ISSN 1019-1011

Ç.Ü.MÜH.MİM.FAK.DERGİSİ Haziran 1996 Ç.Ü.J.FAC.ENG.ARCH.
CİLT 11 SAYI 1 June VOL.11 NO.1

ZEMİN-YAPI ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNİN SONLU-SONSUZ ELEMANLAR MODELİ İLE STATİK ANALİZİ

Beytullah TEMEL ve Erhan KIRAL
Ç.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana/Türkiye

ÖZET : *Bu çalışmada, iki boyutlu ve eksenel dönel simetrik zemin-yapı etkileşimi problemleri, yakın bölgelerde standart sonlu ve uzak bölgelerde sonsuz eleman kullanılarak analiz edilmektedir. Bu amaçla, statik yükleme hali için FORTRAN dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Program, düzlem gerilme/şekil değiştirme ve eksenel dönel simetrik halleri birlikte içermektedir. Analitik çözümleri bilinen örnekler ele alınarak karşılaştırmalar yapılmıştır.*

STATIC ANALYSIS OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS USING FINITE AND INFINITE ELEMENTS

ABSTRACT : *In this study, 2-Dimensional plane strain and axi-symmetric finite element analysis of soil-structure interaction problems are carried out by discretizing the near field with standart finite elements and the far field with infinite elements. A computer program coded in FORTRAN is prepared under static loading. Program covers both plane stress/strain and axi-symmetric conditions. Some comparisons are made with the sample examples for which analitical solutions are available.*

1. GİRİŞ

Plak ve kabuk analizi gibi bir çok problemde cismin veya yapının sınırları açık olarak belirlenebilmektedir. Böyle problemlerde cismin tamamı sonlu elemanlarla modellenebilmektedir. Bununla beraber, zemin - yapı etkileşimi gibi bazı mühendislik problemleri yarı sonsuz ortam geometrisine sahiptir.

Bu tür problemlerin analizinde bilinen ve etkin bir yöntem olan sonlu elemanlar yöntemi, sonsuz elemanlarla birlikte kullanılmaktadır. Sonsuz elemanlar ilk defa Bettes (1) tarafından göz önüne alınmıştır. Adı geçen çalışmada, sonsuz doğrultuda azalan fonksiyonlu elemanlar kullanılmıştır.

Sonsuza uzanan ortamlarda, statik yükleme altında, yeterli uzaklıkta sınırlarla kesilip sadece sonlu eleman kullanılarak, bölgenin ayrıklaştırılması iyi sonuç verebilir. Ne varki, bu durumda bilinmeyen sayısı oldukça artmaktadır.

Bu çalışmada, yarı sonsuz ortamlar için yüke veya üst yapıya yakın bölgelerin sonlu elemanlar ile ve uzak bölgelerin ise sonsuz elemanlar ile modellenmesi yapılmaktadır. Sonsuz eleman modelleri için tasvir edilebilen ve azalan fonksiyonlu modeller kullanılmıştır. Ele alınan örneklerde sonlu ve sonsuz elemanların birlikte kullanılmasının etkinliği ortaya çıkmaktadır.

2. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

İki boyutlu zemin-yapı etkileşimi problemleri incelenirken zemin ve üst yapı lineer elastik ve izotrop malzeme olarak ele alınmaktadır.

Düzlem elastisite halinde, olayı idare eden diferansiyel denklemler deplasmanlar cinsinden,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+f_x=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f_y=0 \qquad (2)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, f_x ve f_y, x ve y doğrultularında, yayılı hacim (alan) kuvvetleri ve u=u(x,y) ve v=v(x,y), sırasıyla, x ve y doğrultusunda deplasman bileşenleridir.

Lineer elastik ve izotrop malzemeler için c_{ij}, malzeme sabitleri, düzlem şekil değiştirme halinde,

$$c_{11}=c_{22}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$c_{12}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad c_{33}=G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

olarak alınmaktadır. Burada, E, Elastisite modülünü, ν, Poisson oranını ve G, kayma modülünü göstermektedir.

Herhangi bir eleman için ağırlıklı artıklar yöntemi uygulandığında,

$$\iint_{A_e}\psi_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+f_x\right]dA=0 \tag{4}$$

$$\iint_{A_e}\psi_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f_y\right]dA=0 \tag{5}$$

diferansiyel denklemler integral formda yazılmaktadır. Burada, ψ_1, ψ_2 ağırlık fonksiyonları ve A_e elemanın alanıdır.

