^2$: Düzeltilmiş belirleyicilik katsayısı

pd : Pozitif tanımlı

nnd : Negatif olmayan tanımlı

$E(\tilde{b})$: $\tilde{b}$ 'nın beklenen değeri

$Var(\tilde{b})$: $\tilde{b}$ 'nın varyans-kovaryans matrisi

$Bias(\tilde{b})$: $\tilde{b}$ 'nın yanlılığı

$S(\tilde{b})$: $\tilde{b}$ 'nın hata kareler toplamı

$L(\tilde{b})$: $\tilde{b}$ 'nın benzerlik (likelihood) fonksiyonu

Tahmin ediciler için kullanılan simgeler:

$\hat{b}$: En küçük kareler tahmin edici

$\hat{b}_R$: Kısıtlı en küçük kareler tahmin edici

$\hat{b}_k$: Ridge tahmin edici

$\hat{b}_m(k)$: Modified ridge tahmin edici

$\hat{b}_R(k)$: Kısıtlı ridge tahmin edici

$\hat{b}_{TB}$: Temel bileşenler tahmin edici

$\hat{b}_r(k)$: *r-k* sınıf tahmin edici

$\hat{b}_d$: Liu tahmin edici

$\hat{b}_m(d)$: Modified Liu tahmin edici

$\hat{b}_r(d)$: *r-d* sınıf tahmin edici

$\hat{b}_M$: Mixed tahmin edici

$\hat{b}_B$: Bayes tahmin edici

$\hat{b}_{SH}$: Shiller tahmin edici

$\hat{b}_L$: Lindley tahmin edici

$\hat{b}_{LT}$: Liu tipi Bayesyen tahmin edici

$\hat{b}_{LT}(SH)$: Liu tipi Shiller tahmin edici

$\hat{b}_{LT}(L)$: Liu tipi Lindley tahmin edici

$\hat{a}_A$: Almon tahmin edici

$\hat{a}_k$: Almon-ridge tahmin edici

$\hat{a}_m(k)$: Almon-modified ridge tahmin edici

$\hat{a}_d$: Almon-Liu tahmin edici

$\hat{a}_{TB}$: Almon-temel bileşenler tahmin edici

$\hat{a}_r(k)$: Almon-(*r-k*) sınıf tahmin edici

$\hat{a}_r(d)$: Almon-(*r-d*) sınıf tahmin edici

$\hat{a}_m(d)$: Almon-modified Liu tahmin edici

1. GİRİŞ

Ekonometrik modellerde yer alan geçmiş dönem değerlerini ifade eden değişkenlere gecikmeli değişken denir. Gecikmeli değişkenlerin yer aldığı, bu nedenle geçmiş dönemlerin etkilerini de içeren modellere ise dinamik modeller adı verilir. Dinamik modellerden bağımlı değişkenin sadece gecikmeli bağımsız değişkenler tarafından etkilendiği modeller gecikmesi dağıtılmış modeller olarak adlandırılır.

Gecikmesi dağıtılmış modellerin tahmininde en küçük kareler (EKK) yöntemi kullanılabilir. Ancak bu modellerde aynı değişkenin gecikmeli ve gecikmesiz değerleri bulunduğundan bağımsız değişkenler arasında yüksek ilişki ortaya çıkmaktadır. Bu durumda bağımsız değişkenler arasında bağımsızlık varsayımı geçerli olmayabilir ve bu da çoklu iç ilişki problemine neden olur. Dolayısıyla EKK yöntemini kullanarak parametrelerin doğru tahminleri elde edilemez.

Gecikmesi dağıtılmış modellerin EKK yöntemiyle tahmininde karşılaşılan sorunlar nedeniyle farklı varsayımlara dayanan modeller ortaya konmuştur. Koyck (1954), gecikmesi dağıtılmış modellerin tahmini için b 'ların zamana bağlı bir şekilde geometrik olarak azaldığını varsayan bir yöntem önermiştir. Nerlove (1956) y bağımlı değişkeninin gözlenen değeri y_t yerine, bu değişkenin istenen değeri y_t^*'ın kullanıldığı Kısmi Uyarlama veya Stok Uyarlama olarak adlandırdığı modeli önermiştir. Cagan ve Friedman (1956), Koyck modelindeki bazı eksiklikleri gidermek amacıyla bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişkenin beklenen değerine bağlı olduğu fikrine dayanan Uyarlamalı Beklenti Modelleri adı verilen yöntemi önermiştir. Ancak önerilen bu yöntemler varsayımları nedeniyle oldukça sınırlayıcı olmuştur. Almon (1965), matematikte Weierstrass teoreminden yararlanarak model parametrelerinin uygun dereceden bir polinom ile yaklaşık olarak bulunabileceğini varsaymıştır. Bu yöntem gecikmesi dağıtılmış modellerin tahmininde sıklıkla kullanılmıştır.

Yurdakul (1998), bir tarım ürünü olan pamuk üretimi ve pamuk fiyatının gecikmeli değerlerinin Koyck ve Almon modellerinin hangisi ile daha iyi

açıklanabileceğini incelemiş ve Almon modelinin daha iyi açıklayabildiğini ortaya koymuştur.

Almon modeli çeşitli gecikme yapılarını içerecek esnek bir yöntem sunmuş olsa da, modelde çoklu iç ilişki problemi ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu çalışmada Almon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için çeşitli tahmin yöntemleri ele alınmıştır. Bunun için çalışmanın ikinci bölümünde klasik çoklu regresyon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki problemini gideren tahmin ediciler incelenmiştir. Bunlardan ilki regresyon modeli üzerine bazı lineer kısıtlamaları uygulayarak elde edilen kısıtlı EKK (KEKK) tahmin edicidir. Literatürde sıklıkla yer alan bir diğer yöntem ise Hoerl ve Kennard (1970) tarafından tanımlanan ridge tahmin edicidir. Burada b 'nın yansızlık özelliğinden vazgeçerek ridge regresyon yöntemini kullanılarak b 'nın yanlı tahmin edicisi elde edilmiştir. Swindel (1976), ridge tahmin edici ile ön bilgiyi bir araya getirerek modified ridge (MR) tahmin ediciyi tanımlamıştır. Sarkar (1992) ridge regresyon düşüncesi ile, KEKK düşüncesinin birleştirilmesiyle kısıtlı ridge tahmin ediciyi tanımlamıştır. Temel bileşenler (TB) tahmin edici çoklu iç ilişkiyi gidermek için kullanılan diğer bir yanlı tahmin edicidir. İlk olarak Hotelling (1933) tarafından ele alınan temel bileşenler regresyonu, modeldeki temel bileşenlerin tamamından daha az sayıdaki temel bileşenleri kullanarak çoklu iç ilişkiyi gidermeye çalışır. Baye ve Parker (1984) çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerini birleştirerek $r-k$ sınıf tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Bu tahmin edici bazı özel durumlarda EKK, ridge ve TB tahmin edicilerinin genel bir halidir. Çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için önerilen en önemli yöntemlerden biri de Liu tahmin edicidir. Liu (1993), ridge tahmin edici ve Stein (1956) tahmin edicinin avantajlarını birleştirerek yeni bir tahmin edici tanımlamıştır. Bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Gruber (1998) tarafından Liu tahmin edici olarak adlandırılmıştır. Li ve Yang (2012) ise Liu tahmin ediciyi bir adım öteye taşıyarak b üzerindeki önbilgiyi Liu tahmin edicisi ile birleştirip modified Liu tahmin edicisini tanımlamışlardır. Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001) Liu ve TB tahmin edicilerin avantajlarını birleştiren $r-d$ sınıf tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Bu tahmin edici özel durumlarda EKK, TB ve Liu tahmin edicilerini verir.

Maddala (1974) tarafından ise gecikmesi dağıtılmış modellerde ridge tipi tahmin edicilerin performansları incelenmiştir. Buradan hareketle bu tez çalışmasında Almon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelebilmek için ikinci bölümde ele alınan yanlı tahmin edicilerin Almon tahmin edici ile kombinasyonları tanımlanmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları sayısal bir örnek üzerinde incelenmiştir. Buradan gecikmesi dağıtılmış modeller için özellikle Almon-ridge, Almon-modified ridge, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür ve dördüncü bölümde bu alternatif tahmin ediciler hata kareler ortalama matris (MSE) kriterine göre karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu tahmin ediciler skaler hata kareler ortalaması (SMSE) kriterine göre Almon (1965) veri seti kullanılarak değerlendirilmiştir.

Shiller (1973), gecikmesi dağıtılmış modellerde alternatif bir yaklaşım olarak b 'ları yeniden parametrelendirmek yerine stokastik düzgün önbilgi (önsel) kullanımını önermiştir. Bu yöntemi en etkili ve en anlamlı şekilde uygulamanın yolu ise Bayesyen yaklaşımı kullanmaktır. Lindley ve Smith (1972) ise Almon polinomunu sıfırıncı derece olarak ifade eden bir ön bilgi kullanmayı önermişlerdir. Bu yaklaşımlardan yola çıkarak altıncı bölümde Bayesyen yaklaşımlar üzerinde durulmuştur. Ayrıca altıncı bölümde Shiller ve Lindley tahmin edicilerinin aslında birer ridge tipi tahmin ediciler olduğu gösterilmiştir. Ardından Bayesyen Liu tipi tahmin ediciler incelenmiştir ve gecikmesi dağıtılmış modellerde stokastik kısıt altında Lindley ve Shiller tahmin edicilerinin EKK tahmin edicisi ile konveks kombinasyonları tanımlanmıştır. Önerilen yeni tahmin edicilerin performansları Almon (1965) verisi ile incelenmiştir.

2. LİNEER REGRESYON MODELİ VE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

2.1. Genel Lineer Model

y, *p* bağımsız değişken $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_p$ tarafından bir *f* fonksiyonu ile açıklanabilen bağımlı değişkeni göstersin. *y* ile $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_p$ arasındaki ilişki hakkında kesin bir bilgiye sahip olunmadığında aradaki ilişkiyi ortaya çıkarmak için

$$y = f\left(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_p\right) + u \tag{2.1.}$$

şeklinde regresyon modeli kullanılmaktadır. *f* fonksiyonu lineer olduğunda (2.1) eşitliği,

$$y_t = b_1 x_{1t} + b_2 x_{2t} + \mathbf{K} + b_p x_{pt} + u_t \qquad t = 1,2.\mathbf{K}, T \tag{2.2.}$$

formundadır ve (2.2) eşitliği lineer regresyon modeli olarak adlandırılmaktadır. Burada $b_1, b_2, \mathbf{K}, b_p$ bilinmeyen regresyon katsayıları, y_t bağımlı değişken vektörü, x_{it} her biri gözlemleri içeren *p* bağımsız değişken vektörü ve u_t bilinmeyen hataların vektörüdür. (2.2) eşitliği çoklu lineer regresyon modeli olup matris formunda

$$y = Xb + u \tag{2.3.}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Ayrıca, *T*; gözlem sayısı, *p*; bağımsız değişken sayısı olmak üzere *y*, $T \times 1$ tipinde bağımlı değişkene ait gözlem vektörü X, $T \times p$ tipinde tam sütun ranklı p tane bağımsız değişkenin gözlem matrisi, b, $p \times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon katsayılarının vektörü ve u, $T \times 1$ tipinde hata vektörüdür. Çoklu lineer regresyonda temel amaç *T* gözlemi kullanarak *b* 'nın elemanlarını tahmin etmektir. Ayrıca regresyon modelleri, verinin tanımlanması, parametre

tahmini, ön tahmin ve kontrol amaçlı da kullanılabilir. (2.3) modelinin temel varsayımlarını şöyle sıralayabiliriz:

Varsayım 1: X matrisi stokastik olmayan bir matristir. $X'X$ matrisi ise singüler olmayan bir matristir ve $rank(X'X) = p$ olmalıdır.

Varsayım 2: X matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsızdır $(rank(X) = p)$.Yani bağımsız değişkenler arasında doğrusal veya doğrusala yakın bir ilişki yoktur. Bu varsayımın sağlanmaması durumunda $X'X$ matrisinin tersi alınamayacağından, parametre tahminleri yapılamaz. Ancak tersinin alınabilindiği durumlarda ise parametre tahminleri tutarsız ve tahminlerin varyansları büyük olacaktır.

Varsayım 3: $T \geq p$ 'dir. X matrisinin tam sütun ranklı olabilmesi için gözlem sayısı, modeldeki bağımsız değişken sayısından fazla olmalıdır.

Varsayım 4: $E(u) = 0$ 'dır. Yani hata teriminin ortalaması sıfıra eşittir. Bu varsayım sağlanmadığı durumlarda, parametre tahminleri gerçek değerlerinden daha büyük veya küçük değerler alırlar. Bu durumda yanlı parametre tahminleri elde edilir (Graybil, 1961).

Varsayım 5: $Var(u) = s_u^2 I$ olmalıdır. Bu varsayıma göre hata teriminin varyansı bağımsız değişkendeki değişmelere bağlı olarak değişmeyip aynı kalır, yani hatalar sabit varyanslıdır (Myers, 1990). Ayrıca $Cov(u_i, u_j) = 0 \quad i, j = 1,2,\mathbf{K},T$ 'dir. Yani hatalar birbirleriyle ilişkisizdir. Bu varsayım sağlanmadığı durumda ise hata terimleri arasında otokorelasyon vardır. Bunun sonucunda ise parametre tahminleri yansız olmakla birlikte etkin olmayacak, hata teriminin varyansı olduğundan daha küçük tahmin edilecektir.

2.2. En Küçük Kareler (EKK) Tahmin Edici ve Alternatif Tahmin Edicilerin Gerekliliği

EKK yöntemi, klasik çoklu doğrusal regresyon modelinde parametreleri tahmin edebilmek için sıklıkla kullanılmaktadır. Önceki bölümde verilen varsayımlar altında (2.3) modelindeki hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde parametre tahminleri bulunur. Bunun için,

$$S(b)=\sum_{t=1}^{T}u_t^2=u'u=(y-Xb)'(y-Xb) \tag{2.4.}$$

$$=y'y-2b'X'y+b'X'Xb \tag{2.5.}$$

fonksiyonun b 'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Buradan,

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b}=X'Xb-X'y=0 \tag{2.6.}$$

bulunur. Böylece en küçük kareler normal denklemleri,

$$X'Xb=X'y \tag{2.7.}$$

olur. X tam sütun ranklı olduğunda (2.7)'nin çözümünden b 'nın EKK tahmin edicisi,

$$\hat{b}=(X'X)^{-1}X'y \tag{2.8.}$$

olarak elde edilir. Ancak X tam ranklı değilse,

$$\hat{b}=GX'y \tag{2.9.}$$

olacak şekilde bir G matrisi bulunabilir. Bu G matrisi tek değildir ve $X'X$ matrisinin genelleştirilmiş tersine eşittir. b , $\hat{b}$ ile tahmin edildiğinde, hata vektörü u için,

$$\hat{u}=y-X\hat{b} \tag{2.10.}$$

şeklinde tahmin edicisi elde edilir. Ayrıca tahmin edilen hata kareler toplamı T-p ile bölündüğünde,

$$\hat{s}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-p} \tag{2.11.}$$

formunda s_u^2 'nun yansız ve tutarlı bir tahmini elde edilir. $\hat{b}$ 'nın örneklem özellikleri ise,

$$E(\hat{b}) = E\left[(X'X)^{-1}X'y\right] = (X'X)^{-1}X'E(y) = b \tag{2.12.}$$

ve varyans-kovaryans matrisi,

$$Var(\hat{b}) = E\left[(\hat{b}-b)(\hat{b}-b)'\right] = (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$
$$= s_u^2(X'X)^{-1} \tag{2.13.}$$

şeklindedir. b 'nın EKK tahmin edicisi $\hat{b}$, en iyi lineer yansız tahmin edici (BLUE) özelliğine sahiptir.

Önceki bölümde verilen lineer model ile ilgili varsayımların sağlanmaması durumunda EKK yöntemiyle tahmin edilen parametreler güvenilir olmayabilir. Bunun yanı sıra X matrisindeki bazı bağımsız değişkenler arasında lineer bağımlılık meydana gelebilir. Bu durumda bağımsız değişkenler arasında bağımsızlık varsayımı geçerli olmayabilir ve bu da çoklu iç ilişki problemine neden olur. Çoklu iç ilişki olan bir veride, parametrelerin EKK tahminlerinin mutlak değerce büyük olduğu bilinmektedir (Montgomery ve Peck, 1992). Yani $\hat{b}$, vektörü genellikle b vektöründen büyüktür. Bu da EKK yönteminin regresyon katsayılarının mutlak değerce büyük tahminlerini ürettiği anlamına gelmektedir. Ayrıca çoklu iç ilişkinin olduğu veride EKK tahmin yöntemi kullanıldığında büyük örneklem varyansları ortaya çıkmaktadır. Bunun sonucunda parametreler hakkındaki güven aralıkları geniş olur, anlamlı regresyon katsayıları modelden çıkarılabilir ve nokta tahminler iyi sonuçlar vermezler. Regresyon çözümlemesinde EKK yöntemi kullanıldığında karşılaşılan bu gibi nedenlerden dolayı farklı yöntemlere ihtiyaç vardır.

Regresyonda karşılaşılan çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için sıklıkla başvurulan yöntem yanlı tahmin edicileri kullanmaktır. Bunun için kullanılacak tahmin edicinin yansız olması özelliğinden vazgeçilerek daha küçük varyansa sahip yanlı tahmin ediciler tercih edilmektedir. Bu bölümde EKK tahmin edicisine alternatif bazı yanlı tahmin ediciler incelenecektir.

Literatürde birçok tahmin edici olması nedeniyle tahmin edicilerin seçimi ile karşı karşıya kalınabilir. Bunun için Gauss (1809)'da tahmin edicilerin seçimi için en uygun kriteri MSE olarak önermiştir. b 'nın herhangi bir $\tilde{b}$ tahmin edicisinin MSE matrisi,

$$MSE(\tilde{b}, b) = E\left((\tilde{b} - b)(\tilde{b} - b)' \right)$$

olarak tanımlanmıştır. $\tilde{b}$ 'nın varyans-kovaryans matrisi $Var(\tilde{b})$, b ile $E(\tilde{b})$ arasındaki fark $Bias(\tilde{b})$ olmak üzere MSE matrisi,

$$MSE(\tilde{b}, b) = Var(\tilde{b}) + Bias(\tilde{b})Bias(\tilde{b})'$$

formundadır. $\tilde{b}$ 'nın hata kareler ortalama matrisinin izi olarak tanımlanan SMSE ise,

$$\begin{aligned} SMSE(\tilde{b}, b) &= E\left((\tilde{b} - b)'(\tilde{b} - b) \right) \\ &= trVar(\tilde{b}) + Bias(\tilde{b})' Bias(\tilde{b}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. $SMSE(\tilde{b}, b)$ 'nın temel kriter olarak alınması $MSE(\tilde{b}, b)$'nın köşegen dışı elemanlarını gözardı etmemize neden olur. Bu nedenle MSE daha iyi bir karşılaştırma kriteridir. Ancak bazı uygulamalarda SMSE kriterini hesaplamak daha elverişli olabilir.

2.3. Çoklu İç İlişkinin Varlığı

Çoklu lineer regresyon modelinde uygulamalarda sıklıkla bağımsız değişkenler ($x_1, x_2, \mathbf{K}, x_p$) arasında ilişki olması durumuyla karşı karşıya kalınmaktadır. Bu durumda lineer regresyon modelindeki bağımsız değişkenler arasındaki bağımsızlık varsayımı geçerli olmayabilir ve çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkar. X_j , X matrisinin *j-inci* sütun vektörü $\left(X = \left[X_1, X_2, \mathbf{K}, X_p\right]\right)$ olsun.

$$\sum_{j=1}^{p} t_j X_j = 0 \qquad (2.14.)$$

olacak şekilde hepsi sıfır olmayan, $t_1, t_2, \mathbf{K}, t_p$ sabitleri varsa $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_p$ vektörleri lineer bağımlıdır. Eğer bağımsız değişkenler arasında lineer ilişki yoksa, bağımsız değişkenler ortogonaldir denir. *X*'in sütunlarının bir kümesi için (2.14) sağlanıyorsa "tam çoklu içi ilişki" vardır (Silvey, 1969). Bu durumda *X* matrisinin rankı *p*'den küçük olur ve $X'X$ matrisinin tersi bulunamayacaktır. Buna kötü koşulluluk problemi denir. Ancak (2.14), *X*'in sütunlarının bazı alt kümeleri için yaklaşık olarak doğru ise "yaklaşık çoklu iç ilişki" vardır. Ayrıca $\det(X'X)$ değeri sıfıra yakın ise modelde "zayıf çoklu iç ilişki" ortaya çıkmaktadır. Çoklu iç ilişkinin dört temel nedeni vardır (Montgomery ve Peck, 1992). Bunlar şöyle özetlenebilir:

- **Uygulanan veri toplama metodu** : Araştırmacının (2.14) ile tanımlı bir bölgenin alt uzayından örneklem alması çoklu iç ilişki problemine neden olur.
- **Modeldeki veya kitledeki zorunluluklar** : Kitledeki zorunluluklar daha çok bağımsız değişkenlerin kimyasal veriler ya da üretim süreçleri olduğu durumlarda ortaya çıkar. Örneğin; bir kimyasal reaksiyonun gerçekleşmesi için belli içeriklerin sabit oranda olması gibi.
- **Modelin belirlenmesi** : $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_p$ değişkenlerinin değişim aralığı küçük iken bir regresyon modeline polinom teriminin eklenmesi çoklu iç ilişkiye neden olur.

• **Modelin aşırı tanımlanması** : Gözlemlerden çok bağımsız değişkenlerin olduğu modellere aşırı tanımlı modeller denir. Daha çok tıbbi araştırmalarda ve ekonometrik modellerde ortaya çıkar. Bu gibi durumlarda bağımsız değişkenlerin bazıları modelden çıkarılabilir.

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesi için çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları ele alınacaktır.

• **Korelasyon matrisinin incelenmesi** : $X'X$ matrisinin herbir köşegen dışı elemanı r_{ij} olarak ifade edilsin. r_{ij} 'lerin incelenmesi çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde en kolay yöntemlerden biridir. x_i ve x_j bağımsız değişkeleri lineer bağımlı ise $|r_{ij}|$ bire yakın olur. Ancak r_{ij} 'lerin incelenmesi sadece ikili bağımsız değişkenler arasında lineer bağımlılığı incelemede yararlı olur. İkiden fazla bağımsız değişken arasında lineer bağımlılık varsa r_{ij} 'ler uygun ölçü olmayabilir.

• **Varyans şişirme faktörü (VIF)** : $(X'X)^{-1}$ matrisinin *j-inci* köşegen elemanına *j-inci* varyans şişirme faktörü (VIF_j) denir. R_j^2, x_j 'nin diğer *p*-1 bağımsız değişken üzerine olan regresyon modelinden çoklu belirleyicilik katsayısı olmak üzere $VIF_j = (1 - R_j^2)^{-1}$ olarak ifade edilir. x_i diğer bağımsız değişkenlerin bir alt kümesi ile yaklaşık olarak bağımlı ise R_j^2 1'e yaklaşır ve VIF_j büyür. Herhangi bir VIF değeri 10'dan büyükse çoklu iç ilişki vardır.

• $X'X$ **matrisinin özdeğerlerinin analizi** : $X'X$ matrisinin özdeğerleri olan $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p$ 'den bir veya daha fazla özdeğeri küçük olması veride çoklu iç ilişkinin varlığını göstermektedir. $l_{\min}$ ve $l_{\max}$, $X'X$ matrisinin minimum ve maksimum özdeğerleri olmak üzere, $K = \frac{l_{\max}}{l_{\min}}$ olarak tanımlanan koşul sayısı çoklu iç ilişkiyi belirlemek için kullanılmaktadır. $K < 100$ ise veride çoklu iç ilişki yoktur. $100 < K < 1000$ ise orta şiddetli çoklu iç ilişki vardır ve $K > 1000$ ise şiddetli çoklu iç ilişki vardır.

• **Tekil değer ayrışımı** : Belsley, Kuh ve Welsh (1980), çoklu iç ilişkiyi belirlemek için tekil değer ayrışımından yararlanmışlardır. Bunun için $n \times p$

tipindeki X matrisinin $X = UDT'$ şeklinde parçalandığı varsayılmıştır. Burada U: $n \times p$, T: $p \times p$ ve $U'U = I$ ve D: $p \times p$ tipinde köşegen elemanları negatif olmayan m_j, $j = 1,2,\mathbf{K},p$ olan köşegen matristir. m_j 'lere X'in tekil değerleri denir ve $X = UDT'$ formu da X'in tekil değer ayrışımı olarak adlandırılmaktadır.

$$\begin{aligned} X'X &= (UDT')'(UDT') \\ &= TDU'UDT' \\ &= TD^2T' \\ &= T\Lambda T' \end{aligned}$$

olduğundan tekil değer ayrışımı özdeğer ve özvektör fikri ile ilişkilidir. X' in tekil değerlerinin kareleri $X'X$ 'in özdeğerleridir. T ise $X'X$ 'in özvektörlerinin matrisi ve U, kolonları $X'X$ matrisinin sıfırdan farklı p özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin olduğu matristir. X'deki kötü koşulluluk tekil değerlerin büyüklüğünde ortaya çıkmaktadır. Her lineer bağımlılık için bir tane küçük tekil değer olacaktır. Kötü koşulluluğun derecesi küçük tekil değerin en büyük tekil değer ile nasıl ilişkili olduğuna bağlıdır. Belsley, Kuh ve Welch (1980), X matrisinin koşul indekslerini,

$$h_j = \frac{m_{\max}}{m_{\min}} \qquad j = 1,2,\mathbf{K},p$$

olarak tanımlamışlardır. h_j 'nin en büyük değeri X'in koşul indeksine eşittir ve bu değer 30'dan büyük olduğunda veride çoklu iç ilişki vardır. Tekil değer ayrışımının avantajı özdeğer analizine göre nümerik olarak daha dayanıklı olmasıdır.

2.4. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici

Bazı durumlarda (2.3) ile verilen klasik lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametre vektörü b hakkında yardımcı bilgiler mevcuttur. Bu yardımcı bilgiler,

$$Rb = r \tag{2.15.}$$

şeklinde lineer denklem formunda yazılabiliyor olsun. Burada R, $m \times p$ tipinde $rank(R) = m$ olan bir matris ve r, $m \times 1$ tipinde bir vektördür. (2.15)'de tanımlanan m lineer kısıt birbirinden bağımsızdır.

Örneklem bilgisi ve yardımcı bilgilerin eş anlı olarak kullanılabilmesi için hata kareler toplamı $S(b)$, $Rb = r$ kısıtı altında minimum yapılmalıdır. Bunun için, Lagrange fonksiyonu,

$$S(b, l) = (y - Xb)'(y - Xb) - 2l'(Rb - r)$$

formundadır. Burada l, $m \times 1$ tipinde bir vektör olan Lagrange çarpanıdır. $S(b, l)$ fonksiyonunun b ve l 'ya göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial S(b, l)}{\partial b} &= -X'y + X'Xb - R'l = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S(b, l)}{\partial l} &= Rb - r = 0 \end{aligned} \tag{2.16.}$$

normal denklemleri elde edilir. (2.16) ile verilen normal denklemlerin çözümünden b 'nın kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (KEKK),

$$\hat{b}_R = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}R'l \tag{2.17.}$$

olarak elde edilir. Öte yandan (2.15) kısıtının

$$R\hat{b}_R = r = R\hat{b} + R(X'X)^{-1}R'l \tag{2.18.}$$

olduğu görülmektedir. $R(X'X)^{-1}R' > 0$ olmasından dolayı, l 'nın en uygun tahmini,

$$\hat{l} = \left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \tag{2.19.}$$

bulunur. $\hat{l}$, (2.17)'de yerine konduğunda, $S = X'X$ olmak üzere,

$$\hat{b}_R = \hat{b} + S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \tag{2.20.}$$

formu elde edilir. (2.20)'den görüldüğü üzere KEKK tahmin edicisi, EKK tahmin edicisi ile (2.15) kısıtlamasını tam olarak sağlayacak şekilde bir düzeltme teriminin toplamı olacak şekilde yazılmaktadır. Yani,

$$\begin{aligned} R\hat{b}_R &= R\hat{b} + \left[RS^{-1}R'\right]\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \\ &= r \end{aligned} \tag{2.21.}$$

olur. $Rb = r$ kısıtı doğru iken, $\hat{b}_R$ yansızdır, aksi halde yanlıdır:

$$E\left(\hat{b}_R\right) = b + S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}(r - Rb)$$

$\hat{b}_R$ 'nin varyans-kovaryans matrisi ise,

$$Var\left(\hat{b}_R\right) = s_u^2 S^{-1} - s_u^2 S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}RS^{-1}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $\hat{b}_R$ 'nin kovaryans matrisi R'ye bağlıdır. Bu da $\hat{b}_R$ 'nin varyansının, $\hat{b}$ 'nın varyansı ile karşılaştırıldığında her zaman daha küçük olacağını göstermektedir. Yani,

$$Var(\hat{b}) - Var(\hat{b}_R) = s_u^2 S^{-1} R' \left[RS^{-1} R' \right]^{-1} RS^{-1} \geq 0 \qquad (2.22.)$$

olmaktadır. Burada (2.22) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade negatif olmayan tanımlı (nnd) bir matristir. Dolayısıyla regresyon modeli üzerine lineer kısıtlamaları uygulamak etkili olmuştur.

2.5. Ridge Tahmin Edici

EKK metodu ortogonal olmayan veriye uygulandığında regresyon katsayılarının kötü tahminleri elde edilir. Regresyon katsayılarının EKK tahminlerinin varyansı büyük olacak ve boyu gerçek değerinden uzaklaşacaktır. EKK tahmin edici b 'nın yansız bir tahmin edicisidir. Gauss- Markov teoremi gereğince tüm lineer yansız tahmin ediciler sınıfı içinde minimum varyansa sahiptir. Ancak bu varyans her zaman küçük olmayabilir. Bu varyans büyümesinin üstesinden gelebilmek için Hoerl ve Kennard (1970) tarafından b 'nın yansızlık özelliğinden vazgeçerek b 'nın yanlı tahmin edicisi ridge regresyon yöntemini kullanılarak elde edilmiştir. Bunun için, $\tilde{b}$, bilinmeyen bir b 'nın herhangi bir tahmin edicisi olmak üzere hata kareler ortalamasının $S(\tilde{b}) = (y - X\tilde{b})'(y - X\tilde{b})$ formu,

$$\begin{aligned} S(\tilde{b}) &= (y - X\hat{b})'(y - X\hat{b}) + (\hat{b} - \tilde{b})' X'X(\hat{b} - \tilde{b}) \\ &= S_{\min} + f(\tilde{b}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(\hat{b} - \tilde{b})' X'X(\hat{b} - \tilde{b})$, $\hat{b}$ yerine $\tilde{b}$ kullanılmasından dolayı kaynaklanan yanlılığın karesidir. $X'X$ kötü koşullu iken $\hat{b}$ ile b arasındaki

uzaklık artmaktadır. Bu nedenle $\tilde{b}$ tahmin edicisinin uzaklığının karesini minimum yapmak isteriz. Minimumlaştırma ise hata kareler toplamının verilen belli bir seviyesi için uzaklığın karesini minimum yapma şeklinde olmalıdır (aynı hata kareler toplamına sahip birden fazla tahmin edici olabilir, bunlar arasından en küçük uzaklığı olanı seçilmelidir). $j > 0$ hata kareler toplamı için verilen bir sabit olsun. Bu durumda,

$$S(\tilde{b}) = S_{\min} + j_0$$

koşulunu sağlayan tahmin edicilerin bir $\{\tilde{b}\}$ kümesi vardır. Buradaki amaç bu küme içerisindeki en küçük uzunluklu $\tilde{b}$ tahmini bulmaktır. Bunun için $1/k$ Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$\min_{\tilde{b}}\left\{\tilde{b}'\tilde{b} + (1/k)\left[\left(\hat{b} - \tilde{b}\right)' X'X\left(\hat{b} - \tilde{b}\right) - j_0\right]\right\} \tag{2.23.}$$

ifadesi araştırılır. (2.23)'ün $\tilde{b}$ ve $1/k$'ya göre türevleri,

$$\tilde{b} + \frac{1}{k}(X'X)\left(\tilde{b} - \hat{b}\right) = 0 \tag{2.24.}$$

$$f_0 = \left(\hat{b} - \tilde{b}\right)' X'X\left(\hat{b} - \tilde{b}\right) \tag{2.25.}$$

normal denklemlerini verir. Normal denklemlerin kullanılmasıyla (2.23) ifadesinin çözümü ile Hoerl ve Kennard (1970) tarafından b'nın ridge tahmin edicisi,

$$\hat{b}_k = (X'X + kI)^{-1} X'y \qquad k \geq 0 \tag{2.26.}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada k sabitine daraltma (shrinkage) ya da yanlılık parametresi denir ve k'nın seçimi ridge tahmin edicisinin performansını etkilemektedir. Ridge tahmin edici $k = 0$ iken EKK tahmin edicisini vermektedir. $S_k = X'X + kI$ olmak üzere ridge tahmin edici,

$$\hat{b}_k = S_k^{-1} X'y \tag{2.27.}$$

formunda da yazılabilir. Bu form kullanılarak $\hat{b}_k$ 'nın beklenen değeri,

$$E\left(\hat{b}_k\right) = S_k^{-1} X'Xb = b - kS_k^{-1} b \tag{2.28.}$$

şeklindedir. Bu eşitlikteki $-kS_k^{-1} b$ parçası yanlılığı ifade etmektedir. Yani,

$$Bias\left(\hat{b}_k\right) = -kS_k^{-1} b \tag{2.29.}$$

olur. Varyans-kovaryans matrisi ise,

$$Var\left(\hat{b}_k\right) = s_u^2 S_k^{-1} X'XS_k^{-1} \tag{2.30.}$$

dır. (2.29) ve (2.30)'un kullanılmasıyla ridge tahmin edicinin MSE matrisi,

$$MSE\left(\hat{b}_k\right) = S_k^{-1}\left(s_u^2 X'X + k^2 bb'\right)S_k^{-1} \tag{2.31.}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p$, $(X'X)$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, ridge tahmin edicinin hata kareler ortalama skaleri,

$$SMSE\left(\hat{b}_k\right) = tr\left\{Var\left(\hat{b}_k\right) + \left[Bias\left(\hat{b}_k\right)\right]'\left[Bias\left(\hat{b}_k\right)\right]\right\}$$

$$= s_u^2 tr\left[(X'X+kI)^{-1}X'X(X'X+kI)^{-1}\right] + k^2 b'(X'X+kI)^{-2}b$$

$$= s_u^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{l_j}{(l_j+k)^2} + k^2 b'(X'X+kI)^{-2}b \qquad (2.32.)$$

ya da

$$SMSE(\hat{b}_k) = tr(MSE(\hat{b}_k)) = \sum_{j=1}^{p} \frac{s_u^2 l_j + k^2 b_j^2}{(l_j+k)^2} \qquad (2.33.)$$

şeklinde elde edilir. $k > 0$ olduğundan k arttıkça $\hat{b}_k$'nın yanlılığı da artar. Ancak k arttıkça varyansı azalacaktır. Ridge tahmin edici kullanılırken varyanstaki azalış yanlılığın karesindeki artıştan daha büyük olacak şekilde bir k değeri seçilmelidir. Bu durumda $\hat{b}_k$'nın MSE değeri $\hat{b}$'nın varyansından daha küçük olacaktır.

Hoerl ve Kennard (1970), k'nın uygun bir seçimi için ridge izi (ridge trace) önermişlerdir. Ridge izi, k'nın genellikle [0,1] kapalı aralığındaki değerleri için k'ya karşılık gelen $\hat{b}_k$'nın elemanlarının grafiğidir. k arttıkça tahminler küçülür ve belli bir k değerinden sonra durağan olurlar. $\hat{b}_k$'nın durağan olduğu en küçük k değeri uygun bir değer olarak alınır. Hoerl ve Kennard (1970) $0 \le k \le 1$ aralığını önermişlerdir. Ancak her veri için bu aralık geçerli olmayabilir (Vinod ve Ullah, 1981). Ayrıca Hoerl ve Kennard (1970) farklı birimlerdeki regresyon katsayılarını karşılaştırabilmek amacıyla veriyi standartlaştırdıktan sonra ridge izi grafiklendirmeyi önermişlerdir.

Marquard ve Snee (1975), [0,1] aralığındaki k'nın yaklaşık 25 değerini kullanmayı önermişlerdir. Çoklu iç ilişki şiddetli ise regresyon katsayılarındaki durağanlık ridge izinden görülecektir. k arttıkça bazı ridge tahminleri birbirinden oldukça farklı olacaktır. Bazı k değerlerinde ise $\hat{b}_k$ değerleri durağan olacaktır. Genel olarak $\hat{b}_k$ tahminlerinin durağan olduğu en küçük k değeri belirlenmelidir.

Bu k değerinin EKK'dan daha küçük MSE'ye sahip tahminleri vermesi beklenir. Bunların yanı sıra literatürde var olan k'nın farklı seçim yöntemleri ele alınacaktır.

