ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Diyane YAŞAR

SONLU DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNDA ÇARPANLARA AYIRMA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2009

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNDA ÇARPANLARA AYIRMA

Diyane YAŞAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2009, Sayfa: 63
Jüri: Doç. Dr. Gonca AYIK
Doç. Dr. Hayrullah AYIK
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada öncelikle yarıgrup teorisindeki temel tanım ve teoremler, bağıntılar, denklikler, kongrüanslar, sonlu dönüşümler yarıgrubu, kısmi dönüşümler yarıgrubu, bu yarıgruplar üzerinde idealler, ranklar ve Green denklik bağıntıları tanımlanmıştır. Daha sonra dönüşüm yarıgrupları üzerinde üç farklı çarpanlara ayırma yöntemlerinin tanım ve teknikleri verilmiştir. Son olarak [AAH, 2005] makalesindeki sonuçlara ayrıntılı olarak yer verilerek sonlu dönüşümler yarıgrubu ve singuler dönüşümler yarıgrubu için doğuray kümeleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, çarpanlara ayırma, doğuray kümeleri, ranklar.

ABSTRACT
MSc. THESIS

FACTORISATIONS IN FINITE TRANSFORMATIONS SEMIGROUP

Diyane YAŞAR

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Doç. Dr. Gonca AYIK
Year: 2009, Pages: 63
Jury: Doç. Dr. Gonca AYIK
Doç. Dr. Hayrullah AYIK
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

In this study, first we gave fundamental theorems and definitions in semigroup theory. That is, relations, equivalence, congruans, full transformation semigroups, partial transformation semigroups, ideals on these semigroups, ranks and Green equivalence relations. Then, we introduce three different techniques and definitions of factorizations in transformation semigroups. Finally, we mention about that results of the paper [AAH, 2005] so we investigate generating sets for full transformation semigroup, and singular transformation semigroup.

Key Words: Transformation semigroups, factorisations, generating sets, ranks.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını, desteğini ve sabrını esirgemeyen danışmanım sayın Doç.Dr. Gonca AYIK'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisansımın başlangıç aşamasından bitiş aşamasına kadar bana destek ve moral veren Arş. Gör. Demet PARLAK SÖNMEZ'e teşekkür ederim.

Öğrenim sürem boyunca maddi ve manevi her türlü zorlukla baş ederek beni bu günlere getiren ve ayaklarımın üzerinde durmayı öğreten hayat uzmanı annem Hatice ATALAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ.....I
ABSTRACT.....II
TEŞEKKÜR.....III
İÇİNDEKİLER.....IV

1. GİRİŞ.....1
2. TEMEL TANIMLAR.....5

2.1. Bağıntılar, Denklikler, Kongrüanslar.....14
2.2. Tüm Dönüşümler Yarıgrubu.....18
2.3. İdealler.....24
2.4. Ranklar.....25
2.5. Green Denklik Bağıntıları.....30

3. DÖNÜŞÜMLERİN ÇARPANLARA AYRILMASI

3.1. Dönüşümlerin Grafiği ve GM Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma….....33
3.2. Lipscomb Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma.....43
3.3. AAH Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma.....44
3.4. Doğuray Kümeleri.....48
3.5. Sonlu Dönüşümler Yarıgrubunda Ranklar.....51

KAYNAKLAR.....60
ÖZGEÇMİŞ.....63

1. GİRİŞ

Herhangi bir X kümesinden yine X kümesine olan tüm dönüşümlerin kümesini göz önünde bulunduralım. Bu kümeyi T_X ile gösterelim. T_X kümesi dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba *tüm dönüşümler yarıgrubu* denir. Tüm dönüşümler yarıgrubu ile ilgili çalışmalar son elli yılda oldukça artmıştır. Bilgisayar bilimindeki gelişmeler bu ilginin artmasına yardımcı olmuştur. Bu zamana kadar yapılan çalışmalarda X in hem sonlu hem de sonsuz olması durumları göz önünde bulundurulmuştur. Özellikle [Hardy, Wright, 1979] ve [Higgins, Howie, Ruskuc 1998] makalelerinde X in hem sonlu hem de sonsuz olması durumunda T_X in özellikleri incelenmiş ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Herhangi bir S yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubuna izomorfik olduğundan T_X yarıgrubu yarıgrup teoride oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bu sebeple T_X in yapısını ve elamanlarının özelliklerini bulmak ve T_X in doğuray kümesini bulmak uzun zamandır çalışılmaktadır. Bu çalışmalara örnek olarak [Araujo, Branco, Fernandes,Gomes,Ruskuc, 2001], [Ayık,Ayık,Howie,Ünlü,2005], [Ayık, Ruskuc, 1999], [Fernanedes, 2002], [Ganyushkin,Mazorchuk, preprint] ,[Gomes, Howie, 1987], [Gomes, Howie, 1992], [Higgins, Howie, Mitchell, Ruskuc,] , [Higgins, Howie, Ruskuc 1998], [Howie,1966] ,[Howie, 1995] ,[Howie, McFadden,1990] ,[Howie, 1971], [Howie, 1978] [Howie, Ruskuc, 1994] ,[Kearnes,Szendrei, Wood, 2001] , [Lipscomb, 1996], [Ruskuc, 1998], makalaleri verebiliriz. X={1,2,…,n} in sonlu bir küme olması durumunda T_X yarıgrubu kısaca T_n olarak gösterilir ve *sonlu dönüşümler yarıgrubu* denir. ST_n ve S_n sırasıyla T_n nin singüler dönüşümler alt yarıgrubunu ve bijektif dönüşümlerinin grubunu göstersin. Klasik sonlu dönüşümler yarıgrubu hakkındaki terminolojiyi bir arada bulacağımız kaynaklara örnek olarak [Ganyushkin,Mazorchuk, preprint],[Howie,1966], [Lavers,1998] çalışmalarını verebiliriz.

Sonlu dönüşüm yarıgruplarının çarpanlara ayrılması yarıgruplar teorisinin son yıllarda sıkça çalışılan bir konusudur. Biz de bu tezde üç farklı çarpanlara ayırma

yöntemini inceledik. Öncelikle tezin 2. bölümünde yarıgrup teorisinde kullanılan temel tanım ve teoremler, bağıntılar, denklikler, kongrüanslar, T_n ve PT_n dönüşüm yarıgrupları ve bu yarıgruplar üzerinde idealler, rank ve Green denklik bağıntıları ifade edilmiştir.

Tezin 3. bölümünde ise ilk olarak Ganyushkin ve Mazorchuk tarafından tanımlanan tekniği inceledik. Bu teknikle *V bir* küme ve $E \subset V \times V$ olmak üzere $\Gamma = (V, E)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanan $\Gamma_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ grafiğinin **N** deki her α kısmi dönüşümünün yönlü grafiği olduğu ve grafiğin çok yer kaplaması nedeniyle daha az yer kaplayan bir lineer gösterim tanımlanmıştır. Dönüşümlerin takdimi için grafik gösterimi [Suschkewitsch, A.] da verilmiştir.

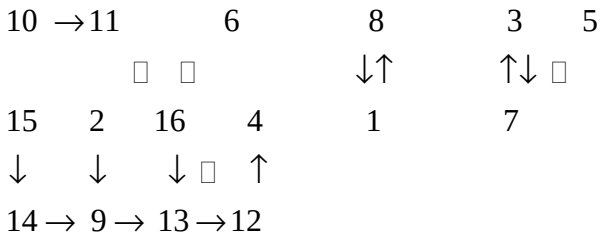
İkinci yöntem olan Lipscomb yönteminin grafik temsilinin çarpanlara ayrılması gösteriminde çarpanlar devir veya patikalar olup bir devire bağlanan patikanın 〉 parantezi ile biterken, devirin ( ) parantezi içinde yazıldığı gösterilmiştir. Lipscomb yöntemiyle ilgili daha geniş sonuçları [Lipscomb, 1996] da bulabilirsiniz.

Son yöntem olan AAH çarpanlara ayırma yönteminde ise önce T_n in ilkel elemanları için patika-devir adı verilen bir gösterim oluşturulmuş ve T_n deki keyfi bir α dönüşümünün patika-devirlerin çarpımı olarak yazılması için bir algoritma tanımlanmıştır. Sonrasında ise bu tekniklerle T_n için doğuray kümeleri tanımlanmış ve ST_n (= $T_n \setminus S_n$) deki her dönüşümün 2-patikaların bir birleşimi olduğu yeni bir ispatla ifade edilmiştir. T_n yarıgrubu hakkında daha fazla bilgi için [Clifford-Preston, 1961], [Higgins, 1992] ve [Petrich, 1973] e bakabilirisiniz.

Bu üç yöntemi bir örnek ile açıklayalım. $\alpha \in T_n$ olarak alalım. α dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 7 & 13 & 7 & 16 & 3 & 1 & 13 & 11 & 16 & 4 & 12 & 9 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşümü Ganyushkin ve Mazorchuk yönteminde bahsedilen Γ_α grafiği aşağıdaki gibidir.



Ganyushkin ve Mazorchuk yönteminde tanımlanan teknik ile çarpanlara ayrılmış hali

$$\alpha = (\,[[[[15];\,14],\,[2];\,9],\,[[[10];\,11],\,[6];\,16];\,13],\,12,\,4)\;(1,\,8)\;([[5];\,7],3)$$

şeklindedir.

Lipscomb yöntemine göre α dönüşümünün çarpanlara ayrılmış hali ise

$$\alpha = (10\;11\;16\;13\rangle\,(15\;14\;9\;13\rangle\,(2\;9\;13\rangle\,(13\;12\;4)\,(1\;8)(3\;7)(5\;7\rangle$$

dir.

Son olarak [AAH] yöntemine göre α dönüşümünün çarpanlara ayrılmış şekli ise

$$\alpha = [10,11,16,13,12,4|13][15,14,9,13|13][5,7,3|7][2,9|9][6,16|16][1,8|1]$$

dir.

Bu çalışmanın son bölümünde [AAH, 2005] makalesindeki sonuçlara ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Derecesi n olan tüm singüler dönüşümler yarıgrubunu $ST_n\,(=T_n \setminus S_n)$ ile göstereceğiz. ST_n nin T_n deki tüm 2-patikalar tarafından doğurulduğu biliniyor olup T_n de, T_n deki tüm 2-patikalar tarafından doğurulur. Son bölümde patika-devirler kullanılarak ST_n ve T_n için yeni bir doğuray kümesi için alternatif ispat verilmiştir. Ayrıca her $m \in \{2,\ldots,n\}$ için ST_n, uzunluğu m olan patika-devirler tarafından doğurulduğu gösterilmiştir.

Ayrıca $1 \leq r \leq n$ için $K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$ ve $T_{n,r} = K_{n,r} \cup S_n$ olarak tanımlanır. Bu durumda $K_{n,n} = T_{n,n} = T_{n,n-1} = T_n$ ve $K_{n,n-1} = ST_n$ dir. Her $\alpha \in T_n$ için S_n ve α yı içeren T_n nin en küçük alt yarıgrubunu $\langle\langle \alpha \rangle\rangle$ ile gösterelim. Her $x, y \in X_n$ için ($x \neq y$)

$$\langle\langle [x, y | y] \rangle\rangle = T_n$$

dir. Son olarak $\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$ olduğu gösterilmiştir.

2.TEMEL TANIMLAR

Boştan farklı S kümesi üzerinde bir μ ikili işlemi (yani $\mu : S \times S \to S$) tanımlı ise (S, μ) ikilisine bir grupoid denir. Eğer μ ikili işlemi birleşme özelliğine sahipse yani

$$((x, y)\mu, z)\mu = (x, (y, z)\mu)\mu$$

ise (S, μ) ikilisine bir yarıgrup denir. (Burada dönüşüm sembollerin sağına yazılmıştır.) İkili işlemi cebirsel olarak alışık olduğumuz çarpma olarak alırsak notasyon bakımından daha kolay bir gösterime sahip oluruz. Bu durumda $(x, y)\mu$ yerine $x.y$ veya xy olarak yazarsak yukarıdaki eşitlik

$$(xy)z = x(yz)$$

elemanter cebirdeki birleşme özelliği formuna dönüşmüş olur. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere x^n ile n tane x elemanının çarpımını ifade edeceğiz. $|S|$ kardinal sayısına S nin derecesi diyeceğiz.

Yarıgrubu çarpımsal notasyonda ifade ederken çarpmanın ne olduğu içerikten belli ise $(S, .)$ yerine sadece S yazacağız.

Eğer bir S yarıgrubunda her $x, y \in S$ için $xy = yx$ oluyorsa S ye değişmeli yarıgrup denir. (Grup teorideki abelian ifadesi de kullanılır.) Bir S yarıgrubu, eğer her $x \in S$ için

$$x1 = 1x = x$$

koşulunu sağlayan bir 1 elemanına sahip ise 1 elemanına birim eleman, S ye de birim elemanlı yarıgrup veya daha genel ifade ile bir monoid denir. Bir S

yarıgrubunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer $1'$, her $x \in S$ için $x1' = 1'x = x$ koşulunu sağlıyorsa o zaman

$$\begin{aligned} 1' &= 11' && (\text{çünkü 1 birimdir}) \\ &= 1 && (\text{çünkü} 1' \text{birimdir}). \end{aligned}$$

Eğer S birim elemana sahip değil ise monoid formuna getirmek için ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 11 = 1$$

olarak tanımlayalım. Rutin kontroller sonucu $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. Şimdi S^1 kümesini

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^1 kümesini eğer gerekli ise bir birim eklenerek S den elde edilen monoid olarak adlandıracağız. En az iki elemanlı bir yarıgrup S , her $x \in S$ için

$$x0 = 0x = 0$$

koşulunu sağlayan bir 0 elemanına sahip ise 0 elemanına sıfır eleman, S kümesine de sıfırlı yarıgrup denir. Bir S yarıgrubunun en fazla bir tane sıfır elemanı vardır. En az iki elemanlı bir yarıgrup S olmasından kastımız bir tek elemandan oluşan $\{e\}$ trivial yarıgrubunun sıfır olarak alınmamasıdır ($e^2 = e$). Benzer şekilde, eğer S sıfır elemana sahip değil ise ekstra bir sıfır eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s0 = 0s = 0$$

olarak tanımlarsak birleşme hala geçerli olup $S \cup \{0\}$ olarak genişletebiliriz. O halde

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ sıfır elemana sahip ise} \\ S \cup \{0\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^0 kümesini eğer gerekli ise bir sıfır eklenerek S den elde edilen yarıgrup olarak adlandıracağız.

Bu ekstra birim ve sıfır eleman ekleyebilme çok kolay olmasına karşın, yarıgrupların çalışılmasını, sıfırlı monoidlerle çalışılması için ikisini birden kısaltamayız. Bu ekleme işini yaparken yarıgrubun hayati özelliklerini kurban etmemeliyiz. Eğer grup olan bir yarıgruba sıfır elemanını eklersek grup olmayan bir yarıgrup elde ederiz. Sıfırlı yarıgruplar içinde, herhangi iki elemanının çarpımı sıfır olan oldukça trivial null yarıgruplar ile karşılaşırız. Boştan farklı herhangi bir S yarıgrubunda çarpmayı $a, b \in S$ için

$$ab = a$$

olarak tanımlarsak sol sıfır yarıgrup olarak adlandırılan yarıgrubu elde ederiz. Sağ sıfır yarıgrup benzer şekilde tanımlanır.

Herhangi bir X kümesinden yine X kümesine olan tüm dönüşümlerin kümesini göz önünde bulunduralım. Bu kümeyi T_X ile gösterelim. T_X kümesi dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba *tüm dönüşümler yarıgrubu* denir. X={1,2,…,n} in sonlu bir küme olması durumunda T_X yarıgrubu kısaca T_n olarak gösterilir ve *sonlu dönüşümler yarıgrubu* denir.

Eğer $I = [0,1]$ kapalı aralığında $x, y \in I$ için

$$xy = \min(x, y)$$

olarak tanımlayalım. Birleşme özelliği sağlanır. Kolayca görüleceği gibi 0 sıfır eleman, 1 ise birim elemandır.

