Sonlu Tekil Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri

Leyla Bugay
ltanguler@cu.edu.tr
Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü

Haziran, 2012

Yarıgrup Teorisi Nedir?

"Yarıgrup" terimi ilk olarak 1904 yılında Monsieur l'Abbé J. A. Séguier'in "Elements de la Théorie des Groupes Abstraits" adlı kitabında yer almış ve 1926-1928 yıllarında A. K. Sushkevich'in bir sonlu yarıgrubun minimal idealinin yapısını belirlemesiyle gelişim sürecine başlamıştır. 1950'li yılların sonunda da yarıgrup teorisinin kendisi modern cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir.

Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra, grup ve halka teorisi başta olmak üzere, matematiğin diğer alanları ve bilgisayar bilimleri ile olan bağlantısı da yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Yarıgruplarda Temel Tanımlar

- Yarıgrup nedir?
- Altyarıgrup nedir?
- Monoid nedir?

Tanım

S bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun. Eğer

$$x^2 = x$$

ise x elemanına bir **idempotent** *denir.*
$\emptyset \neq A \subseteq S$ için A daki tüm idempotentlerin kümesi $E(A)$ ile gösterilir.

Doğuray Kümesi

Tanım

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olmak üzere S nin A yı içeren en küçük altyarıgrubuna A **tarafından doğurulan altyarıgrup** *denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.*

Kolayca gösterilebilir ki,

$$\langle A \rangle = \left\{ a_1 \cdots a_n : a_1, \ldots, a_n \in A,\ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dır; yani A üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

Doğuray Kümesi

- Eğer bir $\emptyset \neq A \subseteq S$ için $S = \langle A \rangle$ ise A ya S nin bir **doğuray kümesi** denir.
- Eğer bir $\emptyset \neq A \subseteq E(S)$ için $S = \langle A \rangle$ ise A ya S nin bir **idempotent doğuray kümesi** ve S ye de **idempotent doğuraylı yarıgrup** denir.
- Eğer S nin sonlu bir (idempotent) doğuray kümesi varsa S ye **sonlu (idempotent) doğuraylı yarıgrup** denir.

Doğuray Kümesi

Tanım

S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olmak üzere,

$$\operatorname{rank}(S) = \min\{\, |A| : \langle A \rangle = S \,\}$$

sayısına S **nin rankı** *ve S nin $\operatorname{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine* **minimal doğuray kümesi** *denir.*

Tanım

S sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\operatorname{idrank}(S) = \min\{\, |A| : \langle A \rangle = S,\ A \subseteq E(S)\}$$

sayısına S **nin idempotent rankı** *ve S nin $\operatorname{idrank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine* **minimal idempotent doğuray kümesi** *denir.*

Tanım

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $SI \subseteq I$ ise I ya S nin bir **sol ideali** *ve eğer $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir* **sağ ideali** *denir. Eğer I, S nin hem sol hemde sağ ideali ise I ya S nin bir* **(iki taraflı) ideali** *denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.*

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a **elemanını içeren en küçük sol, sağ ve (iki taraflı) ideali** sırasıyla

$$S^1 a = Sa \cup \{a\} = \left\{xa : x \in S^1\right\}$$

$$aS^1 = aS \cup \{a\} = \left\{ay : y \in S^1\right\}$$

$$S^1 a S^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \left\{xay : x, y \in S^1\right\}$$

dir.

Green Denklik Bağıntıları

Tanım

S yarıgrubu üzerinde tanımlanan

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$

bağıntıları birer denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntılarına sırasıyla **sol green ($\mathcal{L}-$green)** *ve* **sağ green ($\mathcal{R}-$green) denklik bağıntısı** *denir.*

Önerme ([3], Proposition 2.1.3)

S üzerindeki sol-green bağıntısı $\mathcal{L}$ ve sağ$-$green bağıntısı $\mathcal{R}$ değişmelidir. Yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ dir. ■

Green Denklik Bağıntıları

Tanım

*$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısına $\mathcal{D}$-***green denklik bağıntısı** *denir ve $\mathcal{D}$ ile gösterilir.*

Tanım

*$\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ denklik bağıntısına da $\mathcal{H}$-***green denklik bağıntısı** *denir ve $\mathcal{H}$ ile gösterilir.*

Önerme ([3], Lemma 2.2.5)

S bir yarıgrup ve $\mathbf{H}$, S de bir $\mathcal{H}$-green denklik sınıfı ise ya $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H} = \emptyset$ yada $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$ dir ve bu durumda $\mathbf{H}$, S nin bir altgrubudur. ■

Bunun bir sonucu olarak; eğer, S de bir $\mathcal{H}$-green denklik sınıfı $\mathbf{H}$ bir idempotent içeriyorsa $\mathbf{H}$, S nin bir altgrubudur.