2.5.1. Yanlılık Parametresi k 'nın Seçimi

Ridge regresyon ile ilgili pek çok tartışmanın nedeni yanlılık parametresi k'nın seçimi ile ilgilidir. k 'nın ridge izi yardımıyla belirlenmesi analizciden analizciye değişebilir. Bu nedenle bazı araştırmacılar k 'nın seçimi için daha analitik yöntemler önermişlerdir. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

1. Hoerl ve ark. (1975) ridge tahmin edicinin hata kareler ortalama değerini minimum yapan

$$\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{b}'\hat{b}}$$

olmasını önermişlerdir. Burada $\hat{s}_u^2$ ve $\hat{b}$, s_u ve b 'nın EKK çözümleridir. Simülasyon çalışması yaparak $\hat{k}_{HKB}$ için ridge tahmin edicinin EKK'dan daha iyi MSE'ye sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, Hoerl ve Kennard (1976), k'nın bu tahminine bağlı olarak iteratif tahmin yöntemi önermişlerdir. b ve k 'nın ardışık tahminleri,

$$\hat{b} \;:\; \hat{k}_0 = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{b}'\hat{b}}$$

$$\hat{b}_{k_0} :\; \hat{k}_1 = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{b}'_{k_0}\hat{b}_{k_0}}$$

$$\hat{b}_{k_1} :\; \hat{k}_2 = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{b}'_{k_1}\hat{b}_{k_1}}$$

şeklindedir. $T = \frac{1}{p} tr\left(X'X\right)^{-1}$ olmak üzere $\frac{\hat{k}_{j+1} - \hat{k}_j}{\hat{k}_j} > 20T^{-1.3}$ ise algoritmaya devam edilir. Aksi halde sonlandırılır ve $\hat{b}_{k_j}$ kullanılır. Sonlandırma kriterinin bu şekilde seçilmesinin nedeni ise $\left(X'X\right)$'in özdeğerlerinin değişkenliği arttıkça T'nin artması ve kötü koşulluluğun artması ile daha fazla büzülmeye neden olmasıdır.

2. Lawless ve Wang (1976), $X'X = I_p$ varsayımı sağlanmadığı durumlarda $Z'Z = I_P$ sağlayacak şekilde, $y = Zv + e$, $Z = X\left(X'X\right)^{-1/2}$, $v = \left(X'X\right)^{1/2} b$ şeklinde modeli yeniden parametrelendirmiştir. Bu modelde Bayesyen yaklaşımla

$$\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{v}'\hat{v}} = \frac{p\hat{s}_u^2}{\hat{b}'X'X\hat{b}}$$

tahminini vermişlerdir. Monte Carlo simülasyon çalışması yaparak $\hat{k}_{LW}$ kullanıldığında ridge tahmin edicinin EKK'dan daha iyi performans sağladığını göstermişlerdir.

3. Lindley ve Smith (1972), Bayesyen yaklaşımıyla,

$$\hat{k}_{LS} = \frac{(n-p)(p+2)}{n+2} \frac{\hat{s}_u^2}{\hat{b}'\hat{b}}$$

yanlılık parametresini kullanarak bir ridge tahmin edici önermişlerdir.

4. McDonald ve Galarneau (1975), $Q = \hat{b}'\hat{b} - \hat{s}_u^2 \sum_{j=1}^{p} l_j^{-1}$ olmak üzere, $Q > 0$ ise $\hat{b}_k'\hat{b}_k = Q$ olacak şekilde bir k değeri seçilebileceğini göstermişlerdir.

5. Theobald (1974) her W için $E\left[\left(\hat{b}_k - b\right)'W\left(\hat{b}_k - b\right)\right]$, $E\left[\left(\hat{b} - b\right)'W\left(\hat{b} - b\right)\right]$'dan daha küçük olacak şekilde k'nın tahminini $\hat{k}_T = \frac{2\hat{s}_u^2}{\hat{b}'\hat{b}}$ olarak vermişlerdir.

2.6. Modified Ridge Tahmin Edici

Swindel (1976), ridge tahmin edici ile ön bilgiyi bir araya getirerek modified ridge (MR) tahmin ediciyi,

$$\hat{b}_m(k) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb_0), \quad k \geq 0 \tag{2.34.}$$

olarak tanımlamıştır. Burada b_0, $p \times 1$ tipinde ve b hakkındaki ön bilgiyi içeren stokastik olmayan bir vektördür. Dolayısıyla b_0, b 'ya dayalı hipotezleri ve ön bilgiyi iyi yansıtacak şekilde seçilmelidir. MR tahmin edici de ridge tahmin ediciye benzer şekilde $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k sabiti eklenerek çoklu iç ilişkinin etkisinin azaltılması amaçlanmıştır. (2.34) ifadesine çeşitli matris işlemleri uygulandıktan sonra MR tahmin edici ile ilgili bazı sonuçlar elde edilebilir. Bunun için,

$$\begin{aligned}
\hat{b}_m(k) &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb_0) \\
&= (X'X + kI)^{-1} X'X (X'X)^{-1}(X'y + kb_0) \\
&= \left(I + k(X'X)^{-1}\right)^{-1}\left(\hat{b} - b_0 + b_0 + k(X'X)^{-1} b_0\right) \\
&= \left(I + k(X'X)^{-1}\right)^{-1}\left(\hat{b} - b_0\right) + b_0
\end{aligned} \tag{2.35.}$$

eşitliğine ulaşılır. MR tahmin edicinin (2.35)'deki gibi ifade edilmesi sonucunda aşağıdaki özellikler görülebilir:

i. $b_0 = \hat{b}$ alınırsa $\hat{b}_m(k) = \hat{b}$ olur. Yani ön bilgi olarak EKK tahmin edici kullanıldığında MR tahmin edici EKK'ya dönüşmüş olur.

ii. $k = 0$ alınırsa $\hat{b}_m(k = 0) = \hat{b}$ elde edilir. Yani, ridge tahmin edicide olduğu gibi, MR tahmin edici de bu durumda EKK tahmin ediciye dönüşür.

iii. $\lim_{k\to\infty} \hat{b}_m(k) = b_0$ olup yeterince büyük k değerleri için MR tahmin edici ön bilgi vektörüne yakınsar.

iv. $b_0 = 0$ alınırsa $\hat{b}_m(k) = \hat{b}_k$ olur. Dolayısıyla herhangi bir ön bilgi olmaması durumunda MR tahmin edici ridge tahmin ediciye dönüşür.

(ii) ve (iii)'deki özelliklere bakıldığında MR tahmin edicinin EKK tahmin ediciyi b_0 vektörüne doğru ötelediği görülmektedir. k'nın değeri küçüldükçe MR tahmin edici EKK tahmin ediciye yaklaşırken, k'nın değeri büyüdükçe bu tahmin edici ön bilgi vektörüne yakınsamaktadır.

$S_k = X'X + kI$ ve $S = X'X$ olmak üzere MR tahmin edicinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E\left(\hat{b}_m(k)\right) &= E\left(S_k^{-1}\left(X'y + kb_0\right)\right) = S_k^{-1}E\left(X'y + kb_0\right) \\ &= S_k^{-1}\left(X'Xb + kb_0\right) \\ &= S_k^{-1}Sb + kS_k^{-1}b_0 \end{aligned} \qquad (2.36.)$$

şeklindedir. $E\left(\hat{b}_m(k)\right) \neq \hat{b}$ olduğundan MR tahmin edicinin yanlı olduğu görülmektedir. Yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias\left(\hat{b}_m(k)\right) &= E\left(\hat{b}_m(k)\right) - b \\ &= S_k^{-1}Sb + kS_k^{-1}b_0 - b \\ &= \left(S_k^{-1}S - I_p\right)b + kS_k^{-1}b_0 \\ &= \left(S_k^{-1}\left(S + kI_p - kI_p\right) - I_p\right)b + kS_k^{-1}b_0 \\ &= \left(S_k^{-1}S_k - kS_k^{-1} - I_p\right)b + kS_k^{-1}b_0 \\ &= -kS_k^{-1}b + kS_k^{-1}b_0 \\ &= -kS_k^{-1}\left(b - b_0\right) \end{aligned} \qquad (2.37.)$$

olarak bulunur. Ön bilgi vektörü bilinmeyen gerçek parametre vektörüne yakınsadıkça MR tahmin edicinin yanlılığı küçülecektir. Özel olarak $b_0 = b$ olduğunda (ön bilgi doğru ise) k'nın değeri ne olursa olsun MR tahmin edicinin yansız olacağı açıktır. MR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ise,

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{b}_m(k)\right) &= Var\left(S_k^{-1}\left(X'y + kb_0\right)\right) \\ &= S_k^{-1} Cov\left(X'y + kb_0\right) S_k^{-1} \\ &= s_u^{\,2} S_k^{-1} S S_k^{-1} \end{aligned} \qquad (2.38.)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ile aynıdır. Ön bilgi vektörü b_0 stokastik olmadığından tahmin edicinin varyansını etkilememektedir. (2.37) ve (2.38)'de verilen sonuçlar kullanılarak MR tahmin edicinin MSE matrisi,

$$\begin{aligned} MSE\left(\hat{b}_m(k)\right) &= Var\left(\hat{b}_m(k)\right) + Bias\left(\hat{b}_m(k)\right) Bias\left(\hat{b}_m(k)\right)' \\ &= s_u^{\,2} S_k^{-1} S S_k^{-1} + k^2 S_k^{-1}\left(b - b_0\right)\left(b - b_0\right)' S_k^{-1} \end{aligned} \qquad (2.39.)$$

şeklinde elde edilir.

Swindel (1976), EKK tahmin edici ile MR tahmin ediciyi hata kareler ortalama matrislerine göre karşılaştırmış ve MR tahmin edicinin daha üstün bir tahmin edici olduğunu göstermiştir. Pliskin (1987) ise aynı k değerini kullanarak MR tahmin edici ile ridge tahmin ediciyi karşılaştırmış ve MR tahmin edicinin ridge tahmin ediciden hata kareler ortalama matrisine göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşulu vermiştir.

2.7. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici

Sarkar (1992) ridge regresyon düşüncesini, KEKK tahmin edicisine taşıyarak kısıtlı ridge tahmin ediciyi

$$\hat{b}^*(k) = \left(I_p + k(X'X)^{-1}\right)^{-1} \hat{b}_R, \qquad k \geq 0, \tag{2.40.}$$

olarak vermiştir. Burada $\hat{b}_R$, (2.17)'de verilen KEKK tahmin edicisi olup, (2.15)'de verilen kısıtlar geçerli olmaktadır. (2.40)'daki $\hat{b}_R$, $\hat{b}^*(k)$ 'yı sıfıra doğru büzmektedir. Yani $\hat{b}^*(0) = \hat{b}_R$ ve $\lim_{k\to\infty} \hat{b}^*(k) = 0$ 'dır. (2.40)'daki S_k matrisi ile varyansta önemli bir azalma olması beklenmektedir. Bu uygulama, b 'nın EKK tahmin edicisine uygulanarak, Hoerl ve Kennard (1970)'in tanımladığı b 'nın ridge tahmin edicisi gibidir. Bu benzerlikten dolayı $\hat{b}^*(k)$, kısıtlı ridge tahmin edici olarak adlandırılır. Ancak burada tüm y değerleri için $\hat{b}^*(k)$, $R\hat{b}^*(k) = r$ kısıtını sağlamamaktadır. Dolayısıyla $\hat{b}^*(k)$, $Rb = r$ kısıtına göre bir kısıtlı ridge tahmin edici değildir (Gross, 2003). Çünkü $\hat{b}^*(k)$, $Rb = r$ eşitliği ile üretilen alt uzayın dışında değerler alabilir. Gross (2003) bu sebeplerden dolayı b için yeni bir ridge tipi tahmin edici tanımlamıştır. Bunun için $Rb = r$ kısıtını sağlayan sıfır vektörü yerine buna en yakın olarak kısıtlamaları sağlayan vektör b_0 olsun. Böyle bir b_0 vektörü Gross (2003)'de $b_0 = R'(RR')^{-1} r$ olarak tanımlamıştır. Bu vektör tahmin ediciye uygulandığında,

$$\hat{b}(k, b_0) = (X'X + kI)^{-1}\left(X'y + kR'(RR')^{-1} r\right), \quad k \geq 0 \tag{2.41.}$$

elde edilir. Bu ifade de (2.34)'de verilen MR tahmin edicide $b_0 = b_0$ alınarak elde edilmiştir. Ancak (2.41)'deki tahmin edicide $Rb = r$ kısıtına karşı kısıtlı bir tahmin edici değildir. Gross (2003) buna ek olarak $S_k = X'X + kI_p$ olmak üzere $Rb = r$ kısıtına karşı

$$\hat{b}_R(k) = \hat{b}(k, b_0) - S_k^{-1} R'\left[RS_k^{-1} R'\right]^{-1}\left(R\hat{b}(k, b_0) - r\right), \quad k \geq 0, \tag{2.42.}$$

şeklinde kısıtlı ridge tahmin ediciyi elde etmiştir. $\underset{k\to\infty}{Lim}\,\hat{b}_R(k)=b_0$ ve $\underset{k\to 0}{Lim}\,\hat{b}_R(k)=\hat{b}_R$ olduğundan k arttıkça $\hat{b}_R(k)$, $\hat{b}_R$'den b_0'a bir eğri çizmektedir. Kaçıranlar ve ark. (2011)'de b_0 ve $\hat{b}(k,b_0)$ eşitliklerini (2.42)'de yerine koyup gerekli işlemleri yaparak $\hat{b}_R(k)$ için yeni ifade olarak,

$$\hat{b}_R(k)=\hat{b}_k-S_k^{-1}R'\left[RS_k^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{b}_k-r\right) \tag{2.43.}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. (2.43)'den görüldüğü üzere kısıtlı ridge tahmin edici KEKK tahmin edicinin ridge tahmin ediciye genelleştirilmiş şeklidir. Gross (2003) kısıtlı ridge tahmin edicinin KEKK tahmin ediciden hata kareler ortalama matrisine göre üstün olması için gerek ve yeter koşulları vermiştir. Ayrıca Gross (2003) tarafından k'nın uygun bir seçimi için bir teorem verilmiştir.

2.8. Temel Bileşenler Tahmin Edici

Temel bileşenler tahmin edici çoklu iç ilişkiyi gidermek için kullanılan yanlı bir tahmin edicidir. İlk olarak Hotelling (1933) tarafından ele alınan temel bileşenler regresyonu, modeldeki temel bileşenlerin tamamından daha az sayıdaki temel bileşenleri kullanarak çoklu iç ilişkiyi gidermeye çalışır.

(2.3) ile verilen lineer regresyon modelini ele alalım. Böyle bir model yeniden parametrelendirme yapılarak ortogonal formda yazılabilir. K matrisi, XK 'nın kolonlarını ortogonal yapacak şekilde tekil olmayan bir matris olsun. Böylece (2.3) ile verilen genel lineer model,

$$y=Xb+u=(XK)(K^{-1}b)+u \tag{2.44.}$$

formunda yazılabilir. K matrisi farklı şekillerde tanımlanabilir. Burada K matrisinin kolonları, $X'X$ matrisinin ortonormal özvektörleri olan T ortagonal matrisi olsun. Bununla birlikte $Z=XT$ ve $a=T'b$ olmak üzere (2.44) modeli,

$$y = Za + u \tag{2.45.}$$

kanonik forma dönüşür. $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p$, $X'X$ matrisinin $p \times p$ boyutlu özdeğerleri olmak üzere,

$$Z'Z = T'X'XT = \Lambda = diag\left(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p\right) \tag{2.46.}$$

eşitliği vardır. Z 'nin kolonları $Z = \left[Z_1, Z_2, \mathbf{K}, Z_p\right]$ olacak şekilde ortogonal bağımsız değişkenlerin temel bileşenleri denilen yeni bir kümesini oluşturur.

$$Z'Z = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Z_i Z_j' = \Lambda \tag{2.49.}$$

olmasından dolayı l_j özdeğerine j -inci temel bileşenin varyansı denir. Tüm l_j 'ler bire eşitse orjinal bağımsız değişkenler ortogonaldir. Eğer l_j 'nin biri tam olarak sıfıra eşitse orjinal bağımsız değişkenler arasında mükemmel bir lineer ilişki vardır. Ayrıca l_j 'nin bir ya da daha fazlasının sıfıra yakın olması çoklu iç ilişki olduğunu göstermektedir.

TB tahmin ediciyi elde etmek için özdeğerlerin artan sırada olduğu varsayılmaktadır $\left(l_1 \geq l_2 \geq \mathbf{K} \geq l_p \geq 0\right)$. $Z'Z$ simetrik olduğundan, $T'Z'ZT = \Lambda = diag\left(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p\right)$ olacak şekilde ortogonal bir $T = \left[t_1, t_2, \mathbf{K}, t_p\right]$ matrisi vardır. $Z'Z$ nin en büyük r özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin matrisi $T_r = \left[t_1, t_2, \mathbf{K}, t_r\right]$ olmak üzere, $T_{p-r} = \left[t_{r+1}, t_{r+2}, \mathbf{K}, t_p\right]$ de T 'nin geriye kalan kolonlarından oluşur. Genel olarak (2.45) modeli,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0' & \Lambda_{p-r} \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_r \\ a_{p-r} \end{pmatrix}$$
$$Z = \left(Z_r, Z_{p-r}\right),\ T = \left(T_r, T_{p-r}\right)$$

şeklinde parçalanmış olur. Burada $\Lambda_r : rxr$, $a_r = rx1$, $Z_r : nxr$ ve $T_r : pxr$ boyutlarındadır. Bu durumda (2.45) modeli,

$$y = Z_r a_r + Z_{p-r} a_{p-r} + u \tag{2.50.}$$

formunda yazılabilir. Çoklu iç ilişki olması durumunda ilk r katsayının tahmin edilmesi yeterlidir. Dolayısıyla kalan katsayılar sıfır olarak kabul edilir. (2.50) modelinde a 'nın EKK tahmin edicisi,

$$\hat{a}_r = \Lambda_r^{-1} Z_r^{'} y \tag{2.51.}$$

olarak elde edilir. $b = Ta$ olduğundan b 'nın TB tahmin edicisi,

$$\hat{b}_{TB} = \left(T_r, T_{p-r}\right)\begin{pmatrix}\hat{a}_r \\ 0\end{pmatrix} = T_r \hat{a}_r = T_r \Lambda_r^{-1} Z_r' y \tag{2.52.}$$

elde edilir. Ayrıca $Z = TX$ olduğundan $Z_r' = T_r' X'$ olur. Buradan b 'nın TB tahmin edicisi yeniden tanımlandığında ise,

$$\hat{b}_{TB} = T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X' y = T_r T_r' \hat{b} \tag{2.53.}$$

elde edilir. Varyansı,

$$Var\left(\hat{b}_{TB}\right) = s_u^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r'$$

olarak elde edilir. EKK tahmin edicinin varyansı ile karşılaştırıldığında,

$$Var\left(\hat{b}\right) = s_u^2 \left(X'X\right)^{-1} = s_u^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + s_u^2 T_{p-r} \Lambda_r^{-1} T_{p-r}'$$

olduğundan iki tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisleri arasındaki fark $T_{p-r}\Lambda_r^{-1}T_{p-r}'$ olur. Bu matrisin köşegen elemanları ise atılan temel bileşenlere karşılık gelen özdeğerlerin terslerinin ağırlıklı toplamıdır. Dolayısıyla küçük özdeğerlere karşılık gelen temel bileşenler atılırsa varyansta önemli bir azalma olur.

2.9. *r-k* Sınıf Tahmin Edici

Baye ve Parker (1984) çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerini birleştirerek $r-k$ sınıf tahmin ediciyi tanımlamışlardır. $l_i,\ i=1,\mathbf{K},p$ $X'X$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere $\Lambda = diag\left(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p\right)$ ve $T=\left[t_1,t_2,\mathbf{K},t_p\right],\ T'X'XT=\Lambda$ olacak şekilde ortogonal bir matris olsun. Ayrıca $T_r=\left[t_1,t_2,\mathbf{K},t_r\right],\ r\le p$ ve $T_{p-r}=\left[t_{r+1},t_{r+2},\mathbf{K},t_p\right]$ sırasıyla $T'_{p-r}\,X'XT_{p-r}=\Lambda_{p-r}=diag\left(l_{r+1}, l_{r+2}, \mathbf{K}, l_p\right)$ olacak şekilde matrisler olsun. Bu durumda b 'nın $r-k$ sınıf tahmin edicisi,

$$\hat{b}_r(k)=T_r\left(T_r'X'XT_r'+kI_r\right)^{-1}T_r'X'y,\qquad k\ge 0 \tag{2.54.}$$

olarak tanımlanmıştır. $r-k$ sınıf tahmin edicinin bazı özellikleri

i. $Bias\left(\hat{b}_r(k)\right)=E\left(\hat{b}_r(k)-b\right)=\left[T_r\left(\Lambda_r+kI_r\right)^{-1}\Lambda_rT_r'-I_p\right]b$

ii. $Var\left(\hat{b}_r(k)\right)=s_u^{\,2}T_r\left(\Lambda_r+kI_r\right)^{-1}\Lambda_r\left(\Lambda_r+kI_r\right)^{-1}T_r'$

iii. $d_i=l_i/\left(l_i+k\right)$ olmak üzere hata kareler ortalama skaleri,

$$SMSE\left(\hat{b}_r(k)\right)=\sum_{i=1}^{r}\left[(d_i-1)^2a_i^{\,2}+s_u^{\,2}d_i^{\,2}/l_i\right]+\sum_{i=r+1}^{p}a_i^{\,2}$$

şeklindedir. Ayrıca $r-k$ sınıf tahmin edici,

i. $\hat{b}_p(0) = \hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edici,

ii. $\hat{b}_p(k) = \hat{b}_k = (X'X + kI_p)^{-1}X'y$ ridge tahmin edici,

iii. $\hat{b}_r(0) = \hat{b}_{TB} = T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'y$ TB tahmin edicilerinin

genel bir halidir. Baye ve Parker (1984) $r-k$ sınıf tahmin edicinin MSE anlamında temel bileşenler tahmin ediciden iyi olduğunu göstermiştir. Sarkar (1996) $r-k$ sınıf tahmin edicinin MSE kriterine göre hangi koşullar altında EKK, ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerden iyi olduğunu göstermiştir. Özkale ve Kaçıranlar (2008) $r-k$ sınıf tahmin edici ile EKK tahmin ediciyi Pitman'ın yakınlık kriterine göre karşılaştırmıştır.

2.10. Liu Tahmin Edici

Çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunların en önemlilerinden biri $k > 0$ olmak üzere ridge tahmin edici ve bir diğeri $0 < c < 1$ olmak üzere $\hat{b}_S = c\hat{b}$ formunda olan Stein tahmin edicidir. Her iki tahmin edicinin de avantajları ve dezavantajları vardır. $\hat{b}_k$ uygulamada etkin olmasına karşın, k'nın karmaşık bir fonksiyonudur. Stein tahmin edicinin özelliği ise c'nin lineer bir fonksiyonu olmasıdır. Ancak $\hat{b}_S$'nin her elemanını aynı büzmesi bir dezavantajdır. Dolayısıyla uygulamada iyi sonuç vermez. Liu (1993), ridge tahmin edici ve Stein (1956) tahmin edicinin avantajlarını birleştirerek,

$$\hat{b}_d = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{b}), \quad 0 < d < 1 \qquad (2.55.)$$

şeklinde yeni bir tahmin edici tanımlamıştır. Bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Gruber (1998) tarafından Liu tahmin edici olarak adlandırılmıştır. $\hat{b}_d$'nin $\hat{b}_k$ üzerindeki avantajı d'nin bir lineer fonksiyonu olmasıdır. Dolayısıyla d'nin seçimi k'nın seçiminden daha kolaydır ve $d = 1$ iken $\hat{b}_d = \hat{b}$ olur. $\hat{b}_k$ tahmin

edicisi $y = Xb + u$ modeline $0 = k^{1/2}b + u'$ eşitliği eklenerek EKK yöntemi ile elde edilebilir. k büyüdükçe $k^{1/2}$ ile 0 arasındaki uzaklık artar, böylece ridge tahmin edicinin yanlılığı da artar. Benzer şekilde $y = Xb + u$ modeline $d\hat{b} = b + u'$ eşitliği eklenip EKK yöntemi kullanılarak (2.55)'deki $\hat{b}_d$ elde edilebilir. Ayrıca $\hat{b}_d$, $\hat{b}_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\hat{b}$ şeklinde EKK tahmin edicinin bir lineer dönüşümü olarak da yazılabilir. Buradan $E(\hat{b}_d) = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)b$ olduğudan, $\hat{b}_d$ yanlı bir tahmin edicidir. Ayrıca $A_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)$ olmak üzere Liu tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla,

$$Var(\hat{b}_d) = s_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d' \tag{2.56.}$$

$$Bias(\hat{b}_d) = (A_d - I)b \tag{2.57.}$$

olmaktadır. (2.56) ve (2.57) eşitliklerinin kullanılmasıyla Liu tahmin edicinin MSE matrisi,

$$MSE(\hat{b}_d) = s_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d' + (A_d - I)bb'(A_d - I) \tag{2.58.}$$

olarak elde edilir. $\hat{b}_d$'nin MSE matrisi $\hat{b}$'dan iyi olacak şekilde $0 < d < 1$ aralığında bir d vardır. Ayrıca Liu tahmin edicinin SMSE'si,

$$SMSE(\hat{b}_d) = s_u^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{(l_i + d)^2}{l_i (l_i + 1)} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^2}{(l_i + 1)^2} \tag{2.59.}$$

olarak bulunur. $SMSE(\hat{b}_d)$'yi minimum yapan d yanlılık parametresi Liu (1993) tarafından

$$d_{opt} = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^2 - s_u^2}{(l_i+1)^2} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{s_u^2 + l_i a_i^2}{l_i (l_i+1)^2}$$

$$= 1 - s_u^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{l_i (l_i+1)} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{s_u^2 + l_i a_i^2}{l_i (l_i+1)^2} \right) \qquad (2.60.)$$

olarak verilmiştir. Burada a_i parametresi (2.45)'de verilen kanonik formdan elde edilir. Ancak d_{opt} bilinmeyen a_i^2 ve s_u^2 parametrelerine bağlı olduğundan uygulamada pek kullanışlı değildir. Bunların yerine yansız tahmin edicileri $\hat{a}_i^2 - \hat{s}_u^2 / l_i$ ve $\hat{s}_u^2$ kullanılırsa,

$$\hat{d}_{opt} = 1 - \hat{s}_u^2 \left(\sum_{i=}^{p} \frac{1}{l_i (l_i+1)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{a}_i^2}{(l_i+1)^2} \right) \qquad (2.61.)$$

olarak elde edilir. Bu yöntemlerin yanı sıra *d*'nin farklı seçim yöntemleri Liu (1993)'de ele alınmıştır.

2.11. Modified Liu Tahmin Edicisi

Li ve Yang (2012), Liu tahmin edicisi ile ön bilgiyi birleştirerek modified Liu tahmin edicisini tanımlamışlardır.

$A_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI) = I - (1-d)(X'X + I)^{-1}$ olmak üzere, b 'nın modified Liu tahmin edicisini,

$$\hat{b}_m(d) = A_d \hat{b} + (I - A_d) b_0$$

$$= (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\hat{b} + (1-d)(X'X + I)^{-1} b_0$$

$$= (X'X + I)^{-1}\left[(X'X + dI)\hat{b} + (1-d) b_0\right] \qquad (2.62.)$$

olarak vermişlerdir. Burada b_0, p boyutlu stokastik olmayan bir vektör olup b üzerindeki ön bilgiyi temsil edecek şekilde seçilmelidir. Ayrıca,

$$\hat{b}_m(1,b_0)=\hat{b},$$
$$\hat{b}_m(0,b_0)=(X'X+I)^{-1}(X'y+b_0),$$
$$\hat{b}_m(d,0)=\hat{b}_d$$

olur. Yanlı tahmin ediciler sınıfında olan bu tahmin edicinin yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias\left(\hat{b}_m(d)\right) &= A_d b+(1-d)b_0-b \\ &= (A_d-I)(b-b_0) \end{aligned} \qquad (2.63.)$$

olarak elde edilir. Varyans-kovaryans matrisi,

$$Var\left(\hat{b}_m(d)\right)=s_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d' \qquad (2.64.)$$

formundadır. (2.63) ve (2.64)'ün kullanılmasıyla modified Liu tahmin edicisinin MSE matrisi,

$$MSE\left(\hat{b}_m(d)\right)=s_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d'+(A_d-I)(b-b_0)(b-b_0)'(A_d-I)' \qquad (2.65.)$$

olarak bulunur. Li ve Yang (2012)'de modified Liu tahmin edicisinin, EKK, ridge, modified ridge ve Liu tahmin edicileri ile MSE kriterine göre karşılaştırmalar yapılmıştır ve d'nin uygun bir seçimi ile daha iyi bir MSE değerine sahip olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

2.12. *r-d* Sınıf Tahmin Edici

Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001)'de Liu ve temel bileşenler tahmin edicilerin avantajlarını birleştiren $r-d$ sınıf tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{b}_r(d) &= T_r\left(T_r'X'XT_r + I\right)^{-1}\left(T_r'X'y + dT_r'\hat{b}_{TB}\right)\\ &= T_r\left(T_r'X'XT_r + I_r\right)^{-1}\left(I_r + d\left(T_r'X'XT_r\right)^{-1}\right)T_r'X'y \qquad (2.66.)\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\hat{b}_{TB} = T_r\left(T_r'X'XT_r\right)^{-1}T_r'X'y$ olan temel bileşenler tahmin edici ve $0 < d < 1$'dir.

$r-d$ sınıf tahmin edici de EKK, temel bileşenler ve Liu tahmin edicilerinin genel halidir ve

$\hat{b}_p(1) = \hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edici,

$\hat{b}_r(1) = \hat{b}_{TB} = T_r\left(T_r'X'XT_r\right)^{-1}T_r'X'y$ TB tahmin edici ve

$\hat{b}_p(d) = \hat{b}_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\hat{b}$ Liu tahmin edici

özelliklerine sahiptir. $S_r(d) = \Lambda_r + dI_r$ ve $S_r(1) = \Lambda_r + I_r$ olmak üzere *r-d* sınıf tahmin edicinin beklenen değeri, yanlılığı ve varyans-kovaryans matrisleri sırasıyla,

$$E\left(\hat{b}_r(d)\right) = T_r S_r(d)^{-1}S_r(d)T_r'b \qquad (2.67.)$$

$$Bias\left(\hat{b}_r(d)\right) = \left[(d-1)T_r S_r(1)^{-1}T_r' - T_{p-r}T_{p-r}'\right]b \qquad (2.68.)$$

$$Var\left(\hat{b}_r(d)\right) = s_u^2 T_r S_r(1)^{-1}S_r(d)\Lambda_r^{-1}S_r(d)S_r(1)^{-1}T_r' \qquad (2.69.)$$

olarak bulunur. Ayrıca, $d_i = (l_i + d)/(l_i + 1)$ olmak üzere $r-d$ sınıf tahmin edicinin hata kareler ortalama skaleri

$$SMSE\left(\hat{b}_r(d)\right)=\sum_{i=1}^{r}\left[(d_i-1)^2 a_i^2+\frac{s_u^2 d_i^2}{l_i}\right]+\sum_{i=r+1}^{p} a_i^2 \qquad (2.70.)$$

olarak verilmiştir. Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001)'de $0<d<1$ olmak üzere $SMSE\left(\hat{b}_r(d)\right)<SMSE\left(\hat{b}_{TB}\right)$ olmasını sağlayan bir d 'nin varlığını göstermişlerdir. Bunun yanı sıra *r-d* sınıf tahmin edicinin Liu, temel bileşenler ve EKK tahmin ediciden üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca Özkale ve Kaçıranlar (2007)'de *r-d* sınıf tahmin edici, Liu, temel bileşenler ve EKK tahmin edicisi ile MSE kriterine göre karşılaştırılmıştır.

3. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLER

3.1. Dinamik Regresyon Modelleri

Bazı iktisadi olaylar geçmiş dönemdeki değerleriyle ilişkilidir. Dolayısıyla geçmiş dönem değerlerinden etkilenirler. Ekonometrik modellerde yer alan geçmiş dönem değerlerini ifade eden değişkenlere gecikmeli değişken adı verilir. Gecikmeli değişkenlerin yer almadığı anlık ilişkiyi inceleyen modellere statik modeller adı verilirken, gecikmeli değişkenlerin yer aldığı ve bu nedenle geçmiş dönemlerin etkilerini de içeren modellere de dinamik modeller adı verilmektedir.

Ekonometrik modellere gecikmeli değişken eklenmesi farklı sebeplerden kaynaklanabilir. Bunlardan biri teknolojik nedenler olabilir. Herhangi bir firmanın ürettiği mallara talebin artması ile firmanın gelecek dönemlerde üretim kapasitesini arttıracak yatırımları yapması gerekebilir. Sebeplerden bir diğeri psikolojik etmenler olabilir. Tüketim alışkanlıkları, gelir değişmelerine anında cevap vermeyebilir. Burada söz konusu olan psikolojik etkenler veya alışkanlıklardır. İşletmelerden kaynaklanan etkiler de modele gecikmeli değişken katılmasını gerektirebilir. Maliyetlerin arttığı, bu nedenle üretimin azalması gereken dönemlerde işletme yetkilileri gerekli değişiklikleri yapmayabilirler. Modelde gecikmeli değişken olmasının bir diğer nedeni karar almak için yeterli bilginin elde edilememesi olabilir. İşletmeler zamanında elde edemedikleri bilgiler nedeniyle, örneğin üretim artışı veya azalışı gibi kararları almada gecikebilirler. Genel olarak iktisadi davranışlar eski alışkanlıklar ve olaylarla önemli ölçüde ilişkili olduğu için, geçmiş değerler bağımsız değişkenler olarak işlevleri önemlidir.

Dinamik modellerde bağımsız değişken veya değişkenlerin gecikmeli yapısı bağımsız değişken olarak yer alabileceği gibi bağımlı değişkenin gecikmeli değişkeni de bağımsız değişken olarak yer alabilir.

Gecikmeli değişkenlerin gecikme uzunlukları farklı olabilir. Modellerde hem bağımlı hem de bağımsız değişkenlerin farklı gecikme uzunluğunda bağımsız değişkenleri yer alabilir. Değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamak için oluşturduğumuz basit doğrusal regresyon modeli,

$$y_t = d + b_0 x_t + u_t \tag{3.1.}$$

formunda olup statik modeldir. (3.1) modeline bağımsız değişkenin bir dönem gecikmesi eklendiğinde ise,

$$y_t = d + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + u_t \tag{3.2.}$$

formunda olacaktır. Bağımsız değişkenin gecikmeli değişkenlerinin, bağımsız değişken olarak yer aldığı bu tür modeller dinamik modellerin en basit örneğidir. Bağımlı değişkenin bir dönem gecikmeli değerlerini içeren model ise,

$$y_t = d + b_0 x_t + b_1 y_{t-1} + u_t \tag{3.3.}$$

olur. (3.3)'deki modellere otoregresif modeller denir. Dinamik regresyon modelinin genel formu ise,

$$y_t = d + \sum_{p=0}^{\infty} b_p x_{t-p} + u_t \qquad t = p+1, \mathbf{K}, T \tag{3.4.}$$

şeklindedir (Greene, 2002). Burada u_t hata terimi ile ilgili aşağıdaki varsayımlar geçerlidir.

$$u \sim N\left(0, s_u^2 I\right)$$
$$E\left(u_i u_j\right) = 0 \quad (i \neq j)$$
$$E\left(u_i x_j\right) = 0 \quad \left(j = 1,2, \mathbf{K} T\right)$$

Model içinde birbirini karşılıklı olarak etkileyen tesadüfi değişkenlere içsel (endogenous) değişken denir. Bu değişkenler model içinde belli olur. Diğer taraftan model dışında belirlenen değişkenler ise dışsal (exegenous) değişkenlerdir ve bunlar tesadüfi olmayan değişkenlerdir. Bu nedenle hata terimi ile aralarında ilişki yoktur.

Ayrıca içsel değişkenlerin geçmiş dönemlere ait değerlerinden oluşan değişkenler gecikmeli içsel değişken, benzer şekilde modelde yer alan dışsal değişkenin geçmiş dönemlerine ait değişkenlerde gecikmeli dışsal değişkenlerdir. Örneğin, (3.2) ile verilen modelde farklı iki değişken vardır. Burada y_t 'deki değişmeler x_t ile açıklanmayıp x_{t-1} ile açıklanmaktadır. y_t içsel değişken, x_{t-1} ise dışsal veya gecikmeli içsel değişkendir. Bu değişkenler her ne kadar içsel değişkenler gibi algılansalar da bunlar dışsal değişken olarak işlem görürler. Bunun sebebi ise denklemde yer alan gecikmeli içsel değişkenin, denklemdeki hata terimiyle ilişkisiz olmasıdır. Burada gecikmeli içsel değişkenin kullanılması tahmin problemine yol açar.

3.2. Dinamik Modellerde Gecikmenin Etkileri

İktisadi çalışmalarda bağımlı değişken y 'nin diğer bağımsız değişken x 'lere bağlılığı her zaman eş anlı olmayabilir. Çoğu kez y , x 'e bir süre sonra tepki gösterir. Geçen bu süre gecikme olarak adlandırılmaktadır. (3.1) ile verilen klasik basit regresyon modelinde marjinal etkilerin anlık (tek seferlik) olmasından dolayı y , x 'in değişimlerine anında cevap verir ve cevabı, ölçme zamanı içerisinde tamamlanır. (3.4) ile verilen dinamik regresyon modelinde ise x_t'deki bir birimlik değişim, y_t'nin gelecek dönemdeki değerlerini etkilemektedir.

Örneğin, bir kimsenin yıllık gelirine 1000 TL zam yapılsın. Bu zam kalıcı olduğundan sürekli bir gelir artışı sağlanmış olur. Bu gelir artışının kişinin yıllık tüketim harcamaları üzerindeki etkisi ne olacaktır? Geliri bu şekilde artış gösteren kimseler genellikle bunun hepsini hemen harcamaya koşmaz. Öyle ki kişi, maaş artışının ilk yılında tüketim harcamalarını 400 TL, bir sonraki yıl 300 TL daha sonrasında 200 TL daha arttırmaya kalanını da tasarruf etmeye karar verebilir. Üçüncü yılın sonunda bu kişinin yıllık tüketim harcaması 900 TL artmış olur. Öyleyse tüketim fonksiyonu,

$$y_t = d + (0.4)x_t + (0.3)x_{t-1} + (0.2)x_{t-2} + u_t \qquad (3.5.)$$

olarak ifade edilir. Burada y, tüketim harcamaları, x ise gelirdir. Böyle bir model 1000 TL'lik artışın etkisinin üç yıllık bir süreye dağıtılmış olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla (3.5) eşitliği gecikmesi dağıtılmış bir modeldir. Çünkü belli bir nedenin, ki burada artışın, etkisi bir zaman süresine yayılmıştır.