Eğer A ve B kümeleri bir S yarıgrubunun alt kümeleri ise o zaman

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlayalım. S nin her A, B, C alt kümesi için

$$A(BC) = (AB)C$$

olduğu kolayca kontrol edilebilir olup ABC ve $A_1, A_2, ..., A_n$ anlamlıdır. A^2 nin anlamı $A = \{a^2 : a \in A\}$ değil $A = \{a_1 a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ dır. Notasyonda basitlik bakımından tek elemanlı kümelerle ilgili olarak $A\{b\}$ yerine Ab yazılacaktır.

Eğer a birim elemansız bir S yarıgrubunun elemanı ise o zaman Sa kümesinin a yı içermesi gerekmez. Aşağıdaki gösterimler standarttır:

$$S^1 a = Sa \cup \{a\}$$

$$aS^1 = aS \cup \{a\}$$

$$S^1 aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\}$$

Dikkat edilecek olursa S^1a, aS^1, S^1aS^1 kümeleri S nin alt kümeleridir ve 1 elemanını içermezler.

Eğer bir S yarıgrubu her $a \in S$ için

$$aS = a \text{ ve } Sa = S \qquad (*)$$

(*) özelliğine sahip ise S bir gruptur. (*) özelliğinin her $a, b \in S$ için

$$ax = b, ya = b$$

olacak şekilde $x, y \in S$ olmasına denk olduğu açıktır. Eğer G bir grup ise o zaman $G \cup \{0\}$ bir yarıgruptur. Bu yolla oluşturulan yarıgruba 0-grup veya sıfırlı grup denir.

Önerme 2.1. Bir sıfırlı yarıgrup S bir 0-gruptur. Her $a \in S \setminus \{0\}$ için $aS = S$ ve $Sa = S$.

İspat. $(\Rightarrow)$ $S = G^0$ olduğunu yani sıfırlı yarıgrup S nin bir 0-grup kabul edelim. $a \in G = S \setminus \{0\}$ alalım. $aG = Ga = G$ dir. $aS = aG \cup \{0\}$ ve $Sa = Ga \cup \{0\}$ olduğundan $aS = Sa = S$ dir.
$(\Leftarrow)$ S sıfırlı yarıgrubu her $a \in S \setminus \{0\}$ için $aS = S, Sa = S$ olduğunu kabul edelim. $G = S \setminus \{0\}$ olsun. S de en az iki eleman olacağından $G \neq \varnothing$ dir. G nin grup olduğunu göstermek için ilk olarak G nin çarpma ile kapalı olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki G kapalı olmasın yani $a, b \in G$ için $ab = 0$ olsun. O zaman

$$S^2 = (Sa)(bS) = S(ab)S = S0S = \{0\}$$

ve böylece $S = aS \subseteq S^2 = \{0\}$ olup S nin en az iki eleman içermesi ile çelişir. O halde G kapalılık özelliğine sahiptir. Her $a \in S \setminus \{0\}$ için $aS = S$ ve $Sa = S$ olduğundan her $a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ olacak şekilde $x, y \in S$ elemanları vardır. x, y sıfır olamayacağından $x, y \in G$ dir. O halde G bir gruptur. ■

Bir S yarıgrubunun boştan farklı bir T alt kümesi çarpma işlemine göre kapalı ise yani her $x, y \in T$ için

$$xy \in T$$

oluyorsa T ye S nin alt yarıgrubu denir. Bu koşulu daha genel olarak $T^2 \subseteq T$ ifade edebiliriz. Birleşme özelliği S de sağlandığından T de de sağlanır ve T de bir yarıgruptur. Bazı özel alt yarıgruplara örnek olarak , S nin kendisi, {0} ve {1} veya daha genel olarak $e^2 = e$ olan yani S nin idempotent herhangi bir elemanından oluşan $\{e\}$ alt yarıgrubunu verebiliriz.

S nin bir alt yarıgrubu S deki çarpma işlemi ile grup oluyorsa o alt yarıgruba S nin alt grubu denir. Buna en trivial örnekler $\{0\},\{1\}$ ve $\{e\}$ dir. S nin boştan farklı T alt kümesinin S nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter koşul her $a \in T$ için $aT = T$ ve $Ta = T$ olmasıdır.

$(S,.)$ ve $(T,.)$ iki yarıgrup ve $\varphi : S \to T$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi$$

oluyorsa φ ye bir homomorfizm denir. $(S,.,1_S)$ ve $(T,.,1_T)$ sırasıyla birimleri 1_S ve 1_T olan monoidler ise yukarıdaki koşula ek olarak

$$(1_S)\varphi = 1_T$$

oluyorsa φ ye bir homomorfizma denir. Bu homomorfizmaların aralarındaki farkı belirtmek için yarıgrup homomorfizması ve monoid homomorfizması ifadeleri kullanılır. Burada S ye φ nin tanım kümesi (domain), T ye de değer kümesi (codomain) denir. φ nin görüntü veya imaj kümesi $\{s\varphi : s \in S\}$ olarak tanımlanır. Eğer φ birebir ise φ ye bir monomorfizm denir. Bir $\varphi : S \to T$ homomorfizması, tersinir yani $\varphi\varphi^{-1}$, S üzerinde birim dönüşüm $\varphi^{-1}\varphi$ de T üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde $\varphi^{-1} : T \to S$ bir φ^{-1} homomorfizması varsa $\varphi : S \to T$

homomorfizmasına bir izomorfizma denir. Eğer bir $\varphi: S \to T$ izomorfizması varsa S ve T ye izomorfik denir ve $S \cong T$ yazılır. Yani $(S,.)$ ve $(T,*)$ iki yarıgrup olsun. $\varphi: S \to T$ ye birebir, örten ve her $a,b \in S$ için

$$\varphi(a.b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

bir φ dönüşümü varsa S ve T izomorfiktir.

Örnek 2.2. Küçük yarıgrupları *Cayley tablosu* denilen çarpım tablolarıyla göstermek daha elverişlidir. Bu tablolar S nin eleman sayısına indeksli olarak $|S|$ tane satır ve $|S|$ tane sütundan oluşan kare matrislerdir. $a,b \in S$ için *a*-yıncı satır ve *b*-yinci sütunun kesişimi *ab* çarpımı şeklinde yazılır. Örneğin $T_2 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ yarıgrubunun Cayley tablosu

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c

2×2 matrislerin kümesi S matris çarpma işlemi ile bir yarıgruptur.

$$S = \left\{ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S nin Cayley tablosu aşağıdaki gibidir.

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	c	B
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C

Birebir örten dönüşümü

$$\varphi = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ E & A & B & C \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa T_2 nin S ye izomorfik olduğu görülür.

Eğer $\varphi : S \to S$ homomorfizma ise φ ye S nin bir endomorfizmi denir, eğer bu φ endomorfizm birebir ve örten ise φ ye bir otomorfizm denir.

S ve T iki yarıgrup ise $S \times T$ kartezyen çarpımı üzerindeki çarpmayı

$$(s,t)(s',t') = (ss',tt')$$

olarak tanımlarsak $S \times T$ kartezyen çarpımı bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba S ve T nin direkt çarpımı denir.

S bir yarıgrup ve $I \neq \varnothing$ olmak üzere $\{U_i : i \in I\}$ kümesi de S nin alt yarıgruplarının indekslenmiş bir ailesi olsun. Tüm U_i altyarıgruplarının kesişimi U, boştan farklı ise S nin bir alt yarıgrubu olduğu kolayca görülür. S nin boştan farklı her A alt kümesi için en az bir tane A yı içeren S nin bir alt yarıgrubu vardır. (En azından S nin kendisi vardır.) Böylece A yı içeren S nin tüm altyarıgruplarının kesişimi A yı içeren S nin bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgrubu $\langle A \rangle$ ile gösteririz ve bu alt yarıgrup aşağıdaki iki özellik ile tanımlanır:

1. $A \subseteq \langle A \rangle$,

2.Eğer U , A yı içeren bir alt yarıgrup ise o zaman $\langle A\rangle \subseteq U$ dur.

$\langle A\rangle$ alt yarıgrubu, A daki elemanların sonlu çarpımı şeklinde yazılabilen S nin tüm elemanlarını içerir. Eğer $\langle A\rangle = S$ ise A ya doğurayların kümesi veya S nin doğuray kümesi denir. Özel olarak A sonlu olabilir. $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ise $\langle A\rangle$ yı $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ olarak yazacağız. Özellikle $A=\{a\}$ tek elemanlı bir küme olması durumunda

$$\langle a\rangle = \{a, a^2, ..., a^n, ...\}$$

olur. $\langle a\rangle$ ya a tarafından doğurulan S nin monogenic alt yarıgrubu denir. Eğer S yarıgrubu için $S=\langle a\rangle$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman S ye monogenic yarıgrup denir.

Clifford&Preston (1961), grup teorideki terminilojiye paralel olarak tek doğuraylı yarıgruba 'devirli' (cyclic) ifadesini kullanmıştır. Fakat bunun aslında yarıgruplarda tanımı tam olarak karşılamamaktadır.

a bir S yarıgrubunun bir elemanı olsun ve $\langle a\rangle = \{a, a^2, ..., a^n, ...\}$ monogenic alt yarıgrubunu göz önünde bulunduralım. $a, a^2, ..., a^n, ...$ listesinde hiç tekrar yoksa yani;

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

ise $(\langle a\rangle, .)$ doğal sayıların toplama işlemi ile oluşturduğu $(\mathbf{N}, +)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Ayrıca bu durumda $\langle a\rangle$ sonsuz monogenic yarıgruptur ve a, S de sonsuz dereceye sahiptir. S bir monoid ise $\langle a\rangle$ bir alt monoiddir ve $\langle a\rangle = \{1, a, a^2, ..., a^n, ...\}$ olduğundan $(\langle a\rangle, .) \cong (\mathbf{N}^0, +)$ dir.

2.1 Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar

Eğer $X \neq \varnothing$ bir küme ise $X \times X$ in bir ρ alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile gösterelim. $\varnothing$, $X \times X$ ve $1_X = \{(x,x) : x \in X\}$ kümelerini X üzerindeki bağıntılara örnek olarak verebiliriz. ρ, X üzerinde bir bağıntı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$\rho[A] = \{y \in X : (a,y) \in \rho, (a \in A)\}$$

olarak tanımlayalım. $x \in X$ için $\rho[\{x\}]$ yerine $\rho[x]$ yazacağız. $\rho, \sigma \in B_X$ olmak üzere $\rho \circ \sigma$ kümesi

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X, (x,z) \in \sigma, (z,y) \in \rho\}$$

olarak tanımlanır. Her $\rho, \sigma, \tau \in B_X$ için $\rho \subseteq \sigma$ ise $\rho \circ \tau \subseteq \sigma \circ \tau$ ve $\tau \circ \rho \subseteq \tau \circ \sigma$ olduğu açıktır. Ayrıca B_X, $\circ$ işlemi ile bir yarıgruptur. Dikkat edilecek olursa $|X| = n$ olmak üzere $|X \times X| = n^2$ olup $|B_X| = 2^{n^2}$ dir.

$\rho \in B_X$ olmak üzere

$$dom(\rho) = \{x \in X : \exists y \in X, (x,y) \in \rho\}$$

kümesine ρ nun *tanım kümesi*

$$im(\rho) = \{y \in X : \exists x \in X, (x,y) \in \rho\}$$

kümesine ρ nun *değer kümesi* denir.

Kolayca görüleceği gibi $\rho,\sigma \in B_X$ için $\rho \subseteq \sigma$ ise $dom(\rho) \subseteq dom(\sigma)$, $im(\rho) \subseteq im(\sigma)$ ve $\rho[x] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in dom(\rho)$ dur. $A \subseteq X$ ise $\rho[A] = \cup\{\rho[a] : a \in A\}$ şeklindedir. Her $\rho \in B_X$ için ρ nun tersi

$$\rho^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in \rho\}$$

olarak tanımlanır. ρ^{-1} de B_X in bir elemanıdır. Ayrıca $\rho,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \in B_X$ olmak üzere

$$\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho$$

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \circ \alpha_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ \alpha_1^{-1}$$

$$\rho \subseteq \beta \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \beta^{-1}$$

dir. Dikkat edilecek olursa $dom(\rho) = im\left(\rho^{-1}\right)$, $im(\rho) = dom\left(\rho^{-1}\right)$ ve $\rho^{-1}[x] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in ran(\rho)$ dir.

ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun.

- Her $x \in X$ için $(x,x) \in \rho$ ise ρ ya yansımalı
- Her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \rho$ iken $(y,x) \in \rho$ ise ρ ya simetrik
- Her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \rho$ ve $(y,x) \in \rho$ olduğunda $x = y$ ise ρ ya antisimetrik
- Her $x,y,z \in X$ için $(x,y) \in \rho$ ve $(y,z) \in \rho$ olduğunda $(x,z) \in \rho$ ise ρ ya geçişmeli

denir. Bu tanımları aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz. Eğer $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımalı*, $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik*, $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli* denir. ρ, yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Örnek 2.1.1. Yarıgruplar izomorfikliği bir denklik bağıntısıdır. Yani;

(i) $S \cong S$

(ii) $S \cong T$ ise $T \cong S$ dir.

(iii) $S \cong T$ ise $T \cong K$ olsun. $\varphi : S \to T$ ve $\psi : T \to K$ izomorfizmaları olduğundan $\psi \circ \varphi : S \to K$ bir izomorfizm olup $S \cong K$ dir.

O halde yarıgrupların izomorfikliği bir denklik bağıntısıdır.

Dikkat edilecek olursa ρ bir denklik bağıntısı ise o zaman

$$dom(\rho) \supseteq dom(1_X) \supseteq X$$

$$im(\rho) \supseteq im(1_X) \supseteq X$$

olup $dom(\rho) = im(\rho) = X$ dir.

Eğer ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı ise o zaman $(x, y) \in \rho$ yerine bazen $x \rho y$ veya $x \equiv y (\mathrm{mod}\, \rho)$ yazacağız. $\rho[x]$ kümesine ρ-sınıfı veya denklik sınıfı diyeceğiz. X/ρ notasyonu ile tüm denklik sınıflarının kümesini göstereceğiz.

$\rho^* : X \to X/\rho$ dönüşümünü, her $x \in X$ için $\rho^*(x) = \rho[x]$ olarak tanımlanır ve bu dönüşüme *doğal dönüşüm* denir.

Eğer $\Phi : X \to Y$ bir fonksiyon ise $\Phi^{-1} \circ \Phi$ kümesine Φ nin *çekirdeği* denir ve $ker\,\Phi$ ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa ρ bir denklik bağıntısı ise $ker\,\rho^* = \rho$ dur. Eğer $\{\rho_i : i \in I\}$, X üzerindeki denklik bağıntılarının boş olmayan bir ailesi ise $\cap \{\rho_i : i \in I\}$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. R, X üzerinde herhangi bir denklik bağıntısı ise R yi içeren denklik bağıntılarının bir ailesi boş değildir en azından $X \times X$ denklik bağıntısı vardır. Böylece X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X üzerinde R yi içeren tek en küçük denklik bağıntısıdır.

Kongrüanslar yarıgrup teoride en önemli kavramlardan biridir. Bu kavram grup teoride bölüm gruplarında yer alan normal alt grup kavramının eksikliğini karşılar.

S bir yarıgrup, R de S de bir bağıntı (yani $R \subseteq S \times S$) olsun. Eğer her $x, y, a \in S$ için

$$(x, y) \in R \Rightarrow (ax, ay) \in R$$

ise R ye *sol uyumlu*,

$$(x, y) \in R \Rightarrow (xa, ya) \in R$$

ise R ye *sağ uyumlu* denir. Her $a, b \in S^1$ için

$$(x, y) \in R \Rightarrow (axb, ayb) \in R$$

ise R ye *uyumlu* denir. Sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans*, uyumlu bir denklik bağıntısına da *kongrüans* denir.

Teorem 2.1.2. ρ bir S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun.

(i) Eğer $(x, \tilde{x}) \in \rho$ ve $(y, \tilde{y}) \in \rho$ ise o zaman $(xy, \tilde{x}\tilde{y}) \in \rho$ dur.