İntegral dönüşümleri yapıldığında (4) ve (5) denklemleri,

$$\iint_{A_e}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\psi_1 f_x\right]dA-\int_{s_\sigma}\psi_1 t_x\,ds=0 \tag{6}$$

$$\iint_{A_e}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\left[\left(c_{33}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\psi_2 f_y\right]dA-\int_{s_\sigma}\psi_2 t_y\,ds=0 \tag{7}$$

şeklini alır. Burada, t_x , t_y , sınır şartlarını temsil etmekte olup deplasmanlar cinsinden,

$$t_x=\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y \tag{8}$$

$$t_y=\left(c_{33}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y \tag{9}$$

şeklinde yazılmaktadır. Elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar,

$$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=[N]\{\Delta\} \tag{10}$$

dır. Burada, [N], şekil fonksiyonları matrisi ve {Δ}, düğüm deplasmanları vektörüdür. Galerkin ağırlık fonksiyonları olarak,

$$\psi_1 = \delta u \,, \quad \psi_2 = \delta v \tag{11}$$

deplasmanların varyasyonları seçilmektedir. (6-11) denklemleri yardımıyla [B] şekil değiştirme matrisi oluşturulmaktadır. Buradan,

$$\left[k^e\right] = \int\int_{A_e} [B]^T [C][B]\, dxdy \tag{12}$$

$$\left[f^e\right] = \int\int_{A_e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} dxdy \tag{13}$$

$$\left[Q^e\right] = \int_{S_\sigma} [N]^T \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} ds \tag{14}$$

tarifleri yapıldığında sonuçta eleman denklemi,

$$\left[k^e\right]\{\Delta\} = \{F^e\} \tag{15}$$

elde edilmektedir. Burada, $[k^e]$, eleman rijitlik matrisi, $\{F^e\}=\{f^e\}+\{Q^e\}$ ise, eleman yük vektörü olarak adlandırılmaktadır.

Zemin-yapı etkileşimi problemlerinde üst yapı sekiz düğümlü standart sonlu elemanlarla modellenmektedir. Yarı sonsuz zemin ise, binaya yakın bölgelerde sekiz düğümlü standart sonlu elemanlar ile uzak bölgeler de ise sonsuz elemanlar ile modellenmektedir.

3. SONSUZ ELEMAN FORMÜLASYONU

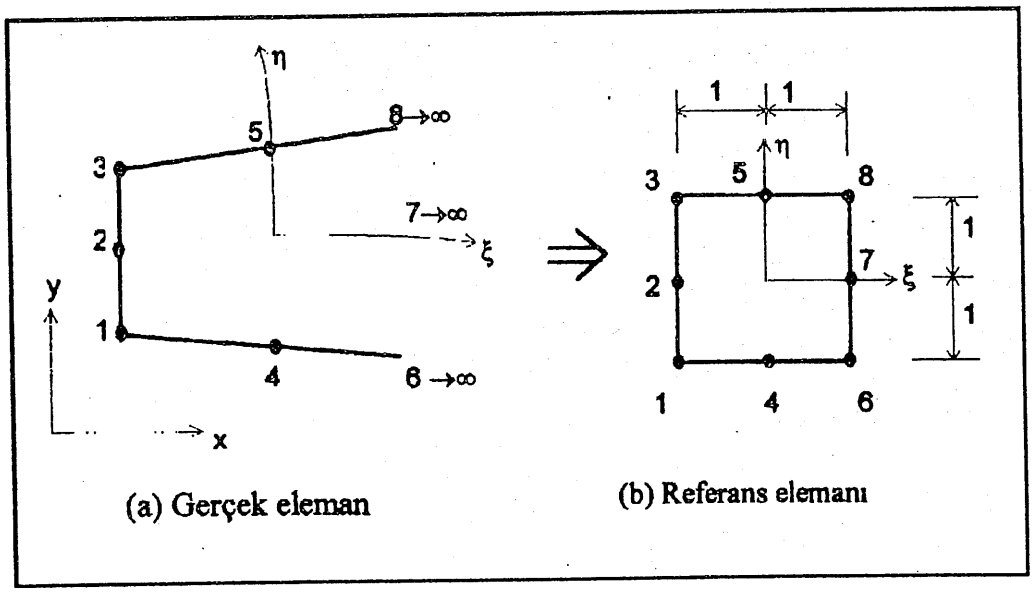
Bu kısımda, ilk olarak, tasvir edilebilen sonsuz eleman ve ikinci olarak ise azalan fonksiyonlu sonsuz eleman için formülasyon yapılacaktır. Her iki halde de hem düzlem gerilme/şekil değiştirme hem de eksenel dönel simetrik durumlar göz önüne alınmaktadır.

3.1. Tasvir Edilebilen Sonsuz Eleman

ξ- doğrultusunda sonsuza uzanan iki boyutlu bir eleman, sınırları her iki yönde de [-1,1] aralığında değişen sonlu bir bölge ile tasvir edilmektedir.