3.3. Gecikmesi Dağıtılmış Modeller

Ekonometride y gibi bir değişkenin, x gibi değişken ya da değişkenler üzerindeki bağımlılığı nadiren eş zamanlıdır. Genellikle x'e karşılık gelen y bağımlı değişkeni zamandaki bir sapmaya bağlıdır. Gecikmesi dağıtılmış modeller bağımsız değişkenleri arasında dışsal değişkenlerin ya da bağımlı değişkenin gecikmeli değerlerinin yer aldığı modellerdir. Bağımlı değişkendeki değişmeler, bağımsız değişken veya değişkenlerin bir ya da daha fazla gecikmeli değişkenleri tarafından açıklanmaktadır. Gecikmesi dağıtılmış modeller doğrusal veya doğrusal olmayan yapıda olabilirler. Genel olarak gecikmesi dağıtılmış doğrusal modeller,

$$y_t = d + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \mathbf{K} + b_p x_{t-p} + u_t \qquad (3.6.)$$

formunda ifade edilmektedir. Burada gecikme uzunluğu p olarak tanımlanmıştır ve böyle bir model gecikmesi sonlu dağıtılmış bir modeldir. Gecikmelerin sonlu veya sonsuz olma durumlarıyla ilgili modeller sonraki bölümlerde incelenecektir.

(3.6)'daki b_0 katsayısı, x'deki bir birim değişmeye karşılık aynı dönemde y_t'nin ortalama değerindeki değişmeyi vermektedir. Bundan dolayı b_0 katsayısı kısa dönem ya da etki çarpanı olarak adlandırılır. Eğer x'deki bir birim değişme aynı kalırsa, bir sonraki dönemde $(b_0 + b_1)$, onu takip eden dönemde ise $(b_0 + b_1 + b_2)$, y'nin ortalama değerindeki değişmeyi vermektedir. Bu kısmi toplamlar ise ara dönem çarpanları ya da ara çarpanlar olarak adlandırılır. p dönem sonunda ise;

$$\sum_{i=0}^{p} b_i = b_0 + b_1 + b_2 + \mathbf{K} + b_p$$

olur. Buradan,

$$b_i^* = \frac{b_i}{\sum_{i=0}^{p} b_i} = \frac{b_i}{\sum_{i=0}^{p} b_i}$$

şeklinde b_i'lerin standartlaştırılmış formu b_i^* elde edilmektedir. b_i^*'ların toplamı da belli bir sürede ortaya çıkan uzun dönem ya da toplam etki oranını vermektedir.

(3.5)'de kısa dönem çarpanı 0.4' tür. Diğer taraftan uzun dönem çarpanı ise 0.4+0.3+0.2=0.9'dur. Yani tüketici gelirindeki 1 TL' lik artıştan sonra tüketim, gelirin arttığı yıl 40 Kr, ertesi yıl 30 Kr bir sonraki yıl ise 20 Kr artmaktadır. Dolayısıyla 1 TL' lik gelir artışının uzun dönemdeki etkisi 90 Kr' dir. Ayrıca her bir b_i, 0.9'a oranlandığında sırasıyla 0.44, 0.33, 0.23 elde edilir. Bu sonuçlar ise x'deki bir birim değişmenin y üzerindeki toplam etkisinin %44'ü aynı dönem, %77'sinin bir dönem sonra ve %100'ünün de iki dönem sonra ortaya çıkacağı anlamına gelmektedir.

Gecikmeli bağımsız değişkenlerle, bağımlı değişken y_t arasındaki ilişkinin doğru veya ters orantılı olmasına göre b'lar farklı işaret alabilirler. x' deki artış uzun dönemde y'de bir azalmaya neden olursa, b'nın işareti negatif olacaktır. Bu durumda negatiflik, toplam (Σ) işaretinin önüne gelerek, b'lar i-inci gecikmenin önemini gösteren pozitif ağırlık olur. b'ların gecikme uzunluğunu belirlemek için aritmetik ortalama veya medyan hesaplanabilir. Ortalama gecikme, gecikme uzunluklarının ağırlıklı ortalamasıdır. Buradaki ağırlık ise her periyodun katsayısının toplam katsayılara oranına eşittir. i-inci periyodun gecikme uzunluğunun ağırlığı $b_i \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ olmaktadır. Bu durumda ortalama gecikme uzunluğu,

$$Ortalama\ gecikme = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i.b_i}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i}$$

olarak tanımlanır. Medyan gecikme uzunluğu ise, uzun dönem gecikmesi için gerekli olan periyot sayısının yarısıdır. Diğer taraftan uygun gecikme uzunluğunun hesaplanabilmesi için Düzeltilmiş Belirleyicilik Katsayısı $\overline{R}^2$, Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Schwarz Bilgi Kriteri (SIC) gibi çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemler de ele alınacaktır.

Klasik modellerde bağımsız değişkenlerin seçimi ve en uygun modelin seçimi söz konusu olurken, gecikmesi dağıtılmış modellerde hangi bağımsız değişkenlerin gecikmeli değişkenlerinin yer alacağına ve bunların gecikme uzunlularının ne olacağına karar verilmesi gerekmektedir. Bu nedenle gecikmesi dağıtılmış modellerde herhangi bir x_t bağımsız değişkeninin minimum ve maksimum gecikme uzunlukları arasında yer alan en uygun gecikme uzunluğu seçilmelidir. Ayrıca klasik regresyon modelinde y_t ve x_t değişkenleri için söz konusu olan temel varsayımlar gecikmesi dağıtılmış modellerde y_t ve x_{t-p} değişkenleri arasında söz konusu olmaktadır.

x_t değişkeninin tesadüfi değişken olmaması varsayımı geçerli ise b parametrelerinin tahmin edicileri en iyi doğrusal yansız tahmin edicileridir. Oluşturulan gecikmesi dağıtılmış bir model EKK yöntemiyle tahmin edilmesi durumunda bazı problemlerle karşılaşılmaktadır. Bunlardan bazıları şöyle özetlemek mümkündür:

i. Bağımsız değişkenler arasında çoklu iç ilişki problemi olabilir. Çünkü aynı değişkenin p gecikmesi modelde yer almaktadır.

ii. Gecikme uzunluğu p bilinmemektedir. p bilinse bile bu sayı çok büyük ve örneklem miktarı küçükse parametreler tahmin edilemez.

Gecikmesi dağıtılmış modellerin EKK yöntemiyle tahmininde karşılaşılan bu gibi sorunlar nedeniyle, farklı varsayımlara dayanan tahmin yöntemleri ortaya konmuştur. Gecikmelerin sonlu veya sonsuz olması durumuna göre Koyck Modeli, Almon Modeli, Nerlove' un Kısmi Uyarlama Modeli gibi yöntemler gecikmesi dağıtılmış modellerin tahminlerinde sıklıkla kullanılmaktadır.

3.4. Gecikmesi Sonsuz Dağıtılmış Modeller

Gecikmesi sonsuz dağıtılmış model,

$$y_t = d + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \mathbf{K} + u_t$$

$$= d + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_{t-i} + u_t \qquad (3.7.)$$

formunda tanımlanmaktadır. (3.7) modelinde $u \sim N\left(0, s_u^2 I\right)$, $E\left(u_i u_j\right) = 0 \quad (i \neq j)$ ve $E\left(u_i X_j\right) = 0 \quad \left(j = 1,2,\mathbf{K}\, T\right)$ varsayımları geçerlidir. Gecikmenin uzunluğu, yani geçmişe doğru ne kadar geri gidilmek istendiği belli değildir. Böyle bir model ile çalışmak oldukça zordur. Çünkü eldeki sonlu sayıdaki veri ile sonsuz sayıda parametre tahmin edilmesi istenmektedir. Model tahmin edilebilir bir forma dönüştürülmelidir. Bunu yapabilmek için parametre sayısını azaltmak amacıyla b_i katsayılarına bazı kısıtlar getirilmelidir. Ayrıca gecikmesi dağıtılmış modelleri EKK yöntemiyle tahmin etmede karşılaşılan sorunlar nedeniyle farklı varsayımlara dayanan modeller de ortaya konmuştur. Şimdi bu modellerden bazıları ele alınacaktır.

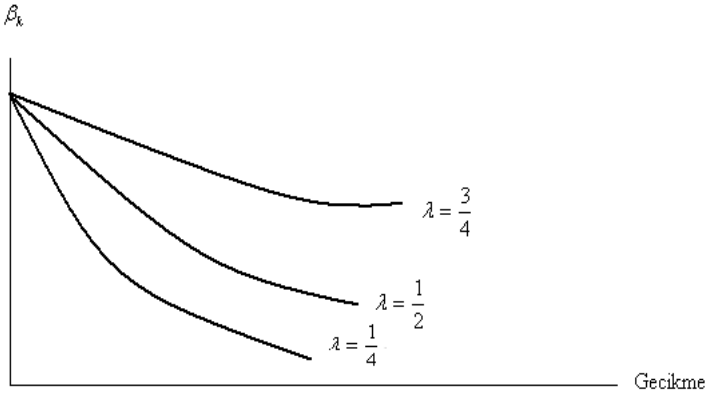
3.4.1. Koyck Modeli

Koyck (1954), gecikmesi dağıtılmış modellerin tahmini için b 'ların zamana bağlı olarak geometrik olarak azaldığını varsayan bir yöntem önermiştir. Bu nedenle bu model Geometrik Gecikme Modeli ya da Koyck Modeli olarak

adlandırılmaktadır. Buna göre Koyck, bütün b 'ların aynı işaretli olduğunu ve aşağıdaki şekilde geometrik olarak azaldıklarını varsayar (Gujarati, 2001).

$$b_k = l^k b_0 \qquad k = 0,1,2,\mathbf{K} \tag{3.8.}$$

Burada l , gecikmenin azalma oranı $(0 < l < 1)$, $(1 - l)$ ise ayarlama ya da uyarlanma hızıdır. $l < 1$ olmasından dolayı her b katsayısı kendisinden önceki b katsayısından daha küçüktür. Bu da geçmişe doğru gidildikçe gecikmenin y_t üzerindeki etkisinin azaldığını ifade etmektedir. Gerçeğe dayandırdığımızda, şu anki ve yakın geçmişteki gelirlerimiz, bugünkü tüketimimizi, daha uzak geçmişteki gelirlerimizden daha çok etkiler. (3.8) eşitliği, b_k gecikme katsayısının değerinin b_0 'dan başka l 'ya da bağlı olduğunu göstermektedir. l , 1'e ne kadar yakınsa b_k 'daki azalma oranı o kadar az olurken, aksine 0'a yakınsa b_k 'daki azalma oranı o kadar hızlı olur. Bu ifadenin grafiksel gösterimi ise Şekil 3.1'deki gibidir.



Şekil 3.1. Koyck şeması

Ayrıca burada b 'ların toplamı olan uzun dönem çarpanını tanımlayacak olursak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} l^k = b_0 \left(\frac{1}{1-l} \right) \tag{3.9.}$$

şeklinde sonlu bir ifade elde edilir. (3.7) ile verilen gecikmesi sonsuz dağıtılmış model, (3.8) eşitliği kullanılarak,

$$y_t = d + b_0 x_t + b_0 l x_{t-1} + b_0 l^2 x_{t-2} + \mathbf{K} + u_t \tag{3.10.}$$

şeklinde yeni bir model elde edilir. Ancak böyle bir modelin bilinmeyen b parametrelerinin fazla olmasından ve l katsayılarının doğrusal olmamasından dolayı tahmin edilmesi hala kolay değildir. Koyck (1954), (3.10) ile verilen modeli bir dönem geri çekerek,

$$y_{t-1} = d + b_0 x_{t-1} + b_0 l x_{t-2} + b_0 l^2 x_{t-3} + \mathbf{K} + u_{t-1} \tag{3.11.}$$

modelini elde etmiştir. Eşitliğin her iki tarafı l ile çarpıldığında,

$$l y_{t-1} = l d + l b_0 x_{t-1} + b_0 l^2 x_{t-2} + b_0 l^3 x_{t-3} + \mathbf{K} + l u_{t-1} \tag{3.12.}$$

elde edilir. (3.12) ile (3.10) eşitliğinin farkı alındığında ise,

$$y_t - l y_{t-1} = d(1-l) + b_0 x_t + (u_t - u_{t-1}) \tag{3.13.}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.13) yeniden düzenlendiğinde,

$$y_t = d(1-l) + b_0 x_t + l y_{t-1} + v_t \tag{3.14.}$$

eşitliği elde edilir. Burada $v_t = u_t - l u_{t-1}$ olup, u_t ile u_{t-1}'in hareketli ortalamasıdır. Koyck dönüşümü olarak adlandırılan bu süreçte, sonsuz sayıdaki parametreden üç

bilinmeyenli (d, b_0, l) bir model elde edilmiştir. Böylece (3.14) ile verilen modelde b_0 ve l parametreleri direkt olarak tahmin edilebilir ve sabit terim ise $d(1-l)=d_0$ şeklinde tahmin edilmektedir.

Koyck modelinde x_t, x_{t-1}, **K** değişkenleri yerine y_{t-1} gecikmeli değişkeni kullanılarak çoklu iç ilişki problemi çözülmeye çalışılmıştır. Ancak hata terimi $v_t = u_t - l u_{t-1}$ olduğundan varsayımlarından dolayı,

$$\begin{aligned} Cov(v_t, v_{t-1}) &= Cov[(u_t - l u_{t-1}),(u_{t-1} - l u_{t-2})] \\ &= E(u_t u_{t-1} - l u_t u_{t-2} - l u_{t-1}^2 + l^2 u_{t-1} u_{t-2}) \\ &= E(u_t u_{t-1}) - l E(u_t u_{t-2}) - l E(u_{t-1}^2) + l^2 E(u_{t-1} u_{t-2}) \\ &= -l s_u^2 \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise hata terimleri arasında ilişki olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde,

$$Cov(v_t, y_{t-1}) \neq 0$$

olur. Bu da modelde otokorelasyon sorunu olduğunu göstermektedir. Bu nedenle elde edilen tahminler yanlı ve tutarsız olur. Koyck dönüşümü ile ilgili diğer özellikler şöyle sıralanabilir:

i) Koyck modeli, eşitliğin sağ tarafında gecikmeli değişken y_{t-1} olmasından dolayı otoregresif bir modeldir. Dolayısıyla Koyck dönüşümü gecikmesi dağıtılmış bir modelin otoregresif bir modele nasıl dönüştüğünü göstermektedir.

ii) Modelde kullanılan y_{t-1} dışsal değişkeni stokastiktir. Ancak EKK yöntemi varsayımlarına göre, bağımsız değişkenlerin stokastik olmamaları ve birbirinden bağımsız olmaları gerekmektedir.

iii) Gecikmesi dağıtılmış modeldeki u_t hata terimi, Koyck modelinde $v_t = u_t - l u_{t-1}$ hata terimine dönüşmektedir.

u_t değerleri arasında otokorelasyon olmamasına rağmen, v_t değerleri arasında vardır. Bundan dolayı modelde oluşabilecek çoklu iç ilişki mutlaka göz önünde bulundurulmalıdır. Aksi halde parametrelerin güvenilirliği ortadan kalkar.

iv) Çoklu iç ilişkiyi belirlemek için *Durbin-Watson d* testini uygulamak yerine *Durbin h* testi kullanılmalıdır.

v) Koyck modelinde Medyan gecikme,

$$Medyan\ Gecikmesi\ (ML) = -\frac{\log 2}{\log l}$$

şeklinde ifade edilir. Medyan gecikme x 'deki bir birimlik değişmenin y 'de yapacağı toplam değişmenin ilk yarısının kaç dönem sonra gerçekleşeceğini göstermektedir. Burada l azalma oranını vermektedir.

vi) Koyck modelinde ortalama gecikme uzunluğu ise ,

$$Ortalama\ gecikme = \frac{l}{1-l}$$

olarak elde edilir.

3.4.2. Kısmi Uyarlama Modeli

Nerlove (1956) tarafından geliştirilen Kısmi Uyarlama veya Stok Uyarlama modelinde, y bağımlı değişkeninin gözlenen değeri y_t yerine, bu değişkenin istenen değeri y_t^* kullanılmaktadır. Burada y_t^* 'ın istenen değeri x_t 'nin t dönemindeki değerine bağlıdır. Böylece model,

$$y_t^* = b_0 + b_1 x_t + u_t \qquad (3.15.)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada istenen sermaye miktarı y_t^* doğrudan gözlenemediği için Nerlove tarafından,

$$y_t - y_{t-1} = g\left(y_t^* - y_{t-1}\right) \tag{3.16.}$$

şeklinde yeniden düzenlenmiştir. İstenen ya da planlanan değere çeşitli nedenlerden dolayı tek bir dönemde ulaşılamayabilir. Bu nedenle bir önceki dönemi düşünürsek istenen değişme (3.16)'da $\left(y_t^* - y_{t-1}\right)$ şeklinde ifade edilmiştir. Fakat gerçekleşen değişme $\left(y_t - y_{t-1}\right)$'dir. g ise uyarlama katsayısıdır ve $0 \le g \le 1$ olur. Diğer taraftan $g = 0$ ise sermaye miktarında herhangi bir değişme meydana gelmemiştir $\left(y_t = y_{t-1}\right)$. (3.15) eşitliği (3.16)'da yerine konduğunda,

$$y_t - y_{t-1} = g\left[\left(b_0 + b_1 x_t + u_t\right) - y_{t-1}\right] \tag{3.17.}$$

elde edilir. (3.17) eşitliği yeniden düzenlendiğinde

$$y_t = gb_0 + \left(gb_1\right)x_t + \left(1-g\right)y_{t-1} + \left(g\,u_t\right) \tag{3.18.}$$

olur. (3.18)'de elde edilen model Kısmi Uyarlama Modeli olarak adlandırılmaktadır.

3.4.3. Uyarlamalı Beklentiler Modeli

Cagan ve Friedman (1956) tarafından ele alınan bu model, Koyck modelindeki bazı eksiklikleri gidermek amacıyla farklı açıdan ele alınmıştır. Bu modelin temeli, bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişkenin beklenen değerine bağlı olduğu fikrine dayanmaktadır. x'in beklenen değeri x_t^* olmak üzere,

$$y_t = b_0 + b_1 x_t^* + u_t \tag{3.19.}$$

modeli ele alınmaktadır. Beklentisel değişken x_t^* doğrudan gözlemlenemediğine göre beklentilerin nasıl oluştuğuna dair,

$$x_t^* - x_{t-1}^* = j\left(x_t - x_{t-1}^*\right) \tag{3.20.}$$

eşitliği kullanılmıştır. Burada j , $0 < j < 1$ olmak üzere beklenti katsayısı olarak adlandırılmaktadır. Yani beklentiler her dönemde, değişkenin o dönem değeri ile bir önceki beklenen değeri arasındaki farkın j oranı kadar uyarlanmaktadırlar. (3.20.) eşitliği,

$$x_t^* = j\ x_t + (1-j)x_{t-1}^* \tag{3.21.}$$

formunda yeniden düzenlenebilir. Görüldüğü gibi x_t'nin beklenen değeri (x_t^*), x_t'nin bugünkü ve bir önceki değerlerinin ağırlıklı ortalamasıdır. $j = 1$ ise $x_t^* = x_t$ olur, bu da beklentinin tamamının aynı dönemde gerçekleştiği anlamına gelir. Diğer taraftan $j = 0$ ise $x_t^* = x_{t-1}^*$ olur, bunun anlamı ise beklentilerin durağan olduğudur, yani bugün geçerli olan koşullar, gelecekteki dönemlerde de korunacaktır ve geleceğin beklenen değeri, bugünün beklenen değerinin aynısıdır. (3.21) eşitliği (3.19)'da yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} y_t &= b_0 + b_1\left[j\ x_t + (1-j)x_{t-1}^*\right] + u_t \\ &= b_0 + b_1\, j\ x_t + b_1(1-j)x_{t-1}^* + u_t \end{aligned} \tag{3.22.}$$

elde edilir. (3.19) modeli bir dönem geri alınıp, $(1-j)$ ile çarpıldıktan sonra, (3.22) ile farkı alındığında ise

$$\begin{aligned} y_t &= j\ b_0 + j\, b_1 x_t + (1-j)y_{t-1} + u_t - (1-j)u_{t-1} \\ &= j\, b_0 + j\, b_1 x_t + (1-j)y_{t-1} + v_t \end{aligned} \tag{3.23.}$$

bulunur. Burada $v_t = u_t - (1-j)u_{t-1}$'dir. Başlangıçtaki model (3.19)'da b_1, x_t^*'daki bir birimlik değişimin y_t'de oluşturduğu ortalama değişimi ölçerken, $j\,b_1$ ise gerçek ya da gözlenen x_t değerlerindeki bir birim değişmenin y_t'deki ortalama değişimini ölçmektedir. (3.23) modeli tahmin edildikten sonra y_{t-1} katsayısından j 'nin bir tahmini elde edilir ve x_t'nin katsayısı $(j\,b_1)$, j 'ye bölünerek b_1 katsayısı tahmin edilir. (3.23) modelinde v_t hata terimi, y_{t-1} değişkeni ile ilişkilidir. Dolayısıyla EKK tahmin edicisi yanlı ve tutarsızdır (Gujarati, 2001).

Uyarlamalı beklenti modelinin değişkenleri de, Koyck ve kısmi uyarlama modellerindeki değişkenlere benzemektedir. Modellerin tümünde gecikme katsayılarının geometrik olarak azaldığı varsayılmaktadır. Ayrıca üç modelde otoregresiftir ve hata terimleri birbirlerine benzemektedir (Koutsoyannis, 1977).

3.5. Gecikmesi Sonlu Dağıtılmış Modeller

Gecikmesi sonlu dağıtılmış model,

$$y_t = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \mathbf{K} + b_p x_{t-p} + u_t \qquad t = p+1, \mathbf{K}, T$$

$$= \sum_{i=0}^{p} b_i x_{t-i} + u_t \qquad u_t \sim N(0, s_u^2) \qquad (3.24.)$$

şeklindedir. b_i katsayıları gecikme ağırlıkları olarak adlandırılır. (3.24) modeli matris formunda

$$y = Xb + u \qquad u \sim N(0, s_u^2 I) \qquad (3.25.)$$

şeklindedir. Burada

$$y = \begin{bmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \mathbf{M} \\ y_T \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \mathbf{M} \\ b_p \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p & \mathbf{K} & x_1 \\ x_{p+2} & x_{p+1} & \mathbf{K} & x_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ x_T & x_{T-1} & \mathbf{K} & x_{T-p} \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ \mathbf{M} \\ u_T \end{bmatrix}$$

olacak şekilde matris ve vektörlerdir. (3.24) modelinin direkt olarak EKK yöntemiyle tahmin edilmesi durumunda genellikle karşılaşılan problemler şöyle özetlenebilir:

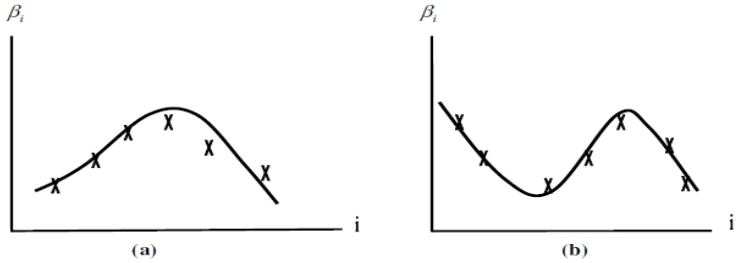
a) Bağımsız değişkenler arasında çoklu iç ilişki problemi olabilir. Çünkü, aynı değişkenin *p* gecikmesi modelde yer almaktadır.

b) Gecikme uzunluğu *p* bilinmemektedir. *p* bilinse bile bu sayı büyük ve örneklem miktarı küçükse parametreler tahmin edilemez.

Gecikmesi dağıtılmış modellerdeki bu tür problemleri çözmek amacıyla gecikmelerin sonlu veya sonsuz olması durumuna göre çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bu modellerin hemen hemen hepsi modellerdeki *b* 'ların davranışı hakkında bazı önbilgilerin tanımlanmasını gerektirmektedir.

3.5.1. Almon Modeli

Almon modeli, Koyck modeline alternatif olarak geliştirilen modellerden biridir. Koyck Modeli, varsayımlardan sapmalar gösterdiğinden ve gecikme uzunluğu arttıkça etkinin azalması bakımından kullanışlı olmayan bir modeldir. Koyck modelinde *b* 'ların sürekli azaldığı varsayılmaktadır. Ancak Şekil 3.2'de olduğu gibi *b* 'lar bazen azalabilir sonra artabilir veya tersi de olabilir.



Şekil 3.2. Almon polinom gecikme şeması

Gecikmesi dağıtılmış modellerin hemen hemen hepsi (3.24)'deki b 'ların davranışı hakkında bazı önbilgilerin tanımlanmasını gerektirmektedir. Genel olarak bu önbilgi stokastik ve stokastik olmayan düzeltilmiş önbilgi şeklinde sınıflandırılmaktadır (Vinod ve Ullah, 1981; Gujarati, 2001).

Fisher (1937) ilk olarak stokastik olmayan düzeltilmiş ön bilgiyi

$$\begin{aligned} b_i &= (p+1-i) \qquad 0 \le i \le p \\ &= 0 \qquad\qquad i > p \end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak vermiştir. Burada a herhangi bilinmeyen parametredir. (3.24) ile verilen modele (3.26)'nın yerleştirilmesiyle,

$$\begin{aligned} y_t &= \left[\sum_{i=0}^{p}(p+1-i)x_{t-i}\right]a + u_t \\ &= z_t a + u_t \end{aligned} \tag{3.27.}$$

elde edilir. Böylece a 'nın EKK tahmini (3.27) nolu modelden bulunabilir ve (3.26)' nın kullanılmasıyla b_i 'lerin tahmini bulunabilir. b_i üzerinde lineer stokastik olmayan önbilginin genelleştirilmesiyle,

$$b_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \mathbf{K} + a_s i^s \qquad p \ge s \ge 0 \tag{3.28.}$$

şeklinde *s-inci* dereceden bir polinom olarak yazılabilir. b_i gecikme ağırlıklarının bu yapısı Almon (1965) tarafından verilmiştir. Bu yüzden Almon gecikme polinomu olarak bilinmektedir. Örneğin, polinom ikinci dereceden ise,

$$b_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \qquad i = 0,1,2$$

olacaktır ve gecikme uzunluğu $s = 2$ için (3.24) modeli,

$$y_t = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + u_t$$

olarak elde edilir. b_i eşitlikleri elde edilip modelde yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} i &= 0 \qquad b_0 = a_0 \\ i &= 1 \qquad b_1 = a_0 + a_1 + a_2 \\ i &= 2 \qquad b_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 x_t + a_0 x_{t-1} + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-1} + a_0 x_{t-2} + 2a_1 x_{t-2} + 4a_2 x_{t-2} + u_t \\ y_t &= a_0 (x_t + x_{t-1} + x_{t-2}) + a_1 (x_{t-1} + 2x_{t-2}) + a_2 (x_{t-1} + 4x_{t-2}) + u_t \end{aligned} \tag{3.30.}$$

olur. (3.30) modelini daha basit bir forma indirmek için değişkenlerde,

$$\begin{aligned} Z_{0t} &= \sum_{i=0}^{2} x_{t-i} \\ Z_{1t} &= \sum_{i=0}^{2} i\, x_{t-i} \\ Z_{2t} &= \sum_{i=0}^{2} i^2 x_{t-i} \end{aligned}$$

dönüşümü uygulanabilir. Böylece $t = p+1, p+2, \mathbf{K}, T$ olmak üzere (3.30) ile verilen model,

$$y_t = a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + u_t \tag{3.31.}$$

formuna indirgenecektir. Eşitliklerden görüleceği gibi öncelikle x_t değerleri kullanılarak Z_{0t}, Z_{1t} ve Z_{2t} değişkenleri oluşturulacaktır. Elde edilen değişkenler ile EKK yöntemi kullanılarak a_0, a_1 ve a_2 parametreleri tahmin edilebilir. Son olarak a_i tahminlerinden yararlanılarak, (3.29) ile verilen eşitliklerden b_i parametreleri

elde edilir. Böylece ikinci derece polinom için Almon modelinde $p+1$ tane b parametresi, a 'lar yardımıyla tahmin edilmektedir. Polinom derecesi $s=2$ ve gecikme sayısı $p=2$ için yapılan bu açıklamaları genelleyebiliriz. (3.28) ile verilen b_i 'ler matris formunda,

$$b = Aa \tag{3.32.}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A:(p+1)\times(s+1)$ tipinde bir matris ve $a:(s+1)\times 1$ tipinde bir vektör olmak üzere;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{K} & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \mathbf{K} & 2^r \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \mathbf{O} & \text{M} \\ 1 & p & p^2 & \mathbf{K} & p^s \end{bmatrix}, \quad a=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \text{M} \\ a_s \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmaktadır.

$$X=\begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p & \mathbf{K} & x_1 \\ x_{p+2} & x_{p+1} & \mathbf{K} & x_2 \\ \text{M} & \text{M} & \mathbf{O} & \text{M} \\ x_T & x_{T-1} & \mathbf{K} & x_{T-p} \end{bmatrix}_{(T-p)\times(p+1)}$$

olmak üzere, X ve A matrislerinin ranklarının $(p+1)<(T-p)$ ve $(s+1)<(p+1)$ olduğu varsayılmaktadır. Eğer $s<p$ ise A 'nın rankı $(s+1)$ olur.

(3.32) ile verilen b üzerinde stokastik olmayan önbilgi altında (3.25)'deki b Almon metodu ile tahmin edebilir. (3.32), (3.25)'de yerine koyulduğunda,

$$\begin{aligned} y &= XAa + u \\ &= Za + u \end{aligned} \tag{3.33.}$$

modeli elde edilir. (3.33) eşitliği Almon Modeli olarak adlandırılmaktadır. Böylece a 'nın EKK tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\hat{a}_A &= (Z'Z)^{-1}Z'y \\ &= (A'X'XA)^{-1}A'X'y \end{aligned} \qquad (3.34.)$$

olur. Bu durumda b 'nın Almon tahmin edicisi ise,

$$\hat{b}_A = A\hat{a}_A \qquad (3.35.)$$

olur. $S = X'X$ olmak üzere, eğer $b = Aa$ doğru ise,

$$E(\hat{b}_A) = b \text{ ve } Var(\hat{b}_A) = A\,Var(\hat{a})\,A' = s_u^2 A(A'X'XA)^{-1}A' = s_u^2 A(A'SA)^{-1}A'$$

olur. Yani $\hat{b}_A$ en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE).

Almon yöntemi uygulanmadan önce belirlenmesi gereken bazı ön bilgiler vardır.

i. Maksimum gecikme uzunluğu p önceden belirlenmelidir. Gecikme uzunluğunu belirlemek için Schwarz Bilgi Kriteri (*SIC*), Akaike Bilgi Kriteri (*AIC*), $\overline{R}^2$ gibi çeşitli kriterler kullanılmaktadır.

ii. Gecikme uzunluğu p belirlendikten sonra polinomun derecesi s belirlenmelidir. Genel olarak polinomun derecesi gecikme sayısı i 'ye karşılık gelen b_i 'nin grafiğindeki bükülme noktaları sayısından en az bir fazla olmalıdır. Örneğin; Şekil 3.2(a)'daki bükülme noktası sayısı birdir. Öyleyse, ikinci dereceden bir polinom iyi bir yaklaşım olabilir. Ancak bükülme noktalarını önceden bilmek pek mümkün değildir. Dolayısıyla s'nin seçimi büyük ölçüde özneldir. Yalnızca bazı durumlarda öngörülebilir. Diğer taraftan s için birkaç değer belirledikten sonra hangi modelin daha uygun olabileceği konusunda anlamlılık testleri de yapılarak uygun bir değer seçilebilir.

iii. p ile s belirlendikten sonra Z değişkenleri kolaylıkla oluşturulabilir. Örneğin, $p=4$ ve $s=2$ için Z 'ler aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$Z_{0t}=\sum_{i=0}^{4}x_{t-i}=\left(x_t+x_{t-1}+x_{t-2}+x_{t-3}+x_{t-4}\right)$$
$$Z_{1t}=\sum_{i=0}^{4}i\,x_{t-i}=\left(x_{t-1}+2x_{t-2}+3x_{t-3}+4x_{t-4}\right)$$
$$Z_{2t}=\sum_{i=0}^{4}i^2x_{t-i}=\left(x_{t-1}+4x_{t-2}+9x_{t-3}+16x_{t-4}\right)$$

Görüldüğü gibi Z 'ler x 'lerin doğrusal bir fonksiyonudur. Dolayısıyla çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkabilir. (3.31) gibi modellerde tahmin edilen a 'ların standart hataları büyük olabilir, bu da katsayıların t istatistiği bakımından anlamsız çıkmasına neden olabilir. Ancak katsayılar tek tek hassas olarak tahmin edilemese bile, bu katsayıların doğrusal bileşimi (tahmin edilebilir fonksiyonları) daha hassas olarak tahmin edilebilir.

3.5.2. Gecikme Uzunluğunun Belirlenmesi

Klasik modellerde bağımsız değişkenlerin seçimi ve en uygun modelin seçimi söz konusu olurken, gecikmesi dağıtılmış modellerde hangi bağımsız değişkenlerin gecikmeli değerlerinin yer alacağını ve bunların gecikme uzunluklarının ne olacağını da belirlemek gerekmektedir. Bu nedenle x_t bağımsız değişkeninin en uygun gecikme uzunluğunun bulunması gerekmektedir. Uygun gecikme uzunluğunun hesaplanabilmesi için ise çeşitli yöntemler önerilmiştir. Çalışmalarda sıklıkla kullanılan üç yöntem ele alnacaktır.

3.5.2.1. Düzeltilmiş Belirleyicilik Katsayısı $\left(\overline{R}^2\right)$

Modele eklenen her bağımsız değişkenin ilave bir açıklama getirmesi ile birlikte belirleyicilik katsayısının yükselmesi beklenmektedir. Ancak eklenen

değişken model için anlamlı değilse düzeltilmiş belirleyicilik katsayısı $\left(\overline{R}^2\right)$ aynı kalacaktır. Dolayısıyla farklı gecikmeli değişkenlerin olduğu modeller karşılaştırıldığında $\overline{R}^2$ değeri büyük olan model tercih edildiğinde gecikme sayısı da belirlenmiş olur. Kullanılan gözlem sayısı n ve tahmin edilen parametre sayısı k olmak üzere düzeltilmiş belirleyicilik katsayısı,

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{SSE/n-k}{SST/n-1} \tag{3.36}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada,

$$SSE = \sum_{i=1}^{T} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \tag{3.37.}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{T} \left(y_i - \bar{y}\right)^2 \tag{3.38.}$$

eşitlikleri yardımıyla bulunur. Aynı zamanda (2.11)'den,

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\hat{s}_u^2 (n-1)}{SST} \tag{3.39.}$$

olarak yazılabilir. Bağımlı değişken aralarında seçim yapılacak tüm modeller için aynı olacağından SST değişmeyecektir. Dolayısıyla $\overline{R}^2$ ile $\hat{s}_u^2$ arasında bir ilişki vardır. Modeller karşılaştırıldığında ise her zaman $\overline{R}^2$ değeri büyük olan model tercih edilir. Bu kriter genellikle EKK ile tahmin edilmiş regresyonlarda kullanılmaktadır. Bayesyen yaklaşımlarında ise zayıf kaldığı görülmektedir (Burnham ve Anderson, 1998).

3.5.2.2. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike bilgi kriteri (Akaike, 1974) modele eklenen değişkenleri yarattığı yükselmeye sınırlama getirerek düzenlenmiştir. Ayrıca bu kriter, bir örneklem verisinden elde edilen parametre tahminlerinin farklı örneklemler için de kullanılmasından kaynaklanan doğruluk kaybının bir ölçümüdür. Kullanılan gözlem sayısı n ve tahmin edilen parametre sayısı k olmak üzere,

$$AIC = e^{2k/n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n} = e^{2k/n} \frac{SSE}{n} \tag{3.40.}$$

olarak tanımlanır. Matematiksel olarak kolaylık sağlaması için eşitliğin iki tarafının doğal logaritması alınarak,

$$\ln AIC = \left(\frac{2k}{n}\right) + \ln\left(\frac{SSE}{n}\right) \tag{3.41.}$$

elde edilebilir. Ayrıca burada $2k/n$ terimi ceza faktörü (penalty factor) olarak da adlandırılır. Gecikme uzunluğuna karar verirken her zaman en küçük AIC değerini veren model tercih edilir. Böylelikle gecikme sayısına karar verilmiş olur. Akaike bilgi kriterinin diğer bir özelliği ise modelde kullanılan örneklem büyüklüğü içinde değil aynı zamanda bu örneklem dışındaki gelecek tahmini için de geçerlidir.

3.5.2.3. Schwarz Bilgi Kriteri (SIC)

Alternatif bir yaklaşım olarak Schwarz bilgi kriteri, Akaike bilgi kriteri ile benzerlik göstermektedir. Bu kriter,

$$SIC = n^{k/n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n} = n^{k/n} \frac{SSE}{n} \tag{3.42.}$$

şeklinde tanımlanır. Logaritmik formda ise;

$$\ln SIC = \frac{k}{n} \ln n + \ln\left(\frac{SSE}{n}\right) \tag{3.43.}$$

şeklindedir. Akaike bilgi kriterine benzer şekilde k/n ceza faktörüdür. Schwarz bilgi kriteri, Akaike bilgi kriterine göre daha hassastır ve her zaman Akaike bilgi kriterinden daha küçük olarak elde edilmektedir. Ayrıca Akaike bilgi kriterinde olduğu gibi modelde kullanılan örneklem büyüklüğü içinde değil aynı zamanda bu örneklem dışındaki gelecek tahmini için de geçerlidir.