(ii) $a, b \in S$ için S/ρ üzerinde çarpmayı

$$\rho[a]\rho[b] = \rho[ab]$$

olarak tanımlayalım. S/ρ bu işlem ile bir yarıgrup ve $\rho^* : S \to S/\rho$ bir homomorfizmadır.

İspat. (i) $(x,\tilde{x})\in\rho$ ve $(y,\tilde{y})\in\rho$ olsun. ρ bir denklik bağıntısı olduğundan $(y,y)\in\rho$ dur. ρ uyumlu olduğundan $(xy,\tilde{x}y)\in\rho$ dur. Benzer şekilde $(\tilde{x}y,\tilde{x}\tilde{y})\in\rho$ olur. ρ geçişme özelliğine sahip olup $(xy,\tilde{x}\tilde{y})\in\rho$ dur.

(ii) $\big(\rho[a]\rho[b]\big)\rho[c]=\rho[a]\big(\rho[b]\rho[c]\big)$ olup S/ρ bu işlem ile bir yarıgruptur.

Ayrıca $\rho^*[a]=\rho[a]$ olarak tanımlarsak,

$$\rho^*[a]\rho^*[b]=\rho[a]\rho[b]=\rho[ab]=\rho^*[ab]$$

olup $\rho^*:S\to S/\rho$ bir homomorfizmadır. ■

2.2 Tüm Dönüşümler Yarıgrubu

Gruplarda bir kümenin permütasyonlarının grubu gibi yarıgruplarda da bir kümeden yine o kümenin kendisine daha genel dönüşümler kavramı vardır.

X ve Y iki küme olsun. X den Y ye bir fonksiyon $f(x)\in Y$ olmak üzere

$$f=\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}_{x\in X}$$

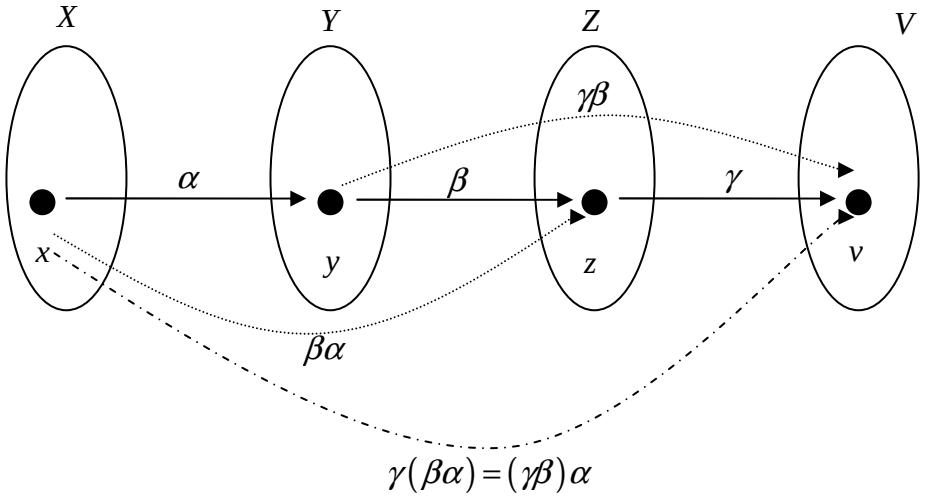
şeklindedir. Bu durum genelde $f:X\to Y$ şeklinde ifade edilir. $f(x)$ elemanlarına f fonksiyonunun x elemanları üzerindeki *değeri* denir. Daha önce bölümünde tanımlanan bir dönüşüm, bir kümeden o kümenin kendisine giden bir fonksiyondur. X,Y,Y',Z kümeleri için $Y\subseteq Y'$ olmak üzere $f:X\to Y$, $g:Y'\to Z$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının *çarpım* veya *bileşkesi* olan gf fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz: gf bileşkesi, $x\in X$ olmak üzere X den Z ye bir fonksiyondur ve $gf(x)=g\big(f(x)\big)$ şeklinde gösterilir. Özel olarak, aynı küme üzerindeki iki tam dönüşümün bileşkesini alabiliriz ve elde edilen bileşke de bir tam dönüşüm olur.

Yukarıdaki tanım kısmi fonksiyonlar için de bir genelleme sağlar. X den Y ye bir kısmi dönüşüm (fonksiyon), $X'\subseteq X$ olmak üzere $\alpha:X'\to Y$ şeklindedir. Bu

durumda α kısmi dönüşümü, X' kümesinin elemanları üzerinde tanımlıdır. Bazen bu gösterim yapılmadan α nın kısmi dönüşüm olduğu belirtilip $\alpha: X \to Y$ şeklinde de yazılabilir.

$\alpha: X \to Y$ ve $\beta: Y \to X$ iki kısmi dönüşüm olsun. Bu iki fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi olan $\beta\alpha$ kısmi dönüşümü α ve β sırasıyla x ve $\alpha(x)$ elemanları üzerinde tanımlı olmak üzere tüm $x \in X$ elemanları üzerinde tanımlıdır ve $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x))$ şeklindedir. Özel olarak, aynı küme üzerindeki iki kısmi dönüşümün bileşkesini alabiliriz ve sonuç aynı küme üzerinde yine bir kısmi dönüşüm olur. Sonuç olarak, tüm dönüşümlerin bileşke tanımının, kısmi dönüşümlerin bileşke tanımının bir özel durumu olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.2.1. (kısmi) Fonksiyonların bileşkesi birleşimlidir. Yani α, β ve γ kısmi dönüşümler olmak üzere $\gamma(\beta\alpha)$ bileşkesinin tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $(\gamma\beta)\alpha$ bileşkesinin tanımlı olmasıdır ve eğer ikisi de tanımlı ise $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ dır.



Gruplarda bir kümenin permütasyonlarının grubu gibi yarıgruplar da da bir kümeden yine o kümenin kendisine daha genel dönüşümler kavramı vardır. Bir X kümesindeki tüm permütasyonların simetrik grubu $(S_n,\circ)$ na benzer olarak, X ten X e tüm dönüşümlerin yarıgrubu $(T_X,\circ)$ vardır. Özel olarak $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ sonlu kümesi için tüm dönüşümler yarıgrubu $(T_n,\circ)$ şeklinde göstereceğiz. X ten X e tüm kısmi dönüşümlerin kümesine *kısmi dönüşümler yarıgrubu* denir ve $(PT_X,\circ)$ ile gösterilir. Benzer şekilde X sonlu ise $(PT_n,\circ)$ ile gösterilir. Yukarıda bahsedildiği gibi tüm bu yarıgruplarda işlem bileşke işlemi olup bu işlem birleşmelidir. $(S_n,\circ)$, X ten X e tüm birebir örten dönüşümleri içeriyor olup $(T_X,\circ)$ in alt yarıgrubudur (aynı zamanda alt grubudur.). Benzer şekilde $(T_X,\circ)$ de $(PT_X,\circ)$ in alt yarıgrubudur. $X = X_n = \{1,2,...,n\}$, $|X| = n$ ise

$$|S_n| = n!,\ |T_n| = n^n \text{ ve } |PT_n| = (n+1)^n$$

olduğu yukarıdaki fonksiyon tanımı ile ilişkili olarak düşünüldüğünde açıktır. Eğer S, tüm dönüşümler yarıgrubu T_n nin bir alt yarıgrubu ise S ye dönüşümler yarıgrubu veya dönüşümlerin yarıgrubu denir. Bir S yarıgrubundan T_n ye bir φ homomorfizmasına S nin temsili denir. Eğer φ birebir ise φ ye güvenilir temsil denir. Her durumda φ nin görüntüsü $S\varphi$ kümesi S ye izomorfik bir dönüşümler yarıgrubudur.

Aşağıdaki teorem gruplardaki Cayley teoremine benzer olup her yarıgrubun bir transformasyon yarıgrubuna izomorfik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.2.2. (Cayley Teoremi) Kardinalitesi n olan her sonlu S yarıgrubu ya T_n ya da T_{n+1} in bir altyarıgrubuna izomorfiktir.

İspat. İlk olarak S nin 1 birim elemanına sahip olduğunu kabul edelim. $S=\{a_1=1,a_2,...,a_n\}$ ve $k=1,2,...,n$ için i_k sayıları $aa_k=a_{i_k}$ eşitliği ile tek türlü tanımlı olmak üzere $\varphi: S \to T_n$ dönüşümünü

$$\varphi(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. $\varphi: S \to \varphi(S)$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Ayrıca $(ab)a_k=a(ba_k)$ olup her $k=1,2,...,n$ için $\varphi(ab)(k)=\varphi(a)(\varphi(b)(k))$ dir. Böylece her $a,b\in S$ için $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ olup φ bir izomorfizmdir. O halde φ, S den T_n nin bir altyarıgrubu $\varphi(S)$ ye bir izomorfizmadır. Eğer S bir birim eleman içermiyor ise, S yi S^1 yarıgrubunun bir altyarıgrubu olarak göz önüne alabiliriz. Bu durumda ise S^1, T_{n+1} in bir altyarıgrubuna izomorfiktir. ■

Birim dönüşümü

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterelim. Eğer n nin varlığı içerikten anlaşılır ise I_n yerine I kullanırız.

Önerme 2.2.3. I_n dönüşümü T_n ve PT_n yarıgruplarının birim elemanıdır. Buna ek olarak T_n ve PT_n birer monoiddir.

Teorem 2.2.4. $\alpha,\beta\in PT_n$ için aşağıdakiler doğrudur.

i) $dom(\beta\alpha)\subset dom(\alpha)$

ii) $im(\beta\alpha) \subset im(\beta)$

iii) $rank(\beta\alpha) = \min(rank(\alpha), rank(\beta))$.

İspat. $\alpha : X \to Y$ ve $\beta : Y \to Z$ kısmi dönüşümlerini ele alalım. Bu iki dönüşümün bileşke dönüşümü $\beta\alpha : X \to Z$ şeklindedir.

$\beta\alpha$ nın tanım kümesindeki tüm elemanların, α nın tanım kümesi tarafından kapsandığı aşikardır. Bu durumda $dom(\beta\alpha) \subseteq dom(\alpha)$ dır. Aynı şekilde $\beta\alpha$ nın görüntü kümesindeki elemanlar da β nın görüntü kümesi tarafından kapsanır ve $im(\beta\alpha) \subseteq im(\beta)$ dır. $\alpha, \beta \in T_3$ için $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ alınırsa $\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ olur.

$rank(\alpha) = 2$ ve $rank(\beta) = 3$ olmak üzere $rank(\beta\alpha) = \min(2,3) = 2$ dir. ■

Önerme 2.2.5. $\alpha \in T_n$ veya $\alpha \in PT_n$ olsun. α nın tersinir olması için gerek ve yeter koşul α nın $\mathbf{N}$ de bir permutasyon olmasıdır.

İspat. α tersinir olsun. $\alpha\beta = \beta\alpha = I$ olacak şekilde bir β (kısmi) dönüşümü vardır. $dom(I) = \mathbf{N}$ dir. Bu durumda Teorem 2.2.4 (i) den $dom(\alpha) = \mathbf{N}$ dir. Ayrıca, $x, y \in \mathbf{N}$, $x \neq y$ ise $I(x) \neq I(y)$ dir. Bu durumda $\alpha(x) = \alpha(y)$ olamaz. Aksi halde $\alpha(x) = \alpha(y)$ olsa $I(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(y)) = I(y)$ çelişki elde edilir. Böylece α birebir ve örten olup bir permutasyondur.

Tersine,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

bir permutasyon olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

elemanı da bir permutasyon ve $\alpha\beta = \beta\alpha = I$ olup α tersinirdir. ■

N üzerindeki 0_n kısmi dönüşümü $0_n : \varnothing \to \mathbf{N}$ şeklinde olup $dom(\alpha) = \varnothing$ dir. Eğer n nin varlığı içerikten anlaşılıyor ise 0_n yerine 0 kullanılır.

Önerme 2.2.6. 0_n, PT_n yarıgrubunun sıfır elemanıdır.

İspat. $\alpha \in \Pi T_n$ için $\alpha 0_n = 0_n \alpha = 0_n$ olduğu aşikardır. ■

Herhangi bir $a \in X_n = \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere

$$\alpha_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix}$$

elemanına *sabit eleman* denir.

Önerme 2.2.7. $n > 1$ *için* T_n in sağ sıfır elemanı yoktur. $\alpha \in T_n$ nın bir sol sıfır olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $a \in X_n = \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere

$$\alpha_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix}$$

olmasıdır. Buna ek olarak, T_n yarıgrubunun n tane sol sıfırı vardır.

İspat. $a \in X_n = \{1,2,...,n\}$ olmak üzere $\alpha_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a & a & ... & a \end{pmatrix}$ ile gösterelim. Herhangi bir $\beta \in T_n$ için $\alpha_a \beta(x) = \alpha_a(x)$ olduğundan α_a, T_n in sol sıfırdır. Bu yüzden T_n en azından *n* tane sol sıfır içerir. Özellikle, *n* > 1 için T_n yarıgrubu sağ sıfır içermez.

Sabit dönüşümler rankı 1 olan dönüşümlerdir. $\beta \in T_n$ elemanının rankı en az 2 olsun. Herhangi bir $\alpha_a \in T_n$ için $\beta\alpha_a$ nın rankı 1 olup $x \in X_n$ için $\beta\alpha_a(x) = \beta(x)$ olması imkânsızdır. O halde rankı 2 olan sabit dönüşüm sol sıfır eleman olamaz. O halde T_n nin n tane sol sıfır elemanı vardır. ■

T_1 yarıgrubu yalnızca birim elemandan oluşup bu eleman aynı zamanda sıfır elemandır.

2.3 İdealler

S nin boştan farklı A alt kümesi $SA \subseteq A$ koşulunu sağlıyorsa A ya sol ideal, $AS \subseteq A$ koşulunu sağlıyorsa A ya sağ ideal ve hem sağ hem de sol ideal ise A ya (iki-yanlı) ideal denir. Her ideal (sağ veya sol veya iki-yanlı ideal) bir alt yarıgruptur fakat bunun tersi doğru değildir. İdeallere örnek olarak S nin kendisi ve (eğer S sıfır elemana sahip ise) $\{0\}$ kümesini verebiliriz. Bir I ideali $\{0\} \subset I \subset S$ koşulunu sağlıyorsa I ya *öz ideal* denir.

Örnek 2.3.1. T_n yarıgrubunun $1 \le r \le n$ olmak üzere her

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \le r\}$$

alt kümesi bir idealdir.

Örnek 2.3.2. G bir grup ise G nin tek ideali kendisidir. Gerçekten de I bir ideal ise $i \in I$ elemanını alalım. Herhangi bir $g \in G$ için $g = gi^{-1}.i \in I$ olup $I = G$ dir.

Teorem 2.3.3. S bir yarıgrup, X de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$S^1X = \{sx : s \in S^1, x \in X\}$$

kümesi X kümesini içeren S nin en küçük sol idealidir. Benzer şekilde

$$XS^1 = \{xs : s \in S^1, x \in X\}$$

$$S^1XS^1 = \{sxt : s,t \in S^1, x \in X\}$$

kümeleri sırasıyla X kümesini içeren S nin en küçük sağ ve iki yanlı idealidir.