X boş olmayan bir küme olmak üzere $X \times X$ in boş olmayan her alt kümesine X **üzerinde bir bağıntı** dendiğini biliyoruz. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile gösterelim.

Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\alpha, \beta \in B_X$ olmak üzere B_X üzerinde bir çarpma (bileşke) işlemi

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) : \exists z \in X \textit{ için } (x, z) \in \alpha \textit{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlansın. B_X bu işlemle bir yarıgruptur ve bu yarıgruba **(tüm) bağıntılar yarıgrubu** *denir.*

Tanım

$\beta \in B_X$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,(\beta) &= \{x \in X : \exists y \in X, (x,y) \in \beta\}; \\ x\beta &= \{y \in X : (x,y) \in \beta\}; \\ im(\beta) &= \{y \in X : \exists x \in X, (x,y) \in \beta\} \text{ ve} \\ y\beta^{-1} &= \{x \in X : (x,y) \in \beta\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla β *bağıntısının* **tanım kümesi**, $x \in X$ **in görüntü kümesi**, β **bağıntısının görüntü kümesi** *ve* $y \in X$ **in ters görüntü kümesi** *denir.*

Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\beta \in B_X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } |x\beta| = 1$$

ise β ya X üzerinde bir **(tüm) dönüşüm (fonksiyon)** *denir.*
X kümesi üzerinde tanımlı tüm dönüşümlerin oluşturduğu küme, bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba X üzerindeki **(tüm) dönüşümler yarıgrubu** *denir ve T_X ile gösterilir.*

Dönüşüm Yarıgrupları

Eğer $X = X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ şeklinde n elemanlı sonlu bir küme ise X_n üzerindeki (tüm) dönüşümler yarıgrubu T_n ile gösterilir. Bu durumda bir $\beta \in T_n$ dönüşümünü

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1\beta & 2\beta & \ldots & n\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım

$\alpha \in T_n$ olmak üzere, α nın **Noksanlık Kümesi, Noksanlığı** *ve* **Çekirdek Kümesi** *sırasıyla*

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}\,(\alpha) &= X_n \setminus \mathrm{im}\,(\alpha), \\ \mathrm{def}\,(\alpha) &= |\mathrm{Def}\,(\alpha)|, \\ \mathsf{ker}(\alpha) &= \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edilirse $\ker(\alpha)$, X_n üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısına göre elde edilen denklik sınıfları α nın görüntü kümesindeki elemanların ters görüntü kümeleridir; yani

$$\{y\alpha^{-1} : y \in \mathrm{im}\,(\alpha)\}$$

ailesidir.

Eğer $1 \leq r \leq n$, $\mathrm{im}\,(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ ve $1 \leq i \leq r$ için $a_i\alpha^{-1} = A_i$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_r \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edeceğiz.

Önerme ([4],Theorem 2.7.2)

$\alpha \in T_n$ *için*

$$\alpha \in E(T_n) \Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{im}(\alpha) \text{ için } x\alpha = x$$

dir. ■

Araştırma Konumuz ve Önemi

Sonlu yarıgrupların sonlu doğuraylı olduğu açıktır. Ayrıca, Cayley teoreminin bir benzeri olarak, her sonlu yarıgrup **sonlu bir küme üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubunun bir altyarıgrubuna izomorftur**. Dolayısıyla, T_n in ve altyarıgruplarının sonlu doğuray kümelerini bulma problemi yarıgrup teorisinde başlı başına bir araştırma konusu olmuştur.

Bizde bu çalışmada, T_n nin bir altyarıgrubu olan ve Sing_n ile gösterilen "**tekil dönüşüm yarıgrubu**" nu inceledik ve herhangi bir altkümesinin Sing_n nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulduk.