Modele eklenen her yeni bağımsız değişkenin bağımsızlık gücü ne kadar yüksekse AIC ve SIC değerleri o kadar düşer (Kutlar, 2000).

3.5.3. Polinomun Derecesinin Belirlenmesi

Almon modelini oluşturmak için elde edilen yeni b parametreleri a parametrelerine bağlıdır. Dolayısıyla b 'ları doğru tahmin edebilmemiz doğru a 'lara bağlıdır. Bu da polinomun derecesinin doğru belirlenmesi gerektiğini göstermektedir.

Basit bir yaklaşımla, polinomun derecesi gecikme sayısı i 'ye karşılık gelen b_i 'nin grafiğindeki bükülme noktaları sayısından en az bir fazla olarak belirlenmektedir. Ancak bu noktaları her zaman belirlemek pek mümkün değildir ve bu yaklaşım oldukça özneldir. Eğer maksimum gecikme uzunluğu p biliniyorsa polinomun derecesi s ardışık bir hipotez testi yöntemi ile bulunabilir.

$p = s$ varsayımı ile başlanarak, polinomun derecesi ardışık olarak düşürülüp, parametre kısıtları uygulanarak likelihood oran testi veya t-testi kullanılarak

hipotezler test edilebilir. Polinomun derecesini, reddedilemeyen son sıfır hipotezindeki sayı olarak belirlemek yeterlidir. Ardışık olarak test edilecek hipotezler:

$$H_0^1 : s = p-1,$$
$$H_0^2 : s = p-2,\ H_0^1 \text{ doğru ise}$$
$$\mathbb{M} \qquad \mathbb{M}$$
$$H_0^i : s = p-i,\ H_0^1, \mathbf{K}, H_0^{i-1} \text{ doğru ise}$$
$$\mathbb{M} \qquad \mathbb{M}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi her bir hipotez bir öncekinin doğru olması koşuluyla test edilmektedir. H_0^i hipotezini test etmek için uygun test istatistiği,

$$l_i = \frac{SSE_{p,p-i} - SSE_{p,p-i+1}}{\hat{s}_{p,p-i+1}} \tag{3.44.}$$

olarak bulunur. Burada gecikme uzunluğu p ve polinomun derecesi s olan hata kareler toplamı,

$$SSE_{p,s} = \left(y - Z\hat{a}_s\right)'\left(y - Z\hat{a}_s\right) \tag{3.45.}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca,

$$\hat{s}^2_{p,s} = \frac{SSE_{p,s}}{T-s-1} \tag{3.46}$$

dir. Eğer $H_0^1, \mathbf{K}, H_0^i$ doğru ise, l_i istatistiği 1 ve $T-p+i-2$ serbestlik dereceli merkezi F dağılımına sahiptir. Çizelge 3.1'de elde edilmiş örnek bir çizelgeden hipotez testi daha basit bir şekilde anlaşılabilir.

Çizelge 3.1. Seçilen polinom derecelerine göre test istatistiği değerleri

i	H_0^i	l_i
1	$s=7$	0.064
2	$s=6$	0.012
3	$s=5$	0.006
4	$s=4$	0.728
5	$s=3$	1.541
6	$s=2$	5.472
7	$s=1$	9.275
8	$s=0$	1.128

$F_{(1,..,0.05)} \cong 4$

$F_{(1,..,0.01)} \cong 7$

Çizelge 3.1'de 8 gecikme uzunluğuna karşılık l_i test istatistiği değerleri ve 0.05 anlamlılık düzeyindeki *F tablo* değeri verilmiştir. Buna göre 0.05 anlamlılık düzeyinde H_0^6 hipotezi reddedilir ve polinom derecesi $r=8-5=3$ olarak seçilir (Judge, 1988).

4. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK OLMAYAN KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİ İLE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KOMBİNASYONLARI

4.1. Almon-Kısıtlı En Küçük Kareler

a 'nın EKK tahmin edicisi $(\hat{a}_A)$, (3.34)'deki gibidir. Buradan b 'nın Almon tahmin edicisi ise (3.35) ile verilmiştir. $\hat{b}_A$ 'yı elde etmenin diğer bir yolu ise KEKK yöntemini uygulamakdır. A 'nın kolonları lineer bağımsız olduğundan,

$$M = I - A(A'A)^{-1}A' \tag{4.1.}$$

şeklinde idempotent bir matris tanımlanabilir. Bu durumda $b = Aa$ olması

$$Mb = 0 \tag{4.2.}$$

olmasını gerektirir. (3.25)'de verilen gecikmesi sonlu dağıtılmış lineer model ile (4.2)'deki kısıtın birlikte çözülmesiyle b 'nın Almon-KEKK tahmin edicisi

$$\hat{b}_R = \hat{b} - S^{-1}M'\left[MS^{-1}M'\right]^{+}M\,\hat{b} \tag{4.3.}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\hat{b}$, b 'nın EKK tahmin edicisidir ve $(^{+})$ simgesi genelleştirilmiş tersi göstermektedir. Diğer taraftan, M matrisi, Terasvirta (1976)'nın kullanılmasıyla,

$$M = I - A(A'A)^{-1}A' = R'(RR')^{-1}R = M^2 \tag{4.4.}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $R:(p-s)\times(p+1)$ tipinde aşağıdaki gibi bilinen bir matristir.

$$R=\begin{bmatrix} (-1)^0\binom{s+1}{0} & (-1)^1\binom{s+1}{1} & \mathbf{K} & (-1)^{s+1}\binom{s+1}{s+1} & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & (-1)^0\binom{s+1}{0} & \mathbf{K} & (-1)^{s}\binom{s+1}{s} & (-1)^{s+1}\binom{s+1}{s+1} & \mathbf{K} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & & (-1)^{s+1}\binom{s+1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$Mb = 0$ olması aynı zamanda,

$$Rb = 0 = RA\,a \tag{4.5.}$$

olmasını gerektirir. (3.25) ile (4.5) birlikte çözülürse, yani $(y - Xb)'(y - Xb)$, $Rb = 0$ kısıtına karşı minimize edilirse b 'nın Almon-KEKK tahmin edicisi,

$$\hat{b}_R = \hat{b} - S^{-1}R'\left[R\,S^{-1}R'\right]^{-1} R\,\hat{b} \tag{4.6.}$$

olarak bulunur. (4.6) eşitliği, (3.35) ve (4.3) ile özdeştir. $Rb = 0$ doğru değilse $\hat{b}_R$'de yanlı olacaktır. Ayrıca Vinod ve Ullah (1981) tarafından $\hat{b}_R$ ve $\hat{b}$ tahmin edicilerinin MSE matrisleri karşılaştırılarak $MSE(\hat{b}_R) - MSE(\hat{b})$ farkının nnd olması için gerek ve yeter koşulun $b'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} \le s_u^2$ olduğunu gösterilmiştir.

4.2. Almon-Ridge Tahmin Edici

$\hat{a}_A$ yardımıyla (3.35)'de elde edilen $\hat{b}_A$'nın bazı dezavantajlarından dolayı karşılaşılan problemleri gidermek için Hoerl ve Kennard (1970)'de ridge tahmin edici yaklaşımı alternatif olarak ele alınmıştır (Maddala,1974; Vinod ve Ullah, 1981; Yeo ve Trivedi, 1989; Chanda ve Maddala, 1984).

(3.33)'deki Almon modelinden a 'nın ridge tahmin edicisi,

$$\hat{a}_k = (Z'Z + kI)^{-1} Z'y$$
$$= (A'SA + kI)^{-1} A'X'y \qquad k \geq 0 \tag{4.7.}$$

olarak elde edilir. Buradan (3.25) ile verilen gecikmesi dağıtılmış modeldeki b 'nın Almon-ridge tahmin edicisi,

$$\hat{b}_k = A\hat{a}_k \tag{4.8.}$$

olur. $G_k = (Z'Z + kI)^{-1}$ olmak üzere Vinod ve Ullah (1981)'de (4.7)'deki tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla

$$V(\hat{a}_k) = s_u^2 (Z'Z + kI)^{-1} Z'Z(Z'Z + kI)^{-1} = s_u^2 G_k Z'ZG_k \tag{4.9.}$$

$$Bias(\hat{a}_k) = -k(Z'Z + kI)^{-1} a = -kG_k a \tag{4.10.}$$

olarak verilmiştir. (4.9) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla,

$$MSE(\hat{a}_k) = G_k (s_u^2 Z'Z + k^2 a a') G_k \tag{4.11.}$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$MSE(\hat{a}_A) = s_u^2 (Z'Z)^{-1} \tag{4.12.}$$

olmak üzere Vinod ve Ullah (1981) tarafından $\hat{a}_A$ ve $\hat{a}_k$ tahmin edicilerinin MSE matrisleri arasındaki karşılaştırma,

$$MSE(\hat{a}_k) \leq MSE(\hat{a}_A) \Leftrightarrow a' \left[(A'SA)' + 2k^{-1} I \right]^{-1} a \leq s_u^2 \tag{4.13.}$$

olarak gösterilmiştir. Ancak, a 'nın ridge tahmin edicisi ve Lindley ve Smith tarafından verilen genişletilmiş şekli gecikmesi dağıtılmış modellerde çok iyi sonuçlar vermemiştir. (Maddala, 1974). Bu nedenle alternatif tahmin yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

4.3. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici

Parametreler hakkında ön bilgiye dayanan modified ridge tahmin edicinin genel lineer modeller için tanımlanan formu (2.34)'deki gibidir. (3.33) ile verilen Almon modelindeki a 'nın modified ridge tahmin edicisi ise,

$$\hat{a}_m(k) = (Z'Z + kI)^{-1}(Z'y + kb_0) \qquad k \geq 0 \tag{4.14.}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (2.34)'de olduğu gibi b_0 ile ön bilgi ifade edilmektedir. Çoklu iç ilişki problemini gidermek için b_0 ön bilgisi, $b_0 = \hat{a}_k$ olarak tanımlanırsa, (4.14) eşitliği,

$$\begin{aligned} \hat{a}_m(k) &= (Z'Z + kI)^{-1}(Z'y + k\hat{a}_k) \\ &= T_k \hat{a}_A + k(Z'Z + kI)^{-1}\hat{a}_k \\ &= T_k \hat{a}_A + (I - T_k)\hat{a}_k \end{aligned} \tag{4.15.}$$

formuna indirgenir. Burada $\hat{a}_k$, (4.7)'de tanımlandığı gibidir. Ayrıca $T_k = (Z'Z + kI)^{-1}Z'Z$ olmak üzere negatif olmayan tüm k değerleri için pozitif tanımlı (pd) bir matristir. Böylece, (3.25) modelindeki b 'nın Almon-modified ridge tahmin edicisi (4.16)'da tanımlandığı gibidir.

$$\hat{b}_m(k) = A\hat{a}_m(k) \tag{4.16.}$$

4.4. Almon-Kısıtlı Ridge Tahmin Edici

Genel lineer model için Gross (2003)'de tanımlanan kısıtlı ridge tahmin edici (2.42)'de verildiği gibidir. Ayrıca Kaçıranlar ve ark. (2011)'de bu tahmin edicinin farklı bir formunu (2.43)'deki gibi tanımlanmıştır. Bu yeni formdan yararlanarak Almon tahmin edici ile kısıtlı ridge tahmin edicinin kombinasyonu Almon-kısıtlı ridge tahmin edici olarak tanımlanabilir. Bunun için (4.6) ile verilen Almon-KEKK tahmin edici ile (2.43) formunun birleştirilmesiyle (3.25) modelindeki b 'nın Almon-kısıtlı ridge tahmin edicisi

$$\hat{b}_R(k) = \hat{b}_k - G_k M'\left[MG_k M'\right]^{+} M\hat{b}_k \qquad k \geq 0 \qquad (4.17.)$$

olarak elde edilir. Burada $\hat{b}_k$, (4.8)'de verildiği gibidir. (2.43)'deki tahmin edici ve (4.5) eşitliği göz önünde bulundurularak (4.17)'deki tahmin edici,

$$\hat{b}_R(k) = \hat{b}_k - G_k R'\left[RG_k R'\right]^{-1} R\hat{b}_k \qquad k \geq 0 \qquad (4.18)$$

şeklinde de verilebilir.

4.5. Almon-Liu Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki problemini gidermek için daha önce ele aldığımız ridge tahmin edici pratikte yaygın kullanıma sahiptir. Bu tahmin edicinin avantajlarını Almon modelinde kullanmak için Almon-ridge tahmin edici (4.7)'de tanımlanmıştır. Ancak genel lineer modelde olduğu gibi Almon-ridge tahmin edici k 'nın lineer bir fonksiyonu olmadığından dolayı k ' nın seçimi zordur. Bu düşünceden hareketle (3.33)' deki Almon modeli için (2.55) ile verilen Liu tahmin edicisi tanımlanabilir. (3.33) modelindeki a 'nın Liu tahmin edicisi,

$$\hat{a}_d = (Z'Z + I)^{-1}(Z'y + d\hat{a}_A) \qquad 0 < d < 1$$
$$= (A'SA + I)^{-1}(A'X'y + d\hat{a}_A) \tag{4.19}$$

olarak tanımlanır. Bu tahmin edici

$$\hat{a}_d = (Z'Z + I)^{-1}(Z'Z + dI)\hat{a}_A$$
$$= (A'SA + I)^{-1}(A'SA + dI)\hat{a}_A$$
$$= G_d\hat{a}_A \tag{4.20}$$

şeklinde de verilebilir. Burada $G_d = (A'SA + I)^{-1}(A'SA + dI)$ olarak ifade edilmiştir. Dolayısıyla (3.25) modelindeki b ' nın Almon-Liu tahmin edicisi de $\hat{b}_d = A\hat{a}_d$ olur. Almon-Liu tahmin edicisi d 'nin lineer bir fonksiyonu olduğundan d 'nin seçimi kolaydır. $\hat{a}_d$ 'nin varyansı ve yanlılığı sırasıyla,

$$Var(\hat{a}_d) = s_u^2 G_d (A'SA)^{-1} G_d$$

$$Bias(\hat{a}_d) = -(1-d)(A'SA + I)^{-1} a$$

olmak üzere MSE matrisi,

$$MSE(\hat{a}_d) = V(\hat{a}_d) + [Bias(\hat{a}_d)][Bias(\hat{a}_d)]'$$
$$= s_u^2 G_d (A'SA)^{-1} G_d' + \left((1-d)^2 (A'SA + I)^{-1} a a' (A'SA + I)^{-1}\right)$$

olarak bulunur. (4.12)'de verilen $MSE(\hat{a}_A) = s_u^2 (A'SA)^{-1}$ eşitliğinden yararlanırsak,

$$MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d) = s_u^2 \left[(A'SA)^{-1} - G_d (A'SA)^{-1} G_d'\right] - (1-d)^2 (ASA + I)^{-1} a a' (A'SA + I)^{-1}$$

olarak elde edilir.

Farebrother (1976), Sakallıoğlu ve ark. (1996)'nın kullanılmasıyla $MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d)$ farkının pd olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.1. $MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d)$ farkının pd olması için gerek ve yeter koşul

$$a'\left[I + \frac{1+d}{2}\Lambda^{-1}\right]^{-1} a < \frac{2s_u^2}{1-d}$$

olmasıdır.

İspat. $A'SA$ simetrik bir matris olduğundan $T'A'SAT = \Lambda$ olacak şekilde ortogonal bir T matrisi vardır. Burada, $T'T = TT' = I$, $\Lambda = diag(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_{s+1})$ $A'SA$'nın öz değerlerinden oluşan bir matris ve T, $A'SA$'nın öz vektörlerinden oluşan bir matristir. Bu ayrışım altında,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d) &= s_u^2\left[\Lambda^{-1} - (\Lambda+I)^{-1}(\Lambda+dI)\Lambda^{-1}(\Lambda+dI)(\Lambda+I)^{-1}\right] \\ &\quad - (1-d)^2(\Lambda+I)^{-1}aa'(\Lambda+I)^{-1} \\ &= (\Lambda+I)^{-1}W(\Lambda+I)^{-1} \end{aligned}$$

olur. Burada, $W = (1-d)\left\{\left[2s_u^2 I + (1+d)s_u^2\Lambda^{-1}\right] - (1-d)aa'\right\}$ olarak kısaltılmıştır. $c = \frac{2s_u^2}{1-d}$ ve $A = I + \frac{1+d}{2}\Lambda^{-1}$ olmak üzere, $W = (1-d)^2\left[cA - aa'\right]$ şeklinde yazılabilir. Farebrother (1976)' nın kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

$(1+d)s_u^2\Lambda^{-1}$ ifadesi pd bir matris olduğundan $MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d)$ farkının pd olması için yeter koşul aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.2. $d > 1 - \frac{2s_u^2}{a'a}$ ise $MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d)$ pd dir.

İspat. $MSE(\hat{a}_A) - MSE(\hat{a}_d)$ farkının pd olması için $W > 0$ olmalıdır. $(1+d)s_u^2\Lambda^{-1}$ pd bir matris olduğundan, $2s_u^2 I - (1-d)aa' > 0$ olması yeterlidir. Farebrother (1976)' nın kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

4.6. Almon-Temel Bileşenler Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki olması durumunda uygulanan temel bileşenler regresyon, parametre uzayında boyut indirgenmesi sağlamaktadır. Elde edilen bağımsız değişkenler dik olur. Boyut indirgenmesi ile elde edilen TB tahmin edicisinin varyansı EKK'nın varyansından daha küçük olur. Buradan yola çıkarak TB tahmin edicisinin avantajları Almon modeli için de ele alınabilir. Bunun için Almon tahmin edici ile TB tahmin edicinin kombinasyonu elde edilmelidir.

$Z'Z$ simetrik olduğundan, $T'Z'ZT = \Lambda = diag(l_1, l_2, ..., l_{s+1})$ olacak şekilde ortogonal bir $T = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_{s+1}]$ matrisi vardır. $Z'Z$ nin en büyük r özdeğerine karşılık gelen özvektörlerin matrisi $T_r = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_r]$ olmak üzere, $T_{(s+1)-r} = [t_{r+1}, t_{r+2}, \mathbf{K}, t_{s+1}]$ de T 'nin geriye kalan kolonlarından oluşur. Böylece,

$T_r'Z'ZT_r = \Lambda_r = diag(l_1, l_2, ..., l_r)$

$T'_{(s+1)-r}Z'ZT_{(s+1)-r} = \Lambda_{(s+1)-r} = diag(l_{r+1}, l_{r+2}, ..., l_{s+1})$ olur. Parçalanmış modelle, (3.33) modelinin göz önüne alınmasıyla a ' nın Almon-TB tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{a}_{TB} &= T_r(T_r'Z'ZT_r)^{-1}T_r'Z'y \\ &= T_r\Lambda_r^{-1}T_r'Z'y \end{aligned} \qquad (4.21.)$$

ile verilir. Böylece (3.25)'deki gibi bir gecikmesi dağıtılmış modeldeki b 'nın Almon-TB tahmin edicisi $\hat{b}_{TB} = A\hat{a}_{TB}$ olarak elde edilir.

4.7. Almon-$(r-k)$ Sınıf Tahmin Edici

Baye ve Parker (1984), genel lineer modelde temel bileşenler tahmin ediciyi geliştirmek için temel bileşenler regresyonuna ridge metodunu uygulamıştır. Böylece özel durumda EKK, ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerini veren $r-k$ sınıf tahmin edici olarak adlandırılan bir tahmin edici sınıfını elde etmiştir. $r-k$ sınıf tahmin edicinin MSE kriterine göre hangi koşullarda EKK, Ridge ve TB tahmin edicilerinden iyi olduğu Sarkar (1996) tarafından verilmiştir. Şimdi, birçok avantaja sahip $r-k$ sınıf tahmin edici ile Almon tahmin edicinin kombinasyonunu ele alalım. (3.33) ile verilen Almon modelinden, a 'nın $(r-k)$ sınıf tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\hat{a}_r(k) &= T_r\left(T_r'Z'ZT_r + kI_r\right)^{-1}T_r'Z'y \\ &= T_r\left(\Lambda_r + kI_r\right)^{-1}T_r'Z'y \end{aligned} \qquad (4.22.)$$

olarak tanımlanr. Buradan, b 'nın Almon- $(r-k)$ sınıf tahmin edicisi ise $\hat{b}_r(k) = A\hat{a}_r(k)$ olur. Genel lineer modelde olduğu gibi bazı özel durumlar

$\hat{a}_{s+1}(0) = \hat{a}$, Almon tahmin edici,

$\hat{a}_r(0) = \hat{a}_{TB}$, TB tahmin edici,

$\hat{a}_{s+1}(k) = \hat{a}_k$, ridge tahmin edici

olur. Almon- $(r-k)$ sınıf tahmin edicide ridge tipi tahmin ediciler gibi k parametresine bağlı olduğundan k 'nın seçim problemi ile karşılaşılmaktadır. Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001)' de genel lineer modelde özel durumda EKK, TB ve Liu tahmin edicileri veren ve MSE kriterine göre belirli koşullarda EKK, TB ve Liu tahmin ediciden iyi olduğu gösterilen bir $r-d$ sınıf tahmin edici tanımlamıştır. Dolayısıyla Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin ediciye alternatif olarak $r-d$ sınıf tahmin edici de göz önünde bulundurulabilir.

4.8. Almon-$(r-d)$ Sınıf Tahmin Edici

(2.66) ile verilen $(r-d)$ sınıf tahmin edici ile Almon tahmin edicinin kombinasyonunu yardımıyla (3.33) modelindeki a 'nın $(r-d)$ sınıf tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{a}_r(d) &= T_r\left(T_r'Z'ZT_r + I_r\right)\left(T_r'Z'y + dT_r'\hat{a}_{TB}\right)\\ &= T_r\left(\Lambda_r + I_r\right)\left(I_r + d\Lambda_r^{-1}\right)T_r'Z'y \qquad 0 < d < 1 \end{aligned} \tag{4.23.}$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{a}_{TB}$, a 'nın TB tahmin edicisidir ve $\hat{a}_r(d)$ özel durumda EKK, TB ve Liu tahmin ediciyi verir:

$\hat{a}_{s+1}(1) = \hat{a}$, Almon tahmin edici,

$\hat{a}_r(1) = \hat{a}_{TB}$, TB tahmin edici,

$\hat{a}_{s+1}(d) = \hat{a}_d$, Liu tahmin edici .

Buradan (3.25)'deki gibi bir gecikmesi dağıtılmış modeldeki b 'nın Almon-$(r-d)$ sınıf tahmin edicisi $\hat{b}_r(d) = A\hat{a}_r(d)$ olarak elde edilir. d parametresinin seçimi k parametresinden daha kolay olduğu için ve Liu tahmin edicinin avantajlarını taşıdığı için Almon-$(r-d)$ tahmin edici Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin ediciye göre daha kullanışlı olduğu söylenebilir.

4.9. Almon-Modified Liu Tahmin Edici

Li ve Yang (2012)'de parametreler hakkında ön bilgiye dayanan modified Liu tahmin edicinin genel lineer model için tanımlanan formu (2.62)'de olduğu gibidir. Bu tahmin ediciden yararlanarak, (3.33) modelindeki a 'nın Almon-modified Liu tahmin edicisi

$$\hat{a}_m(d) = (Z'Z + I)^{-1}(Z'Z + dI)\hat{a}_A + (1-d)(Z'Z + I)^{-1}b_0 \qquad (4.24.)$$

şeklinde tanımlanır. Burada çoklu iç ilişki problemini gidermek için b_0 ön bilgisi olarak, $b_0 = \hat{a}_d$ alındığında (4.24) eşitliği,

$$\hat{a}_m(d) = F_d\hat{a} + (I - F_d)\hat{a}_d \qquad (4.25.)$$

formuna indirgenmiş olur. Burada, $F_d = (Z'Z + I)^{-1}(Z'Z + dI)$ olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde gecikmesi dağıtılmış modellerde b 'nın Almon-modified Liu tahmin edicisi $\hat{b}_m(d) = A\hat{a}_m(d)$ olarak elde edilir.

4.10. Sayısal Örnek

Bu çalışmada Almon (1965)'den alınan, 1953-1967 yıllarına ait üçer aylık veriler kullanılmıştır. Bağımsız değişkenin kaynaklar ve bağımlı değişkenin sermaye harcamaları olduğu veri setinin göz önüne alınmasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Öncelikle Schwartz bilgi kriterinin kullanılmasıyla en küçük *SIC* değeri 12.75, gecikme sayısı $p = 8$ için elde edilmiştir. Böylece 8 gecikme eklenerek *X* matrisi oluşturulmuştur. Bundan sonra, daha önce tanımlanan *A* matrisi ile *X* matrisi çarpımından (3.33)'de verilen *Z* matrisi elde edilmiştir. (3.28)' deki b_i üzerindeki önbilginin beşinci dereceden bir polinom $s = 5$ olması varsayımıyla başlanarak, katsayıların anlamlılık testleri yapıldıktan sonra, optimal polinomun derecesinin 2 olması ($s = 2$) karar verilmiştir. Dolayısıyla tahmin edilecek model,

$$y_t = b_0x_t + b_1x_{t-1} + b_2x_{t-2} + b_3x_{t-3} + b_4x_{t-4} + b_5x_{t-5} + b_6x_{t-6} + b_7x_{t-7} + b_8x_{t-8} + u_t$$

olarak elde edilir.

Ayrıca bu model d sabit terimi eklenerek de tahmin edilebilir. Z matrisi için koşul sayısına bakıldığında 63.5 elde edilmiştir. Bu da Z' nin kolonları arasındaki yüksek bağımlılığı işaret etmektedir. Buna göre sabit terimli bir model için b parametrelerinin EKK, Almon ve TB tahminleri Çizelge 4.12'de verilmiştir. Çizelge 4.1'de EKK ve EKK yöntemine dayanan Almon yönteminin uygun sonuçlar vermediği görülür. Bu nedenle Almon-TB tahmin edici uygulanmıştır. Ancak, katsayıların iktisadi beklentilerin tersine artan trende sahip olduğu görülmüştür.

Almon-TB tahmin edicinin ardından (4.8)'de verilen Almon-ridge tahmin edici yaklaşımı alternatif olarak ele alınmıştır. Farklı k değerleri için Almon-ridge tahmin edici kullanılarak elde edilen katsayıların tahminleri Çizelge 4.2 ile verilmiştir. Burada k =0.2 ridge izi yardımıyla bulunan k değeridir. Almon-ridge tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminlerinin artan bir trende sahip olduğu görülür. $k = 0.003$ için koşul sayısının makul seviyeye indiği ve katsayıların iktisadi beklentilerle daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Almon-ridge tahmin edicinin ardından Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin edici ve Almon-modified ridge tahmin ediciler de aynı k değerleri için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4'de verilmiştir. Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin edicinin Almon-ridge ve Almon-TB tahmin edicilerinin sonuçlarına benzediği ve k 'nın küçük değerleri için Almon-modified ridge tahmin edicinin daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çizelge 4.1. EKK, Almon ve Almon-TB tahmin edicilerinin katsayı tahminleri

Katsayılar	**EKK**	**Almon**	**Almon-TB**
Sabit	62.464	73.0733	105.071
$\hat{b}_0$	0.063	0.096	0.036
$\hat{b}_1$	0.087	0.123	0.047
$\hat{b}_2$	0.228	0.140	0.061
$\hat{b}_3$	0.186	0.146	0.079
$\hat{b}_4$	0.132	0.142	0.100
$\hat{b}_5$	0.018	0.127	0.124
$\hat{b}_6$	0.138	0.102	0.152
$\hat{b}_7$	0.066	0.067	0.183
$\hat{b}_8$	0.053	0.021	0.217
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	0,971	0,964	0,999

Çizelge 4.2. Almon-ridge tahmin edici ile elde edilen çeşitli *k* değerleri için katsayı tahminleri

Katsayılar	$k = 0.001$	$k = 0.002$	$k = 0.003$	$k = 0.2$
$\hat{b}_0$	0.115	0.118	0.120	0.056
$\hat{b}_1$	0.127	0.128	0.127	0.065
$\hat{b}_2$	0.134	0.132	0.130	0.074
$\hat{b}_3$	0.134	0.131	0.129	0.086
$\hat{b}_4$	0.129	0.125	0.123	0.098
$\hat{b}_5$	0.117	0.114	0.113	0.113
$\hat{b}_6$	0.099	0.098	0.098	0.128
$\hat{b}_7$	0.074	0.077	0.080	0.146
$\hat{b}_8$	0.044	0.052	0.056	0.164
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	0.972	0.974	0.975	0.930
Koşul sayısı	41.227	32.817	28.078	3.952

Çizelge 4.3. Çeşitli k değerleri için Almon-$(r-k)$ sınıf tahmin edici ile elde edilen katsayı tahminleri (Temel bileşen sayısı $r=1$ olarak bulunmuştur.)

Katsayılar	$k=0.001$	$k=0.002$	$k=0.003$	$k=0.2$
Sabit	106.1434	107.2149	108.2856	305.895
$\hat{b}_0$	0.036	0.036	0.036	0.034
$\hat{b}_1$	0.047	0.047	0.047	0.044
$\hat{b}_2$	0.061	0.061	0.061	0.057
$\hat{b}_3$	0.079	0.079	0.079	0.074
$\hat{b}_4$	0.100	0.100	0.100	0.094
$\hat{b}_5$	0.124	0.124	0.124	0.116
$\hat{b}_6$	0.152	0.152	0.152	0.142
$\hat{b}_7$	0.183	0.183	0.182	0.171
$\hat{b}_8$	0.217	0.217	0.217	0.203
$\sum_{i=0}^{8}\hat{b}_i$	**0.998**	**0.998**	**0.997**	**0.935**

Çizelge 4.4. Çeşitli k değerleri için Almon-modified ridge tahmin edici ile elde edilen katsayı tahminleri

Katsayılar	$k=0.001$	$k=0.002$	$k=0.003$	$k=0.2$
Sabit	57.3695	47.9143	42.8355	84.7916
$\hat{b}_0$	0.108	0.115	0.118	0.076
$\hat{b}_1$	0.126	0.128	0.129	0.083
$\hat{b}_2$	0.137	0.135	0.134	0.091
$\hat{b}_3$	0.140	0.136	0.134	0.099
$\hat{b}_4$	0.134	0.130	0.127	0.108
$\hat{b}_5$	0.121	0.117	0.115	0.117
$\hat{b}_6$	0.100	0.098	0.097	0.127
$\hat{b}_7$	0.070	0.072	0.074	0.137
$\hat{b}_8$	0.033	0.040	0.044	0.148
$\sum_{i=0}^{8}\hat{b}_i$	**0.968**	**0.972**	**0.973**	**0.986**

Çizelge 4.5. $0 < d < 1$ için Almon-Liu tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri

Katsayılar	$d = 0.1$	$d = 0.3$	$d = 0.4$	$d = 0.5$	$d = 0.6$	$d = 0.7$	$d = 0.8$	$d = 0.9$
$\hat{b}_0$	0.039	0.052	0.058	0.064	0.071	0.077	0.083	0.090
$\hat{b}_1$	0.048	0.065	0.073	0.082	0.090	0.098	0.106	0.115
$\hat{b}_2$	0.059	0.077	0.086	0.095	0.104	0.113	0.122	0.131
$\hat{b}_3$	0.070	0.087	0.095	0.104	0.112	0.121	0.129	0.137
$\hat{b}_4$	0.082	0.095	0.102	0.109	0.115	0.122	0.128	0.135
$\hat{b}_5$	0.095	0.102	0.106	0.109	0.113	0.116	0.120	0.123
$\hat{b}_6$	0.109	0.107	0.107	0.106	0.105	0.104	0.104	0.103
$\hat{b}_7$	0.124	0.111	0.105	0.098	0.092	0.086	0.080	0.073
$\hat{b}_8$	0.139	0.113	0.100	0.087	0.074	0.061	0.048	0.034
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0.765**	**0.809**	**0.831**	**0.853**	**0.875**	**0.897**	**0.919**	**0.941**

Almon ile Liu' nun kombinasyonu yardımıyla (4.19)'da tanımlanan Almon-Liu tahmin edicisinin kullanılmasıyla, Çizelge 4.5'de $0 < d < 1$ için elde edilen katsayı tahminleri verilmiştir. Özellikle $0.6 \le d \le 0.8$ için katsayı tahminlerinin beklentilerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Alternatif tahmin edicilerden Almon-$(r-d)$ sınıf ve modified Liu tahmin ediciler de aynı d değerleri için hesaplanmıştır. $r-d$ sınıf tahmin edicinin ridge, TB ve $(r-k)$ sınıf tahmin ediciler gibi sonuçlar verdiği, katsayıların artan bir trende sahip olduğu görülmüştür. Almon-modified Liu tahmin edicinin çeşitli d değerleri için daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Çizelge 4.6. $0 < d < 1$ için Almon-$(r-d)$ sınıf tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri (Temel bileşen sayısı $r = 1$ olarak bulunmuştur.)

Katsayılar	$d = 0.1$	$d = 0.3$	$d = 0.4$	$d = 0.5$	$d = 0.6$	$d = 0.7$	$d = 0.8$	$d = 0.9$
Sabit	825.092	665.088	585.085	505.083	425.081	345.078	265.076	185.074
$\hat{b}_0$	0.028	0.030	0.030	0.031	0.032	0.033	0.034	0.035
$\hat{b}_1$	0.036	0.039	0.040	0.041	0.042	0.043	0.045	0.046
$\hat{b}_2$	0.047	0.050	0.052	0.054	0.055	0.057	0.058	0.060
$\hat{b}_3$	0.061	0.065	0.067	0.069	0.071	0.073	0.075	0.077
$\hat{b}_4$	0.077	0.082	0.085	0.087	0.090	0.092	0.095	0.097
$\hat{b}_5$	0.096	0.102	0.105	0.108	0.112	0.115	0.118	0.121
$\hat{b}_6$	0.117	0.125	0.129	0.132	0.136	0.140	0.144	0.148
$\hat{b}_7$	0.141	0.150	0.155	0.159	0.164	0.169	0.173	0.178
$\hat{b}_8$	0.167	0.178	0.184	0.189	0.195	0.200	0.206	0.211
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0.770**	**0.821**	**0.846**	**0.871**	**0.897**	**0.922**	**0.947**	**0.973**

Çizelge 4.7. $0 < d < 1$ için Almon-modified Liu tahmin edici ile elde edilen katsayıların tahminleri

Katsayılar	$d = 0.1$	$d = 0.3$	$d = 0.4$	$d = 0.5$	$d = 0.6$	$d = 0.7$	$d = 0.8$	$d = 0.9$
Sabit	256.294	183.911	154.505	129.623	109.265	93.431	82.121	75.335
$\hat{b}_0$	0.054	0.071	0.078	0.083	0.088	0.092	0.094	0.096
$\hat{b}_1$	0.067	0.089	0.098	0.106	0.112	0.117	0.120	0.122
$\hat{b}_2$	0.080	0.103	0.113	0.121	0.128	0.133	0.137	0.139
$\hat{b}_3$	0.092	0.113	0.122	0.129	0.135	0.140	0.143	0.145
$\hat{b}_4$	0.104	0.119	0.125	0.130	0.134	0.137	0.140	0.141
$\hat{b}_5$	0.117	0.121	0.123	0.124	0.125	0.126	0.127	0.127
$\hat{b}_6$	0.129	0.118	0.114	0.110	0.108	0.105	0.104	0.103
$\hat{b}_7$	0.141	0.112	0.100	0.090	0.082	0.075	0.071	0.068
$\hat{b}_8$	0.153	0.101	0.080	0.062	0.047	0.036	0.028	0.023
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0.937**	**0.948**	**0.952**	**0.955**	**0.958**	**0.961**	**0.962**	**0.963**

Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan tahmin ediciler gecikmesi dağıtılmış modellerde umut verici olmuştur. Özellikle birçok durumda Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicileri diğer alternatif tahmin edicilerden ve Almon tahmin ediciden daha üstün oldukları görülmüştür. Ancak temel bileşenler regresyonu yaklaşımına dayalı olan Almon-TB, Almon- $(r-k)$, Almon- $(r-d)$ tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modeller için tatmin edici sonuçlar vermemiştir. Bu sonuç, birden büyük temel bileşen sayısı bir olduğundan şaşırtıcı olmamıştır. Özdeğer sayısına bağlı olan temel bileşenler yaklaşımı gecikmesi dağıtılmış modellerde iyi sonuçlar üretmemiştir.

Ayrıca bazı yanlı tahmin edicilerde kullanılan *k* ve *d* değerleri göz önünde bulundurulduğunda *d*'nin seçiminin daha kolay olmasından dolayı Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicileri diğer alternatif tahmin edicilere tercih edilebilir.

4.11. Monte Carlo Deneyi

Almon yönteminin en büyük avantajı gecikmelerin belirli dereceden bir polinom şeklinde olması varsayımıyla standart lineer regresyon yöntemleriyle tahmin edilebilmesidir (Fair and Jaffee,1971). Gecikmelerin etkisi çeşitli şekillerde olabilir. Örneğin, gecikme yavaş yavaş azalabilir veya küçük bir azalmadan sonra hızla yükselebilir ya da hızlıca yükselip yavaş yavaş azalabilir. Bu gibi gecikme etkileri sürekli alışkanlıklar, kurumsal ya da teknolojik kısıtlamalardan veya beklentilerden kaynaklanabilir. Bundan dolayı bir modeli açıklamak ya da ekonometrik verileri modellemek için modelin davranışsal ve teknik ilişkilerini zaman gecikmeleriyle modele dahil edilmelidir.