İspat. Sadece ilk küme için ispatı yapalım diğerleri de benzer şekilde ispatlanır. Herhangi $sx \in S^1X$ ve $t \in S$ için

$$t(sx) = (ts)x \in S^1X$$

olup S^1X sol idealdir ve X kümesini içerir. I, X kümesini içeren herhangi bir ideal olsun. O zaman herhangi $s \in S^1$ ve $x \in X$ için $sx \in I$ olup $S^1X \subseteq I$ dir. ■

2.4. Ranklar

S bir yarıgrup $\langle A|R\rangle$ de S yarıgrubu için bir takdim olsun. S nin rankı

$$rank(S) = \min\{|A| : S \cong \langle A|R\rangle\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.4.1. $\{1,2,...,n\}$ kümesi üzerindeki bir σ permutasyonu $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ şeklindeki birebir örten dönüşüm olarak tanımlansın. Ayrıca S_n ile gösterilen $G_{\{1,2,...,n\}}$ simetrik grubu bu şekildeki permutasyonlardan oluşmaktadır. Grup teoride gösterildiği üzere her permutasyon ayrık devirlerin çarpımı şeklinde ifade edilebilir. ($\{1,2,...,n\}$ kümesinin farklı elemanları $a_1,a_2,...,a_k$ olmak üzere $(a_1\,a_2\,...a_k)$ şeklinde yazılan ve

$$a_i\phi=a_{i+1}\ \ (i=1,2,...,k-1),\quad a_k\phi=a_1,\quad x\phi=x\ \ (x\notin\{a_1,a_2,...,a_k\})$$

ile tanımlı bir ϕ fonksiyonuna *devir;* eğer $\{a_1,a_2,...,a_k\}$ ve $\{b_1,b_2,...,b_l\}$ kümeleri ayrık ise $(a_1\,a_2\,...a_k)$ ve $(b_1\,b_2\,...b_l)$ devirlerine de *ayrık* denir.) Uzunluğu 2 olan $(a_1\,a_2)$ şeklindeki bir devire *transpozisyon* denir. Trivial durumları önlemek için $n\geq 3$ kabul edilir.

(a) $k\geq 3$ ise

$$(a_1\,a_2\,...a_k)=(a_1\,a_2)\,o\,(a_1\,a_3)\,o\,L\ o\,(a_1\,a_k)$$

olduğunu ve S_n in tüm transpozisyonlar tarafından üretildiğini gösterelim.

Tanımdaki ϕ fonksiyonuna benzer olarak,

$(a_1\,a_2)$ için $a_1\phi_2=a_2$, $a_2\phi_2=a_1$, $x\phi_2=x$, $(x\neq a_1,a_2)$ olacak şekilde bir ϕ_2 fonksiyonu vardır.

$(a_1\,a_3)$ için $a_1\phi_3=a_3$, $a_3\phi_3=a_1$, $x\phi_3=x$, $(x\neq a_1,a_3)$ olacak şekilde bir ϕ_3 fonksiyonu vardır.

M

$(a_1\, a_k)$ için $a_1\phi_k = a_k$, $a_k\phi_k = a_1$, $x\phi_k = x$, $(x \neq a_1, a_k)$ olacak şekilde bir ϕ_k fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$a_1\phi_2\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_1\phi_2)\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_2\phi_3)\mathrm{K}\ \phi_k = \mathrm{L}\ = a_2\phi_k = a_2$$
$$a_2\phi_2\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_2\phi_2)\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_1\phi_3)\mathrm{K}\ \phi_k = a_3\phi_4\mathrm{K}\ \phi_k = \mathrm{L}\ = a_3\phi_k = a_3$$
$$\mathrm{M}$$
$$a_k\phi_2\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_k\phi_2)\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = (a_k\phi_3)\mathrm{K}\ \phi_k = \mathrm{L}\ = a_k\phi_k = a_1$$

ve $x \neq a_1, a_2, ..., a_k$ için $x\phi_2\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k = x$ olup $\phi = \phi_2\phi_3\mathrm{K}\ \phi_k$ alınırsa

$$(a_1\, a_2 \ldots a_k) = (a_1\, a_2)\,\mathrm{o}\,(a_1\, a_3)\,\mathrm{oL}\ \mathrm{o}\,(a_1\, a_k)$$

elde edilir.

Her permutasyon ya devirdir ya da ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazılır. Buna göre her permutasyon $(a_1\, a_2 \ldots a_k)$ veya $(a_1\, a_2 \ldots a_k)\,(b_1\, b_2 \ldots b_l)$ formundadır.

$$(a_1\, a_2 \ldots a_k) = (a_1\, a_k)\mathrm{K}\ (a_1\, a_2)$$
$$(a_1\, a_2 \ldots a_k)(b_1\, b_2 \ldots b_l) = (a_1\, a_k)\mathrm{K}\ (a_1\, a_2)(b_1\, a_l)\mathrm{K}\ (b_1\, b_2)$$

dır. Dolayısıyla S_n tüm transpozisyonlar tarafından üretilir.

(b) $\tau = (12)$ ve $\zeta = (12\mathrm{K}\ n)$ devirleri için aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösterelim.

- $\zeta^{-1} = \zeta^{n-1}$

$\zeta^{-1} = (n\ n-1\mathrm{K}\ 3\ 2\ 1)$ dir.

$\zeta^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathrm{L} & n \\ n & 1 & \mathrm{L} & n-1 \end{pmatrix}$ ve $\zeta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathrm{L} & n \\ n & 1 & \mathrm{L} & n-1 \end{pmatrix}$ olduğundan $\zeta^{-1} = \zeta^{n-1}$ dir.

- $\zeta^{-1} \text{o} \tau \text{o} \zeta = (23)$

$$\begin{aligned}\zeta^{-1} \text{o} \tau \text{o} \zeta &= (n\ n-1 \text{K}\ 321) \text{o} (12) \text{o} (12 \text{K}\ n-1\ n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \text{L} & n-1 & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \text{L} & n-1 & n \end{pmatrix} \\ &= (23)\end{aligned}$$

- $\zeta^{-i+1} \text{o} \tau \text{o} \zeta^{i-1} = (i\ i+1)\ (i = 1,2,\text{K}\ ,n-1)$

i üzerinden tümevarım yöntemi uygulayalım.

$i = 2$ için $\zeta^{-1} \text{o} \tau \text{o} \zeta = (23)$ durumu yukarıda gösterildi.

$i = n-2$ için eşitlik sağlansın. Yani $\zeta^{-n+3} \text{o} \tau \text{o} \zeta^{n-3} = (n-2\ n-1)$ olsun.

$i = n-1$ için $\zeta^{-n+2} \text{o} \tau \text{o} \zeta^{n-2} = (n-1\ n)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\zeta^{-n+3} \text{o} \tau \text{o} \zeta^{n-3} &= \zeta^{-1} \text{o} \zeta^{-n+3} \text{o} \tau \text{o} \zeta^{n-3} \text{o} \zeta = \zeta^{-1} \text{o} (n-2\ n-1) \text{o} \zeta \\ &= (n\ n-1\ n-2 \text{K}\ 3\ 2\ 1) \text{o} (n-2\ n-1) \text{o} (1\ 2\ 3 \text{K}\ n-2\ n-1\ n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{L} & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{L} & n-2 & n & n-1 \end{pmatrix} \\ &= (n-1\ n)\end{aligned}$$

- $(j\ j+1) \text{o} (j-1\ j) \text{oL}\ \text{o} (23) \text{o} (12) \text{o} (23) \text{oL}\ \text{o} (j\ j+1) = (1\ j+1)$

$(j = 2,3,\text{K}\ ,n-1)$

j üzerinden tümevarım yöntemi uygulayalım.

j = 2 için

$$(23)\,o\,(12)\,o\,(23)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & L & n-1 & n\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & L & n-1 & n\end{pmatrix}=(13)$$

$j=n-2$ için eşitlik sağlansın. Bu durumda

$$(n-2\ n-1)\,o\,(n-1\ n)\,oL\ o\,(23)\,o\,(12)\,o\,(23)\,oL\ o\,(n-2\ n-1)=(1\ n-1)$$

dir.

$j=n-1$ için

$$(n-1\ n)\,o\,(n-2\ n-1)\,oL\ o\,(23)\,o\,(12)\,o\,(23)\,oL\ o\,(n-1\ n)=(1\ n)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}&(n-1\ n)\,o\,(n-2\ n-1)\,oL\ o\,(23)\,o\,(12)\,o\,(23)\,oL\ o\,(n-1\ n)\\ &\quad=(n-1\ n)\,o\,(1\ n-1)\,o\,(n-1\ n)\\ &\quad=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & L & n-2 & n-1 & n\\ n & 2 & 3 & 4 & L & n-2 & n-1 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad=(1n)\end{aligned}$$

- $\zeta^{-i+1}\,o\,(1\ j+1)\,o\,\zeta^{i-1}=(i\ i+j),\ (i=1,2,K\ ,n-1,\ \ j=1,2,K\ n-i)$

$i=2$ için

$$\begin{aligned}\zeta^{-i}\,o\,(1\ j+1)\,o\,\zeta^{1}&=(n\ n-1K\ 3\ 2\ 1)\,o\,(1\ j+1)\,o\,(1\ 2\ 3K\ n-1\ n)\\ &=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & L & j-1 & j & j+1 & j+2 & L & n-1 & n\\ 1 & j+2 & 3 & 4 & L & j-1 & j & j+1 & 2 & L & n-1 & n\end{pmatrix}\\ &=(2\ j+2)\end{aligned}$$

$i=n-2$ için $\zeta^{-n+3}\,o\,(1\ j+1)\,o\,\zeta^{n-3}=(n-2\ n-2+j)$ olsun. $(j=1,2)$

$i=n-1\ (j=1)$ için

$$\zeta^{-n+2}\,o\,(1\ j+1)\,o\,\zeta^{n-2}=\zeta^{-n+2}\,o\,(1\ 2)\,o\,\zeta^{n-2}=(n-1\ n)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$i = n-2$ için eşitlik var olup $j = 1$ alınırsa $\zeta^{-n+3} \circ (1\ 2) \circ \zeta^{n-3} = (n-2\ n-1)$ olur.

$$\begin{aligned}\zeta^{-n+3} \circ (1\ 2) \circ \zeta^{n-3} &= \zeta^{-1} \circ \zeta^{-n+3} \circ (1\ 2) \circ \zeta^{n-3} \circ \zeta \\ &= (n \text{K } 3\ 2\ 1) \circ (n-2\ n-1) \circ (1\ 2\ 3 \text{K } n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \text{L} & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \text{K} & n-2 & n & n-1 \end{pmatrix} \\ &= (n-1\ n)\end{aligned}$$

$S_n = \langle (1,2), (1,2,...,n) \rangle$ ve $T_n = \langle (1,2), (1,2,...,n), \|1,2\| \rangle$ olduğunu biliyoruz. Üstelik bu doğuray kümeleri minimum elemana sahip doğuray kümeleri olup

$$rank(S_n) = 2 \text{ ve } rank(T_n) = 3$$

dir.

S bir yarıgrup, V de S nin bir alt yarıgrubu olsun. S de V nin *relative rankı* $r(S:V)$,

$$r(S:V) = \min\{|G| : G \subseteq S \text{ ve } \langle V \cup G \rangle = S\}$$

olarak tanımlanır.

S bir yarıgrup T de S nin bir alt kümesi $K = S/T$ olsun. S nin *contingent rankı* $cont(S)$,

$$cont(S) = \min\{|G| : G \subseteq T \text{ ve } \langle G \cup K \rangle = S\}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa $K = S_n$ olarak alınırsa $cont(T_n) = 1$ olduğu görülür.

2.5. Green Denklik Bağıntıları

Green bağıntıları ile düzgün bloklar ve bu bloklar arasındaki ilişki sayesinde bir yarıgrubun yapısını analiz edebiliriz.

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup olsun. $x, y \in S$ iki elemanı S nin aynı sol idealini doğuruyorsa $x, y \in S$ iki elemanına $\mathcal{L}$-bağlantılıdır denir. Yani $S^1x = S^1y$ olması için gerek ve yeter koşul $s,t \in S^1$ için $sx = y$ ve $ty = x$ olmasıdır. Bu durumda $x \ \mathcal{L}\ y$ veya $(x, y) \in \mathcal{L}$ şeklinde yazarız. Benzer şekilde $x, y \in S$ iki elemanı S nin aynı sağ idealini doğuruyorsa $x, y \in S$ iki elemanına $\mathcal{R}$-bağlantılıdır denir. Yani $xS^1 = yS^1$ olması için gerek ve yeter koşul $s,t \in S^1$ için $xs = y$ ve $yt = x$ olmasıdır. Bu durumda $x \mathcal{R} y$ veya $(x, y) \in \mathcal{R}$ şeklinde yazarız.

Tüm dönüşümler yarıgrubu T_n de $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$-bağlantılı olması aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.5.2. $\alpha, \beta \in T_n$ dönüşümlerinin $\mathcal{L}$-bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $im\alpha = im\beta$ ve $\mathcal{R}$-bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $\ker\alpha = \ker\beta$ olmasıdır.

İspat. $\alpha \ \mathcal{L}\ \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \gamma\beta$ ve $\beta = \delta\alpha$ olacak şekilde $\delta, \gamma \in T_n$ vardır. O zaman $im\alpha = im(\gamma\beta) \subseteq im\beta$ ve benzer şeklide $im\beta \subseteq im\alpha$ olup $im\alpha = im\beta$ dir. Tersine $im\alpha = im\beta = I$ olduğunu kabul edelim. Her $i \in I$ için $a_i\alpha = b_i\beta = i$ olacak şekilde $a_i, b_i \in I$ seçelim. μ ve ν dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x\mu = a_i \Leftrightarrow x\beta = i$$
$$x\nu = b_i \Leftrightarrow x\alpha = i$$

Böylece $\mu\alpha = \beta$ ve $\nu\beta = \alpha$ olup $\alpha \ \mathcal{L}\ \beta$ olduğu ispatlanmış olur.

$\alpha \ \mathcal{R}\ \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \beta\gamma$ ve $\beta = \alpha\delta$ olacak şekilde $\delta, \gamma \in T_n$ vardır. $(x, y) \in \ker\alpha$ için $x\alpha = y\alpha$ dir. Böylece

$$x\beta = x\alpha\delta = y\alpha\delta = y\beta$$

olup $(x, y) \in \ker\beta$ dir. Yani $\ker\alpha \subseteq \ker\beta$ olduğu gösterilmiş olur. Simetriden dolayı $\ker\beta \subseteq \ker\alpha$ olup $\ker\beta = \ker\alpha$ ispatlanmış olur.

Tersine $\ker\beta = \ker\alpha = \pi$ olsun. π nin denklik sınıflarının sayısı $im\alpha = J$ nin eleman sayısına eşittir. Bu da $im\beta = K$ olup bu sayıyı q ile gösterelim. π nin her bir denklik sınıfından bir $p_i\,(i = 1, 2, ..., q)$ seçelim. $j_i = p_i\alpha$ ve $k_i = p_i\beta$ olmak üzere $J = \{j_1, ..., j_q\}$ ve $K = \{k_1, ..., k_q\}$ olsun. μ ve ν dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$j_i\mu = k_i\,(i = 1, ..., q),\ x \notin J \text{ ise } x\mu = \text{rastgele tanımlansın.}$$

$$k_i\nu = j_i\,(i = 1, ..., q),\ x \notin I \text{ ise } x\nu = \text{rastgele tanımlansın.}$$

$\alpha\mu = \beta$ dir. Herhangi bir $x \in \{1, ..., q\}$ ve $(x, p_i) \in \pi$ olacak şekildeki tek p_i temsili olsun. O zaman $x\alpha\mu = p_i\alpha\mu = j_i\mu = k_i = p_i\beta = x\beta$ dir. Benzer şekilde $\beta\nu = \alpha$ olduğu gösterilip $\alpha\ \mathcal{R}\ \beta$ ispatlanmış olur. ■

3. DÖNÜŞÜMLERİN ÇARPANLARA AYRILMASI

Bu bölümde dönüşümlerin üç farklı çarpanlara ayırma yöntemlerini ve bu yöntemlerin nasıl uygulandığını göstereceğiz.

3.1. Dönüşümlerin Grafiği ve GM Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma

Bu bölümde Ganyushkin ve Mazorchuk tarafından tanımlanan tekniği tanımlayıp uygulamalarını göreceğiz. Ganyushkin ve Mazorchuk tarafından tanımlanan tekniği kısaca GM yöntemi olarak yazacağız.