X_n üzerindeki (tüm) bire-bir ve örten dönüşümlerin (permutasyonların) kümesi T_n nin bir altyarıgrubu olup bu yarıgruba $n-$**inci simetrik grup** denir ve S_n ile gösterilir.

Tanım

$T_n \backslash S_n$ kümesi dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **Tekil Dönüşüm Yarıgrubu** *denir ve Sing_n ile gösterilir.*

Önerme

Herhangi iki $\alpha, \beta \in \mathrm{Sing}_n$ *için*

$$\begin{array}{rcl} \ker(\alpha) & \subseteq & \ker(\alpha\beta) \\ \mathrm{im}\,(\alpha\beta) & \subseteq & \mathrm{im}\,(\beta) \\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{L} & \Leftrightarrow & \mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\beta) \\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{R} & \Leftrightarrow & \ker(\alpha) = \ker(\beta) \\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{D} & \Leftrightarrow & |\mathrm{im}\,(\alpha)| = |\mathrm{im}\,(\beta)| \\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{H} & \Leftrightarrow & \ker(\alpha) = \ker(\beta) \textit{ and } \mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\beta) \end{array}$$

olduğu iyi biliniyor. ■

Kolayca görülüyor ki, Sing_n deki $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfları $1 \leq r \leq n-1$ için

$$D_r = \{\alpha \in \mathrm{Sing}_n : |\mathrm{im}\,(\alpha)| = r\}$$

olur. Böylece, herhangi bir $\alpha \in \mathrm{Sing}_n$ için

$$\alpha \in D_{n-1} \Leftrightarrow \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_l = \{i,j\} & \ldots & A_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_l & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir öyleki; $i \neq j$ ve $1 \leq k \neq l \leq n-1$ için $|A_k| = 1$. Bu durumda kısaca

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{i,j\}$$

şeklinde yazacağız.

$\alpha \in E(D_{n-1})$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & \{x_r, x_n\} & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & \dots & x_r & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup biz

$$\alpha = \zeta_{x_n, x_r} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_r \end{pmatrix}$$

şeklinde yazacağız.

Daha Önce Yapılan Bazı Çalışmalar

J. M. Howie [1] de, Sing_n yarıgrubunun, noksanlığı 1 olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu gösterdi. O halde,

$$\langle E(D_{n-1})\rangle = \mathrm{Sing}_n$$

olup $\emptyset \neq A \subseteq D_{n-1}$ için,

$$A, \mathrm{Sing}_n \text{ nin bir doğuray kümesidir} \Leftrightarrow E(D_{n-1}) \subseteq \langle A\rangle.$$

Ayrıca, G. M. S. Gomes ve J. M. Howie [5] de, $n \geq 3$ için

$$\mathrm{rank}\,(\mathrm{Sing}_n) = \mathrm{idrank}\,(\mathrm{Sing}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olduğunu gösterdi.

Daha Önce Yapılan Bazı Çalışmalar

Yakın zamanda da G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie [2] de $2 \leq r \leq m \leq n$ için (m,r)-**patika-deviri** kavramını tanımladılar. Daha sonra Y. Ünlü ile birlikte [3] de (m,r)-**rank** kavramını tanımlayıp, Sing_n nin (m,r)-rankı nın yine $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösterdiler.

Önerme

$n \geq 3$ için $\alpha, \beta \in D_{n-1}$ olsun. O halde,

$$\alpha\beta \in D_{n-1} \Leftrightarrow \mathrm{Def}\,(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\beta).$$

İspat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r = \{i, j\} & \dots & A_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_r & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_s = \{k, l\} & \dots & B_{n-1} \\ b_1 & \dots & b_s & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

ve $\mathrm{Def}\,(\alpha) = \{q\}$ olsun. $\mathrm{Ker}\,(\beta) = \{k, l\}$ olduğu göz önüne alınırsa iddianın doğruluğu kolayca görülebilir. ■

Sonuç

$n, k \geq 2$ ve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D_{n-1}$ olmak üzere

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_{n-1} \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k-1 \text{ için } \alpha_i \alpha_{i+1} \in D_{n-1}.$$

İspat: $(\Rightarrow)$ Açık.

$(\Leftarrow)$ $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_{n-1}$ olsun. k üzerinden tümevarım ile gösterelim.