Gerçek hayatta kişi tarafından alınan kararla, bu kararın uygulanması arasında bir gecikme süresi vardır. Örneğin, bir şirketin gerçekleştirmek istediği bir projenin tamamlanması için geçen süre ya da geliri artan bir ailenin yeni bir ev ya da araba almak için beklemesi gibi. Tüketici davranışlarındaki bu gibi gecikmeler ve sürekli

alışkanlıklardan dolayı şuanki tüketim (y_t), şuan ki gelirin (x_t) ve gecikmelerinin ($x_{t-1}, x_{t-2}, \mathbf{K}$) bir fonksiyonu şeklinde olduğu varsayılmaktadır.

Bu çalışmada, gecikmesi dağıtılmış modellerin davranışlarını benzetmek ve bu bölümde ele alınan tahmin edicileri deneysel olarak karşılaştırabilmek için bir Monte Carlo simülasyon denemesi uygulanmıştır.

Ekonometrik olarak anlamlı sonuçlar elde etmek için Chanda ve Maddala (1984)'de önerilen üç parametre vektörü kullanılmıştır. Buna göre Deney I'de kullanılan gecikmeleri salınımlı dağılım, Deney II'de azalan dağılım ve Deney III'de ise artıp azalan bir dağılım elde edilmiştir. Üç deney için kullanılan gerçek regresyon katsayıları Çizelge 4.8'deki gibidir. Şekil 4.1'de ise bu katsayıların dağılımları grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Gözlemleri oluşturmak için Frost (1975)'de kullanılan modelden yararlanılmıştır. Modelin oluşum süreci şöyledir:

$$y_t = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \mathbf{K} + b_p x_{t-p} + u_t \; ; \tag{4.26}$$

$$x_1 = v_1 \; , \tag{4.26.a}$$

$$x_t = l\, x_{t-1} + \left(1 - l^2\right)^{1/2} v_t \qquad t \geq 2 \; . \tag{4.26.b}$$

Hata terimleri u_t ve v_t , sırasıyla sıfır ortalamalı ve s_u^2 ve 1 varyanslı bağımsız pseudo-normal sayılar olarak üretilmiştir. s değeri için 0.1, 1, 10 ve 100 seçilmiştir. Her bir deneme için veri, $t = 1,2,\mathbf{K},76$ için v_t değerleri ve $t = 17,\mathbf{K},76$ için u_t değerleri seçilerek üretilmiştir. x_t değerleri (4.26.a) ve (4.26.b) eşitlikleri ile üretilmiş olup ardından y_t değerleri (4.26) eşitliği kullanılarak üretilmiştir. Her bir deneme $T = 60$ gözlem ile en fazla 16 gecikme ($t = 17,\mathbf{K},76$) sayısına kadar regresyon yapılmasına olanak sağlamaktadır.

(4.26.a) ve (4.26.b) eşitlikleri x_t'nin ardışık değerleri arasındaki beklenen ilişkiyi l değeriyle kontrol altına almamızı sağlamaktadır. l değeri için 0.5, 0.8, 0.9, 0.95 ve 0.99 olmak üzere beş farklı değer kullanılmıştır. Burada l 'nın değeri

arttıkça çoklu iş ilişki seviyesinin artması beklenmektedir. Dolayısıyla bu ayarlama ile çoklu iç ilişki seviyesinin arttığı durumlarda tahmin edicilerin davranışlarını incelenecektir. X matrisinin oluşturulmasından sonra A matrisi için polinomun derecesi 2 olarak seçilmiştir. Ardından Z matrisi, $Z = XA$ eşitliği ile oluşturulmuştur. X ve Z matrisleri simülasyonun başında üretilmiş ve denemeler boyunca sabit tutulmuştur.

$\hat{b}^*$, b 'nın bir tahmin edicisi, $\hat{b}^*_{mci}$, mci *-inci* tekrarda $\hat{b}^*$'ın hesaplanan değeri ve b gerçek parametre vektörü olmak üzere, tahmin ediciler, ortalama hata kareler kökü (RMSE) ve öngörülü hata kareler ortalaması (PMSE) kriterlerine göre karşılaştırılmıştır. Bu kriterler,

$$RMSE\left(\hat{b}^*\right) = \sqrt{\frac{1}{MCN}\sum_{mci=1}^{MCN}\left(\hat{b}^*_{mci} - b\right)'\left(\hat{b}^*_{mci} - b\right)}$$

$$PMSE\left(\hat{b}^*\right) = \frac{1}{MCN}\sum_{mci=1}^{MCN}\left(\hat{b}^*_{mci} - b\right)' X'X\left(\hat{b}^*_{mci} - b\right)$$

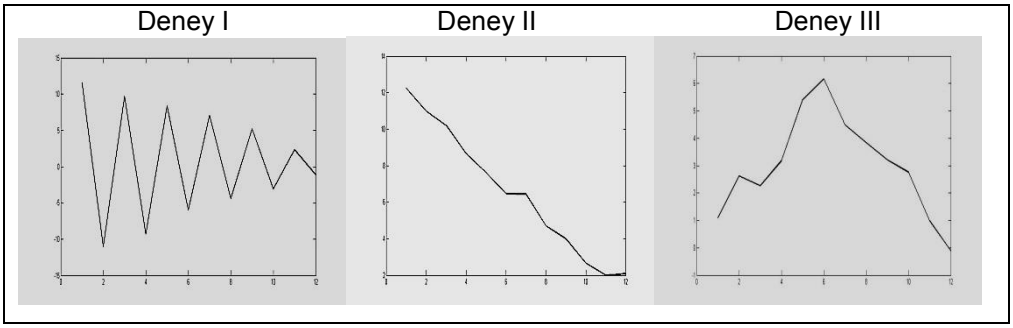
olarak tanımlanmaktadır. MCN, Monte Carlo deneme sayısını ifade etmekte olup burada 5000 olarak alınmıştır. Bu çalışmada, gecikmesi dağıtılmış modellerde yanlılık parametreleri k ve d için herhangi bir seçim yöntemi önerilmemiştir. Yanlı tahmin ediciler için k ve d değerlerinin belirlenmesinde, RMSE ve PMSE tahminlerini minimum yapan k ve d'lerin ağ taraması (grid search) yöntemi ile tahmin edilmesi yoluna gidilmiştir. $\hat{b}^*$ tahmin edicisi k'nın (veya d'nin) bir fonksiyonu olduğundan tahmin edilen RMSE ve PMSE değerleri de k (veya d) değerine bağlı olarak değişecektir.

Simülasyon çalışmasının her bir denemesinde k veya d değerleri 0.005'den başlayarak 0.995'e kadar 0.005 arttırılmış ve her bir k veya d değeri için minimum RMSE ve PMSE değerleri alınmıştır.

Tahmin edicilerin farklı deneylerdeki performansları RMSE ve PMSE kriterine göre Çizelge 4.9-4.11 ve Çizelge 4.12-4.14'de verilmiştir.

Çizelge 4.8. Monte Carlo denemelerinde kullanılan gerçek regresyon katsayıları (Chanda ve Maddala, 1984)

Katsayılar	**Deney I**	**Deney II**	**Deney III**
b_0	11.60	12.23	1.095
b_1	-11.0	10.98	2.620
b_2	9.66	10.21	2.263
b_3	-9.29	8.65	3.173
b_4	8.38	7.61	5.400
b_5	-6.0	6.45	6.165
b_6	7.11	6.44	4.495
b_7	-4.43	4.69	3.839
b_8	5.2	3.99	3.199
b_9	-3.09	2.66	2.751
b_{10}	2.31	2.00	0.973
b_{11}	-1.16	2.07	-0.131



Şekil 4.1. Monte Carlo denemelerinde kullanılan gerçek regresyon katsayılarının dağılımlarının şekilleri

Çizelge 4.9. Deney I için elde edilen RMSE değerleri*

l	s	Koşul Numarası	$\hat{b}_A$	$\hat{b}_k$	$\hat{b}_d$	$\hat{b}_r$	$\hat{b}_r(k)$	$\hat{b}_r(d)$	$\hat{b}_m(k)$	$\hat{b}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	24.340	24.283	**24.254**	25.045	25.045	25.068	24.277	24.256
0.5	1	71.514	24.343	24.285	**24.256**	25.046	25.046	25.069	24.279	24.258
0.5	10	71.514	24.576	24.477	**24.398**	25.144	25.103	25.109	24.452	24.419
0.5	100	71.514	41.904	30.343	30.347	33.501	29.653	**27.534**	34.139	34.132
0.8	0.1	78.911	24.227	24.304	**24.224**	25.065	25.066	25.100	24.229	24.224
0.8	1	78.911	24.230	24.306	**24.226**	25.066	25.067	25.101	24.232	24.226
0.8	10	78.911	24.535	24.558	**24.449**	25.193	25.152	25.152	24.501	24.466
0.8	100	78.911	45.771	31.614	31.649	35.601	30.976	**28.331**	35.919	35.977
0.9	0.1	84.123	24.222	24.342	**24.221**	25.064	25.065	25.099	24.237	24.221
0.9	1	84.123	24.227	24.346	**24.225**	25.066	25.067	25.099	24.242	24.225
0.9	10	84.123	24.735	24.719	**24.575**	25.256	25.187	25.171	24.666	24.608
0.9	100	84.123	55.689	34.481	34.553	39.928	33.678	**29.940**	40.229	40.336
0.95	0.1	87.787	24.221	24.364	**24.221**	25.060	25.060	25.092	24.244	24.221
0.95	1	87.787	24.231	24.372	**24.228**	25.063	25.064	25.094	24.253	24.228
0.95	10	87.787	25.167	24.938	**24.779**	25.391	25.257	25.207	24.944	24.861
0.95	100	87.787	72.539	39.961	40.095	47.913	38.823	**33.102**	48.268	48.458
0.99	0.1	91.074	**24.221**	24.386	24.221	25.054	25.054	25.082	24.253	**24.221**
0.99	1	91.074	24.266	24.419	**24.254**	25.069	25.066	25.089	24.292	24.255
0.99	10	91.074	28.430	25.795	25.672	26.467	25.836	**25.517**	26.310	26.215
0.99	100	91.074	150.850	69.700	70.093	88.917	67.018	**51.881**	89.544	90.070

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

Çizelge 4.10. Deney II için elde edilen RMSE değerleri*

l	s	Koşul Numarası	$\hat{b}_A$	$\hat{b}_k$	$\hat{b}_d$	$\hat{b}_r$	$\hat{b}_r(k)$	$\hat{b}_r(d)$	$\hat{b}_m(k)$	$\hat{b}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	0.841	1.041	**0.836**	19.418	19.436	20.826	0.875	0.836
0.5	1	71.514	0.907	1.090	0.890	19.420	19.438	20.827	0.936	**0.880**
0.5	10	71.514	3.514	2.985	2.984	19.550	19.566	20.889	**2.903**	2.986
0.5	100	71.514	34.135	**20.868**	21.292	29.559	25.887	24.293	24.260	24.621
0.8	0.1	78.911	**0.833**	1.224	0.840	18.095	18.110	19.514	0.879	0.832
0.8	1	78.911	0.918	1.276	0.916	18.097	18.112	19.515	0.956	**0.899**
0.8	10	78.911	3.972	3.472	3.478	18.273	18.287	19.601	**3.388**	3.475
0.8	100	78.911	38.846	**23.056**	23.416	31.103	26.426	24.258	27.093	27.385
0.9	0.1	84.123	**0.833**	1.364	0.842	17.659	17.670	18.897	0.917	**0.833**
0.9	1	84.123	0.971	1.436	0.966	17.661	17.672	18.898	1.034	**0.946**
0.9	10	84.123	5.083	4.249	4.436	17.930	17.924	19.029	**4.149**	4.423
0.9	100	84.123	50.154	27.136	27.430	35.747	29.173	**25.702**	32.833	33.064
0.95	0.1	87.787	**0.834**	1.457	0.844	17.517	17.525	18.572	0.953	**0.834**
0.95	1	87.787	1.076	1.574	1.060	17.522	17.529	18.574	1.149	**1.038**
0.95	10	87.787	6.888	5.449	5.907	17.987	17.899	18.803	**5.344**	5.873
0.95	100	87.787	68.383	34.049	34.299	44.434	34.854	**29.149**	42.458	42.706
0.99	0.1	91.074	0.844	1.563	0.855	17.484	17.487	18.290	1.005	**0.842**
0.99	1	91.074	1.705	2.007	1.612	17.505	17.505	18.300	1.687	**1.584**
0.99	10	91.074	14.913	**10.445**	11.383	19.455	18.704	19.205	10.587	11.427
0.99	100	91.074	148.897	66.634	67.041	87.087	64.758	**49.385**	86.653	87.185

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

Çizelge 4.9-4.14'den genel olarak standart hata (s) arttıkça RMSE ve PMSE değerlerinin arttığı sonucuna ulaşılmaktadır. Ayrıca x_t'ler arasındaki ilişki seviyesi (l) arttıkça RMSE değerinin arttığı görülmektedir. Simülasyon sonuçlarından Almon tahmin edicinin s ve l değerleri arttıkça çoklu iç ilişki seviyesinin yükselmesi dikkati çekmektedir. Almon tahmin edicinin yanlı tahmin edici versiyonlarının çoklu iç ilişkiden daha az etkilendiği görülmektedir. Dolayısıyla modelde çoklu iç ilişki seviyesi yüksekse Almon tahmin edici yerine yanlı tahmin ediciler kullanılmalıdır. Deneyleri şöyle değerlendirebiliriz:

Çizelge 4.9'a göre $s = 100$ durumu haricinde Almon-Liu tahmin edici diğer tahmin edicilerden üstündür. $s = 100$ olduğunda ise Almon-(r-d) sınıf tahmin edici RMSE kriterine göre en iyi tahmin edicidir. Dolayısıyla standart hata çok yüksek

olmadıkça ve gecikme dağılımının salınımlı bir formda olması bekleniyorsa Almon-liu tahmin ediciyi kullanmak uygun olacaktır.

Çizelge 4.12'ye göre l ve/veya s değerlerinin küçük olduğu durumlarda Almon tahmin edicinin PMSE değerlerinin diğer tahmin edicilerden daha iyi olduğu görülmektedir. $s = 100$ için Almon-(r-d) tahmin edici PMSE kriterine göre en iyi sonuçları vermiştir. Diğer taraftan l ve s 'nın ortalama değerleri için daha iyi PMSE değerleri olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.10 ve Çizelge 4.13 göz önünde bulundurulduğunda ise, Deney II' ye göre yani gecikme yapısının azalan formda olduğu durumda üstün bir tahmin edici olduğunu söylemek zordur. s küçük olduğunda RMSE ve PMSE kriterlerine göre Almon-Liu tahmin edici ve s 'nın ortalama değerleri için Almon-ridge tahmin edici genellikle diğer tahmin edicilerden iyidir.

Çizelge 4.11. Deney III için elde edilen RMSE değerleri*

l	s	Koşul Numarası	$\hat{b}_A$	$\hat{b}_k$	$\hat{b}_d$	$\hat{b}_r$	$\hat{b}_r(k)$	$\hat{b}_r(d)$	$\hat{b}_m(k)$	$\hat{b}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	**2.358**	2.656	2.365	5.770	5.787	7.221	2.405	**2.358**
0.5	1	71.514	2.382	2.675	2.388	5.775	5.792	7.223	2.427	**2.381**
0.5	10	71.514	4.146	4.001	**3.687**	6.189	6.194	7.396	3.879	3.743
0.5	100	71.514	34.204	18.422	18.444	22.997	17.331	**13.952**	23.852	23.916
0.8	0.1	78.911	**2.262**	2.531	2.264	4.950	4.959	6.193	2.301	**2.262**
0.8	1	78.911	2.295	2.554	2.293	4.956	4.966	6.196	2.331	**2.289**
0.8	10	78.911	4.494	4.053	**3.882**	5.560	5.448	6.454	4.065	3.975
0.8	100	78.911	38.902	20.096	20.205	25.763	19.118	**14.974**	26.179	26.308
0.9	0.1	84.123	2.252	2.582	2.253	4.877	4.883	5.930	2.310	**2.251**
0.9	1	84.123	2.306	2.618	2.300	4.887	4.892	5.934	2.357	**2.295**
0.9	10	84.123	5.496	4.509	**4.443**	5.784	5.493	6.329	4.630	4.555
0.9	100	84.123	50.197	24.304	24.446	31.462	23.180	**17.732**	31.808	31.980
0.95	0.1	87.787	**2.249**	2.625	2.250	4.878	4.881	5.818	2.326	**2.249**
0.95	1	87.787	2.350	2.689	2.334	4.895	4.896	5.825	2.411	**2.327**
0.95	10	87.787	7.197	**5.215**	5.241	6.361	5.812	6.478	5.515	5.458
0.95	100	87.787	68.414	31.590	31.783	41.127	30.164	**22.648**	41.506	41.749
0.99	0.1	91.074	2.252	2.675	2.253	4.898	4.899	5.730	2.351	**2.250**
0.99	1	91.074	2.696	2.950	2.602	4.971	4.945	5.764	2.713	**2.590**
0.99	10	91.074	15.058	8.151	8.208	9.837	8.103	**7.847**	9.515	9.521
0.99	100	91.074	148.911	65.264	65.687	85.454	62.407	**45.926**	86.088	86.639

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

l ve s büyükse Almon-(r-k) sınıf tahmin edici diğer tahmin edicilerden daha üstündür. Diğer taraftan s büyük, l küçükse Almon-ridge tahmin edici genellikle daha iyi sonuçlar vermiştir. Tüm bu sonuçlara göre polinomun yapısının azalan bir şekilde olduğu durumlarda Almon-Liu ve Almon-ridge tahmin edici kullanılmalıdır.

Deney III için RMSE ve PMSE tahminleri Çizelge 4.11 ve Çizelge 4.14 ile verilmiştir (önce arıp sonra azalan dağılım). Burada ise s 'nın küçük değerleri için RMSE ve PMSE kriterlerine göre Almon-Liu tahmin edici en iyi performansa sahiptir. Ayrıca s 'nın ortalama değerleri için de Almon-Liu tahmin edici genellikle en iyidir. $s = 100$ olduğunda ise RMSE ve PMSE kriterlerine göre Almon-(r-d) sınıf tahmin edici diğer tahmin edicilerden daha üstündür.

Almon, Almon-ridge, Almon-Liu, Almon-modified ridge ve Almon-modified Liu tahmin edicileri azalan dağılımı, önce artıp sonra azalan dağılıma göreçok daha iyi yakalamışlardır. Almon-TB, Almon-(r-k) ve Almon-(r-d) tahmin edicileri için ise bu durumun tersi söz konusu olmuştur.

Genel olarak bu simülasyon çalışmasının sonuçlarına göre bu bölümde Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan yanlı tahmin ediciler RMSE ve PMSE kriterlerine göre Almon tahmin ediciden daha üstündür. Bu alternatif tahmin ediciler gecikmesi dağıtılmış modellerde özellikle modelde çoklu iç ilişki sorunu ile karşılaşıldığında oldukça yararlı olacaktır.

Birçok durumda Almon-Liu, Almon-modified Liu, Almon-modified ridge ve Almon-(r-d) tahmin edicileri Almon, Almon-ridge, Almon-TB ve Almon-(r-k) tahmin edicilerinden daha üstün performans göstermiştir. Buradan Almon tahmin edicinin Liu ve ilgili tahmin ediciler gecikmesi dağıtılmış modeller için en iyi tahmin edicilerdir.

Çizelge 4.12. Deney I için elde edilen PMSE değerleri*

λ	σ	Koşul Numarası	$\hat{\beta}_A$	$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}_d$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}_r(k)$	$\hat{\beta}_r(d)$	$\hat{\beta}_m(k)$	$\hat{\beta}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	**47868.400**	48122.294	48085.284	51528.495	51528.486	51545.383	47989.698	48065.958
0.5	1	71.514	**47871.343**	48125.012	48085.133	51529.484	51529.117	51545.900	47993.316	48066.779
0.5	10	71.514	**48165.937**	48477.134	48358.472	51628.396	51583.353	51585.206	48292.559	48322.036
0.5	100	71.514	77628.158	57172.494	57035.662	61520.278	56608.755	**54158.676**	62408.464	62236.975
0.8	0.1	78.911	**16329.067**	16465.698	16332.001	17510.312	17510.314	17517.835	16345.889	16332.407
0.8	10	78.911	16629.465	16709.026	**16565.867**	17611.789	17568.272	17555.376	16611.642	16573.516
0.8	100	78.911	46372.247	23563.817	23571.229	27658.992	22750.129	**20245.101**	28561.225	28615.342
0.9	0.1	84.123	**7758.972**	7844.904	7759.343	8324.608	8324.616	8330.074	7772.833	7759.388
0.9	1	84.123	7761.954	7847.339	**7761.709**	8325.618	8325.615	8330.597	7775.603	7761.746
0.9	10	84.123	8060.188	8066.519	**7972.455**	8426.567	8381.780	8365.460	8024.956	7989.403
0.9	100	84.123	37883.227	14359.580	14414.747	18521.460	13653.417	**11134.444**	19158.618	19267.760
0.95	0.1	87.787	**3783.484**	3832.386	3783.614	4061.853	4061.863	4065.766	3792.651	3783.621
0.95	1	87.787	3786.493	3834.760	**3786.064**	4062.883	4062.838	4066.303	3795.385	3786.080
0.95	10	87.787	4087.417	4016.219	**3964.272**	4165.975	4119.464	4099.831	4018.476	3991.472
0.95	100	87.787	34179.328	10170.321	10242.140	14475.394	9546.357	**6972.661**	14883.324	15011.073
0.99	0.1	91.074	**741.832**	752.902	741.862	797.093	797.095	798.127	744.215	741.857
0.99	1	91.074	744.855	755.183	744.325	798.131	797.779	798.668	746.880	**744.320**
0.99	10	91.074	1047.092	851.537	843.848	901.899	853.559	**829.356**	891.488	885.223
0.99	100	91.074	31270.418	6893.326	6972.633	11278.561	6360.224	**3767.637**	11456.118	11591.473

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

Çizelge 4.13. Deney II için elde edilen PMSE değerleri*

λ	σ	Koşul Numarası	$\hat{\beta}_A$	$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}_d$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}_r(k)$	$\hat{\beta}_r(d)$	$\hat{\beta}_m(k)$	$\hat{\beta}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	**52.015**	70.250	52.455	9456.357	9456.408	9594.026	53.217	52.219
0.5	1	71.514	54.961	72.792	55.537	9457.347	9457.391	9594.581	56.045	**54.935**
0.5	10	71.514	349.587	304.396	306.108	9556.272	9555.531	9644.876	**297.663**	303.525
0.5	100	71.514	29812.120	**10569.330**	10896.946	19448.282	14807.418	12584.829	14076.265	14303.324
0.8	0.1	78.911	**18.511**	38.561	18.863	6708.751	6708.787	6912.645	20.566	18.519
0.8	1	78.911	21.485	41.010	21.702	6709.756	6709.785	6913.224	23.342	**21.072**
0.8	10	78.911	318.913	249.139	261.652	6810.228	6807.535	6965.255	**235.693**	257.128
0.8	100	78.911	30061.741	**9233.290**	9479.433	16857.421	12128.164	9985.986	12855.176	13021.956
0.9	0.1	84.123	8.849	23.760	9.078	3967.279	3967.319	4145.894	10.834	**8.846**
0.9	1	84.123	11.831	26.116	11.842	3968.289	3968.321	4146.416	13.549	**11.359**
0.9	10	84.123	310.062	216.746	243.103	4069.238	4047.928	4198.692	**205.243**	238.519
0.9	100	84.123	30133.070	8117.537	8283.845	14164.133	9421.585	**7215.705**	11991.695	12150.194
0.95	0.1	87.787	4.334	13.529	4.465	2119.404	2119.517	2248.247	5.737	**4.330**
0.95	1	87.787	7.344	15.847	7.178	2120.435	2120.539	2248.774	8.425	**6.840**
0.95	10	87.787	308.262	194.676	229.731	2223.525	2183.650	2302.034	**186.418**	225.997
0.95	100	87.787	30400.119	7349.361	7458.764	12532.929	7696.738	**5344.020**	11510.896	11651.735
0.99	0.1	91.074	0.875	3.116	0.904	443.150	443.180	477.386	1.259	**0.870**
0.99	1	91.074	3.897	5.361	3.479	444.188	443.968	477.940	3.829	**3.345**
0.99	10	91.074	306.130	**156.505**	183.051	547.957	502.981	525.897	161.047	186.187
0.99	100	91.074	30529.410	6394.753	6472.901	10924.633	6035.217	**3503.230**	10828.690	10960.847

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

Çizelge 4.14. Deney III için elde edilen PMSE değerleri*

λ	σ	Koşul Numarası	$\hat{\beta}_A$	$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}_d$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}_r(k)$	$\hat{\beta}_r(d)$	$\hat{\beta}_m(k)$	$\hat{\beta}_m(d)$
0.5	0.1	71.514	**367.855**	404.684	367.921	1031.335	1031.360	1122.406	370.848	**367.855**
0.5	1	71.514	370.802	407.006	370.684	1032.324	1032.342	1122.949	373.601	**370.559**
0.5	10	71.514	665.431	648.204	**591.994**	1131.246	1120.557	1173.123	638.922	612.734
0.5	100	71.514	30128.001	7268.246	7404.791	11023.223	6186.046	**3870.207**	12799.645	12871.416
0.8	0.1	78.911	150.787	181.883	150.834	619.855	619.875	732.380	154.586	**150.782**
0.8	1	78.911	153.761	184.134	153.445	620.859	620.873	732.941	157.282	**153.264**
0.8	10	78.911	451.190	386.749	**349.956**	721.331	681.083	784.290	384.722	363.912
0.8	100	78.911	30194.026	6749.460	6823.192	10768.527	5940.747	**3626.617**	11652.069	11782.120
0.9	0.1	84.123	**73.213**	93.752	73.238	333.860	333.870	415.484	76.498	73.218
0.9	1	84.123	76.196	95.957	75.757	334.870	334.851	416.006	79.137	**75.645**
0.9	10	84.123	374.425	259.191	**245.345**	435.819	388.835	466.300	271.109	259.277
0.9	100	84.123	30197.429	6409.346	6487.635	10530.715	5720.266	**3341.376**	11127.602	11261.856
0.95	0.1	87.787	**35.889**	47.639	35.900	170.676	170.689	221.074	38.069	35.894
0.95	1	87.787	38.898	49.845	38.372	171.707	171.472	221.605	40.698	**38.316**
0.95	10	87.787	339.816	180.489	**179.390**	274.801	227.595	270.879	201.960	197.063
0.95	100	87.787	30431.665	6304.606	6384.377	10584.245	5692.480	**3205.214**	10967.568	11103.533
0.99	0.1	91.074	7.070	9.711	7.071	34.593	34.596	46.508	7.631	**7.068**
0.99	1	91.074	10.093	11.913	**9.400**	35.631	35.163	47.059	10.201	9.420
0.99	10	91.074	312.325	94.584	95.946	139.398	94.022	**87.653**	129.595	129.989
0.99	100	91.074	30535.599	6138.044	6217.702	10516.047	5607.757	**3036.035**	10688.590	10824.548

*: Koyu renkli değerler her bir satırdaki en iyi tahmin ediciyi göstermektedir.

4. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK OLMAYAN KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİ İLE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KOMBİNASYONLARI Berrin GÜLTAY

5. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE BAZI ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN HATA KARELER ORTALAMA MATRİSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bir önceki bölümde gecikmesi dağıtılmış modeller için Almon tahmin ediciye alternatif tahmin ediciler tanımlanmıştır. Bu bölümde ise bu tahmin ediciler arasında bazı karşılaştırmalar ele alınacaktır. Karşılaştırmaları yapabilmek için ele alınan tahmin ediciler kanonik formda yeniden tanımlanacaktır.

Q, $Z'Z$ matrisinin özvektörlerine karşılık gelen ortagonal bir matris olsun. Böylece $W=ZQ$ ve $g = Q'a$ olmak üzere (3.33) ile verilen gecikmesi dağıtılmış model kanonik formda,

$$y = Wg + u, \qquad u \sim N\left(0, s_u^2 I\right) \tag{5.1.}$$

şeklinde yeniden yazılabilir $l_1 \geq l_2 \geq \mathbf{K} \geq l_{s+1} > 0$, $(s+1)\times(s+1)$ tipinde olan $Z'Z$ matrisinin sıralı özdeğerleri olmak üzere,

$$W'W = Q'Z'ZQ = \Lambda = diag\left(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_{s+1}\right) \tag{5.2.}$$

olduğundan W matrisinin kolonları ortagonaldir. Böylece (5.1) modeli için Bölüm 4'de ele alınan alternatif tahmin ediciler aşağıdaki şekilde kanonik formda ifade edilebilir.

Almon tahmin edici,

$$\hat{g}_A = \Lambda^{-1}W'y = C_1 y \tag{5.3.}$$

olarak bulunur.

Almon-ridge tahmin edici,

$$\begin{aligned} \hat{g}_k &= \left(\Lambda + kI\right)^{-1}W'y \qquad k \geq 0 \\ &= G_k W'y = C_2 y \end{aligned} \tag{5.4.}$$

olur. Burada $G_k = (\Lambda + kI)^{-1}$ olmak üzere simetrik ve köşegen bir matristir.

Almon-modified ridge tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{g}_m(k) &= (\Lambda + kI)^{-1}(W'y + k\hat{g}_k) \qquad k \geq 0 \qquad (5.5.)\\ &= (\Lambda + kI)^{-1}\Lambda\hat{g}_A + k(\Lambda + kI)^{-1}\hat{g}_k \\ &= \left[(\Lambda + kI)^{-1} + k(\Lambda + kI)^{-2}\right]W'y \\ &= \left[G_k + kG_k^2\right]W'y = C_3 y\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Almon-Liu tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{g}_d &= (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\Lambda^{-1}W'y \qquad 0 < d < 1 \qquad (5.6.)\\ &= L_d\Lambda^{-1}W'y = C_4 y\end{aligned}$$

olur. Burada $L_d = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)$ olmak üzere simetrik ve köşegen bir matristir.

Almon-modified Liu tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{g}_m(d) &= \left[(\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\right]\hat{g}_A + \left[I - (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\right]\hat{g}_d \qquad (5.7.)\\ &= L_d\hat{g}_A + (I - L_d)\hat{g}_d \\ &= (2L_d - L_d^2)\hat{g}_A \\ &= (2L_d - L_d^2)\Lambda^{-1}W'y = C_5 y\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda kanonik formda yeniden yazılan alternatif tahmin edicilerin lineer homojen olduğu açıktır. Karşılaştırmaları yapabilmek için aşağıdaki Lemma kullanılacaktır.

Lemma (Trenkler, 1980): $\tilde{b}_1$ ve $\tilde{b}_2$, $D = V(\tilde{b}_1) - V(\tilde{b}_2)$ pd olacak şekilde b 'nın iki homojen lineer tahmin edicisi olsun. $Bias(\tilde{b}_2)' D^{-1} Bias(\tilde{b}_2) < s^2$ sağlanıyor ise $MSE(\tilde{b}_1) - MSE(\tilde{b}_2)$ farkı pd olacaktır.

5.1. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

Swindel (1976)'da lineer regresyon modeli altında modified ridge tahmin edici ile EKK tahmin edici arasında MSE kriterine göre bir karşılaştırma yapılmıştır. Bu bölümde, yapılan bu çalışmaya paralel olarak gecikmesi dağıtılmış modeller için tanımlanan Almon-modified ridge tahmin edici ile Almon tahmin edici, MSE kriterine göre karşılaştırılacaktır.

Teorem 5.1 : k bir sabit ve $k > 0$ olsun.

$D_1 = C_1 C_1' - C_3 C_3'$, $C_1 = \Lambda^{-1} W'$, $C_3 = [G_k + kG_k^2] W'$ ve $b_1 = Bias(\hat{g}_m(k)) = -k^2 G_k^2 g$ olmak üzere $b_1' D_1^{-1} b_1 < s_u^2$ ise $MSE(\hat{g}_A) - MSE(\hat{g}_m(k))$ farkı pozitif tanımlıdır.

İspat : $MSE(\hat{g}_A) - MSE(\hat{g}_m(k))$ farkının pd olup olmadığını görebilmek için (5.3) ve (5.7) ile verilen $\hat{g}_A$ ve $\hat{g}_m(k)$ tahmin edicilerinin varyans-kovaryans matrisleri inceleyelim. Yansız bir tahmin edici olan $\hat{g}_A$ 'nın varyansı-kovaryansı,

$$Var(\hat{g}_A) = s_u^2 \Lambda^{-1} \tag{5.8}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $\hat{g}_m(k)$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla,

$$\begin{aligned} Var(\hat{g}_m(k)) &= s_u^2 (G_k + kG_k^2) \Lambda (G_k + kG_k^2) \\ &= s_u^2 G_k (I - kG_k)(I + kG_k)^2, \end{aligned} \tag{5.9.}$$

$$Bias(\hat{g}_m(k)) = -k^2 G_k^2 g \qquad (5.10.)$$

olarak elde edilir. (5.9) ve (5.10) kullanılarak $\hat{g}_m(k)$'nın MSE matrisi,

$$MSE(\hat{g}_m(k)) = s_u^2 G_k (I - kG_k)(I + kG_k)^2 + k^4 G_k^2 gg' G_k^2 \qquad (5.11.)$$

olur. (5.8) ve (5.9) ile verilen eşitliklerin farkı göz önünde bulundurulduğunda,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= Var(\hat{g}_A) - Var(\hat{g}_m(k)) = s_u^2 (C_1 C_1' - C_3 C_3') \\ &= s_u^2 k^2 G_k \left[G_k + \Lambda^{-1} + kG_k^2\right] G_k \end{aligned} \qquad (5.12.)$$

elde edilmektedir. $\left[G_k + \Lambda^{-1} + kG_k^2\right] > 0$ olduğundan, $\Delta_1 > 0$ olur. Yani, $k > 0$ için D_1 ile ifade edilen fark pd olacaktır. Lemma kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

5.2. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon-Ridge Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

Bir önceki bölümde Almon-modified ridge tahmin edicinin Almon tahmin ediciden üstün olduğu gösterilmiştir. Burada Teorem 5.2 ile Almon-modified ridge tahmin edici ile Almon-ridge tahmin ediciMSE kriterine göre karşılaştırılacaktır.

Teorem 5.2 : k bir sabit ve $k > 0$ olsun.

$D_2 = C_2 C_2^{'} - C_3 C_3^{'}$, $C_2 = G_k W'$, $C_3 = \left[G_k + kG_k^2\right] W'$ ve

$b_1 = Bias(\hat{g}_m(k)) = -k^2 G_k^2 g$ olmak üzere $b_1' D_2^{-1} b_1 < s_u^2$ ise $MSE(\hat{g}_k) - MSE(\hat{g}_m(k))$ farkı pozitif tanımlıdır.

İspat : (5.4) ile verilen $\hat{g}_k$'nın varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla,

$$Var(\hat{g}_k) = s_u^2 G_k \Lambda G_k'$$

$$= s_u^2 (I - kG_k) G_k \tag{5.13.}$$

$$Bias(\hat{g}_k) = -kG_k g \tag{5.14.}$$

yazılabilir. (5.13) ve (5.14) kullanılarak $\hat{g}_k$ 'nın MSE matrisi ise,

$$MSE(\hat{g}_k) = s_u^2 (I - kG_k) G_k + k^2 G_k g g' G_k' \tag{5.15.}$$

olarak ifade edilir. (5.13) ve (5.9) ile verilen eşitliklerin farkı ise,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= Var(\hat{g}_k) - Var(\hat{g}_m(k)) = s_u^2 (C_2 C_2' - C_3 C_3') \\ &= s_u^2 G_k \Lambda G_k \left(2kG_k + k^2 G_k^2\right) \end{aligned} \tag{5.16.}$$

olarak bulunur. (5.16)'daki ifade de $\left[2kG_k + k^2 G_k^2\right] > 0$ olduğundan $\Delta_2 > 0$ olacaktır. Böylece $k > 0$ için, D_2 ile ifade edilen fark pd olur. Lemma kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

5.3. Almon-Modified Liu Tahmin Edici ile Almon Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

Modified Liu tahmin edici, Li ve Yang (2012) tarafından genel lineer regresyon modelinde tanımlanmıştır. Ayrıca Li ve Yang (2012), modified Liu tahmin ediciyi, EKK, Liu, ridge ve modified ridge tahmin ediciler ile MSE kriterine göre karşılaştırmışlardır. Burada ise Almon-modified Liu tahmin edici ile Almon tahmin edici MSE kriterine göre karşılaştırılacaktır.

Teorem 5.3 : d bir sabit ve $0 < d < 1$ olsun.

$D_3 = C_1 C_1' - C_5 C_5'$, $C_1 = \Lambda^{-1} W'$, $C_5 = (2L_d - L_d^2)\Lambda^{-1} W'$,

$b_2 = Bias(\hat{g}_m(d)) = -(1-d)^2 (\Lambda + I)^{-2} g$ olmak üzere $b_2' D_3^{-1} b_2 < s_u^2$ ise

$MSE(\hat{g}_A) - MSE(\hat{g}_m(d))$ farkı pozitif tanımlıdır.