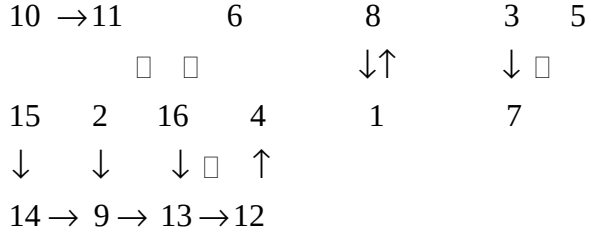
N deki her α kısmi dönüşümü bir Γ_α yönlü grafiği ile gösterilir. Bu yönlü grafik V bir küme ve $E \subset V \times V$ olmak üzere $\Gamma = (V, E)$ şeklinde bir ikilidir. V nin elemanlarına Γ nın *köşeleri* ve E nin elemanlarına Γ nın *yönlü kenarları* veya *okları* denir. $(a,b) \in E$ ise a ya (a,b) nin *kuyruğu*, b ye de (a,b) nin *başı* denir.

$\Gamma_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ grafiğine α *dönüşümlerinin grafiği* denir ve aşağıdaki yolla oluşturulur: Köşelerin kümesi olan V_α nın **N** ile çakışması ve $x, y \in \mathbf{N}$ için $(x, y) \in E_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ ve $\alpha(x) = y$ olmasıdır.

Örnek 3.1.1.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 7 & 13 & 7 & 16 & \varnothing & 1 & 13 & 11 & 16 & 4 & 12 & 9 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün Γ_α grafiği aşağıdaki gibidir:



(3.1)

$\Gamma=(\mathbf{N},E)$ yönlü grafiğinin **N** nin bir tam (kısmi) dönüşümlerinin grafiği olması için gerek ve yeter şart her köşenin bir (en fazla bir) kenarın kuyruğu olmasıdır. Γ_α grafiği bağlantılı bileşenlerin ayrık birleşimlerinden oluşur. Örneğin (3.1) grafiğinde üç tane bağlantılı bileşen vardır. Daha dar bir tanımını vermeden önce altgrafik tanımını vermeliyiz.

Tanım3.1.2. $\Gamma=(V,E)$ bir yönlü grafik olsun. $V\subset V'$ ve $E\subset E'$ olacak şekilde bir $\Gamma'=(V',E')$ yönlü grafiğine $\Gamma=(V,E)$ nin *altgrafiği* denir.

Tanım 3.1.3. olsun. V nin boştan farklı ayrık kümeler V_1 ve V_2 ye her parçalanışı için ki (a,b) ya da (b,a) bir kenar olacak şekilde $a\in V_1$ ve $b\in V_2$ varsa $\Gamma=(V,E)$ yönlü grafiğine *bağlantılı* denir.

Γ bir yönlü grafik ise Γ nın *bağlantılı bileşenleri*, Γ nın *maksimal bağlantılı* altgrafiğidir. Yani Γ nın bu bağlantılı altgrafikleri, Γ diğer bağlantılı altgrafiklerinin bir alt grafiği değildir.

Γ_α nın yapısını anlamak için onun bağlantılı bileşenlerinin yapısını anlamak yeterlidir. Bunun için daha fazla grafik terminolojili kavrama ihtiyaç duyacağız.

Tanım 3.1.4. $\Gamma=(V,E)$ bir yönlü grafik ve $a,b\in V$ olsun. Her $i=0,1,\ldots,k-1$ için $(x_i,x_{i+1})\in E$ olmak üzere $x_0=a,x_1,\ldots,x_k=b$ olacak şekildeki köşelerin bir dizisine Γ da a dan b ye *yönlü patika* denir. a köşesine patikanın *kuyruğu*, b köşesine de patikanın *başı* denir.

Tanım 3.1.5. $\Gamma=(V,E)$ bir yönlü grafik olsun. Her $0\le i<j<k$ için $a=b$ ve $x_i\neq x_j$ olacak şekilde bir yönlü patika varsa bu tür patikalara *(yönlü) devir* denir ve $(x_0,x_1,\ldots,x_{k-1})$ ile gösterilir.

Eğer $\Gamma=(V,E)$ yönlü grafiğinde kuyruğu b olan hiçbir kenar yoksa bu patikaya b ile *kesilir* diyeceğiz. Benzer olarak sınırsız patikalar tanımlayabiliriz. Bu patikalarda kuyruk olmayabilir, baş olmayabilir ya da her ikisi birden olmayabilir.

Γ bir yönlü grafik ve v, Γ nın bir köşesi olsun. Kuyruğu v olan mümkün en uzun patikaya v nin *rotası* denir. Burada iki durum söz konusudur. Ya rota sonludur yani bir noktada kesilir ya da rota sonsuzdur. Örneğin (3.1) grafiğinde 5 noktasının rotası 5, 7 dir ve 7 noktasında kesilir ve 2, 9, 13, 12, 4, 13, 12, 4, 13, . . . ise 2 noktasının rotasıdır. Genel olarak, bir noktanın birçok farklı rotası olabilir. Ancak şöyle bir durum vardır:

Lemma 3.1.6. Γ bir yönlü grafik olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) Γ daki her köşenin yalnız bir rotası vardır.

(ii) Γ daki her köşe en fazla bir kenarın kuyruğudur.

Her $i \geq k$ için $x_i = x_{i+m}$ ve $x_{k-1} = x_{k+m-1}$ olmak üzere $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}$ patikası bir devir ise, $x_0 = v, x_1, \ldots$ sonsuz rotası $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1})$ devirinde *sonlanır* diyeceğiz.

Önerme 3.1.7. $\alpha \in \mathrm{PT}_m$ olsun.

(i) Γ_α nın her köşesinin yalnız bir rotası vardır.

(ii) Γ_α daki her $x \in \mathbf{N}$ in rotası ya bir noktada ya da bir devirde sonlanır.

(iii) $\alpha \in T_n$ olması için gerek ve yeter şart Γ_α daki her $x \in \mathbf{N}$ in rotasının bir devirle sonlanmasıdır.

(iv) $x, y \in \mathbf{N}$ olsun. Eğer y, Γ_α daki x in rotasında ise, y nin rotası x in rotasının bir altdizisidir.

İspat: Γ_α daki her köşe en fazla bir kenarın kuyruğu olduğundan (i), Lemma 3.1.6. den ispatlanır. (iv) ün ispatı da (i) den aşikârdır.

(ii) $x = x_0, x_1, \ldots$ olan x in rotasının kesilmediğini varsayalım. Γ_α sonlu olduğundan bu rota bazı köşelerin tekrarlamalarını içerir. k, x_k nın minimum tekrarlaması ve x_{k+m}, x_k nın ilk tekrarlaması olsun. Γ_α daki her köşe en fazla bir kenarın kuyruğu olduğundan $x_k = x_{k+m} \Rightarrow x_{k+1} = x_{k+m+1} \Rightarrow x_{k+2} = x_{k+m+2}$ olup böylece devam eder. Bu durumda rota $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1})$ deviri ile sonlanır. Böylece (ii) ispatlanır.

$\alpha \in T_n$ ise köşelerin rotası kesilemez. Böylece (ii) nin sonucu olarak , (iii) ispatlanmış olur. ■

$\alpha \in \mathrm{PT}_m$ ve $x \in \mathbf{N}$ için Γ_α daki x in rotası $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ ile gösterelim. $\mathrm{tr}_\alpha(x)$, Önerme 3.1.7. (i) den iyi tanımlıdır. $\mathbf{N}$ deki ω_α bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır. $x, y \in \mathbf{N}$ için

$$x \omega_\alpha y \Leftrightarrow \mathrm{tr}_\alpha(x) \text{ ve } \mathrm{tr}_\alpha(y) \text{ de en az bir ortak köşe vardır.}$$

Lemma 3.1.8. ω_α bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. ω_α nın yansımalı ve simetrik olduğu açıktır. ω_α nın geçişmeli olduğunu ispatlayalım. $x, y, z \in \mathbf{N}$ için $x \omega_\alpha y$ ve $y \omega_\alpha z$ olsun. a noktası, $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ ve $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ nin ortak köşesi, b noktası $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ ve $\mathrm{tr}_\alpha(z)$ nın ortak köşesi olsun. Genelliği bozmadan a noktasının $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ de ilk ortaya çıkışının, $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ de b noktasının ilk ortaya çıkışından sonra olmadığını varsayalım. Ancak bu durumda Önerme 3.1.7. (iv) den b noktası $\mathrm{tr}_\alpha(a)$ dadır. Ayrıca Önerme 3.1.7. (iv) den b noktasının $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ de olduğu da söylenebilir. Dolayısıyla $x \omega_\alpha z$ olup istenilen ispatlanmış olur. ■

ω_α nın denklik sınıflarına α nın *yörüngeleri* (orbit) denir. $x \in \mathbf{N}$ için Γ_α da x in yörüngelerini $o_\alpha(x)$ ile göstereceğiz. ω_α nın tanımından herhangi $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$

için $x\omega_\alpha\alpha(x)$ dir. Bu yüzden $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ deki tüm köşeler $o_\alpha(x)$ de aittir. Ayrıca her $x\in \mathbf{N}$ için α kısmi dönüşümünü $K=o_\alpha(x)$ yörüngesine kısıtlayabiliriz. Böylece yeni bir $\alpha^{(K)}\in \mathrm{PT}(o_\alpha(x))$ kısmi dönüşümü elde edilir. Dolayısıyla $\alpha^{(K)}$ dönüşümü K dan seçilen köşelere bağlı değildir.

Önerme 3.1.9. Her $x\in \mathbf{N}$ için $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ grafiği, Γ_α nın bağlantılı bileşenlerinden biridir.

İspat. ω_α nın tanımından $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ bağlantılıdır. Kuyruğu ve başı K ya ait olan Γ_α daki tüm kenarları $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ içerir. $x\in K$ olmak üzere (x,y), Γ_α da bir kenar olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y\in \mathrm{tr}_\alpha(x)$ ve dolayısıyla $x\omega_\alpha y$ olup $y\in K$ dır. $y\in K$ olmak üzere (x,y), Γ_α da bir kenar ise bu durumda da $y\in \mathrm{tr}_\alpha(x)$ ve $x\omega_\alpha y$ vardır, öyle ki $x\in K$ dır. Bu ise, Γ_α nın hiçbir bağlantılı altgrafiğinin $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ yı öz alt grafiği olarak içermeyip istenilen ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3.1.10. $K\to\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ dönüşümü, α nın yörüngeleri ve Γ_α nın bağlantılı bileşenleri arasında birebir ve örtendir.

Tanım 3.1.11. Bir $\Gamma=(V,E)$ yönlü grafik olsun. Her $x\in V$ için x in Γ daki rotası tek ve $a\in V$ de kesiliyor ise Γ ya *batığı* a olan bir *ağaç* denir. Örnek (3.1.1.) de $K=o_\alpha(3)$ için $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ bağlantılı bileşeni, batığı 7 olan bir ağaçtır. Batığı olan ağaçların ayrık birleşimlerine *orman* denir.

Tanım 3.1.12. $\Gamma=(V,E)$ yönlü grafiğine $V=\{a_1,\ldots,a_k\}$ ve $E=\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{k-1},a_k),(a_k,a_1)\}$ ise bir *devir* denir.

$\Gamma_i = (V_i, E_i), i \in I$, yönlü grafiklerinin *birleşimi* $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$, $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ ve $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ olmak üzere $\Gamma = (V, E)$ şeklinde tanımlıdır. Örneğin, her yönlü grafik, bağlantılı bileşenlerinin bir birleşimidir.

Teorem 3.1.13. $\alpha \in \mathrm{PT}_m$ olsun. Γ_α nın her bağlantılı bileşeni,

(i) Ya bir batığı olan bir ağaçtır,

(ii) Ya da tüm batıkları kümesi üzerinde bir deviri olan ağaçların ormanının bir birleşimidir.

Teorem 3.1.13. (ii) de ormanın, bir batığı olan yalnız bir ağacı kapsayabileceğini belirttik. Batığında deviri olan bu ağacın birleşimi, artık bir batığı olan bir ağaç değildir. Ayrıca Teorem 3.1.13. (ii) de sözü edilen ormanda, batıkları olan *trivial* ağaçlar olabilir, öyle ki bu ağaçlar sadece batıklardan meydana gelmiştir. Eğer ormandaki tüm ağaçlar trivial ise, Teorem 3.1.13. (ii) bir devir tanımlar.

İspat. $\alpha \in \mathrm{PT}_m$ ve $\Gamma_{\alpha^{(K)}} = (K, E_K)$ da, Γ_α nın bir bağlantılı bileşeni ve $x \in K$ olsun. Lemma 3.1.6. ve Önerme 3.1.7. (i) den x in Γ_α ve $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ da tek bir rotası vardır. Ayrıca K, Γ_α nın bir bağlantılı bileşeni oluğundan x in Γ_α ve $\Gamma_\alpha{}^{(K)}$ daki rotası çakışır (dolayısıyla her ikisi de $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ e eşittir).

İlk olarak $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ in bir a köşesinde kesildiğini kabul edelim. $y \in K$ herhangi bir eleman olsun. Tanımdan $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ ve $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ nin z gibi ortak bir köşesi vardır. Bu durumda $\mathrm{tr}_\alpha(z)$, $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ ve $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ nin bir altdizisidir. Ancak $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ bir a köşesinde kesildiğinden $\mathrm{tr}_\alpha(z)$ de a köşesinde kesilmelidir. Bu durumda $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ de a köşesinde kesilir. Dolayısıyla $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$, batığı a olan bir ağaçtır. Bu da teoremin ilk kısmını ispatlamış olur.

Şimdi $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ in bir $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ deviri ile sonlandığını kabul edelim. Her a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ için, a_i nin rotaları Önerme 3.1.7. (i) den tektir ve bu nedenle

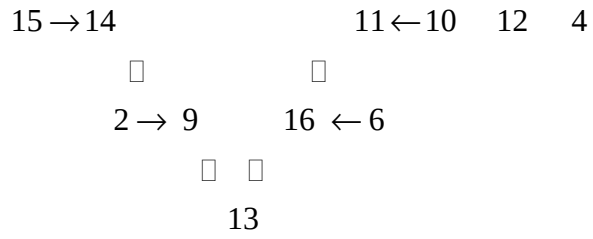
$a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_1, \ldots$ şeklindedir. Her $y \in K$ için $\mathrm{tr}_\alpha(y)$, $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ ile ortak bir altdiziye sahiptir, dolayısıyla bazı a_i leri içermek zorundadır. $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ rotasındaki $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ devirinin ilk köşesi a_i olmak üzere *K* daki y nin köşelerinin kümesini her $i = 1, 2, \ldots, k$ için K_i ile gösterelim. Tanımdan $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \varnothing$ dir.

Her bir $i \neq j$ için $x \in K_i$ ve $y \in K_j$ olmak üzere (*x*,*y*), $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ da bir kenar olsun. $y, y_1, \ldots$ köşeleri y nin rotasında olmak üzere $x, y, y_1, \ldots$ köşeleri x in rotasındadır. Ancak $\mathrm{tr}_\alpha(x)$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ devrindeki ilk elemanı a_i ve $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ nin ilk elemanı a_j olmak üzere $a_i \neq a_j$ dir. Bu ancak $x = a_i$ ve $y = a_j$ durumunda mümkündür. $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ daki her kenar, K_i deki bazı elemanlardan K_j deki bazı elemanlara giden $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ deviridir.

Her $i = 1, 2, \ldots, k$ için $E_i = ((K_i \times K_i) \cap E) \setminus \{(a_i, a_i)\}$ olmak üzere $\Gamma_i = (V_i, E_i)$ grafiğini göz önüne alalım. (E_i, kuyruk ve başları K_i nin elemanı olan (a_i, a_i) kenarı hariç *E* deki tüm kenarları içerir.) $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ devirine Γ_0 diyelim. Önceki paragraftan $\Gamma_{\alpha^{(K)}} = \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$ dir. Ayrıca her $i = 1, 2, \ldots, k$ için K_i ler ayrıktır. $\Gamma_{\alpha^{(K)}}$ yı Teorem 3.1.12. (ii) deki gibi göstermek için $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere batığı a_i olan bir Γ_i ağacı vardır.