$k = 2$ için açık. İddianın $k-1 \geq 2$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$\mathrm{im}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}) \subseteq \mathrm{im}\,(\alpha_{k-1})$ ve $\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1},\ \alpha_{k-1} \in D_{n-1}$ olduğundan $\mathrm{im}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}) = \mathrm{im}\,(\alpha_{k-1})$ olur. Böylece $\mathrm{Def}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}) = \mathrm{Def}\,(\alpha_{k-1}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha_k)$ olup $(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1})\alpha_k = \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}\alpha_k \in D_{n-1}$ olur.

■

Gösterim

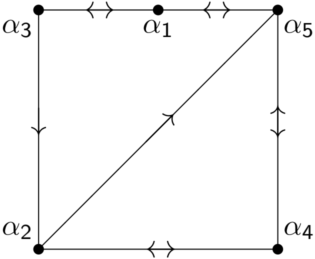
$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in E(D_{n-1})$ *idempotent elemanını içeren* $\mathcal{H}$*-Green denklik sınıfını* $H_{i,j}$ *ile gösterelim. O halde*

$$\alpha \in H_{i,j} \Leftrightarrow \mathrm{Def}\,(\alpha) = \{i\} \textit{ ve } \mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{i, j\}$$

olduğu açıktır.

Tanım

Π, köşe kümesi $V(\Pi)$ ve yönlü kenar listesi $E(\Pi)$ ile gösterilen bir yönlendirilmiş grafik olsun. Herhangi $u, v \in V(\Pi)$ için eğer u dan v ye bir **yönlü patika** *varsa u köşesi v köşesine* **bağlı** *deriz. Ayrıca,* **tüm köşeleri içeren bir devir** *varsa Π ye* **Hamiltonian yönlü grafiği** *denir.*



Theorem

$\emptyset \neq A \subseteq D_{n-1}$ kümesinin Sing_n nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul; $\forall \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in E(D_{n-1})$ idempotenti için

(i) $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{i, j\}$,

(ii) $\mathrm{Def}\,(\beta) = \{i\}$, *ve*

(iii) Γ_A *yönlü grafiğinde* α, β *ya bağlı*

olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ elemanlarının var olmasıdır.

Burada Γ_A,

- köşe kümesi $V = V(\Gamma_A) = A$ ve
- yönlü kenar listesi

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(\Gamma_A) = \{(\alpha, \beta) \in V \times V : \mathrm{Def}\,(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\beta)\}$$

olan yönlü grafiktir.

İspat: $(\Rightarrow)$ A, Sing_n in bir doğuray kümesi olsun. O halde, her $\zeta_{i,j} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in E(D_{n-1})$ için

$$\alpha_1 \cdots \alpha_r = \zeta_{i,j}$$

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A$ vardır. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \zeta_{i,j} \in D_{n-1}$, $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\zeta_{i,j})$ ve $\mathrm{im}\,(\zeta_{i,j}) \subseteq \mathrm{im}\,(\alpha_r)$ olduğundan

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha_1) = \mathrm{Ker}\,(\zeta_{i,j}) = \{i, j\},$$

$$\mathrm{Def}\,(\alpha_r) = \mathrm{Def}\,(\zeta_{i,j}) = X_n \setminus \mathrm{im}\,(\zeta_{i,j}) = \{i\}, \text{ ve}$$

$$\forall 1 \leq k \leq r-1 \text{ için } \alpha_k \alpha_{k+1} \in D_{n-1}$$

olur. Dolayısıyla, $\mathrm{Def}\,(\alpha_k) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha_{k+1})$ olup α_1 dan α_r ye bir yönlü patika vardır.

($\Leftarrow$) $E(D_{n-1}) \subseteq \langle A \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ olsun. (i), (ii) ve (iii) den dolayı $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{i,j\}$, $\mathrm{Def}\,(\beta) = \{i\}$ ve Γ_A yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ vardır. O halde, α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_{r-1} \to \alpha_r = \beta$$

yönlü patika vardır. Ayrıca, Γ_A nın tanımından dolayı her $1 \leq k \leq r-1$ için

$$\mathrm{Def}\,(\alpha_k) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha_{k+1})$$

dir. Dolayısıyla, $\alpha_1 \cdots \alpha_r \in D_{n-1}$ olup $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \mathrm{Ker}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ ve $\mathrm{im}\,(\beta) = \mathrm{im}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ olur. O halde, $\alpha_1 \cdots \alpha_r \in H_{i,j}$ dir. $H_{i,j}$ birim elemanı $\zeta_{i,j}$ olan sonlu bir grup olduğundan $\zeta_{i,j} = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)^m \in \langle A \rangle$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır. Böylece $E(D_{n-1}) \subseteq \langle A \rangle$ olur.