Şekil 1'de görülen sonsuz elemanın koordinat dönüşümü,

$$x = \sum_{i=1}^{5} M_i x_i \,, \quad y = \sum_{i=1}^{5} M_i y_i \tag{16}$$



Şekil 1. Beş düğümlü sonsuz eleman.

ile tarif edilmekte ve burada M_i, geometrik şekil fonksiyonları,

$$M_1=\frac{\xi\eta(1-\eta)}{(1-\xi)} \qquad M_4=\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(1-\xi)}$$

$$M_2=\frac{-2\xi(1-\eta^2)}{(1-\xi)} \qquad (17)$$

$$M_3=\frac{-\xi\eta(1+\eta)}{(1-\xi)} \qquad M_5=\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2(1-\xi)}$$

şeklinde verilmektedir (2).

Sonsuz elemanda deplasman bileşenleri için 8 düğümlü kuadratik sonlu elemanın interpolasyon şekil fonksiyonlarından alınmıştır.

$$u=\sum_{i=1}^{5}N_i u_i \quad \text{ve} \quad v=\sum_{i=1}^{5}N_i v_i \qquad (18)$$

N_i, interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(-1+\eta)(1+\xi+\eta) \qquad N_4=\frac{1}{2}(-1+\xi^2)(-1+\eta)$$

$$N_2=\frac{1}{2}(-1+\xi)(-1+\eta^2) \qquad (19)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \qquad N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

olarak alınmaktadır.

3.1.1. Düzlem Gerilme/Şekil Değiştirme Hali İçin Rijitlik Matrisi Hesabı

Uzama oranı deplasman ilişkisi,

$$\{\varepsilon\} = [B_1, B_2,..., B_5]\ \{u_1, v_1, u_2, v_2,..., u_5, v_5\}^T = [B]\ \{\Delta\} \tag{20}$$

olup, bir i düğümü için şekil değiştirme matrisi $[B_i]$ ve düğüm deplasmanları $\{\Delta_i\}$,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} ;\ \{D_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{21}$$

şeklinde yazılmaktadır. (x,y) koordinatlarındaki elemanter bir alan,

$$dA = dx\ dy = \det [J]\ d\xi\ d\eta \tag{22}$$

şeklinde yazılır. Burada, det [J], Jacobian matrisinin deteminantını göstermekte olup, bu matris de geometrik şekil fonksiyonları cinsinden hesaplanmaktadır. Sonsuz eleman için eleman rijitlik matrisi, (ξ, η) koordinatlarında,

$$[k^e]_{(10x10)} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B]^T[C][B] \det[J]\, d\xi\, d\eta = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [G(\xi,\eta)]\, d\xi\, d\eta \tag{23}$$

şeklinde yazılır. [C], malzeme matrisi, düzlem şekil değiştirme hali için (3) den alınacaktır. Burada, $[G]=[B]^T[C]\ [B]$ det [J] dir. Tasvir edilebilen sonsuz eleman rijitlik matrisi, Gauss-Legendre sayısal integral yöntemiyle her iki yönde 3 Gauss noktası seçilerek hesaplanmaktadır.

3.1.2. Eksenel Dönel Simetrik Hal İçin Rijitlik Matrisi Hesabı

Geometri ve yükleme eksenel dönel simetrik olması halinde, uzama oranı deplasman ilişkisindeki $[B_i]$ şekil değiştirme matrisi,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{24}$$

olup, N_i ler (19) eşitliğinde verilmektedir. Elemanda herhangi bir noktanın dönel simetri eksenine uzaklığı da, M_i geometrik şekil fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$r=\sum_{i=1}^{5} M_i r_i \tag{25}$$

yazılmaktadır. Buna göre, eksenel dönel simetrik sonsuz eleman için rijitlik matrisi,

$$[k^e]_{(10x10)}=2\pi\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[B]^T[C][B]\,r\,\det[J]\,d\xi\,d\eta \tag{26}$$