Tanımdan, Γ_i kuyruğu a_i olan hiçbir kenarı içermez. $y \in K_i$ olsun. $\mathrm{tr}_\alpha(y)$, $y = y_0, y_1, \ldots, y_m = a_i, a_{i+1}, \ldots.$ şeklindedir ve a_i nin $\mathrm{tr}_\alpha(y)$ de ilk göründüğü durum $y_m = a_i$ dir. K_i nin tanımından $y_1, \ldots, y_{m-1}$ köşeleri Γ_0 a bağlı değildir. Dolayısıyla E_i nin tanımı, $y = y_0, y_1, \ldots, y_m = a_i$ nin, y nin Γ_i deki rotası olmasını ve a_i de kesilmesini gerektirir. Diğer bir ifadeyle, Γ_i deki her köşe a_i de kesilir ve Γ_i , batığı a_i olan bir ağaçtır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Örnek 3.1.14. Örnek 3.1.1. de verilen Γ_α grafiğinin üç tane bağlantılı bileşeni vardır. Üçüncü bileşen, batığı 7 olan bir ağaçtır. İkinci bileşen bir devirdir. Birinci bileşen ise şekildeki gibi (4, 13, 12) devirinin bir birleşimi olan bir ağaçtır:



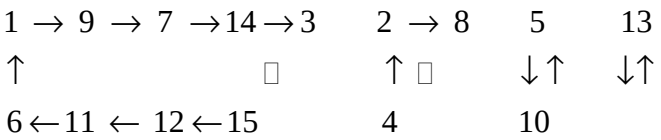
Sonuç 3.1.15. Γ_α nın farklı devirleri, Γ_α daki farklı bağlantılı bileşenlerine aittir.

$\alpha \in PT_m$ dönüşümünün grafiksel gösterimi olan Γ_α gayet açıktır ancak fazla yer kaplamaktadır. Basit bir matematiksel yazı için daha az yer kaplayan bir alternatif olmalıdır. Permutasyonlar için bu *devir* olarak bilinir ve şöyle bir örnekle tanımlanabilir:

Örnek 3.1.16.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 8 & 15 & 2 & 10 & 1 & 14 & 4 & 7 & 5 & 6 & 11 & 13 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

permutasyonunun Γ_α grafiği:



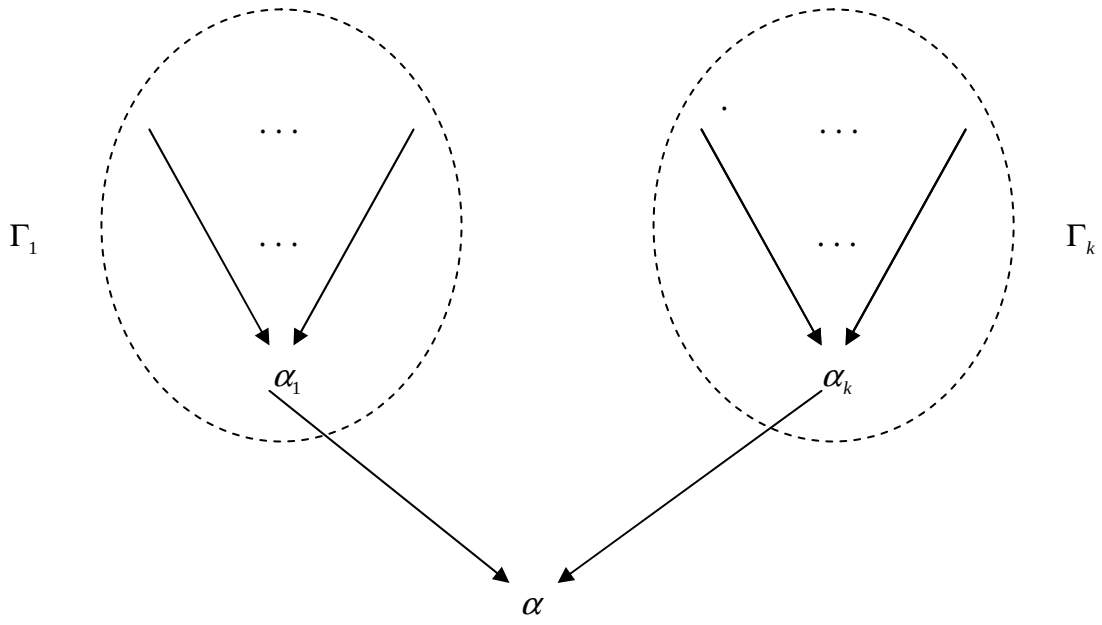
şeklindedir. Devirler için kullanılan gösterimi kullanarak

$$\alpha = (\,1, 9, 7, 14, 3, 15, 12, 11, 6\,)\,(\,2, 8, 4\,)\,(\,5, 10\,)\,(\,13\,)$$

yazabiliriz.

Ayrıca bu gösterim tek bir şekilde tanımlı değildir. Bir deviri yazarken onun herhangi bir köşesinden başlayabiliriz. Hatta zincir gösteriminde devirlerin sırası keyfidir. Biz bu bölümde tüm kısmi dönüşümleri gösterebilmek için, bu gösterimi genelleyeceğiz. Teorem 3.1.12. bunun nasıl yapılacağına dair iyi bir ipucudur; bizim tek yapmamız gereken batığı olan ağaçlar için güzel bir gösterim bulmaktır. Bu gösterime lineer diyeceğiz ve tekrarlayarak tanımlayacağız.

Kabul edelim ki $\alpha \in PT_m$ olmak üzere Γ_α grafiği, batığı a olan bir ağaç olsun. Eğer α, Γ_α daki tek köşe ise $\Gamma_\alpha = [\alpha]$ (ya da $\alpha = [\alpha]$) yazalım. Eğer Γ_α da daha başka köşeler var ise,



(3.2)

şeklinde gösterelim.

$i=1,2,\ldots,k$ için (3.2) grafiğinin altgrafiği olan Γ_i grafiği batığı a_i olan bir ağaçtır ve Γ_α dan daha az köşesi vardır. $i=1,2,\ldots,k$ olmak üzere Γ_i için $\tilde{\Gamma}_i$ lineer gösteriminin var olduğunu kabul edelim. Γ_α (ve α) için *lineer gösterim*

$$\Gamma_\alpha=[\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\Gamma}_2,\ldots,\tilde{\Gamma}_k;a]$$

şeklindedir. Bu gösterim Teorem 3.1.12. (i) daki elemanlar için tanımlıdır.

Şimdi Γ_α nın bağlantılı ve Teorem 3.1.12. (ii) deki gibi verildiğini varsayalım. Γ_α , $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ devirlerinin ve $i=1,2,\ldots,k$ için batığı a_i olan Γ_i ayrık ağaçlarının birleşimidir. $i=1,2,\ldots,k$ için $\tilde{\Gamma}_i$ uygun bir lineer gösterim olsun. Bu durumda Γ_α (ve α) için lineer gösterimi

$$\Gamma_\alpha=(\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\Gamma}_2,\ldots,\tilde{\Gamma}_k)$$

şeklinde tanımlarız.

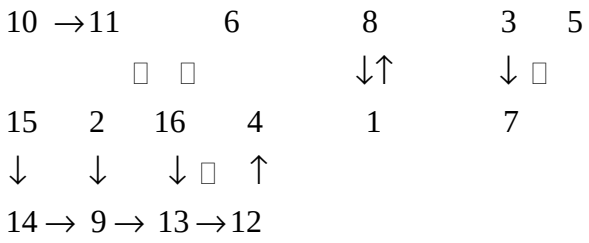
Son olarak, herhangi bir $\alpha\in \mathrm{PT}_m$ için bu gösterimi, keyfi sırayla yazılan tüm bağlantılı bileşenlerin lineer gösteriminin toplamı olacak şekilde tanımlarız. Permutasyonlardaki klasik zincir gösteriminde olduğu gibi (kısmi) dönüşümlerin lineer gösterimi, belli bileşenlerin permutasyonlarına kadar tektir. Bağlantılı bileşenler keyfi bir sırayla yazılabilir ve tekrarlanan işlemlerin her bir adımında $\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\Gamma}_2,\ldots,\tilde{\Gamma}_k$ bileşenlerinin sırası keyfi olarak seçilebilir.

Bu tanıma göre alışılmış $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ deviri $([a_1],[a_2],\ldots,[a_k])$ şeklinde gösterilir. Bu gösterim pratik olmadığından ve karmaşa yaratmamak için "[ ]" parantezlerini devirlerde (ağaçlar hariç) kullanmayacağız. Eğer *x* sabit ise (örneğin $(x)=([x])$ şeklinde) döngüde yazılmaz. Bu her $x\in\mathbf{N}$ in, döngülere bağlı olan gösterimde yer almayacağı anlamına gelir.

Örnek 3.1.17. Örnek 3.1.1.deki α yı alalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 9 & 7 & 13 & 7 & 16 & \varnothing & 1 & 13 & 11 & 16 & 4 & 12 & 9 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün Γ_α grafiği aşağıdaki gibidir.



α dönüşümü Ganyushkin ve Mazorchuk tarafından tanımlanan teknik ile

α = ([[[[15]; 14], [2]; 9], [[[10]; 11], [6]; 16]; 13], 12, 4) (1, 8) [[3], [5]; 7]

şeklinde yazabiliriz.

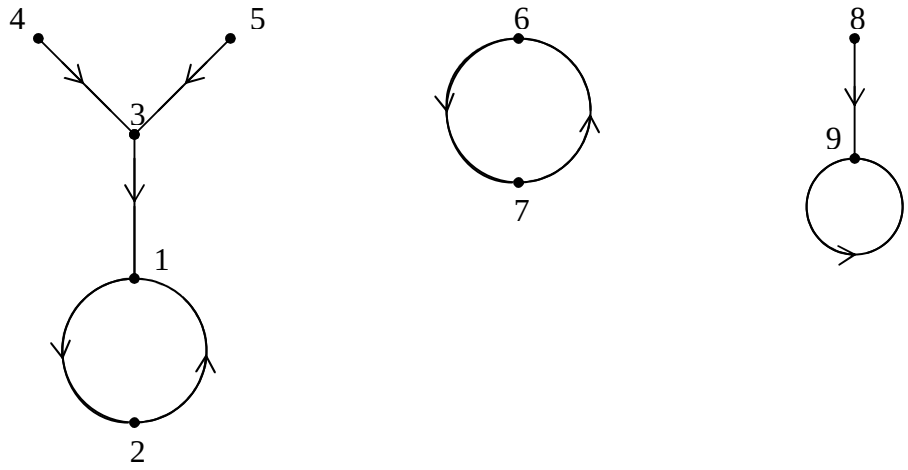
3.2. Lipscomb Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma

Lipscomb çarpanlara ayırma yönteminde dönüşümün grafik temsili çizilerek bu temsili yazarken kullanılan çarpanlar devir veya patikalardır. Bir devire bağlanan patika 〉 parantezi ile biter. Bir deviri ( ) parantezi içine yazılır.

Örnek olarak aşağıdaki dönüşümü Lipscomb yöntemi ile çarpanlarına ayıralım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

olsun. Lipscomb notasyonuna göre bu dönüşümün grafik temsili



şeklindedir. Lipscomb tarafından kullanılan notasyonlarla

$$(4\ 3\ 1\rangle\ \ (5\ 3\ 1\rangle\ \ (\ 1\ 2\ )\ (\ 6\ 7\ )\ \ (8\ 9\rangle\ \ (\ 9\ )$$

olup $(4\ 3\ 1\rangle$, $(5\ 3\ 1\rangle$ ve $(8\ 9\rangle$ öz patikaları , (1 2) , (6 7) ve (9) da devreleri göstermektedir.

3.3 AAH Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma

Şimdi ise tam dönüşüm yarıgrupları için [AAH] tarafından geliştirilen çarpanlara ayırma yönteminden ve bunların doğuray kümelerinden bahsedeceğiz. Öncelikle AAH çarpanlara ayırma yöntemindeki temel kavramları verelim.

$X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ ve T_n de X_n üzerinde tüm dönüşümler yarıgrubu olsun. $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X_n$, $\alpha \in T_n$, $x_n \in X$ olmak üzere

$$x_1\alpha = x_2, \ldots, x_{m-1}\alpha = x_m\ ,\ x_m\alpha = x_r \text{ ve } x\alpha = x\ \ (x \in X_n \setminus X)$$

ise α ya *uzunluğu m* ve *periyodu r* olan *patika-devir* denir, kısaca (*m-r)-patika-devir* olarak yazılır ve $\alpha = [x_1, \ldots, x_m \mid x_r]$ olarak gösterilir.

- $r = m$ ise α ya x_m de bir *m- patika;*
- $m \geq 2$ ve $r = 1$ ise α ya bir *m-devir;*
- $r = m = 1$ ise α ya bir *ilmek* denir.

Bir (*m-r)*-patika-devir $r \neq 1$ ise *öz patika-devir* adını alır. Dikkat edilecek olursa bir tek ilmek vardır o da birim dönüşüm I = [1 | 1] dir.

$\alpha = [x_1, \ldots, x_m \mid x_r]$ bir (*m-r)*-patika-devir ise $r_1(\alpha)$

$$r_1(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

olarak tanımlanır.

α ve β, T_n de iki patika-devir olsun. Eğer $r_1(\alpha) \cap r_1(\beta) = \varnothing$ ise o zaman α ve β ya *ayrık* denir. Eğer $r_1(\alpha) \cap r_1(\beta)$ kümesi yalnızca bir eleman içeriyorsa α ve β ya 1-*ortaklı* denir.

Aşağıdaki algoritmayı kullanarak T_n nin her α elemanını patika-devirlerin bir çarpımı olarak yazabiliriz.

AAH Yönteminin Algoritması: α, T_n in birim olmayan elemanı ve $x \in X_n$ olsun. $(x, x\alpha, x\alpha^2, \ldots)$ dizisi X_n sonlu olduğundan bir tekrara sahiptir. Böylece $k_x \in \mathbf{N}$ vardır öyle ki $x, x\alpha, \ldots, x\alpha^{k_x}$ elemanları ayrıktır fakat $x\alpha^{k_x+1} \in \{x, x\alpha, \ldots, x\alpha^{k_x}\}$ dir. Her bir $\alpha_x = [\, x, x\alpha, \ldots, x\alpha^{k_x} \mid\ x\alpha^{k_x+1}\ ]$ patika-devirlerine α nın bir *böleni* denir. α nın *ilk çarpanı* α nın en uzun bölenlerinden biri olup α_1 ile gösterilir. Birden fazla en uzun bölen varsa ilk girdisi X_n deki doğal sıralamaya göre en küçük olan seçilebilir. Böylece her bir $[x_1, x_2, \ldots, x_k \mid x_1]$ devrini $x_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ olarak yazarız. $\alpha^{(1)}: X_n \to X_n$ dönüşümünü

$$x\alpha^{(1)} = \begin{cases} x & x \in r_1(\alpha_1) \\ x\alpha & x \notin r_1(\alpha_1) \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve $\alpha^{(1)}$ e α nın *ilk rezüdüsü* denir. Açıkça $\alpha_1\alpha^{(1)} = \alpha$ olduğu görülür.

Benzer prosedürü $\alpha^{(1)}$ e uygulayarak α nın *ikinci çarpanı* α_2 ve α nın *ikinci rezüdüsü* $\alpha^{(2)}$ elde edilir. Bu prosedüre

$$\alpha_p \neq [1|1] \ , \ \alpha^{(p)} = [1|1]$$

oluncaya kadar devam edilirse $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p$ elde edilir.

Buradaki *p* tamsayısına α nın *patika-devir rankı* denir ve pcr(α) ile gösterilir. Eğer α = I birim dönüşüm ise pcr(I) = 0 dır. Eğer $\alpha \in S_n$ ise ayrık devirlerin çarpımı olup standart çarpanlara ayırmayı verir.

Örnek 3.3.1. $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 6 & 7 & 4 & 10 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ olsun.

Yukarıdaki algoritmayı uygularsak

$$\beta = [1, 4, 6 \mid 4\ ]\ [\ 2, 7, 10 \mid 7\ ]\ [\ 3, 9 \mid 3\ ]\ [\ 5, 7 \mid 7\ ]\ [\ 8, 4 \mid 4\ ]$$

şeklinde yazılır.