İspat : (5.7) ile verilen $\hat{g}_m(d)$'nin varyans-kovaryans matrisi,

$$Var(\hat{g}_m(d)) = s_u^2 [2L_d - L_d^2] \Lambda^{-1} [2L_d - L_d^2] \tag{5.17.}$$

yanlılığı ise,

$$Bias(\hat{g}_m(d)) = -(1-d)^2 (\Lambda + I)^{-2} g \tag{5.18.}$$

olur. (5.17) ve (5.18)'in kullanılmasıyla $\hat{g}_m(d)$'nin MSE matrisi,

$$MSE(\hat{g}_m(d)) = s_u^2 [2L_d - L_d^2] \Lambda^{-1} [2L_d - L_d^2] + (1-d)^4 (\Lambda + I)^{-2} g g' (\Lambda + I)^{-2} \tag{5.19.}$$

olarak bulunur. (5.19) eşitliği,

$$Var(\hat{g}_m(d)) = [2L_d - L_d^2]^2 V(\hat{g}_A) \tag{5.20.}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $[2L_d - L_d^2]$, köşegen ve simetrik bir matristir.

$$B = [2L_d - L_d^2]^2 = diag(b_1, b_2, \mathbf{K}, b_p) \tag{5.21.}$$

olarak tanımlansın. (5.21)'deki B matrisinin *i-inci* elemanı ise,

$$b_i = \left[\frac{l_i^2 + 2l_i + 2d - d^2}{(l_i + 1)^2} \right]^2 \tag{5.22.}$$

olarak ifade edilebilir. (5.22)'den $0 < d < 1$ için $l_i^2 + 2l_i + 2d - d^2 > 0$ ve $\frac{l_i^2 + 2l_i + 2d - d^2}{(l_i + 1)^2} < 1$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, B matrisinin *i-inci* elemanı için $0 < b_i < 1$ olması sağlanmaktadır. Böylece $Var(\hat{g}_A) - Var(\hat{g}_m(d)) > 0$ olur, yani $0 < d < 1$ için D_3 ile verilen fark pd olur. Lemmanın kullanılmasıyla ispat tamamlanmış olur.

5.4. Almon-Modified Liu Tahmin Edici ile Almon-Liu Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

Li ve Yang (2012)'de modified Liu tahmin edicinin, sırasıyla Liu, ridge ve modified ridge tahmin edicilerinden MSE kriterine göre daha üstün bir tahmin edici olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde ise Almon-Liu tahmin edicinin Almon- modified Liu tahmin ediciye göre MSE anlamında daha iyi olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.4 : d bir sabit ve $0 < d < 1$ olsun.

$D_4 = C_5 C_5' - C_4 C_4'$, $C_5 = (2L_d - L_d^2)\Lambda^{-1}W'$, $C_4 = L_d \Lambda^{-1} W'$ ve

$b_3 = Bias(\hat{g}_d) = -(1-d)(\Lambda + I)^{-1} g$ olmak üzere, $b_3' D_4^{-1} b_3 < s_u^2$ ise

$MSE(\hat{g}_m(d)) - MSE(\hat{g}_d)$ farkının pozitif tanımlıdır.

İspat : (5.6) ile verilen $\hat{g}_d$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$Var(\hat{g}_d) = s_u^2 L_d \Lambda^{-1} L_d \tag{5.23.}$$

$$Bias(\hat{g}_d) = -(1-d)(\Lambda + I)^{-1} g \ . \tag{5.24.}$$

(5.23) ve (5.24) ifadeleri kullanılarak, $\hat{g}_d$ 'nin MSE matrisi,

$$MSE(\hat{g}_d) = s_u^2 L_d \Lambda^{-1} L_d + (1-d)^2 (\Lambda + I)^{-1} gg' (\Lambda + I)^{-1} \qquad (5.25.)$$

olarak bulunur. (5.23) ile (5.17)'nin farkını inceleyelim:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= Var(\hat{g}_m(d)) - Var(\hat{g}_d) = s_u^2 (C_5 C_5' - C_4 C_4') \\ &= s_u^2 L_d \left[\left(I + (1-d)(\Lambda + I)^{-1}\right) \Lambda^{-1} \left(I + (1-d)(\Lambda + I)^{-1}\right) - \Lambda^{-1} \right] L_d \\ &= s_u^2 L_d \left[2(1-d)\Lambda^{-1}(\Lambda + I)^{-1} + (1-d)^2 (\Lambda + I)^{-1} \Lambda^{-1} (\Lambda + I)^{-1} \right] L_d . \qquad (5.26)\end{aligned}$$

(5.26) ile verilen eşitlik, $0 < d < 1$ için pd olduğundan $V(\hat{g}_m(d)) - V(\hat{g}_d) > 0$ olur. Dolayısıyla $0 < d < 1$ için $C_5 C_5' - C_4 C_4'$ farkı da pd olur. Lemmanın kullanılmasıyla ispat tamamlanmış olur.

5.5. Almon-Modified Ridge Tahmin Edici ile Almon-Liu Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

Bu bölümde Almon-modified ridge ile Almon-Liu tahmin edicilerinin hangi koşullar altında daha iyi performans gösterdikleri incelenecektir. Başlangıç olarak *d*'nin sabit olduğu durumu göz önünde bulunduralım.

Teorem 5.5 : *d* bir sabit ve $0 < d < 1$ olsun.
$C_3 = \left[G_k + kG_k^2\right] W'$, $C_4 = L_d \Lambda^{-1} W'$, $b_1 = Bias(\hat{g}_m(k))$, $b_3 = Bias(\hat{g}_d)$ ve $k_j = \dfrac{l_j (1-d)}{l_j + d}$, $j = 1,2,\mathbf{K},s+1$ olmak üzere,

a. $0 < k < k_{1j}^*$ için $b_3' (C_3 C_3' - C_4 C_4')^{-1} b_3 < s_u^2$ ise $MSE(\hat{g}_m(k)) - MSE(\hat{g}_d)$ pozitif tanımlıdır.

b. $0 < k_{2j}^{*} < k$ için $b_1'(C_4C_4' - C_3C_3')^{-1}b_1 < s_u^{\,2}$ ise $MSE(\hat{g}_d) - MSE(\hat{g}_m(k))$ pozitif tanımlıdır.

Burada $k_{1j}^{*} = \min\{k_j\}_{j=1}^{s+1}$ ve $k_{2j}^{*} = \max\{k_j\}_{j=1}^{s+1}$ olarak elde edilir.

İspat : (5.9) ve (5.23) ile verilen eşitliklerin farkı

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= Var(\hat{g}_m(k)) - Var(\hat{g}_d) = s_u^{\,2}(C_3C_3' - C_4C_4') \\ &= s_u^{\,2}\left[(G_k + kG_k^2)\Lambda(G_k + kG_k^2) - L_d\Lambda^{-1}L_d\right]\end{aligned} \tag{5.27.}$$

olarak elde edilir.

$$\Psi_j = \frac{l_j}{(l_j+k)^2} - \frac{(l_j+d)^2}{l_j(l_j+1)^2} + \frac{2kl_j}{(l_j+k)^3} + \frac{k^2 l_j}{(l_j+k)^4} \tag{5.28.}$$

olmak üzere, $C_3C_3' - C_4C_4'$ farkının pd olabilmesi için, gerek ve yeter koşul tüm $j = 1,2,\mathbf{K},s+1$ için $\Psi_j > 0$ olmasıdır.

$\frac{2kl_j}{(l_j+k)^3}$ ve $\frac{k^2 l_j}{(l_j+k)^4}$ ifadeleri pozitif olduklarından dolayı $k > 0$ için $C_3C_3' - C_4C_4'$ farkının pd olabilmesi için gerek koşul,

$$\frac{l_j}{(l_j+k)^2} - \frac{(l_j+d)^2}{l_j(l_j+1)^2} \tag{5.29.}$$

ifadesinin sıfırdan büyük olması gerekmektedir. Dolayısıyla, $0 < k < k_{1j}^{*}$ için $C_3C_3' - C_4C_4'$ farkının pd olur. Benzer şekilde $0 < k_{2j}^{*} < k$ için $C_4C_4' - C_3C_3'$ farkı da pd olacaktır. Lemmanın kullanılmasıyla ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, *k*'nın sabit ve $0 < k < 1$ olduğu durumu göz önünde bulunduralım.

Teorem 5.6 : k bir sabit ve $0 < k < 1$ olsun.

$C_3 = \left[G_k + kG_k^2\right]W'$, $C_4 = L_d\Lambda^{-1}W'$, $b_1 = Bias(\hat{g}_m(k))$, $b_3 = Bias(\hat{g}_d)$ ve

$d_j = 1 - \dfrac{k(l_j+1)}{l_j+k}$, $\quad j = 1,2,\mathbf{K},s+1$ olmak üzere,

a. $0 < d < d_{1j}^* < 1$ için $b_3'(C_3C_3' - C_4C_4')^{-1}b_3 < s_u^2$ ise $MSE(\hat{g}_m(k)) - MSE(\hat{g}_d)$ pozitif tanımlıdır.

b. $0 < d_{2j}^* < d < 1$ için $b_1'(C_4C_4' - C_3C_3')^{-1}b_1 < s_u^2$ ise $MSE(\hat{g}_d) - MSE(\hat{g}_m(k))$ pozitif tanımlıdır.

Burada $d_{1j}^* = \min\{d_j\}_{j=1}^{s+1}$ ve $d_{2j}^* = \max\{d_j\}_{j=1}^{s+1}$ olarak elde edilir.

İspat : Teorem 5.5'in ispatından $j = 1,2,\mathbf{K},s+1$ için $\Psi > 0$ için $C_3C_3' - C_4C_4'$ farkı pozitif tanımlıdır.

k bir sabit ve $k > 0$ olsun. (5.29) eşitliği, $0 < d < d_{1j}^* < 1$ için $C_3C_3' - C_4C_4'$ farkının pd ve $0 < d_{2j}^* < d < 1$ için $C_4C_4' - C_3C_3'$ farkının pd olmasını sağlamaktadır. Lemmanın kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Teorik sonuçların sayısal örneklerde veya simülasyon çalışmalarında daha kolay görülebilmesi için $\hat{g}_A$, $\hat{g}_k$, $\hat{g}_m(k)$, $\hat{g}_d$ ve $\hat{g}_m(d)$ tahmin edicilerine ait SMSE değerleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla bulunabilir:

$$SMSE(\hat{g}_A) = s_u^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{l_i} \tag{5.30.}$$

$$SMSE(\hat{g}_k) = s_u^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i}{(l_i+k)^2} + k^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{g_i^2}{(l_i+k)^2} \tag{5.31.}$$

$$SMSE(\hat{g}_m(k)) = s_u^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i(l_i+2k)^2}{(l_i+k)^4} + k^4 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{g_i^2}{(l_i+k)^4} \tag{5.32.}$$

$$SMSE(\hat{g}_d) = s_u^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{(l_i + d)^2}{l_i (l_i + 1)^2} + (1-d)^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{g_i^2}{(l_i + 1)^2} \tag{5.33.}$$

$$SMSE(\hat{g}_m(d)) = s_u^2 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{b_i}{l_i} + (1-d)^4 \sum_{i=1}^{s+1} \frac{g_i^2}{(l_i + 1)^4} \ . \tag{5.34.}$$

Burada b_i, (5.22)'de tanımlandığı gibidir. Diğer önemli bir konu ise bazı tahmin edicilerde kullanılan yanlılık parametreleri k ve d'nin uygun tahminlerini bulmaktır. Bunun için, sırasıyla, Hoerl ve Kennard (1970), Kennard ve Baldwin (1975) ve Lawless ve Wang (1976)'nın önerdikleri ridge parametresi (5.1) modeli için, $\hat{g}$, g 'ın ve $\hat{s}_u^2, s_u^2$ 'nun EKK tahminleri olmak üzere, aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

$$\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{s}_u^2}{\sum_{i=1}^{s+1} \hat{g}_i^2} \tag{5.35.}$$

$$\hat{k}_{HKB} = \frac{(s+1)\hat{s}_u^2}{\sum_{i=1}^{s+1} \hat{g}_i^2} \tag{5.36.}$$

$$\hat{k}_{LW} = \frac{(s+1)\hat{s}_u^2}{\sum_{i=1}^{s+1} l_i \hat{g}_i^2} \ . \tag{5.37.}$$

Diğer taraftan Liu (1993), k parametresinin tahminine benzer şekilde d parametresi için bazı tahminler önermiştir. (5.1) modeli için bu tahminler şöyledir:

$$\hat{d}_{mm} = 1 - \hat{s}_u^2 \left[\sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{l_i (l_i + 1)} \Big/ \sum_{i=1}^{s+1} \frac{\hat{g}_i^2}{(l_i + 1)^2} \right] \tag{5.38.}$$

$$\hat{d}_{CL} = 1 - \hat{s}_u^2 \left[\sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{l_i + 1} \Big/ \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i \hat{g}_i^2}{(l_i + 1)^2} \right] . \tag{5.39.}$$

5.6. Sayısal Örnek

Bu çalışmada, Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan Almon-ridge, Almon-modified ridge, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerin SMSE kriterine göre karşılaştırılmıştır. Bölüm 4.10'da ayrıntılı bir şekilde analiz edilen bağımsız değişkenin kaynaklar ve bağımlı değişkenin sermaye harcamaları olduğu Almon (1965) veri seti kullanılacaktır. Bu uygulama çalışmasında incelenen veri seti için alternatif tahmin edicilerin performansları incelenecektir. Bölüm 4.10'da bu veri seti için gecikme sayısı 8 ve polinom derecesi 2 olarak belirlenmiştir.

Karşılaştırmaları yapabilmek için elde edilen diğer sonuçlar aşağıdaki gibidir.

(a) $Z'Z$ matrisinin özdeğerleri :0.0007, 0.0634, 2.9359 .

(b) $y = Za + u$ modelindeki a 'nın ve buna bağlı olarak $y = Xb + u$ modelindeki b 'nın Almon tahmini:

$$a : (\hat{a}_A)' = (0.0962, 0.0320, -0.0052),$$

$$\hat{b}_A = (A\hat{a}_A)' = (0.096,\ 0.123,\ 0.140,\ 0.146,\ 0.142,\ 0.127,\ 0.102,\ 0.067,\ 0.021\ )$$

(c) s_u^2 'nun EKK tahmini $\hat{s}_u^2 = 0.0164$ olarak elde edilmiştir.

$W=ZQ$ ve $g = Q'a$ olmak üzere (3.33) ile verilen gecikmesi dağıtılmış modeli (5.1) ile verilen kanonik forma dönüştürmek için,

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2478 & -0.7818 & 0.5722 \\ 0.7934 & 0.1751 & 0.5829 \\ -0.5559 & 0.5985 & 0.5769 \end{bmatrix}$$

ve

$$W'W = \Lambda = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0634 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9359 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. Böylece (5.1) modelindeki g 'nın EKK tahmini,

$$\hat{g} = \Lambda^{-1} W' y = \left[1.2297,\ -1.0754,\ 0.5580\right]'$$

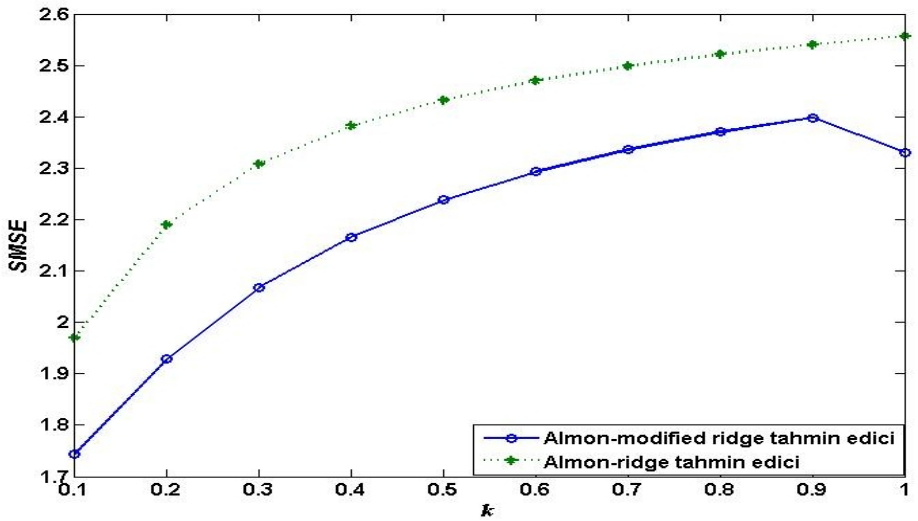
olarak elde edilmiştir.

Almon-ridge ve Almon-modified ridge tahmin edicilerinin SMSE değerlerini bulabilmek için (5.35)-(5.37)'daki eşitlikler yardımıyla k parametresinin tahminleri elde edilmiştir. Bundan başka çeşitli k değerlerine karşılık gelen SMSE değerleri Çizelge 5.1'de verilmiştir. Şekil 5.1'de ise Almon-modified ridge tahmin edicinin performansının Almon-ridge tahmin ediciden daha iyi olduğu k aralığı için SMSE değerlerinin grafiği verilmiştir.

Çizelge 5.1 incelendiğinde $k > 0.02$ için Almon-modified ridge tahmin edicinin performansının, Almon ve Almon-ridge tahmin edicilerin performanslarından daha iyi olduğu görülmektedir. Diğer taraftan Almon-ridge tahmin edicide $k > 0$ için Almon tahmin ediciden üstün olduğu görülmektedir. Çizelge 5.1'den görüleceği üzere, k_{HK} , k_{HKB} ve k_{LW} parametreleri kullanılarak yapılan SMSE tahminleri oldukça küçüktür. Ayrıca farklı k değerleri için Almon-modified ridge tahmin edicinin Almon-ridge tahmin ediciden MSE anlamındaki üstünlüğü Şekil 5.1'den incelenebilir. Elde edilen sayısal sonuçlar Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'de verilen teorik sonuçları desteklemektedir.

Çizelge 5.1. Almon, Almon-ridge ve Almon-modified ridge tahmin edicilerinin tahmin edilen SMSE değerleri

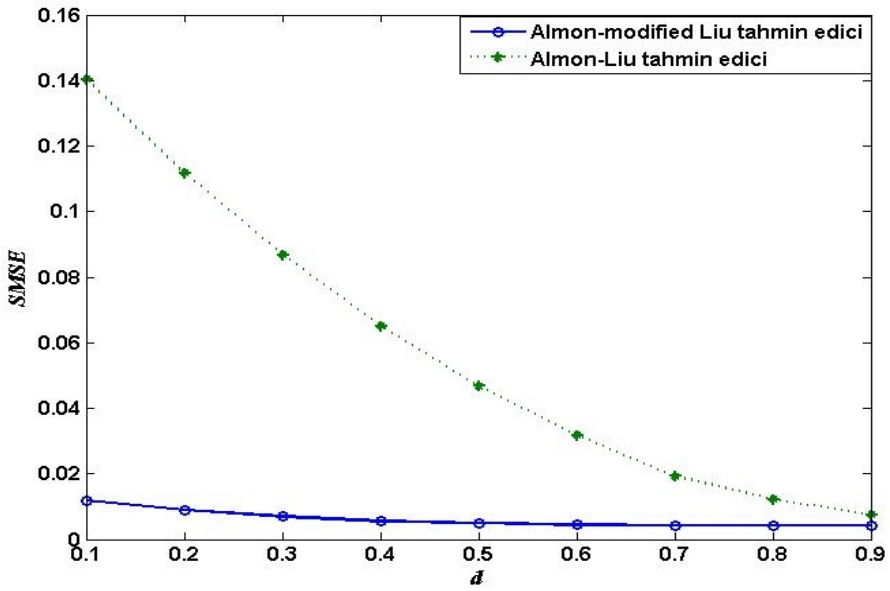
	$SMSE(\hat{g}_A)$	$SMSE(\hat{g}_k)$	$SMSE(\hat{g}_m(k))$
k=0	23.6928	23.6928	23.6928
$k_{HK}=0.0055$	23.6928	1.7206	2.2609
k=0.01	23.6928	1.6411	1.7840
$k_{HKB}=0.0165$	23.6928	1.6481	1.6743
k=0.02	23.6928	1.6599	1.6605
k=0.03	23.6928	1.7002	1.6524
$k_{LW}=0.0498$	23.6928	1.7855	1.6649
k=0.1	23.6928	1.9700	1.7440
k=0.2	23.6928	2.1898	1.9286
k=0.3	23.6928	2.3086	2.0675
k=0.4	23.6928	2.3823	2.1662
k=0.5	23.6928	2.4328	2.2384
k=0.6	23.6928	2.4699	2.2931
k=0.7	23.6928	2.4985	2.3359
k=0.8	23.6928	2.5215	2.3702
k=0.9	23.6928	2.5406	2.3984
k=1	23.6928	2.5569	2.3310
k=2	23.6928	2.6510	2.4949



Şekil 5.1. k değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_k)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(k))$ grafikleri

Çizelge 5.2. Almon, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin tahmin edilen SMSE değerleri

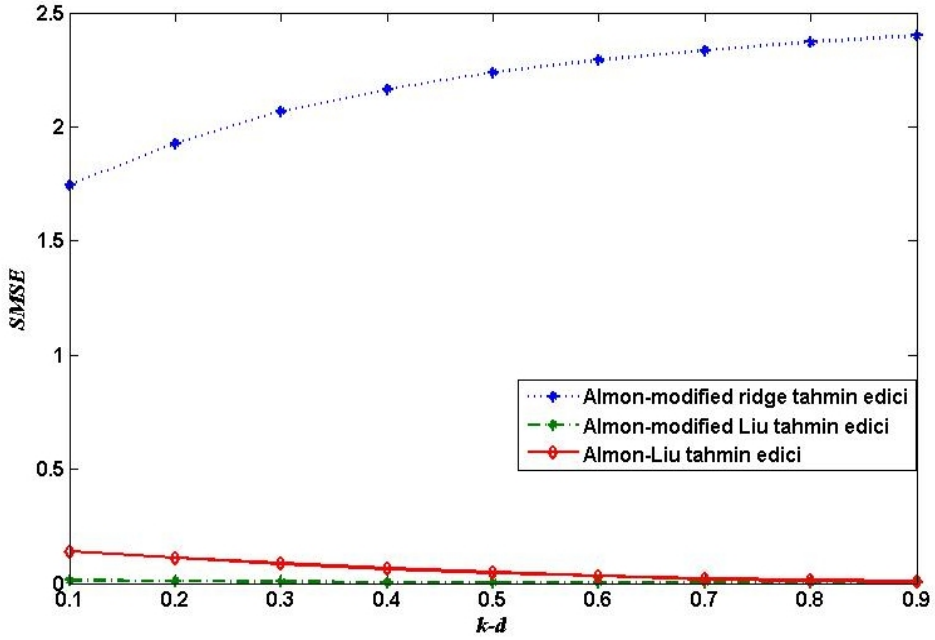
	$SMSE(\hat{g}_A)$	$SMSE(\hat{g}_d)$	$SMSE(\hat{g}_m(d))$
d=0	23.6928	0.1721	0.0161
d=0.001	23.6928	0.1718	0.0160
d=0.01	23.6928	0.1688	0.0156
d=0.1	23.6928	0.1403	0.0119
d=0.2	23.6928	0.1118	0.0089
d=0.3	23.6928	0.0867	0.0069
d=0.4	23.6928	0.0650	0.0056
d=0.5	23.6928	0.0467	0.0049
d=0.6	23.6928	0.0318	0.0045
$d_{CL} = 0.712$	23.6928	0.0192	0.0043
d=0.8	23.6928	0.0122	0.0042
d=0.9	23.6928	0.0076	0.0042



Şekil 5.2. *d* değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_d)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(d))$ grafikleri

Çizelge 5.3. Almon-modified ridge, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin SMSE değerlerinin karşılaştırılması

$k = d$	$SMSE(\hat{g}_m(k))$	$SMSE(\hat{g}_d)$	$SMSE(\hat{g}_m(d))$
0.01	1.7840	0.1688	0.0156
0.1	1.7440	0.1403	0.0119
0.2	1.9286	0.1118	0.0089
0.3	2.0675	0.0867	0.0069
0.4	2.1662	0.0650	0.0056
0.5	2.2384	0.0467	0.0049
0.6	2.2931	0.0318	0.0045
0.7	2.3359	0.0192	0.0043
0.8	2.3702	0.0122	0.0042
0.9	2.3984	0.0076	0.0042



Şekil 5.3. *k-d* değerlerine karşılık gelen $SMSE(\hat{g}_m(k)), SMSE(\hat{g}_d)$ ve $SMSE(\hat{g}_m(d))$ grafikleri

Almon-modified Liu tahmin edicinin performansını Çizelge 5.2'den incelediğimizde, d'nin $0 < d < 1$ aralığındaki tüm değerleri için Almon-Liu ve Almon tahmin ediciden daha üstün olduğu görülmektedir. Şekil 5.2'den görüldüğü üzere yanlılık parametresi d arttıkça Almon-modified Liu ve Almon-Liu tahmin

edicilerin SMSE değerleri azalmaktadır. Ayrıca her iki tahmin edici için d_{CL} parametresi kullanılarak tahmin edilen SMSE değerleri oldukça küçüktür.

Çizelge 5.3. bazı ortak *k* ve *d* parametreleri için Almon-Liu, Almon-modified ridge ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin performanslarını özetlemektedir. Bu çizelgeden yalnızca Almon-modified Liu tahmin edicinin değil, ayrıca Almon-Liu tahmin edicisinin de Almon-modified ridge tahmin edicisinden daha üstün performans gösterdiği görülmektedir. Bu sonuçların yanı sıra Çizelge 5.3 ve Şekil 5.3'den elde edilen sonuçlar şöyle özetlenebilir:

(i) $d = 0.1$ olsun. Teorem 5.5 kullanılarak elde edilen k_j değerleri ve buna bağlı olarak elde edilen sonuçlar şöyledir:
$k_j = 0.8704, 0.3492, 0.0062$.

$0 < k < 0.0062$ aralığından bir k değeri için $SMSE(\hat{g}_m(k = 0.005)) = 2.4019$ olarak bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_{d=0.1}) = 0.1403$ ile karşılaştırıldığında Teorem 5.5'in (a) kısmında belirtildiği gibi $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür (bkz. Şekil 5.3). Diğer taraftan $0 < 0.8704 < k$ aralığı için ise $SMSE(\hat{g}_m(k = 0.9)) = 2.3984$ olarak bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_{d=0.1}) = 0.1403$ ile karşılaştırıldığında ise $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür. Ancak Teorem 5.5'in (b) kısmının gerek koşulu sağlanmadığından, $SMSE(\hat{g}_m(k))$, $SMSE(\hat{g}_d)$'den daha küçük değildir.

(ii) $d = 0.9$ olsun. Teorem 5.5 kullanılarak elde edilen k_j değerleri ve buna bağlı olarak elde edilen sonuçlar şöyledir:
$k_j = 0.00765, 0.00658, 0.000077$.

$0 < k < 0.000077$ aralığından bir k değeri için $SMSE(\hat{g}_m(k = 0.00007)) = 23.235$ bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_{d=0.9}) = 0.0076$ ile karşılaştırıldığında $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür (bkz. Şekil 5.3). Diğer taraftan $0 < 0.00765 < k$

aralığı için ise $SMSE(\hat{g}_m(k=0.008))=1.8979$ olarak bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_{d=0.9})=0.0076$ ile karşılaştırıldığında ise $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$ 'dan daha küçüktür. Ancak Teorem 5.5'in (b) kısmının gerek koşulu sağlanmadığından, $SMSE(\hat{g}_m(k))$, $SMSE(\hat{g}_d)$'den daha küçük değildir.

(iii) $k=0.2$ olsun. Teorem 5.6 kullanılarak elde edilen d_j değerleri ve buna bağlı olarak elde edilen sonuçlar şöyledir:

$d_j=0.749, 0.1926, 0.0028$.

$0<d<0.0028<1$ aralığından bir d değeri için $SMSE(\hat{g}_{d=0.002})=0.1715$ elde edilmiştir ve $SMSE(\hat{g}_m(k=0.2))=1.9286$ ile karşılaştırıldığında $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$ 'dan daha küçüktür (bkz. Şekil 5.3). Diğer taraftan $0.749<d<1$ aralığı için ise $SMSE(\hat{g}_{d=0.8})=0.0122$ olarak bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_m(k=0.2))=1.9286$ ile karşılaştırıldığına ise $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür. Ancak Teorem 5.6'nın (b) kısmının gerek koşulu sağlanmadığından, $SMSE(\hat{g}_m(k))$, $SMSE(\hat{g}_d)$'den daha küçük değildir.

(iv) $k=0.8$ olsun. Teorem 5.6 kullanılarak elde edilen d_j değerleri ve buna bağlı olarak elde edilen sonuçlar şöyledir:

$d_j=0.1572, 0.0147, 0.0002$.

$0<d<0.0002<1$ aralığından bir d değeri için $SMSE(\hat{g}_{d=0.0001})=0.1721$ elde edilmiş olup $SMSE(\hat{g}_m(k=0.8))=2.3702$ ile karşılaştırıldığında Teorem 4.6'nın (a) kısmında belirtildiği gibi $SMSE(\hat{g}_d)$, $SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür (bkz. Şekil 5.3). Diğer taraftan $0<0.1572<d<1$ aralığı için ise $SMSE(\hat{g}_{d=0.2})=0.1118$ olarak bulunmuştur ve $SMSE(\hat{g}_m(k=0.8))=2.3712$ ile karşılaştırıldığına ise $SMSE(\hat{g}_d)$,

$SMSE(\hat{g}_m(k))$'dan daha küçüktür. Ancak Teorem 5.6'nın (b) kısmının gerek koşulu sağlanmadığından, $SMSE(\hat{g}_m(k))$, $SMSE(\hat{g}_d)$'den daha küçük değildir.

Bu bölümde Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan Almon-ridge, Almon-modified ridge, Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicilerinin MSE kriterine göre teorik karşılaştırmalar yapılmıştır. Teorik sonuçlara dayanarak Almon (1965) veri seti ile Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan tahmin ediciler için uygun birer *k* ve *d* parametrelerinin seçimi ile Almon tahmin ediciden daha üstün performans gösterdikleri görülmüştür. Teorik kısımda önerilen *k* ve *d* parametrelerinin seçim yöntemleri uygulamada ele alınan ekonometrik örnek üzerinde SMSE anlamında iyi sonuçlar vermiştir.

Li ve Yang (2012), çoklu iç ilişki seviyesinin şiddetli olduğu bir genel lineer regresyon modelinde ridge, Liu, modified ridge ve modified Liu tahmin edicilerinin EKK tahmin ediciden üstün olduklarını göstermiştir. Ayrıca modified Liu tahmin edicinin ridge, Liu ve modified ridge tahmin edicilerinden daha küçük SMSE değerlerine sahip olduğunu göstermişlerdir. Gecikmesi dağıtılmış modelde yapılan bu çalışmada ise benzer şekilde Almon-modified Liu tahmin edicisi en iyi performansı göstermiştir.

Burada yapılan teorik karşılaştırmalar ve uygulama sonuçları gösteriyor ki, *k* ve *d* parametrelerinin uygun birer seçimleri ile Almon-modified ridge ve Almon-modified Liu tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modellerde diğer alternatif tahmin edicilere göre daha iyi performans göstermektedir.

5. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE BAZI ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN HATA KARELER ORTALAMA MATRİSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI Berrin GÜLTAY

6. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİYE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLER

6.1. Stokastik Kısıtlı Modelde Mixed Regresyon

$$y = Xb + u \tag{6.1.}$$

şeklinde genel lineer regresyon modelimiz olsun. Burada y, $T\times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü, X, $T\times p$ tipinde stokastik olmayan bağımsız değişkenlerin gözlenen matrisi, b, $p\times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon katsayılarının vektörü ve u, $T\times 1$ tipinde sıfır ortalamalı, $s^2 I$ varyans-kovaryans matrisli rasgele hataların vektörüdür, yani $u \sim N(0, s^2 I)$.

Theil ve Goldberger (1961), $Rb = r$ lineer kısıtlarını stokastik formda kullanarak mixed regresyon modelini geliştirmişlerdir. r, $m \le p$ olmak üzere rassal değişkenin $m\times 1$ boyutlu bir vektör olan lineer kısıtlar,

$$r = Rb + v \tag{6.2.}$$

olarak yazılabilir. Burada R, $m\times p$ tipinde kısıtların belirlendiği matris, v sıfır ortalamalı, $s_v^2\Omega$ kovaryans matrisli, normal dağılımlı hataların vektörüdür. Yani $v \sim N(0, s_v^2\Omega)$'dır. Ayrıca u ve v bağımsızdır.

(6.2) ile verilen kısıt altında (6.1) ile verilen modelin parametrelerini tahmin edebilmek için modeli y ve X gözlemlerine (6.2)'deki bilgi eklenerek,

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{6.3.}$$

şeklinde ya da,

$$y_M = X_M b + u_M \tag{6.4.}$$

matris formunda yazılabilir. Burada M mixed olduğunu göstermektedir. (6.3) modeli (6.2) önbilgisi ile (6.1)'deki örneklem bilgisini birleştirmektedir. $u_M \sim N(0, \Omega_M)$ 'dir. Ω_M , $P:(m+T)\times(m+T)$ dönüşüm matrisi olmak üzere $P'\Omega_M P = I$, $\Omega_M^{-1} = PP'$ olacak şekilde,

$$\Omega_M = \begin{bmatrix} s^2 I_T & 0 \\ 0 & s_v^2 \Omega \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Omega_M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} I_T & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_v^2} \Omega^{-1} \end{bmatrix} \tag{6.5.}$$

formunda pd bir matristir. Böylece $P'u_M \sim N(0, I)$ olur ve

$$P'y_M = P'X_M b + P'u_M \tag{6.6.}$$

şeklindeki dönüştürülmüş modele EKK tahmin yöntemi uygulanabilir. Bunun için,

$$\begin{aligned} (P'y_M - P'X_M b)'(P'y_M - P'X_M' b) &= (y_M - X_M b)' \Omega_M^{-1} (y_M - X_M b) \\ &= \frac{(y - Xb)'(y - Xb)}{s^2} + \frac{1}{s_v^2}(r - Rb)' \Omega^{-1} (r - Rb) \end{aligned}$$

fonksiyonu b 'ya göre minimize edilmelidir. Buradan,

$$\begin{aligned} b_M &= \left[(P'X_M)'(P'X_M) \right]^{-1} (P'X_M)' P'y_M \\ &= (X_M' \Omega_M^{-1} X_M)^{-1} X_M' \Omega_M^{-1} y_M \end{aligned} \tag{6.7.}$$

şeklinde bilinen bir Ω_M ile en iyi lineer yansız tahmin edici (BLUE) olan Aitken genelleştirilmiş EKK (GEKK) tahmin edicisi elde edilir. Burada ise mixed tahmin edici olarak adlandırılacaktır.

$$X_M'\Omega_M^{-1}X_M = [X'R']\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2}I_T & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_v^2}\Omega^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2}X'X + \frac{1}{s_v^2}R'\Omega^{-1}R$$

olmasından dolayı, $l = s^2/s_v^2$ şeklinde varyansların oranı olmak üzere b_M 'nin farklı bir formu ise,

$$b_M = \left[\frac{1}{s^2}X'X + \frac{1}{s_v^2}R'\Omega^{-1}R\right]^{-1}\left[\frac{X'y}{s^2} + \frac{R'\Omega^{-1}r}{s_v^2}\right]$$

$$= \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1}\left(X'y + lR'\Omega^{-1}r\right)$$

$$= \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1}\left(X'Xb + lR'\Omega^{-1}Rb_p\right) \qquad (6.8.)$$

şeklindedir. Burada $b = (X'X)^{-1}X'y$, (6.1) modelindeki b 'nın EKK tahmin edicisi ve $b_p = \left(R'\Omega^{-1}R\right)^{-1}R'\Omega^{-1}r$ ise (6.2) kısıtındaki b 'nın önbilgi tahmin edicisidir. (6.8)'deki yapı b_p önbilgi tahmin edicisi ile b örneklem tahmin edicisinin ağırlıklandırılmış matris kombinasyonu şeklinde mixed tahmin ediciyi ifade etmektedir. Yani,

$$W_1 = \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1}X'X$$

$$W_2 = l\left(X'X + R'\Omega^{-1}R\right)^{-1}R'\Omega^{-1}R$$

olmak üzere

$$b_M = W_1 b + W_2 b_p \tag{6.9.}$$

yapısındadır. (6.8)'deki üçüncü eşitlik,

$$\begin{aligned} b_M &= \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1}\left[X'X\left(b - b_p\right) + \left(lR'\Omega^{-1}R + X'X\right)b_p\right] \\ &= b_p + \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1} X'X\left(b - b_p\right) \end{aligned} \tag{6.10.}$$

şeklinde düzenlerek b_M farklı bir şekilde de ifade edilebilir. (6.8) ya da (6.10)'dan görüldüğü gibi $s_v^2 \to \infty$ veya $l \to \infty$ ise yani bilgi vermeyen önbilgi kullanılırsa $b_M = b$ olur. Ayrıca $l \to \infty$ ise yani $s_v^2 \to 0$ ise $b_M = b_p$ olur.

Özel bir durum olarak, değerleri bilinen bir b_0 vektörü ile $r = Rb + v$ kısıtı $r = Rb_0$ formunda yazılabilir. Bu durumda, $b_p = \left(R'\Omega^{-1}R\right)^{-1} R'\Omega^{-1}Rb_0 = b_0$ olur ve (6.10) eşitliği,

$$b_M = b_0 + \left(X'X + lR'\Omega^{-1}R\right)^{-1} X'X\left(b - b_0\right) \tag{6.11.}$$

olarak elde edilir. Örneğin, $b_0 = 0$ olarak (6.11)'de yerine konduğunda $r = 0$ ve $R = I$ ise,

$$b_M = \left(X'X + lI_p\right)^{-1} X'y \tag{6.12.}$$

olur. Genellikle tek sabitli ve p bağımsız değişkenli bir modelde s^2'nin yansız tahmini için $S^2 = \left(y - Xb\right)'\left(y - Xb\right)(T - p)^{-1}$ kullanılır. $s^2\Omega$ 'nın bilindiği varsayımıyla b_M'nin tahminini,

$$\hat{b}_M = \left[\frac{1}{S^2}X'X + \frac{1}{s_v^2}R'\Omega^{-1}R\right]^{-1}\left[\frac{1}{S^2}X'y + \frac{1}{s_v^2}R'\Omega^{-1}r\right] \qquad (6.13.)$$

olarak elde edilir. Ancak bu tahmin edici yansız olmasına rağmen, $\hat{b}_M$ 'nin varyans kovaryans matrisi, b_M 'nin varyans kovaryans matrisi ile karşılaştırıldığında S^2'nin (6.13)'de stokastik olarak yer almasından dolayı farklıdır.