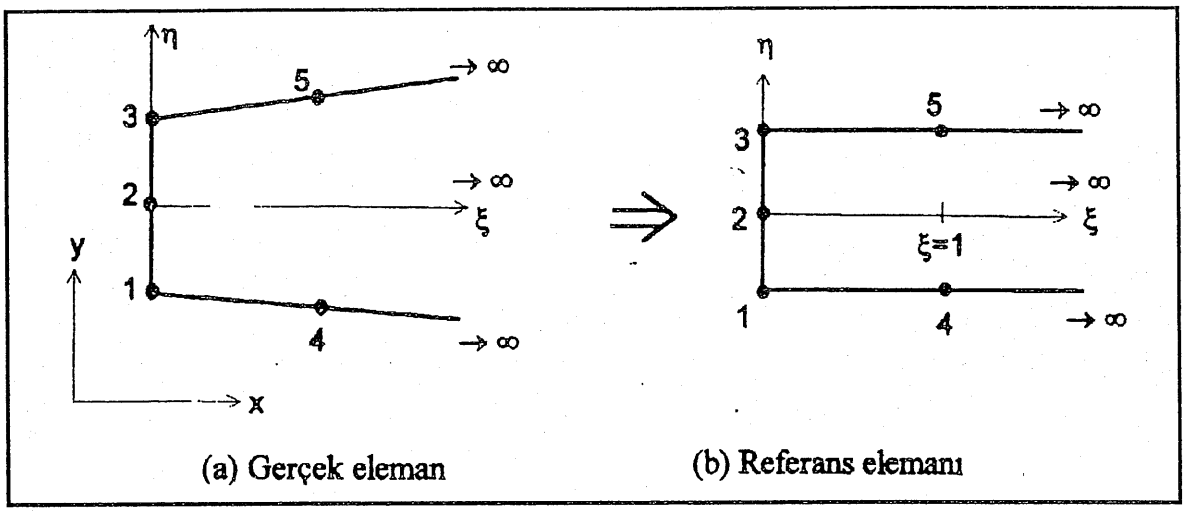
ifadesi ile hesaplanır. Bu hal için [C] malzeme matrisi,

$$[C]=\begin{bmatrix}(1-\nu)p & \nu p & \nu p & 0\\ & (1-\nu)p & \nu p & 0\\ & & (1-\nu)p & 0\\ \text{simetrik} & & & G\end{bmatrix};\ p=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{27}$$

şeklindedir.

3.2. Azalan Fonksiyonlu Sonsuz Eleman

Şekil 2'de görülen iki boyutlu bir sonsuz eleman yine iki boyutlu sonsuz bir bölge ile tasvir edilmektedir.



(a) Gerçek eleman (b) Referans elemanı

Şekil 2. Sonsuz eleman.

Eleman koordinat dönüşümü,

$$x=\sum_{i=1}^{5} M_i x_i\ ,\quad y=\sum_{i=1}^{5} M_i y_i \tag{28}$$

ile tarif edilmekte ve burada M_i , geometrik şekil fonksiyonları,

$$M_1=\frac{1}{2}(\xi-1)(\eta-1) \qquad M_4=\frac{1}{2}\xi(1-\eta)$$
$$M_2=0 \qquad (29)$$
$$M_3=\frac{1}{2}(1-\xi)(\eta+1) \qquad M_5=\frac{1}{2}\xi(1+\eta)$$

olarak verilmektedir. Sonsuz elemana ait deplasmanlar,

$$u=\sum_{i=1}^{3}N_i u_i \quad \text{ve} \quad v=\sum_{i=1}^{3}N_i v_i \qquad (30)$$

olup, N_i interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$N_1=P(\xi)\frac{1}{2}(-1+\eta)\eta$$
$$N_2=P(\xi)(1-\eta^2) \qquad (31)$$
$$N_3=P(\xi)\frac{1}{2}(1+\eta)\eta$$

olarak seçilmektedir. P(ξ), deplasman azaltma fonksiyonu olarak adlandırılmakta olup, bu çalışmada iki farklı şekilde ele alınmaktadır. İlk olarak, $P(\xi)=1/(1+\xi)$ tarzında (3) ve ikinci olarak da $P(\xi)=Exp(-\alpha\xi)$ şeklinde (4), ξ ye göre azalan bir fonksiyon seçilmektedir. Burada, α, azaltma parametresidir.

Azalan fonksiyonlu elemana ait uzama oranı deplasman ilişkisi söyledir:

$$\{\varepsilon\}=[B_1, B_2, B_3]\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T=[B]\{\Delta\} \qquad (32)$$

Düzlem gerilme/şekil değiştirme hali için sonsuz eleman rijitlik matrisi ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$[k^e]_{(6x6)}=\int_{\eta=-1}^{1}\int_{\xi=0}^{\infty}[B]^T[C][B]\det[J]\,d\xi\,d\eta$$

Bu ifade, modiye Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi ile, sonlu yönde 3, sonsuz yönde 17 Gauss noktası seçilerek hesaplanmaktadır.