$\blacksquare$

Sing_n nin Doğuray Kümeleri

Sonuç

A, D_{n-1} in $\frac{n(n-1)}{2}$ elemanlı bir alt kümesi olsun. A kümesinin, Sing_n nin bir minimal doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul, $\forall \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in E(D_{n-1})$ idempotent elemenı için,

(i) $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \{i, j\}$,

(ii) $\mathrm{Def}\,(\beta) = \{i\}$, *ve*

(iii) Γ_A *yönlü grafiğinde* α, β *ya bağlı*

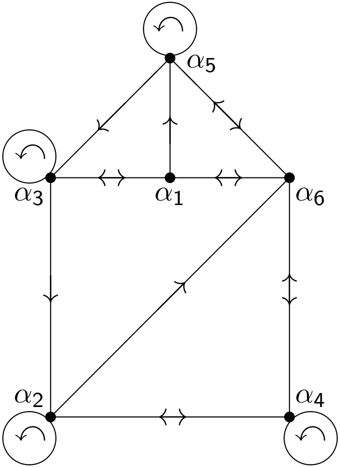
olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ *elemanlarının var olmasıdır.* ■

Örnek: $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ olsun öyleki

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teoremin (i) ve (ii) koşullarının sağlandığı kolayca görülüyor. Ayrıca, Γ_A:



Γ_A,

$$\alpha_5 \to \alpha_3 \to \alpha_2 \to \alpha_4 \to \alpha_6 \to \alpha_1 \to \alpha_5$$

Hamiltonian devrini içeriyor olup bir Hamiltonian yönlü grafiğidir. Dolayısıyla (*iii*) koşul da otomatik olarak sağlanır. Böylece A, Sing_4 ün bir minimal doğuray kümesidir.

Gerçekten de,

$$
\begin{array}{lllllllll}
\zeta_{1,2} & = & (\alpha_1\alpha_3)^3, & \zeta_{1,3} & = & \alpha_2\alpha_6\alpha_5\alpha_3, & \zeta_{1,4} & = & \alpha_3^3 \\
\zeta_{2,1} & = & \alpha_1\alpha_6, & \zeta_{2,3} & = & (\alpha_4\alpha_6)^2, & \zeta_{2,4} & = & (\alpha_5\alpha_6)^2 \\
\zeta_{3,1} & = & \alpha_2^3, & \zeta_{3,2} & = & \alpha_4^2, & \zeta_{3,4} & = & (\alpha_6\alpha_4)^2 \\
\zeta_{4,1} & = & (\alpha_3\alpha_1)^3, & \zeta_{4,2} & = & \alpha_5^3, & \zeta_{4,3} & = & (\alpha_6\alpha_5)^2,
\end{array}
$$

olup $E(D_{4-1}) \subseteq \langle A \rangle$ dir.

KAYNAKLAR

- André, J. M.: Semigroups that contain all singular transformations. Semigroup Forum **68**, 304–307 (2004)
- Ayık, G., Ayık, H., Howie, J.M.: On factorisations and generators in transformation semigroup. Semigroup Forum **70**, 225–237 (2005)
- Ayık, G., Ayık, H., Howie, J.M., Ünlü, Y.: Rank properties of the semigroup of singular transformations on a finite set. Communications in Algebra **36/7**, 2581–2587 (2008)
- Ganyushkin O., Mazorchuk V.: Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag London Ltd. London (2009)
- Gomes, G. M. S. and Howie, John M.: On the ranks of certain finite semigroups of transformations. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **101**, 395–403 (1987)

KAYNAKLAR

- Howie, John M.: The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup. J. London Math. Soc. **41**, 707-716 (1966)
- Howie, John M.: Idempotent generators in finite full transformation semigroups. Proc. Royal Soc. Edinburgh **81A**, 317–323 (1978)
- Howie, John M.: Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York (1995)
- Kearnes, K.A., Szendrei, Á. and Wood, J.: Generating singular transformations. Semigroup Forum **63**, 441–448 (2001)