6.2. Regresyonun Bayesyen Analizi

Bayesyen yaklaşımının karakteristiğini yansıtan özellik, analizde ön bilgiye yer verilmesidir. Herhangi bir örneklem bilgisi gözlemlemeden önce elde edilen bilgi varsa dağılıma ön (önsel) dağılım denir. Ön dağılım ve örneklem bilgisinden elde edilen dağılıma ise son (sonsal) dağılım denir. Bayesyen yaklaşımda, denemeler yapılmadan önce parametreye ilişkin sahip olunan ön bilgi ön olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) sayesinde analize dahil edilir. Ancak ön bilgi her aşamada mevcut olmayabilir veya farklı seviyelerde ön bilgi olabilir. Bundan dolayı ön dağılımın oluşturulması bilgi veren ve bilgi vermeyen ön olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde iki başlık halinde incelenebilir. Bayesyen yaklaşımda $b_0, b_1, \mathbf{K}, b_p$ ve s parametreleri birer rasgele değişkendir ve olasılık dağılımları vardır.

f, b ve s 'yı içeren parametre vektörü, y, $f(y/f)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip örneklem gözlemlerinin bir vektörü olsun. $f(y/f)$, b ve s için benzerlik (likelihood) fonksiyonuna benzer ve b ve s hakkındaki tüm örneklem bilgisini içerir. f bir rasgele vektör olarak alınırsa,

$$h(f, y) = f(y/f)g(f) = g(f/y)f(y) \qquad (6.14.)$$

eşitliği yazılabilir. Burada h , f ve y 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, g, f 'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu, f , y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. (6.14) yeniden düzenlenirse,

$$g(f/y)=\frac{f(y/f)g(f)}{f(y)} \qquad (6.15.)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade Bayes Teoremi olarak bilinmektedir. $g(f/y)$, y örneklemi elde edildikten sonra f ile ilgili tüm bilgiyi özetlediğinden dolayı, f için son olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $g(f)$, f için ön olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve f ile ilgili örneklem olmayan bilgiyi özetler. $f(y)$, f 'ya göre sabit olarak ele alınabilir ve $f(y/f)$, $L(f/y)$ şeklinde benzerlik fonksiyonu şeklinde yazılabilirse, (6.15) ifadesi,

$$g(f/y)\propto L(f/y)g(f) \qquad (6.16.)$$

olarak ifade edilir. (2.3) ile verilen genel lineer regresyon modeline Bayesyen kuralı uygulandığı zaman analizin temelini oluşturan süreç,

Son oyf $\propto$ Ön oyf $\times$ Benzerlik Fonksiyonu

$$P(b,s/y)\propto P(b,s)L(b,s/y) \qquad (6.17.)$$

şeklindedir. $y'=(y_1,y_2,\mathbf{K}\,y_n)$, bilinmeyen m ortalamalı, bilinen $s^2=s_0^2$ varyanslı normal bir kitleden çekilmiş n birimlik bağımsız gözlemler olsun. m parametresinin son dağılımı (6.17)'den,

$$p(m|y,s_0^2)\propto p(m)p(y|m,s_0^2) \qquad (6.18.)$$

şeklinde elde edilir. Burada $p\left(m|y,s_0^2\right)$, verilen bir y örneklem bilgisi ve bilindiği varsayılan s_0^2 varyans ile m parametresinin son olasılık yoğunluk fonksiyonu olup, $p(m)$ ise ön olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $p\left(y|m,s_0^2\right)$ ise bilinmeyen m parametresinin $\prod_{i=1}^{n} p\left(y_i|m,s_0^2\right)$ şeklinde benzerlik fonksiyonudur. Yani,

$$p\left(y|m,s_0^2\right)=\left(2ps_0^2\right)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2s_0^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-m)^2\right]$$

$$=\left(2ps_0^2\right)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2s_0^2}\left[vs^2+n(m-\hat{m})^2\right]\right] \qquad (6.19.)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $v=n-1$, $\hat{m}=(1/n)\sum_{i=1}^{n} y_i$ örneklem ortalaması, $s^2=(1/v)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{m})^2$ olan örneklem varyansıdır. m için bir ön dağılım fonksiyonu göz önünde bulundurmak istenirse, bu parametre hakkındaki ön bilginin tek değişkenli normal dağılıma sahip ise,

$$p(m)=\frac{1}{\sqrt{2p}\,s_a}\exp\left[-\frac{1}{2s_a^2}(m-m_a)^2\right] \qquad (6.20.)$$

olarak ifade edilir. Burada m_a ve s_a^2 araştırmacı tarafından belirlenen ve onun elde ettiği başlangıç bilgilerine dayanan ön ortalama ve ön varyanstır. Buradan Bayes teoremi gereğince, (6.19)'daki benzerlik fonksiyonu ve (6.20)'deki ön oyf ile birleştirerek m için son oyf,

$$p(m|y,s_0^2) \propto p(m)p(y|m,s_0^2)$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(m-m_a)^2}{s_a^2}+\frac{n}{s_0^2}(m-\hat{m})^2\right]\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{s_a^2+s_0^2/n}{2s_a^2s_0^2/n}+\left(m-\frac{\hat{m}s_a^2+m_as_0^2/n}{s_a^2+s_0^2/n}\right)^2\right]\right\} \qquad (6.21.)$$

olarak bulunur. Burada m ,

$$E(m)=\frac{\hat{m}s_a^2+m_as_0^2/n}{s_a^2+s_0^2/n}=\frac{\hat{m}(s_0^2/n)^{-1}+m_a(s_a^2)^{-1}}{(s_0^2/n)^{-1}+(s_a^2)^{-1}} \qquad (6.22.)$$

ortalamalı ve

$$Var(m)=\frac{s_a^2s_0^2/n}{s_a^2+s_0^2/n}=\frac{1}{(s_0^2/n)^{-1}+(s_a^2)^{-1}} \qquad (6.23.)$$

varyanslı, normal dağılımlı bir son dağılımdır.

6.3. Bazı Ön Dağılım Çeşitleri

Ön dağılım, araştırmacının elindeki bilgileri analize yansıtma aracıdır. Ön dağılımın seçimi araştırmacının bilgi ve düşüncesine bağlıdır. Ön dağılımın seçiminde veya oluşturulmasında çok çeşitli sınıflandırmalar yapılabilir. Örneğin, modern parametrik bayesciler, tasarlanmış özelliklere sahip eşlenik ön dağılım belirlemeyi uygun görürken, subjektif bayesciler çoğunlukla uzman görüşünden elde edilen bilgiye göre ortaya çıkarılan ön dağılımı tercih ederler (Ekici, 2005). Burada genel lineer modelde eşlenik ön dağılım ve belirsiz ön dağılım çeşitleri ele alınacaktır. Eşlenik ön dağılım, ön dağılım ile benzerlik fonksiyonu birleştirildiğinde

elde edilen son dağılımının da ön dağılım ile aynı fonksiyon formunda olduğu bir dağılımdır. Eğer parametreler hakkında hiçbir bilgi yoksa bilgi verici olmayan ya da belirsiz ön dağılım şeklinde adlandırılan ön dağılım kullanılmaktadır.

6.3.1. Eşlenik Ön Dağılım

$u \sim N(0, s^2 I)$ olmak üzere y , Xb ortalama vektörlü, $s^2 I$ varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılıma sahip olsun. Yani $y \sim N(Xb, s^2 I)$. y 'nin yoğunluk fonksiyonu (verinin olasılığı),

$$f(y/b, s, X) = \frac{1}{(2p)^{T/2} s^T} \exp\left[-\frac{1}{s^2} (y - Xb)' (y - Xb) \right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu da, y ve X üzerine verilmiş bir veri kümesi için b ve s 'ya bağlı benzerlik fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Yani,

$$L(b, s) = L(b, s/y) = f(y/b, s, X)$$

olur. Benzerlik fonksiyonundaki karesel formu,

$$\begin{aligned} (y - Xb)' (y - Xb) &= (y - Xb)' (y - Xb) + (b - b)' X'X (b - b) \\ &= SSE(b) + (b - b)' X'X (b - b) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece benzerlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(b, s) &= \frac{1}{(2p)^{T/2} s^T} \exp\left[\frac{1}{2s^2} \{SSE(b) + (b - b)' X' X (b - b)\} \right] \\ &\propto s^{-T} \exp\left[\frac{1}{2s^2} \{SSE(b) + (b - b)' X' X (b - b)\} \right] \end{aligned} \qquad (6.24.)$$

Burada $\propto$ orantılılığı ve sabitlerin atılarak ifadenin basitleşebileceğini göstermektedir. İki tür durumla karşılaşılabilir.

Durum 1. (Bilinen s ile) Bu durumda (6.24) eşitliği,

$$L(b) \propto \exp\left[-\frac{1}{2s^2}(b-b)'X'X(b-b)\right]$$

olarak yazılabilir. Çünkü $SSE(b)/2s^2$ ifadesi b 'yı içermemektedir. Benzerlik fonksiyonunun bu yapısından dolayı b 'nın ön dağılımı için normal dağılım kullanılabileceği önerilmiştir. b_0 önsel ortalama vektörü ve $s^2\Omega$ önsel varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılım,

$$p(b) = \frac{1}{\left(2p^{p/2}\left|s^2\Omega\right|^{1/2}\right)}\exp\left[\frac{1}{2s^2}(b-b_0)'\Omega^{-1}(b-b_0)\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2s^2}(b-b_0)'\Omega^{-1}(b-b_0)\right] \qquad (6.25.)$$

şeklindedir. Daha sonra Bayes teoremi kullanılarak sonsal yoğunluğu oransal ön dağılım ile benzerlik fonksiyonun çarpımı şeklindedir. Yani,

$$p(b/y) \propto p(b)L(b)$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\left\{(b-b)'X'X(b-b)+(b-b_0)'\Omega^{-1}(b-b_0)\right\}\right] \qquad (6.26.)$$

olarak ifade edilir. $(b-b)'X'X(b-b)+(b-b_0)'\Omega^{-1}(b-b_0)$ ifadesi,

$$= b'\left(X'X + \Omega^{-1}\right)b - 2b'\left(X'Xb + \Omega^{-1}b_0\right) + c$$

$$= \left(b - b^*\right)'\Omega^{*-1}\left(b - b^*\right) + c \qquad (6.27.)$$

olarak da yazılabilir. Burada $c = b'X'Xb + b_0'\Omega^{-1}b_0$ olarak kısaltılmıştır ve b 'yı içermediği görülmektedir. Ayrıca burada,

$$b^* = \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}\left(X'Xb + \Omega^{-1}b_0\right)$$

$$\Omega^* = \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1} \quad c^* = c - b'^*\Omega^{*-1}b^* \qquad (6.28.)$$

şeklindedir ve bu ifadeler de b 'yı içermemektedir. (6.28) kullanılarak sonsal yoğunluğu,

$$p(b/y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\left(b - b^*\right)'\Omega^{*-1}\left(b - b^*\right)\right] \qquad (6.29.)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(2p)^{-T/2}\left|s^2\Omega^*\right|^{-1/2}$ normallik sabitidir. Benzer şekilde yoğunluk b^* ortalama vektörlü, Ω^* varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılımlıdır. Bu sonsal yoğunlukta genellikle $b \sim N\left(b^*, s^2\Omega^*\right)$ şeklinde ifade edilir. Önsel ve sonsalın normal olmasından dolayı, yukarıda b için verinin ön dağılımı eşlenik ön dağılım olarak adlandırılır. Genel olarak ise,

$$b_1^* = \left(\frac{X'X}{s^2} + \frac{\Omega^{-1}}{s_b^2}\right)^{-1}\left(\frac{X'Xb}{s^2} + \frac{\Omega^{-1}b_0}{s_b^2}\right)$$

$$\Omega_1^* = \left(\frac{X'X}{s^2} + \frac{\Omega^{-1}}{s_b^2}\right)^{-1} \qquad (6.30.)$$

olmak üzere ön dağılım $b \sim N\left(b_0, s^2_b \Omega\right)$ ise son dağılım $b \sim N\left(b^*, s^2 \Omega_1^*\right)$ 'dır. Ayrıca $s^2_b = s^2$ için, $b_1^* = b^*$ ve $\Omega_1^* = \Omega^*$ olur.

Durum 2. (Bilinmeyen s ile) Bu durumda (6.23)'deki benzerlik fonksiyonuna yakın bir ön dağılım söz konusudur. $a > 0$, $l > 0$ olmak üzere eşlenik ön dağılım,

$$p(b, s) = p(b/s)p(s) \propto$$
$$s^{-(l+p)} |\Omega|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\left[(l-1)a^2 + (b-b_0)' \Omega^{-1} (b-b_0)\right]\right] \qquad (6.31.)$$

şeklinde bir ortak dağılımdır. $l > 1$ ve $a > 0$ olmak üzere,

$$p(s) \propto s^{-1} \exp\left[\frac{(l-1)a^2}{2s^2}\right]$$

ters gama fonksiyonu ile,

$$p(b/s) \propto |\Omega|^{-1/2} s^{-p} \exp\left[\frac{1}{2s^2}(b-b_0)' \Omega^{-1} (b-b_0)\right]$$

koşullu dağılımı ise verilen bir s ile b 'nın çok değişkenli dağılımıdır. $p(b, s) = p(b/s)p(s)$ eşitliği ortak olasılık için ailesel ilişkinin benzer olduğu doğrulanabilir. $p(b, s)$'nın $s > 0$ için integrali alındığında b 'nın marjinal dağılımı çok değişkenli student t olacaktır. (6.24)'deki benzerlik fonksiyonu (6.31) ve (6.30)' daki ön dağılımlar ile çarpıldığında b ve s 'nın son dağılımı,

$$p(b, s/y) \propto s^{-n} \exp\left[\frac{1}{2s^2}\left\{c_0 + (b-b^*)' \Omega^{*-1} (b-b^*)\right\}\right] \qquad (6.32.)$$

elde edilir. Burada $n=(T+l+p)$ ve $c_0 = SSE(b)+(l-1)a^2+c^*$ 'dır. (6.32)'nin s 'ya göre integrali alındığında b 'nın marjinal son dağılımı,

$$p(b/y) \propto \left[c_0 + (b-b^*)' \Omega^{*-1} (b-b^*) \right]^{-(n-1)/2} \qquad (6.33.)$$

olur. Bu da b^* ortalama vektörlü, $\frac{c_0}{n-p-1}\Omega^*$ varyans kovaryans matrisli çok değişkenli t dağılımının yoğunluk fonksiyodur. Yani, b 'nın son yoğunluk fonksiyonu ~ çok değişkenli $t\left(b^*, \frac{c_0}{n-p-1}\Omega^*\right)$ olur.

6.3.2. Belirsiz Ön Dağılım

b ve s parametreleri hakkında bir şey bilmediğimiz zaman b ve s 'nın ortak ön dağılımı,

$$p(b,s) = p(b/s)p(s)$$
$$\propto \frac{1}{s} \qquad (6.34.)$$

şeklindedir. Burada $p(b/s)$ bir sabit ve $p(s)$, $1/s$ ile orantılıdır. Bu da (6.31)'deki b ve s 'nın ön dağılımlarının varyanslarının $\Omega^{-1} \to 0$ ve $a \to 0$ olmasıyla elde edilebilir. (6.34)'deki ön dağılım, "belirsiz" ön dağılım ya da "uygunsuz" ön dağılım olarak bilinir. Uygunsuz denmesinin sebebi olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali alındığında sonsuz çıkar ve olasılıklar toplamının 1'e eşit olma aksiyomunu bozar. Ayrıca bu Jeffreys'in ön dağılımı olarak da bilinmektedir (Jeffreys, 1957). Belirsiz ön dağılım kullanarak son dağılım,

$$p(b, s/y) \propto s^{-(T+1)} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\{SSE(b)+(b-b)'X'X(b-b)\}\right] \qquad (6.35.)$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen bir s ile b 'nın son dağılımı $b \sim N\left(b, s^2(X'X)^{-1}\right)$ olur. Ancak, s 'ya göre integral alındığında b 'nın marjinal son dağılımı,

$$p(b/y) \propto [SSE(b)+(b-b)'X'X(b-b)]^{-T/2} \qquad (6.36.)$$

olur. Bu da b ortalama vektörlü, $\frac{SSE(b)}{T-p}(X'X)^{-1}$ varyans kovaryans matrisli çok değişkenli t dağılımıdır. s hakkında yorum yapabilmek için ortak son dağılımın b 'ya göre integrali alınmalıdır.

6.4. Bayesyen Regresyon Tahmin Edici

b ve s üzerine eşlenik ya da bilgi verici olmayan ön dağılımlar kullanıldığında b 'nın marjinal son dağılımı çok değişkenli t dağılımı elde edilmiştir. Böylece b parametresi çok değişkenli t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinen özellikleri kullanılarak analiz edilebilir. Bu simetrik son yoğunluk fonksiyonunun ortalaması moduna eşittir ve parametrenin Bayesyen tahmin edicisini sağlamaktadır. Bayesyen tahmin edici karesel kayıp fonksiyonuna göre beklenen kaybın minimum olduğu bir tahmin edicidir (MELO). (6.36)'dan b ve s hakkında belirsiz ön bilgi olduğu varsayılırsa b 'nın Bayesyen tahmin edicisi, EKK ya da Maksimum Likelihood tahmin edicisi (MLE) ile aynıdır, yani $b=(X'X)^{-1}X'y$ olur. b ve s üzerine eşlenik ön dağılım kullanılması durumunda ise b 'nın Bayesyen tahmin edicisi (6.28)'den,

$$b^* = \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}\left(X'Xb + \Omega^{-1}b_0\right)$$

$$= \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}X'Xb + \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}\Omega^{-1}b_0 \qquad (6.37.)$$

şeklindedir. b^* tahmin edicisi, veriye ve b_0 önsel ortalamaya dayalı b 'nin ağırlıklandırılmış matris kombinasyonudur. Ayrıca b ve b_0 'ın ağırlık matrisleri sırasıyla b ve b 'nın varyans ve kovaryans matrislerinin normalleştirilmiş tersleridir. $V(b) = s^2(X'X)^{-1}$ ve $V(b) = s^2\Omega$ olduğundan $V(b)^{-1} + V(b)^{-1} = \frac{1}{s^2}\left(X'X + \Omega^{-1}\right)$ olur. Ayrıca (6.37)'daki Bayesyen tahmin edici b^*'daki ikinci parantezin içine $X'Xb_0$ ekleyip çıkartma işlemi yapılarak,

$$b^* = \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}\left[X'X(b - b_0) + \left(X'X + \Omega^{-1}\right)b_0\right] \qquad (6.38.)$$

$$= b_0 + \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}X'X(b - b_0) \qquad (6.39.)$$

şeklinde yazılabilir. Ya da $X'X = X'X + \Omega^{-1} - \Omega^{-1}$ eşitliği kullanılarak,

$$b^* = b_0 + \left(I - \left(X'X + \Omega^{-1}\right)^{-1}\Omega^{-1}\right)(b - b_0) \qquad (6.40.)$$

elde edilebilir. (6.37) ve (6.39)'deki Bayesyen tahmin edici b^*'ın her iki formu da $R = I$, $l = 1$ ve $r = b_0$ için (6.8) ve (6.10)'daki mixed tahmin edici (b_M) formlarına karşılık gelmektedir. Bunun anlamı ise $p(b/s)$'nın b_0 ortalamalı, $s^2\Omega$ varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılımlı olduğudur. Böylece $E(v) = 0$ ve $E(vv') = s^2\Omega$ olmak üzere $b = b_0 + v$ olarak yazılabilir. Bu da (6.1) modelini $r = b_0$ ve $R = I$ olmak üzere $r = Rb + v$ stokastik kısıtlar ile çözebileceğimizi göstermektedir. Ancak Bayesyen sonuçlar ile mixed regresyon sonuçları benzer

olsalar bile yorumları farklıdır. Bayesyen modelinde b bir rassal değişken iken mixed regresyon modelinde değildir.

6.5. Lindley'in Bayesyen Regresyon Modeli

Ön bilgi seçiminden etkilenecek bir yapıya sahip olan bir b parametre vektörü olduğunda, (6.1) modelinin Bayesyen analizini göz önünde bulunduralım. b 'nın yapısı üzerine en basit haliyle,

$$E(b) = Ab_0 \tag{6.41.}$$

formu örnek verilebilir. Burada A , $p \times p_0$ tipinde bilinen bir matris ve b_0 , $p_0 \times 1$ tipinde bir hiperparametredir. b , bilinen varyans kovaryans matrisi Ω_0 ile çok değişkenli normal dağılıma sahip olsun. Böyle ise yukarıdaki yapı b 'nın normal ön dağılımının $b \sim N(Ab_0, s^2\Omega_0)$ olduğunun vurgulamaktadır. Örneğin, bu tip bir yapı "gecikmesi polinom şeklinde dağıtılmış" modellerde ve çoklu regresyon modellerinde görülmektedir. Birçok uygulamadaki süreçte hiperparametre olarak adlandırılan b_0 'ın yapısı,

$$E(b_0) = A_1 m \tag{6.42.}$$

formunda olduğu varsayılmaktadır. Burada A_1 , $p_0 \times p_1$ ve m , $p_1 \times 1$ tipinde olup bilinen matris ve vektördür. Genellikle p_1 , p 'den daha küçüktür ve birçok uygulamada da birdir.

b_0 hiperparametresi bilinen Ω_1 varyans kovaryans matrisli normal dağılıma sahiptir, yani $b_0 \sim N(A_1 m, s^2\Omega_1)$ dir. Problemimiz yeniden, $y = Xb + u$ genel Bayesyen regresyon modeli için,

$$y \sim N(Xb, s^2 I),$$
$$b \sim N(Ab_0, s^2 \Omega_0),$$
$$b_0 \sim N(A_1 m, s^2 \Omega_1) \qquad (6.43.)$$

varsayımları ile analiz yapmaktır. (6.43)'deki genel Bayesyen modeli, Lindley (1971) ve Lindley ve Smith (1972)'ye göre ön dağılım yapıları hiyerarşik (üç aşamalı) lineer regresyon modelinden oluşmaktadır. İki aşamalı hiyerarşik ön dağılımların yapılarından birinci aşaması lineer regresyondaki parametreler arasındaki ilişkiyi tanımlar, ikicisi ise bu ilişkinin yapısı hakkındaki bilgiyi tanımlar. $A = I$ olarak birinci aşama ön dağım kullanılıyorsa önceki bölümlerde tanımlanan Bayesyen regresyon modeli elde edilir.

(6.42) ve (6.43)'deki yapıların lineer ve dağılımlarının normal olmasından dolayı (6.43) modeli,

$$y \sim N(Xb, s^2 I)$$
$$b \sim N(A_2 m, s^2 \Omega_2); \; A_2 = AA_1; \; \Omega_2 = A\Omega_1 A' + \Omega_0$$

modeline indirgenir. Çünkü burada $v \sim N(0, \Omega_0)$, $w \sim N(0, \Omega_1)$ ve $E(vw') = 0$ olmak üzere, $b = Ab_0 + v$ ve $b_0 = A_1 m + w$ olarak ifade edilebilir. Böylece $b = AA_1 m + v + Aw$, $AA_1 m$ ortalamalı, $s^2(A\Omega_1 A' + \Omega_0)$ varyans kovaryans matrislidir. (6.29)' dan y verisi ve s^2, Ω_0, Ω_1 koşulları ile b 'nın sonsal yoğunluğu,

$$p(b/y, s^2, \Omega_0, \Omega_1) \propto \exp\left[-\frac{1}{2s^2}(b - b_L^*)' \Omega_L^{*-1}(b - b_L^*)\right] \qquad (6.44.)$$

şeklinde yazılabilir. Burada L Lindley ve b, EKK tahmin edicisini göstermek üzere,

$$b_L^* = (X'X + \Omega_2^{-1})^{-1}(X'Xb + \Omega_2^{-1} A_2 m), \qquad (6.45.)$$

$$\Omega_L^* = \left(X'X + \Omega_2^{-1}\right)^{-1} \tag{6.46.}$$

şeklindedir. b_L^*'ın farklı bir formu da,

$$b_L^* = A_2 m + \left[I - \left(\Omega_2^{-1} + X'X\right)^{-1}\Omega_2^{-1}\right]\left(b - A_2 m\right) \tag{6.47.}$$

şeklindedir. Bu sonsal yoğunluk b_L^* ortalama vektörlü ve Ω_L^* varyans kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılımlıdır. Böylece (6.47)'den b 'nın Lindley Bayesyen tahmin edicisi,

$$b_L^* = \left[X'X + \left(A\Omega_1 A' + \Omega_0\right)^{-1}\right]^{-1}\left[X'Xb + \left(A\Omega_1 A' + \Omega_0\right)^{-1} AA_1 m\right] \tag{6.48.}$$

olur. (6.47)'deki Ω_2^{-1} formu için,

$$\begin{aligned}\Omega_2^{-1} &= \left(A\Omega_1 A' + \Omega_0\right)^{-1} \\ &= \Omega_0^{-1} - \Omega_0^{-1} A\left(A'\Omega_0^{-1} A + \Omega_1^{-1}\right)^{-1} A'\Omega_0^{-1}\end{aligned} \tag{6.49.}$$

şeklinde matris tersinin eşitliği kullanılmıştır. $\Omega_1 \to \infty$ olduğu durumda yani b_0 hakkında bilgi verici olmayan ya da belirsiz bir ön dağılım söz konusuysa (6.49) eşitliği Ω_1 terimini içermeyen,

$$\Omega_2^{-1} = \Omega_0^{-1} - \Omega_0^{-1} A\left(A'\Omega_0^{-1} A\right)^{-1} A'\Omega_0^{-1} \tag{6.50.}$$

formundadır. Ayrıca,

$$\Omega_2^{-1} A = \Omega_0^{-1} A - \Omega_0^{-1} A\left(A'\Omega_0^{-1} A\right)^{-1}\left(A'\Omega_0^{-1} A\right) = 0$$

olmasından dolayı (6.45)'deki b_L^* ,

$$b_L^* = \left(X'X + \Omega_2^{-1}\right)^{-1} X'y$$
$$= \left[I + \left(\Omega_2 X'X\right)^{-1}\right]^{-1} b \qquad (6.51.)$$

şeklinde basitleşir. (6.51)'deki $\left(\Omega_2 X'X\right)^{-1}$ parçası b'ye düzeltme terimi olmasını sağlar. Bu şekilde benzer bir düzeltme formu Stein tipi ve Ridge tahmin edicilerinde de görülmektedir. Bu tahmin ediciler James ve Stein (1961) ve Hoerl ve Kennard (1970) tarafından Bayesyen olmayan yöntemlerle elde edilmiştir. Bunun için Lindley' in hiperparametre modeli Bayesyen olmayan bu tahmin edicilere bir Bayesyen bakış açısı sağlamaktadır. Eğer ilgilenilen parametre b yerine (6.43)'deki b_0 ise ve $\Omega_1 \to \infty$ ise verilen s^2, Ω_0, Ω_1 ve y için b_0'ın sonsal yoğunluğu elde edilebilir. Buradan ortalaması,

$$b_0^* = \left\{A'\left((X'X)^{-1} + \Omega_0\right)^{-1} A\right\}^{-1} A'\left((X'X)^{-1} + \Omega_0\right)^{-1} b \qquad (6.52.)$$

olan çok değişkenli normal dağılımlı olacaktır. Ayrıca (6.43)'den $y \sim N\left(XAb_0, s^2 I + s^2 X\Omega_0 X'\right)$ olmasıyla da b_0^* elde edilebilir. Böylece b_0 belirsiz ön dağılıma sahipse b_0'ın sonsal ortalaması,

$$b_0^* = \left[A'X'\left(I + X\Omega_0 X'\right)^{-1} XA\right]^{-1} A'X'\left(I + X\Omega_0 X'\right)^{-1} y$$

şeklinde genelleştirilmiş EKK tahmin edicisidir. Burada $\left(I + X\Omega_0 X'\right)^{-1}$ ifadesinin (6.49)'daki form kullanılarak (6.52) ile benzer hale gelmiştir. (6.50)'den Lindley'in Bayesyen tahmin edicisi b_L^* 'ın farklı bir formu $X'X + \Omega_2^{-1} = \left(X'X + \Omega_0^{-1}\right) - \left(\Omega_0^{-1}A\right)\left(A'\Omega_0^{-1}A\right)^{-1}\left(A'\Omega_0^{-1}\right)$ eşitliği kullanılarak elde edilebilir.

6.6. Stokastik Düzgün Önbilgi Altında Shiller Tahmin Edici

Almon tahmin edici p ve s 'nin gerçek değerleri bilindiğinde ve $b = Aa$ formunda ise BLUE özelliğine sahiptir. p ve s'ye bağlı herhangi bir yanlış bilgi Almon tahmin edicisinin etkinliğini kaybetmesine neden olabilir. Ayrıca p 'nin değeri doğru olarak belirlense bile gecikme ağırlıkları beklenen *s-inci* dereceden olmayabilir. Bu gibi nedenlerden dolayı önbilginin kesin olmadığını varsayarak,

$$b = Aa + v \tag{6.53.}$$

formu daha esnek bir yaklaşım olabilir. $v \sim N\left(0, s_v^2 I\right)$ dağılımına sahiptir. $RAa = 0$ olmasından dolayı b üzerindeki stokastik kısıt,

$$Rb = Rv \tag{6.54.}$$

olur ve $Rv \sim N\left(0, s_v^2 RR'\right)$ dağılımına sahiptir. Bundan sonra $Rb = Rv$ stokastik önbilgisi altında (3.25)'de verilen gecikmesi dağıtılmış model tahmin edilebilir. Bunun için,

$$\Theta = \frac{(y - Xb)'(y - Xb)}{s_u^2} + \frac{(Rb)'(RR')^{-1}(Rb)}{s_u^2}$$

eşitliği b 'ya göre minimize edilmelidir. Bunun sonucunda elde edilen tahmin edici,

$$\begin{aligned} \hat{b}_M &= \left(\frac{X'X}{s_u^2} + \frac{R'(RR')R}{s_v^2} \right)^{-1} \left(\frac{X'y}{s_u^2} \right) \\ &= \left(X'X + lM\right)^{-1} X'y \end{aligned} \tag{6.55.}$$

şeklinde Theil-Goldberger' in mixed tahmin edicisidir. Burada $l = s_u^2 / s_v^2$ ve $M = I - A(A'A)^{-1}A$ şeklindedir. (6.54)'deki kovaryans matrisi $Rv \sim N(0, s_v^2 I)$ varsayılırsa, $Rb = Rv$ kısıtı altında b 'nın tahmin edicisi Shiller (1973) tarafından,

$$\hat{b}_{SH} = (X'X + lR'R)^{-1} X'y \qquad (6.56.)$$

olarak tanımlanmıştır. $\hat{b}_M$ ve $\hat{b}_{SH}$ arasındaki fark Shiller'in $Rb = 0$ olmasını sağlayan $b = Aa$ ile başlaması ve $Rb = v$ gibi stokastik kısıtlar belirlemek için v gibi stokastik bir vektör kullanmasından kaynaklanmaktadır. Böylece $b = Aa$ ' yı ya da $Rb = 0$ 'ı stokastik yaparak fark yaratılır.

6.7. Stokastik Düzgün Önbilginin Bayesyen Yorumu

Stokastik bilgiyi ele almanın en etkili ve anlamlı yolu Bayesyen yöntemleriyle olur. Gecikme ağırlığı vektörü b normal önbilgiye sahip olduğu zaman,

$$b \sim N(Aa, s_v^2 I) \quad s_v^2 = s_b^2$$

ve örneklem bilgisi,

$$y \sim N(Xb, s_u^2 I)$$

olur. Böylece sonsal ortalama, s_v^2 ve a koşuluyla

$$\hat{b}_B = \left[\frac{X'X}{s_u^2} + \frac{I}{s_v^2}\right]^{-1}\left[\frac{X'y}{s_u^2} + \frac{Aa}{s_v^2}\right] \qquad (6.57.)$$

şeklindedir. Burada B, karesel kayıp ve normal önbilgi altında, b 'nın Bayes tahmin edicisini göstermektedir. Ancak b hakkında bilgi içermeyen bir önbilgi olduğunu düşünüldüğünde $\hat{b}_B = (X'X)^{-1}X'y = b$, yani EKK tahmin edici olur. a parametresinin nadir olarak bilinmesinden dolayı, a 'nın normal dağıldığını varsayarak bir adım ileri gidilebilir. Böylece Lindley ve Smith' in Bayesyen modeli,

$$y \sim N(Xb, s_u^2 I)$$
$$b \sim N(Aa, s_v^2 I)$$
$$a \sim N(\bar{a}, s_a^2 I)$$

olur (Lindley ve Smith, 1972). Bu durumda b 'nın sonsal yoğunluğu,

$$D_0^{-1} = \left[\frac{X'X}{s_u^2} + \frac{I}{s_v^2} - \frac{A}{s_v^2}\left[\frac{A'A}{s_v^2} + \frac{I}{s_a^2}\right]^{-1}\frac{A'}{s_v^2}\right]$$
$$d_0 = \left[\frac{X'y}{s_u^2} + \left[\frac{I}{s_v^2} - \frac{A}{s_v^2}\left[\frac{A'A}{s_v^2} + \frac{I}{s_a^2}\right]^{-1}\frac{A'}{s_v^2}\right]A\bar{a}\right]$$

ve $b^* = D_0 d_0$ olmak üzere $N(b^*, D_0)$'dır. Ancak a için bilgi içermeyen önbilgi kullanılırsa, yani $s_a^2 \to \infty$ ise b^*,

$$\hat{b}_L = b^* = (X'X + lM)^{-1}X'y$$
$$= (I + l(X'X)^{-1}M)^{-1}b, \qquad l = \frac{s_u^2}{s_v^2} \qquad (6.58.)$$

formunda basitleşir. Burada b , EKK tahmin edici, $M = I - A(A'A)^{-1}A'$ ve L alt indisi de Lindley' i göstermektedir. b^* , $M = I - A(A'A)^{-1}A'$ eşitliğinin kullanılmasıyla (6.55)'deki mixed tahmin ediciyle aynı olur. Ancak yorumları farklıdır. (6.58) eşitliği,

$$b^* = (X'X + lI)^{-1}(X'Xb + lAa^*)$$
$$= Aa^* + \left[I + l(X'X)^{-1}\right]^{-1}(b - Aa^*) \qquad (6.59.)$$

formunda da yazılabilir. Burada,

$$a^* = \left[A'\left[(X'X)^{-1} + l^{-1}I\right]^{-1}A\right]^{-1}A'\left[(X'X)^{-1} + l^{-1}I\right]^{-1}b \qquad (6.60.)$$

şeklinde a 'nın sonsal ortalamasıdır. (6.59) ve (6.60) eşitliklerinden, $b^* = Aa + v$ modelinin EKK tahmin edicisinin,

$$a^* = (A'A)^{-1}A'b^* \qquad (6.61.)$$

olduğu görülebilir. b^*'ın sonsal ortalaması, (a ile ilgili bilgi verici olmayan önbilgi ile Bayes tahmin edici) b ve Aa^* tahmin edicilerinin ağırlıklı matris kombinasyonu gibidir. Ayrıca b^*, EKK tahmin edici b'yi Aa 'nın sonsal ortalaması olan Aa^* yönünde büzer. (6.58) ve (6.56) tahmin edicileri karşılaştırıldığında ise bilinen bir a ile Bayes tahmin edici EKK tahmin edicisini Aa yönünde, bilgi verici olmayan bir önbilgi ile Lindley'in Bayesyen tahmin edicisi ise Aa^* yönünde büzer. Böylece b^* tahmin edicisisi a yerine a^* yazılmış olan (6.56)'daki $\hat{b}_B$ haline gelir.

(6.57)'deki l ile ilgili olarak Lindley (1971) ve Lindley ve Smith (1972), b 'nın EKK tahminiyle başlayan $(l = 0)$ ve s_u^2 ve s_v^2 için sırasıyla $(y - Xb)'(y - Xb)/n_1$, $(b - Aa)'(b - Aa)/n_2$ şeklinde tahminlerini kullanan iteratif

bir yöntem önermişlerdir. Burada $l = 0$ için $a = (A'A)^{-1}A'b$ ve n_1, n_2 sabitlerdir. l, s_u^2 ve s_v^2'nin bu tahminleri kullanılarak, $\hat{l} = \frac{gs}{b'Mb}$, $s = (y - Xb)'(y - Xb)$ şeklinde yazılabilir. Burada g keyfi bir sabittir.

6.8. Bayesyen Liu Tipi Tahmin Ediciler

$$y = Xb + e \quad e \sim (0, s^2 I) \tag{6.62.}$$

lineer regresyon modelini göz önüne alalım. Burada, y, gözlemlerden oluşan n boyutlu bir vektör; X, $s \le m$ ranklı $n \times m$ tipinde bir matris; b, m boyutlu parametrelerin bir vektörü ve e, n boyutlu hatalar vektörüdür.