Eksenel dönel simetrik halde eleman rijitlik matrisi hesabındaki [B] matrisi için (24)

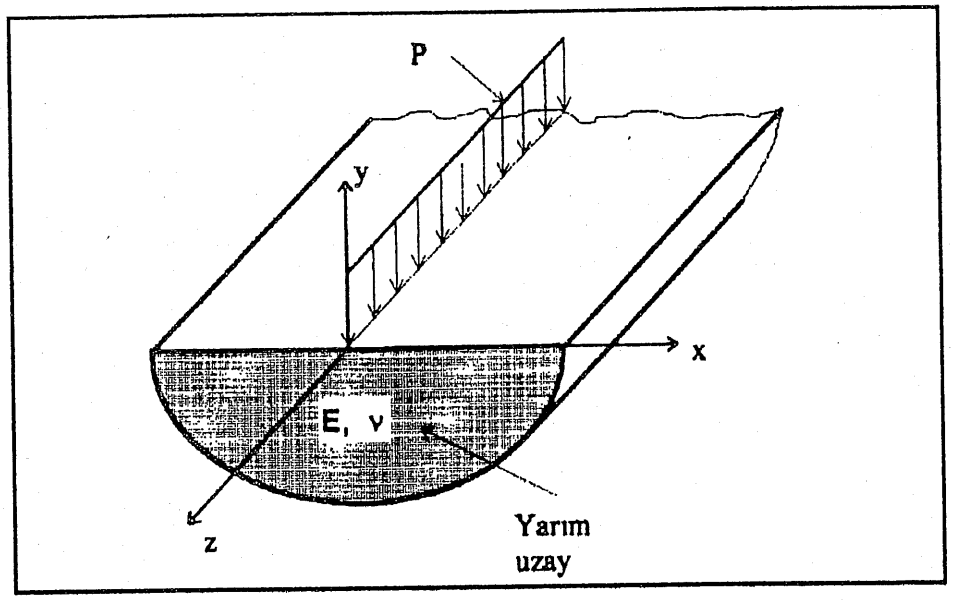
ve (25) eşitlikleri kullanılmaktadır.

4. UYGULAMALAR

Sonlu elemanlar için sekiz düğümlü kuadratik model ile sonsuz elemanlar için tasvir edilebilen ve azalan fonksiyonlu eleman modelleri kullanılarak, DUZSS1 ve DUZSS2 isimli iki ayrı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programlar, düzlem gerilme/şekil değiştirme ile eksenel dönel simetrik halleri birlikte göz önüne almaktadır.

4.1. Çizgisel Düşey Yüklü Elastik Yarı Sonsuz Düzlem

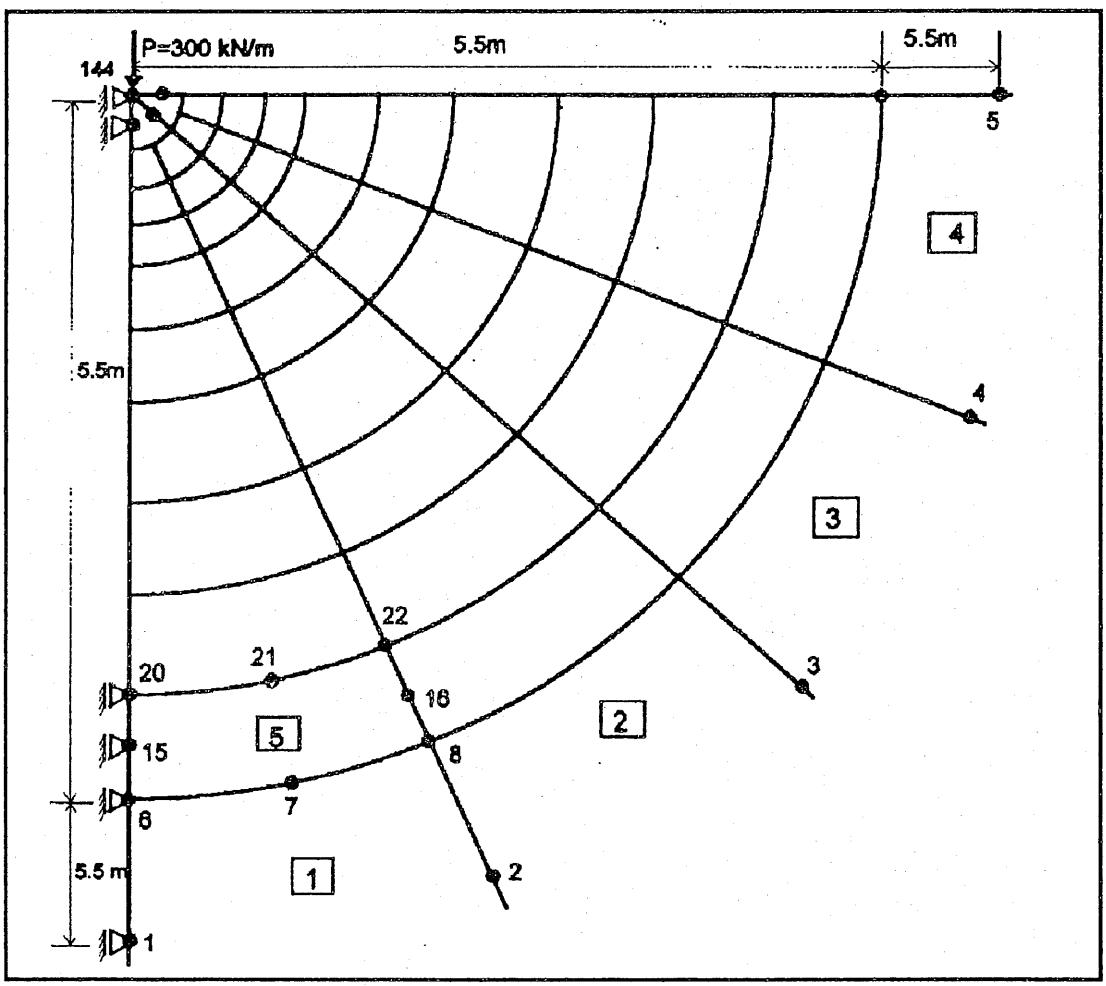
Flamant problemi olarak bilinen bu örnek düzlem şekil değiştirme özelliğine sahiptir (Şekil 3). Simetri nedeni ile yarım düzlemin yarısı göz önüne alınmaktadır. Bölge, 38 sonlu eleman ile 4 adet sonsuz elemana bölünmüştür (Şekil 4).