Herhangi bir α dönüşümünün patika-devirlerin çarpımı olarak yazılışı tek türlü değildir. Yukarıdaki örnekte β yı aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$[\ 8, 4, 6 \mid 4\ ]\ [\ 5, 7, 10 \mid 7\ ]\ [\ 1, 4 \mid 4\ ]\ [\ 2, 7 \mid 7\ ]\ [\ 3, 9 \mid 3\ ]$$

Eğer parantezlerde doğal sıralamayı göz önünde bulundurursak çarpanlara ayrılış tek türlüdür. Çarpanlara ayrılışta devirlerin sayısı değişmez. Devirlerin sayısını cycl(α) ile göstereceğiz. α nın *defektini* def(α) ile gösterilir ve

$$\text{def}(\alpha) = |\ X_n \setminus \text{im}(\alpha)\ |$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.2. $\alpha \in T_n$ olsun.

(i) $\text{pcr}(\alpha) = \text{def}(\alpha) + \text{cycl}(\alpha)$

(ii) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, α nın çarpanları ise o zaman her $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $i < j$ için α_i ve α_j patika-devirleri ya ayrıktır ya da 1-ortaklıdır. İkinci durumda $r_1(\alpha_i) \cap r_1(\alpha_j) = \{x\}$ olması yalnızca aşağıdaki durumlarda ortaya çıkar.

(i) α_i ve α_j nin her ikisi de öz patika-devirdir.

(ii) x, α_i nin ilk elemanı değildir ve α_j x de bir patikadır.

İspat. (i) $\alpha_i = [x_1, x_2, \ldots, x_k \mid x_r]$ öz patika-devir ise $x_1 \notin \text{im}(\alpha)$ dır. Her bir α_i çarpanı ya devirdir veya öz patika-devirdir. Öz patika-devirlerin sayısı tam olarak $\text{def}(\alpha)$ kadardır.

(ii) p = 1 ise ispatlayacak bir şey yoktur. $p \geq 2$ olsun. $\alpha_i = [y_1, \ldots, y_k \mid y_r]|$ ve $\alpha_j = [z_1, \ldots, z_l \mid z_s]$ $(1 \leq i \leq j \leq p)$ olarak alalım. Algoritmanın tanımından $\alpha^{(i)}$, $y_1, \ldots, y_k$ elemanlarını sabitlediğinden α_j nin α_i den ayrık olmasından kaçmanın tek yolu α_j nin z_l de *l*–patika olmasıdır. Burada $z_l \in \{y_1, \ldots, y_k\}$ olmalıdır. Eğer α_i devir değil ise o zaman $z_l \in \text{im}(\alpha)$ dır ve $y_1 \notin \text{im}(\alpha)$ olup $z_l = y_1$ olamaz.

α_i bir devir olsun. z_l yi x olarak yazalım. α_i nin ilk elemanının x olduğunu kabul edersek, o zaman $[z_1, \ldots, z_{l-1}, x, y_1, \ldots, y_k \mid x]$ patika-deviri α_i den daha uzun olur. Algoritma bunu imkânsız kılar. ■

Ayrık patika-devirlerin birbirleriyle değişmeli olduğu açıktır. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.3. α_i ve α_j çarpanlarının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul bu çarpanların ayrık veya bu çarpanların aynı *x* de patika olmalarıdır. Özel olarak α_i ve α_j den en az biri devir ise α_i ve α_j değişmelidir.

İspat. Teoremin ispatı için α_i ve α_j nin öz patika-devir olmadığını, ayrık olmadığı ve aynı *x* de patika değiller ise değişmeli olmadıklarını göstermek kalıyor. $i < j$ ve $\alpha_i = [y_1, \ldots, y_k \mid y_r]$, $r \neq 1$ ve $\alpha_j = [z_1, \ldots, z_l \mid z_l]$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.3.2. den α_i ve α_j ayrık değilse α_j nin patika olduğunu biliyoruz. Yine Teorem 3.3.2 den $z_l = y_s$, $1 < s \leq k$ olduğunu biliyoruz. $z_{l-1}\alpha_j\alpha_i = z_l\alpha_i = y_s\alpha_i$ iken $z_{l-1}\alpha_i\alpha_j = z_{l-1}\alpha_j = z_l$ olup α_i ve α_j değişmeli ise $z_l = y_s\alpha_i$ olmalıdır. Bu ise $z_l = y_k$ ile α_i nin y_k da bir patika olması ile mümkündür. ■

3.4. Doğuray Kümeleri

Daha önce de belirtildiği gibi derecesi *n* olan tüm singüler dönüşümler yarıgrubunu ST_n (= $T_n \setminus S_n$) ile göstereceğiz. ST_n nin T_n deki tüm 2-patikalar tarafından doğurulduğu biliniyor olup T_n de, T_n deki tüm 2-patikalar tarafından doğurulur. Bu bölümde patika-devirler kullanılarak ST_n ve T_n için yeni bir doğuray kümesi için alternatif ispat vereceğiz.

Teorem 3.4.1. $\alpha \in ST_n$ ise $\alpha = \beta_1 \ldots \beta_k$ olacak şekilde $\beta_1, \ldots, \beta_k$ öz patika-devirleri vardır.

İspat. $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_p$ olsun. $\alpha \in ST_n$ olup tüm $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ler devir olmaz. α_1 öz patika-devir olsun. $\alpha_1 = [x_1, \ldots, x_m | x_r]$, $x_r \neq x_1$ dir. $\alpha_j = [y_1, \ldots, y_q | y_1]$, α nın bir devir çarpanı olmak üzere $\alpha_j' = [x_1, y_1, \ldots, y_q | y_1]$ olarak alalım. $\alpha_1 \alpha_j = \alpha_1 \alpha_j'$ olur. Böylece her bir α_j deviri yerine α_j' öz patika-deviri yazabiliriz. ■

Teorem 3.4.2. ST_n deki tüm 2-patikalar ST_n yi doğurur.

İspat. Her $\alpha \in ST_n$ yi öz patika-devirlerin çarpımı olarak yazılabildiğini yukarıdaki teoremde gösterdik. Şimdi tüm öz patika-devirlerin 2-patikaların çarpımı olarak yazıldığını gösterelim. $2 \leq r < m$ için,

$$[x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_m | x_r] = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] [x_1, x_2, \ldots, x_m | x_m]$$

ve $m \geq 3$ için,

$$[x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m | x_m] = [x_{m-1}, x_m | x_m] \; [x_1, x_2, \ldots, x_{m-1} | x_{m-1}]$$

olup böylece devam edilirse α nın 2-patikaların çarpımı olarak yazıldığı görülür. ■

Teorem 3.4.3. Her $m \in \{2, \ldots, n\}$ için ST_n, uzunluğu m olan patika-devirler tarafından doğurulur.

İspat. Önce uzunluğu k olan öz patika-devirlerin, uzunluğu $k + 1$ olan öz patika-devirler tarafından doğurulduğunu gösterelim.

$\alpha = [x_1, x_2, \ldots, x_k | x_r]$, $r \neq 1$ olsun. k tek ise,

$$\beta = [x_1, x_3, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_2, x_4, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1} | x_r]$$

ve

$$\gamma = \begin{cases} [x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1, x_k \mid x_{r-2}] & r \geq 3 \text{ ise} \\ [x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1, x_k \mid x_k] & r = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

k çift ise

$$\beta = [x_1, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_2, x_4, \ldots, x_{k-2}, x_k \mid x_r]$$

ve

$$\gamma = \begin{cases} [x_k, x_{r-2}, x_{r-3}, \ldots, x_2, x_1, x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_{r-1} \mid x_{r-2}] & r \geq 3 \text{ ise} \\ [x_k, x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1 \mid x_{k+1}] & r = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olup her iki durumda da $\alpha = \gamma\beta$ dır. Dolayısıyla uzunluğu *k* olan öz patika-devir α, uzunluğu *k* +1 olan öz patika-devirlerin çarpımı olarak yazılmış olur.

Her α 2-patikaların çarpımı olarak yazılacağından, uzunluğu *m* olan öz patika-devirlerin çarpımı olarak yazılır. ■

Teorem 3.4.4. Her $m \in \{2, \ldots, n\}$ için ST_n *m*-patikaların çarpımı olarak yazılabilir.

İspat. 2-patikaların m-patikaların çarpımı olarak yazılabildiğini göstermek yeterlidir.

$$\gamma = [x_m, x_{m-1}, \ldots, x_4, x_3, x_1, x_2 \mid x_2]$$
$$\beta = [x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_2 \mid x_2]$$

olsun. Bu durumda $x, y \in X_n$, $\gamma\beta = [x_1, x_2 \mid x_2]$ olup istenilen ispatlanmış olur. ■

2-devirlerin S_n yi ve 3-devirlerin A_n yi doğurduğu bilinmektedir. ST_n , T_n nin bir ideali olup T_n nin her doğuray kümesi $T_n - ST_n = S_n$ nin doğuray kümesini içermek zorundadır.

Teorem 3.4.5. Eğer $n \geq m \geq 2$ ve *m* çift ise tüm *m*-patikaların ve *m*-devirlerin kümesi T_n yi doğurur. Eğer $n \geq m \geq 3$ ve *m* tek ise tüm *m*-patikalar ve *m*-devirler $SA_n = ST_n \cup A_n$ yi doğurur.

İspat. $\alpha = [x_1, x_2, \ldots, x_m | x_1] \in S_n$ olsun.

$$\beta = [x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2} | x_1]$$
$$\gamma = [x_1, x_{m+1}, x_m, \ldots, x_2, x_{m+2} | x_1]$$
$$\lambda = [x_1, x_3, \ldots, x_m, x_{m+2}, x_2, x_4, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1} | x_1]$$

olarak tanımlarsak

$$\alpha = \begin{cases} \beta^2\gamma & m \text{ tek ise} \\ \lambda\gamma & m \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

Her *m*-devir (*m*+2)-devirlerin çarpımı olarak yazılmış oldu. Her 2-devir, 2 + 2(*k* – 1)-devir ve her 3-devir, 3 + 2(*k* – 1)-devirlerin çarpımı olarak yazılacağından ispat tamamlanır. ■

3.5. Sonlu Dönüşümler Yarıgrubunda Ranklar

$1 \leq r \leq n$ için $K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$ ve $T_{n,r} = K_{n,r} \cup S_n$ olsun. Bu durumda $K_{n,n} = T_{n,n} = T_{n,n-1} = T_n$ ve $K_{n,n-1} = ST_n$ dir.

$$\text{def}(\lambda\mu) \geq \max\{\text{def}(\lambda),\text{def}(\mu)\} \quad (\lambda,\mu \in T_n) \qquad (3.3)$$

olup $K_{n,r}$ ve $T_{n,r}$, T_n nin altgrubudur. Her $\alpha \in T_n$ için S_n ve α yı içeren T_n nin en küçük alt yarıgrubunu $\langle\langle\alpha\rangle\rangle$ ile gösterelim. Her $x, y \in X_n$ için $(x \neq y)$ $\langle\langle[x, y|y]\rangle\rangle = T_n$ dir.

Her $\alpha \in T_n$ bir ker(α) denkliği belirler. ker(α) nın sınıflarının eleman sayısı n nin bir parçalanışını belirler ve bunu part(α) ile gösteririz. Örneğin

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ise part(α) = (2, 2, 1) dir.

Lemma 3.5.1. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun. Aşağıdaki bağıntılar denktir.

(i) $\exists \gamma, \delta \in S_n$ öyle ki $\beta = \gamma\alpha\delta$;

(ii) $|\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ ve $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\beta)$ dır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\beta = \gamma\alpha\delta$ ise $\alpha = \gamma^{-1}\beta\delta^{-1}$ olduğundan $\alpha \vartheta \beta$ ve böylece $|\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ dır. Ayrıca $\alpha\delta \text{P} \alpha$ olduğundan ker($\alpha\delta$) = ker(α) dır. Böylece part($\alpha\delta$) = part(α) dır. Her $x, y \in X_n$ için

$(x, y) \in \ker(\alpha\delta)$ olması için gerek ve yeter şart $(x\gamma^{-1}, y\gamma^{-1}) \in \ker(\gamma\alpha\delta) = \ker(\beta)$ olup $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\gamma\alpha\delta) = \text{part}(\beta)$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $|\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ ve $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\beta)$ olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \text{K} & A_k \\ b_1 & b_2 & \text{K} & b_k \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \text{K} & C_k \\ d_1 & d_2 & \text{K} & d_k \end{pmatrix}$$

ve $|A_i| = |C_i|$ dir. $(i = 1, 2, \ldots, k)$. $\gamma : C_i \to A_i$ bir permütasyon olsun. $\delta : b_i \to d_i$ ve $\delta : X_n \setminus \text{im}(\alpha) \to X_n \setminus \text{im}(\beta)$ yı birebir örten olarak eşleyen dönüşüm olsun. Bu durumda $\beta = \gamma\alpha\delta$ dır. ■

Teorem 3.5.2. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun.

(i) $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olması için gerek ve yeter şart $\exists \gamma, \delta \in S_n$ öyle ki $\beta = \gamma\alpha\delta$.

(ii) $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = T_n$ olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{def}(\alpha) = 1$ dir.

İspat. (i) $\beta = \gamma\alpha\delta$ ise $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olduğu açıktır. Tersine $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olduğunu kabul edelim. $|\mathrm{im}(\alpha)| < |\mathrm{im}(\beta)|$ ise $\beta \notin \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ dır. Çünkü $\langle\langle\alpha\rangle\rangle$, $\mathrm{rank}(\alpha)$ dan büyük ranklı elemanları içermez. O halde $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ dır.

Şimdi $\mathrm{part}(\alpha) = \mathrm{part}(\beta)$ olduğunu gösterirsek Lemma 3.5.1.den $\beta = \gamma\alpha\delta$ olur. $\beta \in \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ olduğundan $\gamma_1, \gamma_2, \mathrm{K}, \gamma_{m+1} \in S_n$ vardır öyle ki

$$\beta = \gamma_1\alpha\gamma_2\alpha\mathrm{K}\ \gamma_m\alpha\gamma_{m+1}$$

dir. $m = 1$ olursa Lemma 3.5.1. durumu olur. $m \geq 2$ için $\beta = \delta\alpha\gamma_{m+1}$ alalım öyle ki

$$\delta = \gamma_1\alpha\gamma_2\alpha\mathrm{K}\ \gamma_m$$

dir.

Tümevarımsal olarak $\mathrm{part}(\alpha) = \mathrm{part}(\beta)$ dır. Böylece

$$|\mathrm{im}(\beta)| \leq |\mathrm{im}(\delta)| \leq |\mathrm{im}(\alpha)|$$

olup $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ dır.

δ, α ve β nın imajlarındaki eleman sayısı aynı olup aynı ϑ sınıfındadır. Bu ϑ sınıfı $J_r = \{\zeta \in T_n : \mathrm{im}(\alpha) = r\}$ olsun. δ ve $\delta\alpha\gamma_{m+1}$ elemanları

$$P_{n,r} = K_{n,r} / (K_{n,r-1} \cup K_{n,r-2} \cup \mathrm{K} \cup K_{n,1})$$

dir. $\beta = \delta\alpha\gamma_{m+1}\mathrm{P}\,\delta$ olup $\ker(\beta) = \ker(\delta)$ dır. Dolayısıyla

$$\text{part}(\alpha) = \text{part}(\delta) = \text{part}(\beta)$$

dır.

(ii) $(\Rightarrow)$ $\text{def}(\alpha) \geq 2$ olsun. $1 \leq \text{def}(\zeta) < \text{def}(\alpha)$ olacak şekildeki $\zeta \notin \langle\langle \alpha \rangle\rangle$ dır.