Özkale ve Kaçıranlar (2007) ridge ve Stein tahmin edici fikrini birleştirerek iki parametreli versiyonunu,

$$\hat{b}_{OK} = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kdb), \quad 0 < d < 1 \tag{6.63.}$$

şeklinde tanımlamıştır. (6.62) modelindeki b 'nın, sırasıyla ortalaması ve varyans-kovaryans matrisi

$$E(b) = q \text{ ve } D(b) = H \tag{6.64.}$$

olan bir rasgele değişken olduğunu varsayalım. Burada H, negatif tanımlı olmayan bir matristir. Ayrıca,

$$E\left(e/b\right) = 0 \text{ ve } D\left(e/b\right) = s^2 I \tag{6.65.}$$

olduğu varsayalsın. Rao (1973) ve Gruber (2012)'de lineer Bayesyen tahmin edici

$$\hat{b}_c = q + HX'\left(XHX' + s^2 I\right)^{-1}\left(y - Xq\right) \tag{6.66.}$$

şeklinde verilmiştir. X, $s \le m$ ranklı $n \times m$ boyutlu ve $U : m \times s$, $V : m \times (m-s)$, $S' : n \times s$, $T' : n \times (n-s)$ matrisler olmak üzere X'in tekil değer ayrışımı,

$$X = \begin{bmatrix} S' & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = S'\Lambda^{1/2}U'$$

şeklindedir. Burada $\begin{bmatrix} S' & T' \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix}$ ortogonal matrislerdir ve $\Lambda : s \times s$, $X'X$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen matristir. l_i özdeğerleri, $l_1 \ge l_2 \ge \mathbf{K} \ge l_s$ olacak biçimde sıralanmıştır. X'in tekil değer ayrışımından,

$$X'X = U\Lambda^{1/2}SS'\Lambda^{1/2}U' = U\Lambda U' \tag{6.67.}$$

$$XUU' = S'\Lambda^{1/2}U'UU' = S'\Lambda^{1/2}U' = X \tag{6.68.}$$

$$XV = S'\Lambda^{1/2}U'V = 0 \tag{6.69.}$$

eşitliklerine ulaşılabilir. Bir J matrisinin Moore Penrose inversini J^+ ile gösterelim. N , $n \times n$ tipinde singüler olmayan bir matris ise

$$\left(UNU'\right)^+ = UN^{-1}U' \tag{6.70.}$$

olup, (6.67) ve (6.70) eşitliklerinden

$$\left(X'X\right)^+ = U\Lambda^{-1}U' \tag{6.71.}$$

ifadesi elde edilir. $U'HU$ pd olduğundan, $\hat{b}_c$ Bayes tahmin edicinin alternatif formları Gruber (1998, 2010)'da

$$\hat{b}_c = \left[X'X + s^2(UU'HUU')^+\right]^+ \left[X'y + (UU'HUU')^+ qs^2\right] \tag{6.72.}$$

$$\hat{b}_c = b - (X'X)^+\left[UU'HUU' + s^2(X'X)^+\right]^+ (b-q)s^2 \tag{6.73.}$$

olarak verilmiştir. (6.72) eşitliği ridge tahmin edicinin genel formudur. (6.73) eşitliği ise Bayes tahmin edicilerin genel formudur. Sonuç olarak (6.72) ve (6.73) yapısındaki tahmin ediciler ridge-tipi Bayesyen tahmin ediciler olarak adlandırılır. $\hat{b}_{SH}$ ve $\hat{b}_L$'nin (6.72) yapısında tahmin ediciler olduğu kolayca görülür. F, negatif tanımlı olmayan bir matris olmak üzere

$$H = \frac{1}{1-d}\left[UU'FUU' + d(X'X)^+ s^2\right] \tag{6.74.}$$

ve $M = (UU'HUU')^+$ ise,

$$M = (1-d)\left[UU'FUU' + d(X'X)^+ s^2\right]^+ \tag{6.75.}$$

olur. Bu ifadeler (6.73) 'de yerine konulursa Liu-tipi tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{b}_{LT} &= b - (X'X)^+\left[s^2(X'X)^+ + \frac{1}{1-d}\left(UU'FUU' + ds^2(X'X)^+\right)\right]^+ (b-q)s^2 \\ &= b - (1-d)(X'X)^+\left[s^2(X'X)^+ + UU'FUU'\right]^+ (b-q)s^2 \\ &= db + (1-d)\hat{b}_c \end{aligned} \tag{6.76.}$$

olarak bulunur. Bu tahmin edici, $E(b)=q$ ve $D(b)=F$ varsayımları sağlandığında EKK tahmin edici ile lineer Bayes tahmin edicilerin bir konveks kombinasyonudur. Gruber (2012) tarafından ridge tipi ve Liu tipi tahmin edicilerinin Zellner'in dengeli kayıp fonksiyonuna (ZBLF) göre optimal tahmin ediciler oldukları gösterilmiştir. Ayrıca Gruber (2012)'de MSE ve ZBLF kriterleri altında Liu tipi tahmin edicinin, EKK ve ridge tipi tahmin edicilere göre etkinliği karşılaştırılmıştır. Dolayısıyla teorik sonuçlara burada yer verilmeyecektir.

Şimdi ridge-tipi Bayesyen tahmin ediciler sınıfına ait olan $\hat{b}_{SH}$ ve $\hat{b}_{L}$'nin (6.76)'da kullanılmasıyla, sırasıyla Shiller tahmin ediciyle EKK tahmin edicinin ve Lindley tahmin ediciyle EKK tahmin edicinin konveks kombinasyonları yardımıyla (6.77)'de Bayesyen Liu tipi Shiller ve (6.78)'de Bayesyen Liu tipi Lindley tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modeller için tanımlayabiliriz:

$$\hat{b}_{LT}(SH)=db+(1-d)\hat{b}_{SH} \tag{6.77.}$$

$$\hat{b}_{LT}(L)=db+(1-d)\hat{b}_{L}. \tag{6.78.}$$

Her iki tahmin edicinin kullanılabildiği durumlarda, bu tahmin edicilerin konveks kombinasyonlarını kullanmak çok daha kullanışlı olacaktır. (6.77) ve (6.78) ile verilen tahmin ediciler göz önünde bulundurulduğunda, Liu tipi tahmin ediciler, Bayesyen yaklaşımı kullanılarak gecikmesi dağıtılmış modellere taşınmıştır.

6.9. Sayısal Örnek

Bu bölümde gecikmesi sonlu dağıtılmış modellerin stokastik ön bilgi altındaki tahminlerinin genel sınıfları ele alınmıştır. Bu sınıflardan ilkini stokastik ön bilgi altında Bayesyen-ridge tipi tahmin ediciler oluşturmaktadır. Bunların en genel hali ise Lindley ve Smith tarafından verilen ridge tahmin edicisinin genişletilmiş halidir. Bu yöntem Bayes-Almon yaklaşımının kısmi bir durumudur ve derecesi sıfır

olan polinom kullanılmasına karşılık gelmektedir. Ele alınan ikinci sınıf ise Bayesyen-Liu tipi tahmin edicilerdir. Bu çalışmada ise Bayesyen-Liu tipi tahmin ediciler sınıfına ait olan iki yeni tahmin edici (6.77) ve (6.78)'de verilmiştir. Ridge tipi tahmin edicilere alternatif olarak tanımlanan bu tahmin edicilerin stokastik ön bilgi altındaki tahminleri incelenmiştir. Şimdi üzerinde durulan bu iki sınıfa ait tahmin edicilerin performanslarını aynı veri seti üzerinde inceleyelim. Bölüm 4.10.'da ayrıntılı bir şekilde analiz edilen Almon (1965) veri seti kullanılacaktır. Burada ele alınan her iki sınıftaki tahmin ediciler için uygun bir l değerine ihtiyaç vardır. Sonuçların karşılaştırılabilir olması açısından Lindley tahmin edici için Maddala (1974)'de ve Shiller tahmin edici için ise Ullah ve Raj (1980)'deki ve Lindley ve Smith (1972)'de önerilen iteratif yöntem ile elde edilen l değerleri kullanılmıştır. Bu l değerleri kullanılarak bazı ridge tipi tahmin ediciler ve $0 < d < 1$ aralığındaki bazı d değerleri için Liu tipi tahmin ediciler kullanılarak elde edilen parametre tahminleri ve bazı karşılaştırmalar Çizelge 6.1-6.4'deki gibidir.

Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de sırasıyla Liu tipi Shiller ve Liu tipi Lindley tahmin edicilerin geniş bir aralıktaki bazı d değerlerine karşılık gelen b parametresinin tahminleri verilmiştir. Buna göre $0.01 < d < 0.25$ aralığındaki d'ler için tahminler tam olarak istenilen şekilde azalarak ilerlediği görülmektedir. $0.3 < d < 1$ aralığı için elde edilen sonuçlarda ise 6. gecikme katsayısının $\left(\hat{b}_6\right)$ bir anda küçük bir artış gösterdiği ve daha sonraki katsayıların yine azalarak devam ettiği görülmektedir. Nitekim yine Almon verisi kullanılarak uygulanan Fomby (1979)'daki çalışmada birçok polinom derecesi ve farklı l değerleri için elde edilmiş sonuçlar verilmiştir. Bu çalışmada da benzer şekilde katsayıların azalışının 6. gecikmede birden bozulup aniden yükseldiği, sonraki gecikmelerdeki parametrelerin azalarak devam ettiği gözlenmiştir. Yine bu çalışmada oldukça büyük l değerleri kullanıldığında $\hat{b}_6$'nın azalma eğiliminde olduğu görülmektedir. Ayrıca Ullah ve Raj (1979)'da alternatif olarak verilen, Bayesyen yöntemine dayalı bir tahmin edicinin sonuçlarında da $\hat{b}_6$ parametresi benzer şekilde artmış ve diğerleri ise azalarak devam etmiştir.

Çizelge 6.1. Liu tipi Shiller tahmin edicisi ($\hat{b}_{LT}(SH)$) kullanılarak elde edilen katsayıların tahminleri ($l = 832.156$)

	d=0.01	***d=0.03***	***d=0.05***	***d=0.08***	***d=0.1***	***d=0.15***	***d=0.2***	***d=0.25***
$\hat{b}_0$	0,0816	0,0815	0,0810	0,0805	0,0802	0,0793	0,0785	0,0777
$\hat{b}_1$	0,1099	0,1098	0,1096	0,1094	0,1092	0,1088	0,1084	0,1080
$\hat{b}_2$	0,1285	0,1292	0,1311	0,1331	0,1344	0,1376	0,1409	0,1441
$\hat{b}_3$	0,1377	0,1382	0,1398	0,1414	0,1425	0,1451	0,1478	0,1504
$\hat{b}_4$	0,1377	0,1382	0,1394	0,1406	0,1414	0,1435	0,1455	0,1476
$\hat{b}_5$	0,1266	0,1257	0,1231	0,1204	0,1187	0,1143	0,1099	0,1056
$\hat{b}_6$	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1048	0,1048
$\hat{b}_7$	0,0693	0,0691	0,0687	0,0683	0,0680	0,0672	0,0665	0,0658
$\hat{b}_8$	0,003	0,003	0,005	0,006	0,007	0,009	0,012	0,014
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,8987**	**0,8995**	**0,9020**	**0,9044**	**0,9060**	**0,9100**	**0,9141**	**0,9181**

	d=0.3	***d=0.35***	***d=0.4***	***d=0.5***	***d=0.6***	***d=0.7***	***d=0.8***	***d=0.9***
$\hat{b}_0$	0,0769	0,0761	0,0753	0,0736	0,0720	0,0704	0,0688	0,0671
$\hat{b}_1$	0,1076	0,1072	0,1068	0,1060	0,1052	0,1043	0,1035	0,1027
$\hat{b}_2$	0,1474	0,1506	0,1539	0,1604	0,1669	0,1734	0,1799	0,1864
$\hat{b}_3$	0,1530	0,1557	0,1583	0,1636	0,1689	0,1742	0,1795	0,1848
$\hat{b}_4$	0,1497	0,1517	0,1538	0,1579	0,1620	0,1661	0,1702	0,1743
$\hat{b}_5$	0,1012	0,0968	0,0925	0,0837	0,0750	0,0662	0,0575	0,0487
$\hat{b}_6$	0,1048	0,1048	0,1048	0,1049	0,1049	0,1049	0,1050	0,1050
$\hat{b}_7$	0,0651	0,0643	0,0636	0,0621	0,0607	0,0592	0,0578	0,0563
$\hat{b}_8$	0,0165	0,0189	0,0213	0,0261	0,0309	0,0357	0,0405	0,0452
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,9222**	**0,9262**	**0,9302**	**0,9383**	**0,9464**	**0,9545**	**0,9626**	**0,9707**

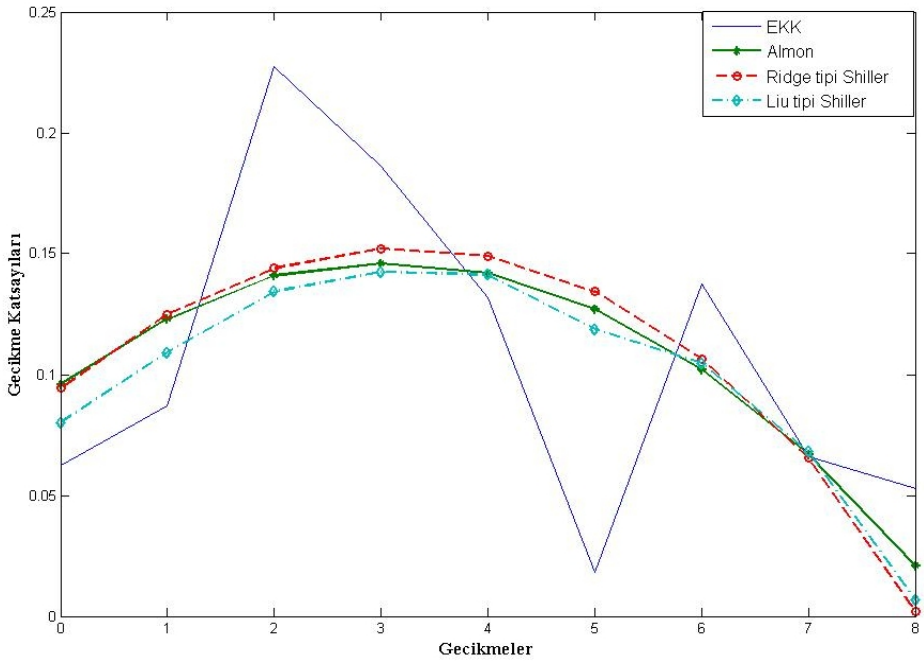
Çizelge 6.2. Liu tipi Lindley tahmin edicisi ($\hat{b}_{LT}(L)$) kullanılarak elde edilen katsayıların tahminleri ($l = 12.35$)

	d=0.01	***d=0.03***	***d=0.05***	***d=0.08***	***d=0.1***	***d=0.15***	***d=0.2***	***d=0.25***
$\hat{b}_0$	0,0815	0,0812	0,0808	0,0804	0,0800	0,0792	0,0784	0,0776
$\hat{b}_1$	0,1099	0,1097	0,1096	0,1093	0,1092	0,1088	0,1084	0,1080
$\hat{b}_2$	0,1287	0,1300	0,1313	0,1332	0,1345	0,1378	0,1410	0,1442
$\hat{b}_3$	0,1379	0,1389	0,1400	0,1416	0,1426	0,1453	0,1479	0,1505
$\hat{b}_4$	0,1378	0,1386	0,1394	0,1406	0,1415	0,1435	0,1456	0,1476
$\hat{b}_5$	0,1263	0,1246	0,1228	0,1202	0,1185	0,1141	0,1098	0,1054
$\hat{b}_6$	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1047	0,1047
$\hat{b}_7$	0,0693	0,0690	0,0687	0,0682	0,0679	0,0672	0,0665	0,0658
$\hat{b}_8$	0,0029	0,0039	0,0048	0,0062	0,0072	0,0096	0,0119	0,0143
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,8988**	**0,9004**	**0,9020**	**0,9044**	**0,9060**	**0,9101**	**0,9141**	**0,9182**

	d=0.3	***d=0.35***	***d=0.4***	***d=0.5***	***d=0.6***	***d=0.7***	***d=0.8***	***d=0.9***
$\hat{b}_0$	0,0768	0,0760	0,0752	0,0736	0,0720	0,0703	0,0687	0,0671
$\hat{b}_1$	0,1076	0,1072	0,1068	0,1060	0,1052	0,1043	0,1035	0,1027
$\hat{b}_2$	0,1475	0,1507	0,1540	0,1605	0,1669	0,1734	0,1799	0,1864
$\hat{b}_3$	0,1532	0,1558	0,1585	0,1637	0,1690	0,1743	0,1796	0,1848
$\hat{b}_4$	0,1497	0,1517	0,1538	0,1579	0,1620	0,1661	0,1702	0,1743
$\hat{b}_5$	0,1010	0,0967	0,0923	0,0836	0,0749	0,0662	0,0574	0,0487
$\hat{b}_6$	0,1047	0,1047	0,1048	0,1048	0,1049	0,1049	0,1050	0,1050
$\hat{b}_7$	0,0650	0,0643	0,0636	0,0621	0,0607	0,0592	0,0578	0,0563
$\hat{b}_8$	0,0167	0,0191	0,0215	0,0262	0,0310	0,0357	0,0405	0,0453
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,9222**	**0,9262**	**0,9303**	**0,9384**	**0,9464**	**0,9545**	**0,9626**	**0,9707**

Çizelge 6.3. EKK, Almon, ridge tipi Shiller ve Liu tipi Shiller tahmin edicilerinin karşılaştırılması *(l = 832 ,156 , d=0.1)*

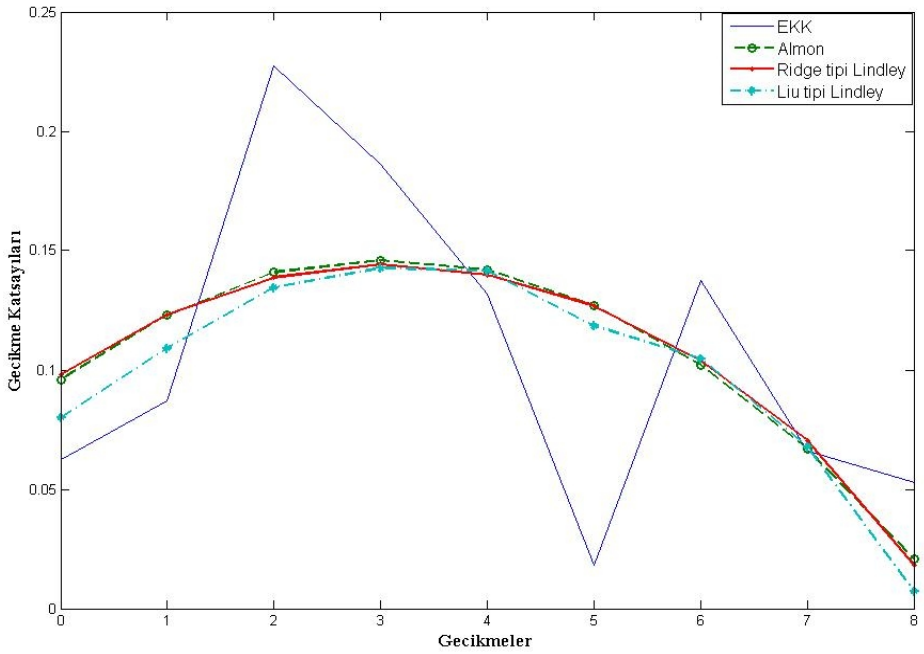
	EKK	$\hat{b}_A$	$\hat{b}_{SH}$	$\hat{b}_{LT}(SH)$
$\hat{b}_0$	0,0625	0,096	0,0943	0,0802
$\hat{b}_1$	0,0869	0,123	0,1250	0,1092
$\hat{b}_2$	0,2275	0,141	0,1439	0,1344
$\hat{b}_3$	0,1860	0,146	0,1521	0,1425
$\hat{b}_4$	0,1319	0,142	0,1491	0,1414
$\hat{b}_5$	0,0181	0,127	0,1344	0,1187
$\hat{b}_6$	0,1376	0,102	0,1065	0,1047
$\hat{b}_7$	0,0661	0,067	0,0654	0,0680
$\hat{b}_8$	0,0527	0,021	0,0019	0,0070
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,969**	**0,926**	**0,972**	**0,906**



Şekil 6.1. EKK, Almon, ridge tipi Shiller ve Liu tipi Shiller tahmin edicileri kullanılarak elde edilen gecikme yapıları *(l = 832 ,156 , d=0.1)*

Çizelge 6.4. EKK, Almon, ridge tipi Lindley ve Liu tipi Lindley tahmin edicilerinin karşılaştırılması ($l = 12.35$, d=0.1)

	EKK	$\hat{b}_A$	$\hat{b}_L$	$\hat{b}_{LT}(L)$
$\hat{b}_0$	0,0625	0,096	0,0979	0,0800
$\hat{b}_1$	0,0869	0,123	0,1232	0,1092
$\hat{b}_2$	0,2275	0,141	0,1388	0,1345
$\hat{b}_3$	0,1860	0,146	0,1443	0,1426
$\hat{b}_4$	0,1319	0,142	0,1398	0,1415
$\hat{b}_5$	0,0181	0,127	0,1268	0,1185
$\hat{b}_6$	0,1376	0,102	0,1040	0,1046
$\hat{b}_7$	0,0661	0,067	0,0704	0,0679
$\hat{b}_8$	0,0527	0,021	0,0182	0,0072
$\sum_{i=0}^{8} \hat{b}_i$	**0,969**	**0,926**	**0,963**	**0,906**



Şekil 6.2. EKK, Almon, ridge tipi Lindley ve Liu tipi Lindley tahmin ediciler kullanılarak elde edilen gecikme yapıları ($l = 12.35$, d=0.1)

Çizelge 6.3'de EKK, Almon, Liu tipi Shiller tahmin edicisi ile ridge-tipi Shiller, tahmin edicileri kullanılarak elde edilen b parametrelerinin tahminleri karşılaştırılmıştır. Burada stokastik önbilgi olarak b 'nın ikinci dereceden bir Almon polinomu olduğu varsayılmıştır. EKK tahmin edicinin sonuçları gecikmesi dağıtılmış modeller için uygun olmadığı görülmektedir (Şekil 6.1). Shiller tahmin edicisinin her iki formu da beklentilerle daha uyumlu olduğu görülmektedir. Yani gecikmeler daha düzgün bir polinom formundaki yapıya sahiptir. Ancak stokastik yapıda bir ön bilgiye dayalı olarak yapılan bir çalışmada Almon tahmin edici yerine ridge tipi ya da Liu tipi Shiller tahmin edici tercih edilebilir. Burada yeni tanımlanan Liu-tipi Shiller tahmin edicisi oldukça iyi performans göstermiştir. Ayrıca, Şekil 6.1'deki grafikten de görüleceği üzere gecikme dağılımının şekline bakarak tahmin edicilerin seçiminin zor olduğu da görülmektedir.

Çizelge 6.4'de ise EKK, Almon, Liu-tipi Lindley tahmin edicisi ile ridge-tipi Lindley, tahmin edicileri kullanılarak elde edilen b parametrelerinin tahminleri karşılaştırılmıştır. Burada da benzer şekilde Lindley tahmin edicisinin ridge-tipi ve Liu tipi Almon polinom formuna oldukça yaklaşmıştır (Şekil 6.2). Liu-tipi Lindley tahmin edicisi tercih edilebilir bir tahmin edicidir.

6. GECİKMESİ DAĞITILMIŞ MODELLERDE STOKASTİK KISIT ALTINDA ALMON TAHMİN EDİCİYE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLER

Berrin GÜLTAY

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ekonometride sıklıkla kullanılan gecikmesi dağıtılmış modeller incelenmiştir. Bu modeller sonlu ve sonsuz gecikmesi dağıtılmış modeller olarak ele alınmıştır. Ayrıca modellerin genel tanımları, gecikmelerin nedenleri ve modellerin tahmin yöntemleri üzerinde durulmuştur.

Genel lineer regresyon modelinde olduğu gibi, gecikmesi dağıtılmış modellerde de çoklu iç ilişki problemi ile karşılaşılmaktadır. Burada özellikle üzerinde durduğumuz problem ise gecikmesi sonlu dağıtılmış bir model olan Almon modelinde sıklıkla ortaya çıkan çoklu iç ilişki problemidir. Çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelebilmek için öncelikle genel lineer regresyon modelinde kullanılan yanlı tahmin ediciler incelenmiştir. Burada bu tahmin edicilerden kısıtlı EKK, ridge, kısıtlı ridge, temel bileşenler, $(r-k)$ sınıf, modified ridge, Liu, $(r-d)$ sınıf ve modified Liu tahmin edicileri ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ardından Almon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmek için bu yanlı tahmin edicilerin Almon tahmin edici ile kombinasyonları tanımlanmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları Almon (1965) veri seti kullanılarak incelenmiştir. Bu örnek çalışma Almon tahmin ediciye alternatif olarak tanımlanan tahmin edicilerin gecikmesi dağıtılmış modellerde umut verici olduğunu göstermiştir. Özellikle birçok durumda Almon-Liu ve Almon-modified Liu tahmin edicileri diğer alternatif tahmin edicilerden ve Almon tahmin ediciden daha üstün oldukları görülmüştür. Ancak temel bileşenler regresyonu yaklaşımına dayalı olan Almon-TB, Almon-$(r-k)$, Almon-$(r-d)$ tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modeller için tatmin edici sonuçlar vermemiştir. Bu sonuç, birden büyük temel bileşen sayısı bir olduğundan şaşırtıcı olmamıştır. Özdeğer sayısına bağlı olan temel bileşenler yaklaşımı gecikmesi dağıtılmış modellerde iyi sonuçlar üretmemiştir. Ancak sonuçlar temel bileşen sayısı farklı olan başka bir örnek ya da simülasyon çalışması için değişebilir.

Almon modelinde ortaya çıkan çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için önerilen birçok alternatif tahmin edici olması nedeni ile bunlardan hangisinin daha iyi performans sergilediğini ifade edebilmek için bazı karşılaştırmalar ele

alınmıştır. Almon-modified ridge tahmin edicinin Almon ve Almon-ridge tahmin ediciden, Almon-modified Liu tahmin edicinin Almon tahmin ediciden, Almon-Liu tahmin edicinin Almon-modified Liu tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi tahmin edici olabilmesi için gerek koşullar verilmiştir. Ayrıca Almon-modified ridge ve Almon-modified Liu tahmin edici arasında da MSE kriterine göre bir karşılaştırılma yapılmış olup, hangi koşullar altında birinin diğerinden daha iyi bir tahmin edici olabilmesi için gerek koşullar verilmiştir. Teorik karşılaştırmalar ve uygulama sonuçlarına göre k ve d parametrelerinin uygun birer seçimleri ile Almon-modified ridge ve Almon-modified Liu tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modellerde diğer alternatif tahmin edicilere göre daha iyi performans göstermektedir.

Çalışmada gecikmesi dağıtılmış modellerin stokastik ön bilgi altındaki tahminlerinin genel sınıfları incelenmiştir. Bunun için Bayesyen yöntemler üzerinde durulmuştur. Öncelikle stokastik ön bilgi altında ridge tipi Bayesyen tahmin ediciler incelenmiş olup, gecikmesi dağıtılmış modellerde tanımlanan Shiller ve Lindley tahmin edicilerinin bu yapıda tahmin ediciler oldukları ifade edilmiştir. Ardından Liu tipi tahmin ediciler üzerinde durulmuştur ve sırasıyla Shiller tahmin ediciyle EKK tahmin edicinin ve Lindley tahmin ediciyle EKK tahmin edicinin konveks kombinasyonları yardımıyla Bayesyen Liu tipi Shiller ve Bayesyen Liu tipi Lindley tahmin edicileri gecikmesi dağıtılmış modeller için tanımlanmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları Almon (1965) veri seti ile incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar özellikle grafikler üzerinde incelenmiştir. Hangi tahmin edici ile elde edilen gecikme yapısının düzgün bir polinom formundaki yapıya sahip olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Burada yeni tanımlanan Liu tipi Shiller tahmin edici oldukça iyi performans göstermiştir. Ancak yinede gecikme dağılımının şekline bakarak tahmin edicilerin seçimi zordur. Bunun için gelecek çalışmalarda Bayesyen-Liu tipi tahmin ediciler için farklı seçim kriterleri geliştirilebilir. Ayrıca ele alınan her iki sınıftaki tahmin ediciler için uygun bir l değerine ihtiyaç vardır. l değerinin seçimi ile ilgili yeni tahmin yöntemleri geliştirilip, bir simülasyon çalışması yardımıyla Bayesyen Liu tipi tahmin ediciler karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

AKDENİZ, F., KAÇIRANLAR, S., 1995. On the Almost Unbiased Generalized Liu Estimator and Unbiased Estimation of the Bias and MSE. Communications in Statistics-Theory and Methods, 24 (7):1789–1797.

ALMON, S., 1965. The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures. Econometrica, 178-196.

AKAIKE, H., 1974. A New Look at the Statistical Model Identification. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-19:716-723.

BAYE, M. R., PARKER, D. F., 1984. Combining Ridge and Principal Component Regression: A Money Demand Illustration. Comm. Statist. Theory Methods, 13(2):197-205.

BELSLEY, D. A., KUH, E., and WELSCH, R. E., 1980. Regression Diagnostics Identifying Influential Data and Sources of Collinearity. John Wiley and Sons: New York, 292p.

BURNHAM, K. P., ANDERSON, D. R., 1998. Model Selection and Inference: A Practical Information-Theoretic Approach. Springer-Verlag, New York, 353p.

CAGAN, P., 1956. The Monetary Dynamics of Hyper Inflations. In Friedman Studies in the Quantity Theory of Money, Chicago Univerisity Press.

CHANDA, A. K., MADDALA, G. S., 1984. Ridge Estimators for Distributed Lag Models. Communications in Statistics - Theory and Methods, 13(2):217-225.

EKİCİ, O., 2005. Bayesyen Regresyon ve Win-BUGS ile bir Uygulama. İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

FAIR, C. R., JAFFEE, M. D. (1971). A Note on The Estimation Of Polynomial Distributed Lags. Econometric Research Program Research Memorandum. No:120.

FAREBROTHER, R. W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological) 38(3):248–250.

FISHER, I., 1937. Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags. International Statistical Institute Bulletin, 27:323-327.

FOMBY, T. B., 1979. MSE Evaluation of Ridge Estimators Based on Stochastic Prior Information. Communications in Statistics Theory and Methods, 20:203-215.

GAUSS, C. F., 1809. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Perthes et Besser, Hamburg.

GRAYBILL, F. A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. Mc Graw Hill, New York, 463p.

GREENE, W., 2002. Econometric Analysis, New York University, 5th Edition, 827p.

GROß, J., 2003. Restricted Ridge Estimation. Stat. Prob. Lett, 65:57-64.

GRUBER, M. H. J., 1998. Improving Efficiency by Shrinkage: The James-Stein and Ridge Regression Estimators. Marcell Dekker, Inc. New York, 648p.

_____, 2010. Regression Estimators: A Comparative Study. 2nd ed. Baltimore: John Hopkins University Press, 412p.

_____, 2012. Liu and Ridge Estimators- A Comparision. Communications in Statistics-Theory and Methods, 41:20, 3739-3749.

GROSS, J., 2003. Restricted Ridge Estimation. Statistics and Probability Letters, 65: 57-64.

GUJARATİ, D. N., 2001. Temel Ekonometri. (Çev.Ü. Şenesen, G. G. Şenesen). Literatür Yayıncılık, 972s.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., 1970a. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics 12:55-67.

_____, 1970b. Ridge Regression: Application to Nonorthogonal Problems. Tecnometrics, 12:69-82.

_____, 1976. Ridge Regression Iterative Estimation of the Biasing Parameter. Communications in Statistics, Ser. A, 5:77-78.

HOERL, A. E., KENNARD, R.W., BALDWIN, K. F., 1975. Ridge Regression: Some Simulation. Communication in Statistics, 4:105-123.

HOTELLING, H., 1933. Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components. Journal of Educational Pschology, 24:417-441 and 489-520.

JAMES, W., STEIN, C., 1961. Estimation with Quadratic Loss. Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. 1:361-380. Univ. California Press, 767p.

JEFFREYS, H., 1957. Scientific Inference. Cambridge University Press, 2th Ed. Cambridge, USA, 268p.

JUDGE, G.C., HILL, R.C., GRIFFITHS, W.E., LUTKEPOHL, H., and LEE, T.C., 1988. Introduction to the Theory and Practice of Econometrics, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1064p.

KAÇIRANLAR S., SAKALLIOĞLU, S., 2001. Combining the Liu Estimator and the Principal Component Regression Estimator. Communications in Statistics, Theory and Methods, 30:2699-2706.

KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., ÖZKALE, M.R. and GÜLER, H., 2011. More on the Restricted Ridge Regression Estimation. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(11):1433-1448.

KOUTSOYIANNIS, A., 1977. Ekonometri Kuramı, (Çev.Ü. Şenesen, G. G. Şenesen). Verso Yayıncılık, Ankara, 688s.

KOYCK, L. M., 1954. Distributed Lags and Investment Analysis. North Holland Publising Company, Amsterdam.

KUTLAR, A., 2000. Ekonometrik Zaman Serileri. Gazi Yayınları, Ankara.

LAWLESS, J. F., WANG, P., 1976. A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators. Communication in Statistics, 7:139-164.

LI Y., YANG H., 2012. A New Liu-type Estimator in Linear Regression Model. Statistical Papers, 53(2):427-437.

LINDLEY, D. V., 1971. Bayesian Statistics. A Review (Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics.

LINDLEY, D. V., SMITH, A. F. M., 1972. Bayes Estimates for the Linear Model. Journal of the Royal Statistical Society, B Series, 1-41.

LIU, K., 1993. A New Class of Biased Estimate in Linear Regression. Commun. Stat. –Theory Meth., 22(2):393-402.

MADDALA, G. S., 1974. Ridge Estimator for Distributed Lag Models. NBER Working Paper Series, 69.

MARQUARDT, D.W., SNEE R.D., 1975. Ridge Regression in Practice. The American Statistician, 29:3-20.

MCDONALD, G. C., GALARNEAU, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-Type Estimators. Journal of the American Statistical Association, 70:407-416.

MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A., 1992. Introduction to Linear Regression Analysis. John Wiley and Sons, New York, 526p.

MYERS, R. H., 1990. Classical and Modern Regression with Application. Duxbury Press, California, 488p.

NERLOVE, M., 1956. Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities. Journal of Farm Economies, 38:496-509.

ÖZKALE, M. R., KAÇIRANLAR, S., 2007. The Restricted and Unrestricted Two Parameter Estimators. Communications in Statistics Theory and Methods, 36(15):2707-2725.

ÖZKALE, M. R., KAÇIRANLAR, S., 2008. Comparisons of the *r–k* Class Estimator to the Ordinary Least Squares Estimator under the Pitman's Closeness Criterion. Statistical Papers, 49:503–512.

PLISKIN, J. L., 1987. A Ridge-Type Estimator and Good Prior Means. Comm. Statist. Theory Methods, 16(12):3429-3437.

RAO, C. R., 1973. Linear Statistical Inference and Its Applications. 2nd ed. London:Wiley, 625p.

SAKALLIOĞLU, S., KAÇIRANLAR, S. and AKDENİZ, F., 1996. A Note on Combining Ridge and Least Squares Estimator. Journal of Institute of Mathematics and Computer Science (Math. Series), 9(2):193-198.

SARKAR, N., 1992. A New Estimator Combining the Ridge Regression and the Restricted Least Squares Methods for Estimation. Comm. Statist. Theory Methods, 21(7):1987-2000.

_____, 1996. Mean Square Error Comparison of Some Estimators in Linear Regressions with Multicollinearity. Statistics and Probability Letters, 30:133-138.

SHILLER, R. J., 1973. A Distributed Lag Estimator Derived from Smoothness Priors. Econometrica, 775-788.

SILVEY, S. D., 1969. Multicollinearity and Imprecise Estimation. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 31(3):539-552.

STEIN, C., 1956. Inadmissibility of Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. Proceeding of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Univeristy of California Press, Berkeley, 197-206.

SWINDEL, B. F., CHAPMAN D. D., 1973. Good Ridge Estimators. Joint Statistical Meetings in New York City, 126.

SWINDEL, B. F., 1976. Good Ridge Estimators Based on Prior Information. Comm.Statist. Theory Methods, A5(11):1065-1075.

TERAVISTA, T., 1976. A Note on Bias in Almon Distributed Lag Estimators. Econometrica, 1317-1322.

THEIL, H., GOLDBERGER, A.S., 1961. On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics, International Economic Review, 2:65-78.

THEOBALD, C. M., 1974. Generalizations of Mean Square Error Applied to Ridge Regresion. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 36(1):103-106.

TRENKLER, G., 1980. Generalized Mean Square Error Comparisons of Biased Regression Estimators. Communications in Statistics-Theory and Methods, A9(12):1247–1259.

ULLAH, A., RAJ, B., 1979. A Distributed Lag Estimator Derived From Shiller's Smoothness Priors. Economics Letters, 2:219-223.

_____, 1980. A Polynomial Distributed Lag Model with Stochastic Coefficients and Priors. Empirical Economics, 5:219-232.

VINOD H. D., ULLAH A., 1981. Recent Advances in Regression Methods. Marcel Dekker, Inc, 361p.

YEO, S. J., TRIVEDI, P. K., 1989. On Using Ridge-Type Estimators for a Distributed Lag Model. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 51(1):85-90.

YURDAKUL, F., 1998. Pamuk Üretimi ile Pamuk Fiyatı Arasındaki İlişkinin Ekonometrik Analizi: Koyck-Almon Yaklaşımı. Çukurova Üniv. İktisadi ve İdari Bilimler Fak. Dergisi, 8(1):341-353.

ÖZGEÇMİŞ

01.11.1985 tarihinde Çanakkale'de doğdu. İlkokul, ortaokul ve liseyi Bursa'da bitirdi. 2003 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünü'nde Lisans eğitimine başladı. 2007 yılında bölüm ikincisi olarak bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilimdalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2008 yılında Mehmet GÜLTAY ile evlendi. 2009 yılında yüksek lisans eğitimini başarıyla bitirdi. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilimdalı'nda doktora öğrencisi olarak yeni bir eğitim öğretim dönemine başladı. 2010 yılında akademisyenlik hayatının ilk adımı olarak Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen burada görevine devam etmektedir.