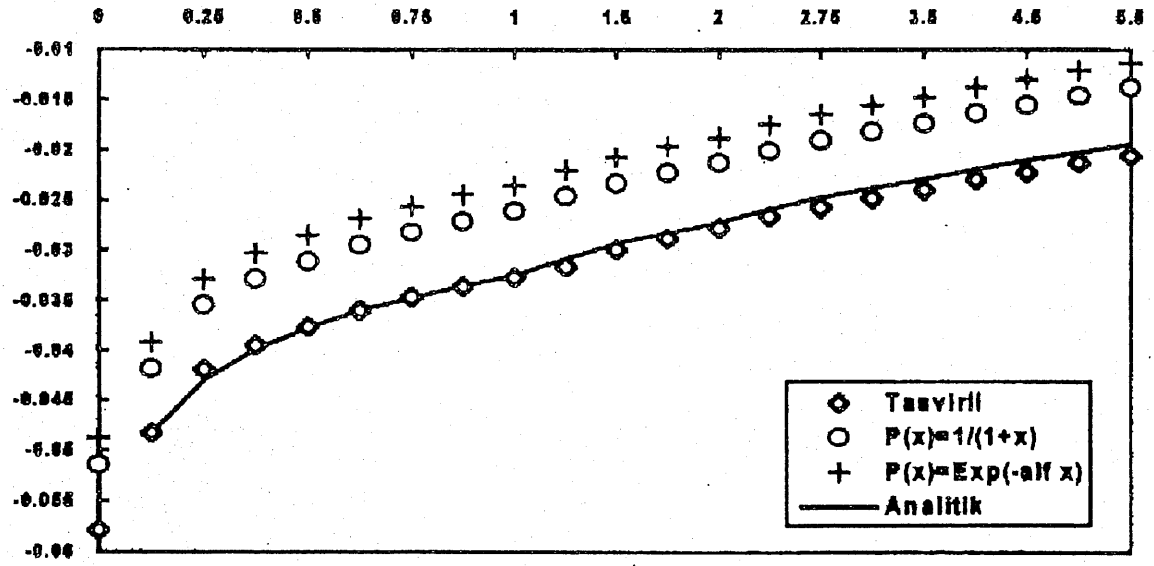
Şekil 3. Yarı sonsuz düzlem şekil değiştirme problemi.

Malzeme sabitleri, $E=5x10^4$ kN/m^2, $\nu=0.3$ ve şerit yük, P=600 kN/m alınmaktadır. Bu problemin analitik çözümü (5) den alınmıştır. Analitik çözümde, deplasmanın sıfır olduğu uzak mesafe olarak 70 metre alınmıştır.