$(\Leftarrow)$ $\gamma = [x_1, x_2, \ldots, x_m | x_r]$ bir patika-devir ise

$$\overline{\gamma} = [x_1, x_m, x_{m-1}, \ldots, x_2 | x_1] \in S_n$$

tanımlayalım. γ bir devir olduğundan $\overline{\gamma} = \gamma^{-1}$ dir. γ bir öz patika-devir ise

$$\overline{\gamma}\gamma = [x_1, x_r | x_r] \ , \ \gamma\overline{\gamma} = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] \text{ ve } \gamma\overline{\gamma}\gamma = \gamma$$

dır. $\text{def}(\alpha) = 1$ ve α nın çarpanları $\alpha_1, \text{K}, \alpha_p$ ise α nın bir çarpanı hariç diğer tüm çarpanları devirdir. $\alpha = \alpha_1 \text{K}\ \alpha_p$, α_p bu tek öz patika-devir olsun. $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_p \text{K}\ \overline{\alpha}_1$ ise

$$\overline{\alpha}\alpha = \overline{\alpha}_p \alpha_p = [x_1, x_r | x_r]$$

olup $\langle\langle \alpha \rangle\rangle = \langle\langle \overline{\alpha}\alpha \rangle\rangle = T_n$ dir.

Teorem 3.5.3. $\alpha \in ST_n$, $|\text{im}(\alpha)| = r$ ve $m = n - r$ olsun. O zaman $\zeta \in S_n$ vardır öyle ki

$$\text{im}(\alpha\zeta) = \{m+1, m+2, \text{K}, n\}$$

dir.

İspat: Eğer $\text{im}(\alpha)=\{m+1,m+2,\text{K},n\}$ ise $\zeta=[1\,|\,1]$ alınır. Yoksa $|\text{im}(\alpha)|=r$ ve $\{m+1,m+2,\text{K},n\}$ de r tane eleman olduğundan en az $1\le i_1<\text{L}<i_k\le m$ vardır öyle ki $\{i_1,\text{K},i_k\}=\text{im}(\alpha)\cap\{1,\text{K},m\}$ dır. O halde k tanesi m den küçük ise k tane m den büyük $m+1\le j_1<\text{L}<j_k\le n$ olacak şekilde $j_1,\text{K},j_k\notin\text{im}(\alpha)$ vardır.

$$\zeta=[i_1,j_1\,|\,i_1]\ \text{K}\ [i_k,j_k\,|\,i_k]$$

alırsak $\text{im}(\alpha\zeta)=\{m+1,m+2,\text{K},n\}$ olur. ■

Teorem 3.5.4. $\alpha\in ST_n$, $|\text{im}(\alpha)|=r$ ve $m=n-r$ olsun. O zaman $\zeta,\gamma\in S_n$ ve $\gamma_i=[i,x_i\,|\,x_i]$, $x_i\ge m+1$ $(1\le i\le m)$ vardır öyle ki $\alpha\zeta=\gamma\gamma_1\text{K}\ \gamma_m$ şeklindedir.

İspat: Teorem 3.5.3.ten en az bir ζ vardır öyle ki

$$\text{im}(\alpha\zeta)=\{m+1,m+2,\text{K},n\}$$

dir. δ, α daki tüm devir çarpanlarının çarpımı, $\beta_i=[i,y_{i_2},\text{K},y_{i_{q_i}}\,|\,y_{i_{r_i}}]$, $y_{i_{r_i}}\ne i$ $(1\le i\le m)$ için $\alpha\zeta=\delta\beta_1\text{K}\ \beta_m$ olarak yazabiliriz.

$\overline{\beta}_i=[i,y_{i_{q_i}},...,y_{i_2}\,|\,i]$ olmak üzere $x_i=y_{i_{r_i}}$

$$\beta=\beta_1\beta_2\text{K}\ \beta_m\ \text{ve}\ \overline{\beta}=\overline{\beta}_m\text{K}\ \overline{\beta}_2\overline{\beta}_1$$

olsun. $\overline{\beta}\in S_n$ olup

$$\begin{aligned}\alpha\zeta &= \delta\beta = \delta(\bar{\beta})^{-1}\bar{\beta}\beta = \delta(\bar{\beta})^{-1}\bar{\beta}_m \mathrm{K}\ \bar{\beta}_2(\bar{\beta}_1\beta_1)\beta_2 \mathrm{K}\ \beta_m \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}(\bar{\beta}_m \mathrm{K}\ \bar{\beta}_2)[1, y_{1_{r_1}} | y_{1_{r_1}}](\beta_2 \mathrm{K}\ \beta_m) \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}[1, y_{1_{r_1}} | y_{1_{r_1}}](\bar{\beta}_m \mathrm{K}\ \bar{\beta}_2\beta_2 \mathrm{K}\ \beta_m) \\ &= \mathrm{L} \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}[1, y_{1_{r_1}} | y_{1_{r_1}}] \mathrm{K}\ [m, y_{m_{r_m}} | y_{m_{r_m}}]\end{aligned}$$

dir. $\gamma = \delta(\bar{\beta})^{-1}$ ve $x_i = y_{i_{r_i}}$ için ispat tamamlanır. ■

$n, r \in ¢^+$, $n \geq r$ için $P_r(n)$

$$x_1 + x_2 + \mathrm{L}\ + x_r = n \quad , \quad x_1 \geq x_2 \geq \mathrm{L}\ \geq x_r \geq 1$$

denkleminin tamsayı çözümlerini göstersin. Eğer $(n_1, n_2, \mathrm{K}, n_r)$ bu denklemin çözümü ise buna *n nin r terimli parçalanışı* diyelim. $p_r(n) = |P_r(n)|$ ile gösterelim.

$n, r \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq r$ için $m = n - r$ ve $s = \min\{2m, n\}$ olsun. $(n_1, n_2, \mathrm{K}, n_r)$ n in bir parçalanışı ise

$$\alpha_{(n_1, n_2, \mathrm{K}, n_r)} = [1, x_1 | x_1][2, x_2 | x_2] \mathrm{K}\ [m, x_m | x_m] \in ST_n$$

olup burada

$$\begin{aligned} m+1 &= x_1 = x_2 = \mathrm{L}\ = x_{n_1 - 1} \\ m+2 &= x_{n_1} = x_{n_1+1} = \mathrm{L}\ = x_{n_1+n_2-2} \\ &\mathrm{M} \\ s-1 &= x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_{r-2})-r+3} = x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_{r-2})-r+4} = \mathrm{L}\ = x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_{r-1})-r+1} \\ s &= x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_{r-1})-r+2} = x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_{r-1})-r+3} = \mathrm{L}\ = x_{(n_1+\mathrm{L}\ +n_r)-r} \end{aligned}$$

dir ve bu gösterimlerle

$$X_{n,r}=\{\alpha_{(n_1,n_2,\mathrm{K},n_r)}:(n_1,n_2,\mathrm{K},n_r)\,n\text{in parçalanışı}\}$$

olarak tanımlarız.

Örneğin 8 in 4 terimli (4, 2, 1, 1) parçalanışını göz önüne alırsak

$$\alpha_{(4,2,1,1)}=[1,5|5]\,[2,5|5]\,[3,5|5]\,[4,6|6]\in X_{8,4}$$

dir. Ayrıca buradaki 1 lerin $\alpha_{(4,2,1,1)}$ parçalanışına hiçbir katkısı yoktur. Gerçekten de

$$\alpha_{(1,1,\mathrm{K},1)}=[1|1]$$

şeklindedir.

Lemma 3.5.5. $\alpha\in ST_n$ ve $|\mathrm{im}(\alpha)|=r$ olsun. $\alpha_{(n_1,n_2,\mathrm{K},n_r)}\in X_{n,r}$ vardır öyle ki $\langle\langle\alpha\rangle\rangle=\langle\langle\alpha_{(n_1,n_2,\mathrm{K},n_r)}\rangle\rangle$ dir.

İspat. $\alpha\in ST_n$, $|\mathrm{im}(\alpha)|=r$ ve $m = n - r$ olsun. Teorem 3.5.4. den $\gamma,\zeta\in S_n$ ve $\gamma_1,\mathrm{K},\gamma_m$ 2-patika vardır öyle ki $\alpha=\gamma\gamma_1\ldots\gamma_m\zeta^{-1}$, $\gamma_i=[i,x_i|x_i]$ ve $x_i\geq m+1$ $(1\leq i\leq m)$ şeklindedir. O zaman $\langle\langle\alpha\rangle\rangle=\langle\langle\gamma_1\mathrm{K}\,\gamma_m\rangle\rangle$ dir. γ_i 2-patika olup değişmelidir. O zaman γ_i leri

$$\begin{aligned}&m+1=x_1=\mathrm{L}\;=x_{m_1}<x_{m_1+1}=\mathrm{L}\;=x_{m_1+m_2}<x_{m_1+m_2+1}\\&=\mathrm{L}\;=x_{m_1+\mathrm{L}\,+m_{k-1}}<x_{m_1+\mathrm{L}\,+m_{k-1}+1}=\mathrm{L}\;=x_{m_1+\mathrm{L}\,+m_k}\leq n\end{aligned}$$

olarak yeniden sıralayalım. Burada $m_1+\mathrm{L}\,+m_k=m$ dir. Bu sıralamada $k - 1$ tane eşitsizlik olduğundan

$$n\geq m_1+\mathrm{L}\,+m_k\geq(m+1)+(k-1)$$

ve böylece $k \le n-m=r$ dir.

Eğer $x_1 = \mathrm{L} = x_{m_1} = m+1$ ise $\beta_1 = [1 \mid 1]$ dir. Yoksa $\beta_1 = [m+1, x_1 \mid m+1]$ olsun. β_1, her $j \ge m_1+1$ için γ_j den farklı ve β_1 devir olduğundan

$$\beta_1(\gamma_1\gamma_2 \mathrm{K}\ \gamma_m)\beta_1 = (\beta_1\gamma_1\beta_1)(\beta_1\gamma_2\beta_1)\mathrm{K}\ (\beta_1\gamma_{m_1}\beta_1)\gamma_{m_1+1}\mathrm{K}\ \gamma_m$$

dir. Şimdi, $i = 1, \mathrm{K}\ , m_1$ için

$$\beta_1\gamma_i\beta_1 = [m+1, x_1 \mid m+1][i, x_1 \mid x_1][m+1, x_1 \mid m+1] = [i, m+1 \mid m+1]$$

ve böylece

$$\beta_1(\gamma_1\gamma_2 \mathrm{K}\ \gamma_m)\beta_1 = [1, m+1 \mid m+1]\ \mathrm{K}\ [m_1, m+1 \mid m+1]\gamma_{m_1+1}\mathrm{K}\ \gamma_m$$

dir. Benzer şekilde devam edilirse $\beta = \beta_1 \mathrm{K}\ \beta_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\beta(\gamma^{-1}\alpha\zeta)\beta = {} & [1, m+1 \mid m+1] \ldots [m_1, m+1 \mid m+1] \\ & [m_1+1, m+2 \mid m+2] \ldots [m_1+m_2, m+2 \mid m+2] \\ & \vdots \\ & [m_1+\cdots+m_{k-1}+1, m+k \mid m+k] \ldots [m, m+k \mid m+k]\,.\end{aligned}$$

dir. $k = r$ ise

$$(m_1+1)+\cdots+(m_k+1) = m+k = m+r = n$$

ve böylece $(m_1+1, m_2+1, \ldots, m_k+1)$ n nin bir parçalanışıdır. Bu yüzden $\beta\gamma^{-1}\alpha\zeta\beta \in X_{n,r}$ dir. $k \ne r$ ise $(m_1+1, m_2+1, \ldots, m_k+1, n_{k+1}, \ldots, n_r)$, $n_{k+1} = \cdots = n_r = 1$ n nin bir parçalanışıdır. Yine böylece $\beta\gamma^{-1}\alpha\zeta\beta \in X_{n,r}$ dir. ■

$A = \{\alpha_p : p \in P_r(n)\} \cup S_n$, $\{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}$ yi doğurur. Böylece A, tüm $\alpha \in T_n$ için $\text{im}(\alpha)| = r$ yi doğuruyor ise tüm $T_{n,r}$ yi doğurur. O halde $\text{cont}(T_{n,r}) \leq p_r(n)$ dir.

Teorem 3.5.6. $\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$

İspat. $\alpha \in J_r$ olsun. Teorem 3.5.2. nin ispatından her $\zeta \in \langle\langle\alpha\rangle\rangle \cap J_r$ için $\text{part}(\zeta) = \text{part}(\alpha)$ dır. $\langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}$ ve her $p \in P_r(n)$ için $\text{part}(\alpha) = p$ olacak şekilde en az bir α elemanını içeren $K_{n,r}$ nin G altkümesi vardır. Böylece $\text{cont}(T_{n,r}) \geq p_r(n)$ olup ispat biter. ■

KAYNAKLAR

ARAUJO, I.M. , BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., RUSKUC, N. (2001). On Generators and Relations of Unions of Semigroups, Semigroup Forum, 63, 49-62.

AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M., (2005). On factorisations and generators in transformation semigroups, Semigroup Forum **70**, 225-237.

AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M., ÜNLÜ, Y., (2005). On structure of elements in finite full transformation semigroups,Bull. Aust. Math. Soc., 71, 69-74.

AYIK, H., RUSKUC, N., (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 42, 482-495.

CLIFFORD, A., PRESTON, G., (1961). The algebraic theory of semigroups. Vol. I. Mathematical Surveys, No. **7** American Mathematical Society, Providence, R.I.

FERNANDES, V. H., (2002). Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain:A survey, Semigroups,Algorithms, Automata and Languages- Coimbra 2001, World Sci. Publ, 368-378.

GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V. Introduction to classical finite transformation semigroup, preprint.

GREEN, J. (1951). On the structure of semigroups, Annals Of Mathematics **54**, 163-172.

GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1987). On the rank of certain finite semigroups of transformations, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 101 395-403.

GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1992). On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations, Semigroup Forum 45, 272-282.

HARDY, G.H., WRIGHT, E.M., (1979). "An Introduction to the Theory of Numbers", Fifth Edition, Oxford University Press.

HIGGINS, P.M. , (1992). Techniques of semigroup theory. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press.

HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., RUSKUC, N., (1998). Generators and factorisations of transformation semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh A **128**, 1355-1368.

HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., MITCHELL, J.D., RUSKUC, N., (2003). Countable versus uncountable ranks in semigroups of transformations and relations, Proc. Edinburgh Math. Soc. **46**, 531-534.

HOWIE, J.M., (1966). The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation Semigroup, J. London Math. Soc. **41**, 707-716.

HOWIE, J.M., (1995). "Fundamentals of Semigroup Theory", Oxford University Press.

HOWIE, J.M., MCFADDEN, R.B., (1990). Idempotent rank in finite full transformation semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh A **114**, 161-167.

HOWIE, J.M., (1971). Products of idempotents in certain semigroups of transformation, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 17, 223-236.

HOWIE, J.M., (1978). Idempotent generators in finite full transformation semigroup, Proc. Royal Soc. Edinburgh 81A, 317-323.

HOWIE, J.M., RUSKUC, N., (1994). Constructions and Presentations for Monoids, Comm. Algebra, 22, 6209-6224.

KEARNES, K.A., SZENDREİ, A., WOOD, J., (2001). Generating singular transformation, Semigroup Forum,63,441-448.

LAVERS, T.G., (1998). Presentations of General Products of Monoids, J. Algebra, 204, 733-741.

LIPSCOMB, S., (1996). "Symmetric Inverse Semigroups", Math. Surveys and Monographs, Vol. 46, American Math Soc., Providence.

PETRICH, M., (1973). Introduction to semigroups. Merrill Research and Lecture Series. Charles E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio.

SUSCHKEWITSCH, A. Untersuchung über verallgemeinerte Substitutionen, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologno, pp. 147-157.

RUSKUC, N., (1998). On Large Subsemigroups and Finiteness Conditions of Semigroups, Proc. London Math. Soc., 76, 383-405.

VOROB'EV, N.N., (1953). On symmetric associative systems, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Uch. Zap. **89**, 161-166.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Kahramanmaraş ilinin Göksun ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi Adana'da tamamladıktan sonra 2001 yılında Ankara Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladım. 2006 yılında mezun olduktan sonra aynı yılın Eylül ayında Ç.Ü. Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladım. 2007 yılının Eylül ayında ise Özel Adana Çözüm Dershanesi'nde matematik öğretmeni olarak işe başladım ve halen aynı yerde çalışmaktayım.