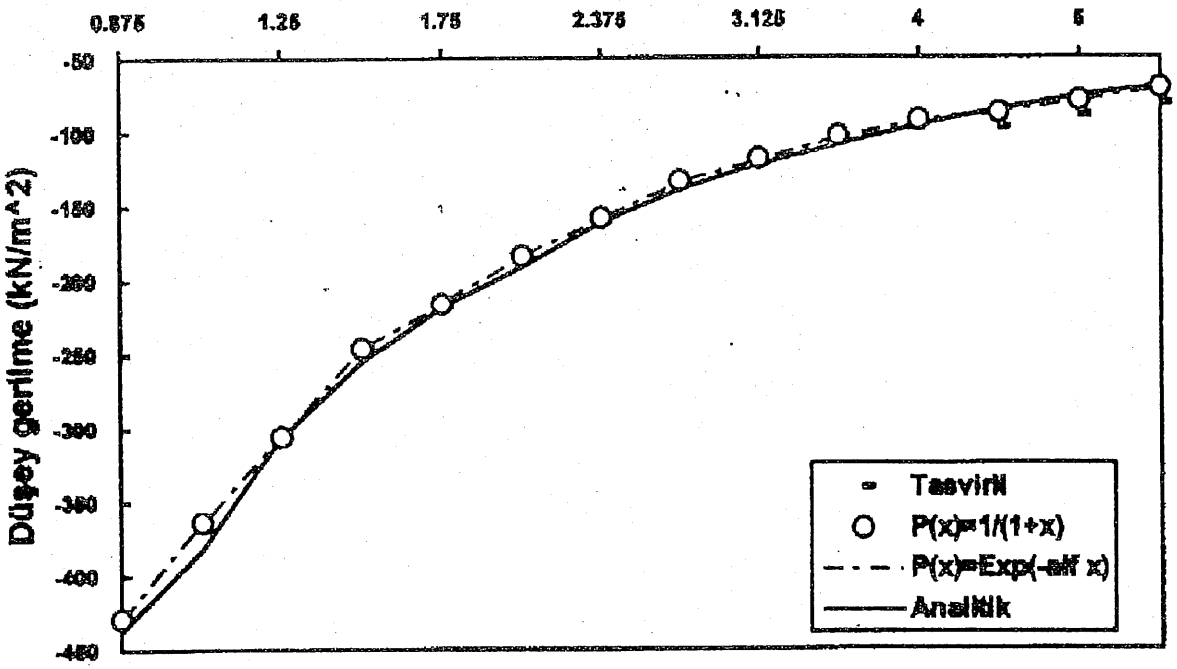
Hazırlanan programlarla sonsuz elemanlarda, tasvirli hal için (17,19), azalan fonksiyonlu halde, $P(\xi)=1/(1+\xi)$ ve $P(\xi)=Exp(-\alpha\xi)$ alınarak çözümler yapılmıştır. Simetri ekseni üzerindeki düşey deplasmanların derinlikle değişimi grafik olarak Şekil 5'de görülmektedir. Buradan, tasvirli sonsuz elemana ait sonuçların daha iyi olduğu gözlenmektedir. Simetri ekseni üzerindeki düşey gerilmelerin derinlikle değişimi de Şekil 6'da verilmektedir. Gerilmeler için her üç modele ait çözümlerin kesin çözüme yakın olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4. Problemin sonlu-sonsuz eleman ağı.



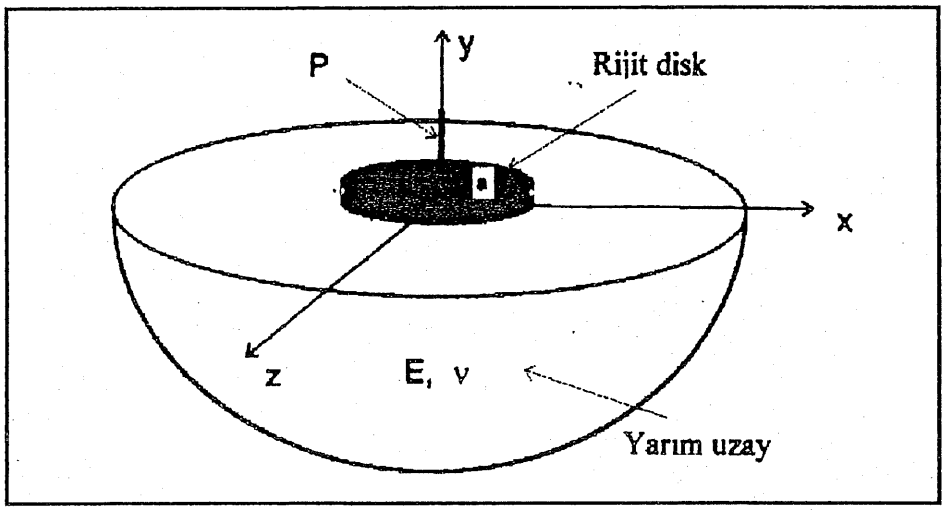
Şekil 5. Simetri ekseni üzerindeki düşey deplasmanın derinlikle değişimi.



Şekil 6. Simetri ekseni üzerindeki düşey gerilmelerin derinlikle değişimi.

4.2. Yarı Sonsuz Düzlem Üzerine Oturan Tekil Yüklü Rijit Disk

Lineer elastik, yarı sonsuz ortam üzerinde tekil yük bulunan rijit diskin altındaki düşey yer değiştirmeler ve gerilmeler araştırılmaktadır (Şekil 7). Zemin malzemesi, $E=5x10^4$ kN/ m^2, $\nu=0.3$ tür ve tekil yükün şiddeti ise, P=15000 kN seçilmektedir. Rijit diskin elastisite modülü çok büyük seçilmekte ve yarıçapı a=1 metre alınmaktadır. Eksenel dönel simetrik olan bu yarı sonsuz ortamda, uzak bölge 4 adet sonsuz eleman ile diskin altı ve yakın bölge 78 adet sonlu eleman ve rijit diskin kendisi de, 16 adet sonlu eleman alınarak ağ oluşturulmaktadır.



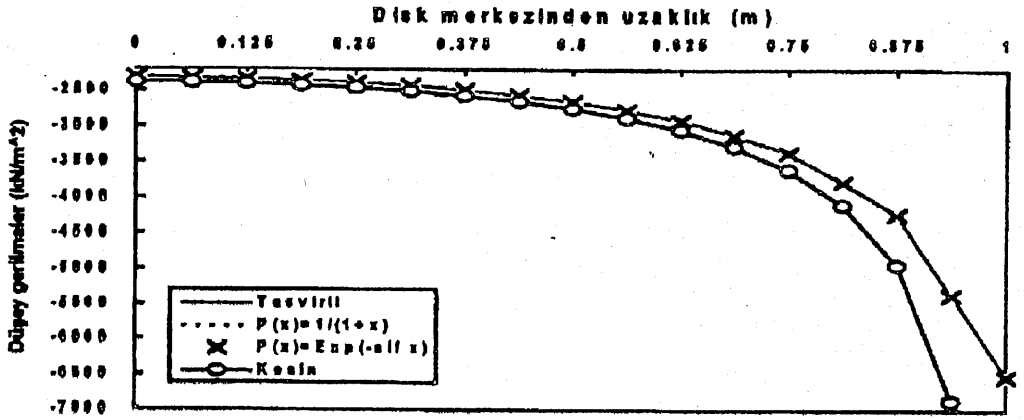
Şekil 7. Yarı sonsuz düzlem üzerine oturan tekil yüklü rijit disk.

P yükü altındaki düşey deplasman ve rijit diskin altındaki düşey gerilmelerin analitik ifadeleri (6) de verilmektedir.

Diskin altındaki düşey yer değiştirme Tablo 1'de ve gerilmeler tasvir edilebilen ve azalan fonksiyonlu sonsuz eleman modelleri ile hesaplanarak Şekil 8'de kesin çözümleri ile karşılaştırılmaktadır. Rijit diskin kenarındaki gerilmelerde süreksizlik olduğundan bu bölgede sonuçların yakın olmadığı gözlenmektedir.

Tablo 1. Rijit diskin altındaki düşey deplasman.

	Tasvirli	$P(\xi)=1/(1+\xi)$	$P(\xi)=Exp(-\alpha\xi)$	Kesin
Max. deplasman (m)	0.1278	0.1283	0.1223	0.1365



Şekil 8. Rijit diskin altındaki düşey gerilmenin uzaklıkla değişimi.

5. SONUÇLAR

Yüklemeye yakın bölgelerde sonlu eleman uzak bölgelerde ise, sonsuz eleman kullanılmasının uygun olduğu görülmektedir. Sonsuz eleman modelleri arasında, tasvir edilebilen sonsuz eleman, azalan fonksiyonlu sonsuz elemana göre daha iyi sonuç vermektedir. Bunun yanında, sadece sonlu eleman kullanılmasının uygun olmadığı gözlenmiştir.

6. KAYNAKLAR

1. *Bettess,P., Infinite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 53-64, 1977.*

2. *Kumar,P., Static Infinite Element Formulation, Journal of Structural Engineering, Vol.111, No. 11, ASCE, 2355-2371, 1985.*

3. *Medina,F. and Taylor,R.L., Finite Element Techniques for Problems of Unbounded*

Domains, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1209-1226, 1983.

4. *Chuhan,Z. and Chongbin,Z., Coupling Method of Finite and Infinite Elements for Strip Foundation Wave Problems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15., 839-851, 1987.*

5. *Thimesko, S, ve Goodier, S.N., XElastisite Teorisi, Arı Kitapevi Matbaası, İstanbul, 1969.*

6. *Little, R., Elasticity, Preutice-Hall, New Jersey, 1973.*