ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar TEKİNŞEN

SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİ, OTOMORFİZMLERİ, PRİMİTİF ELEMANLARI VE YÖRÜNGELERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİ, OTOMORFİZMLERİ, PRİMİTİF ELEMANLARI VE YÖRÜNGELERİ

Pınar TEKİNŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 29/07/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	……..	…….....
Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL	Prof. Dr. Naime EKİCİ	Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİ, OTOMORFİZMLERİ, PRİMİTİF ELEMANLARI VE YÖRÜNGELERİ

Pınar TEKİNŞEN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Danışman:Doç.Dr.Zerrin ESMERLİGİL
Yıl:2011, Sayfa: 55
Jüri: Doç.Dr.Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr.Naime Ekici
Doç.Dr.Perihan DİNÇ ARTUT

Sonsuz bir cisim üzerinde rankı 2 olan serbest metabelyen Lie cebirlerinde sıfırdan farklı bir elemanın otomorfik yörüngesini koruyan endomorfizmlerin birer otomorfizm olduğu gösterilmiştir. Bu sonucun sonlu cisimler üzerindeki serbest metabelyen Lie cebirleri için doğru olmadığı aksi örneklerle ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Serbest Lie cebiri, serbest metabelyen Lie cebiri, primitif Eleman, grup otomorfizmi, bir elemanın otomorfik yörüngesi.

ABSTRACT

MSc THESIS

ENDOMORPHISMS, AUTOMORPHISMS, PRIMITIVE ELEMENTS AND ORBİTS OF FREE METABELIAN LIE ALGEBRAS

Pınar TEKİNŞEN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMANT OF MATHEMATICS

Supervisor:Asst.Prof.Dr.Zerrin ESMERLİGİL
Year:2011, Pages: 55
Jury: Asst.Prof.Dr.Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr.Naime EKİCİ
Asst.Prof.Dr.Perihan DİNÇ ARTUT

It is shown that in free metabelian Lie algebras on infinite field whith rank two endomorfizms which preserve automorphic orbits of a nonzero element are automophisms. Whith counter examples, this result is not true for free metabelian Lie algebras on finite fields.

Key Words: Free Lie algebra, free metabelian Lie algebra, primitive elements, Automorphism group, automorphic orbit of an element.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocalarım sayın Prof. Dr. Naime EKİCi, sayın Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK ve sayın Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN'a ve özellikle danışman öğretmenim Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL'in sonsuz ilgi ve anlayışı için şükran ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca değerli arkadaşım Arş.Gör. Gülistan Kaya Gök'e ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için teşekkürlerimi sunarım. Tez yazımında bana yardımcı olan ve beni her zaman destekleyen eşim Tuğrul TEKİNŞEN 'e ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ……I
ABSTRACT……II
TEŞEKKÜR……III
İÇİNDEKİLER……...IV
1.GİRİŞ……1
2.TEMELTANIMLAR……..……..3
3.SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİNİN BELİRLENMESİ……...9
4.SERBEST METABELYEN LİE CEBİRİNİN TEST KÜMELERİ VE TEST RANKI…….……19
5.RANKI 2 OLAN SERBEST CEBİRLERDE YÖRÜNGELER……..29
5.1.Serbest Metabelyen Lie Cebirleri…….…….33
6.İKİ ÜRETEÇLİ SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN PRİMİTİF ELEMANLARI VE OTOMORFİZMLERİ…….37
7.SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN YÖRÜNGEYİ KORUYAN ENDOMORFİZMLERİ……..…….43
7.1.Sonlu Cisimler……44
7.2.Herhangi Cisimler…….……45
7.3.Sonsuz Cisimler……46
KAYNAKLAR……..……53
ÖZGEÇMİŞ……....55

1.GİRİŞ

Bu çalışma boyunca serbest metabelyen Lie cebirlerinin endomorfizmlerinin belirlenmesi [8], serbest metabelyen Lie cebirlerinin test rankı ve test kümeleri [4], rankı 2 olan serbest cebirinde yörüngeler [15], iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin primitif elemanları ve otomorfizmleri [5], serbest metabelyen Lie cebirlerinin yörüngeyi koruyan endomorfizmleri [9] incelenmiştir.

Bu çalışmada [8],[4],[15],[5] ve [9] numaralı referanslarda elde edilen sonuçları derleyerek bu alandaki Türkçe kaynak eksikliğini gidermeye çalıştık.

Sonlu ranklı bir serbest grubun her bir primitif elemanını bir primitif elemana götüren grubun her endomorfizminin bir otomorfizm olup olmadığı problemini V.Shpilrain, [14] de rankı 2 olan serbest gruplar için çözmüştür. V.Shpilrain Aynı makalede grubun, aşikar olmayan bir otomorfik yörüngeyi koruyan grubun her bir endomorfizminin bir otomorfizm olduğunu ispatlamıştır. S.Ivanov [7] de aynı sonuçları buna benzer şekilde elde etmiştir.

[13,14] de Shpilrain' in problemi çözülmüş olup sonlu ranklı bir serbest grubun aşikar olmayan bir otomorfik yörüngeyi koruyan her bir endomorfizminin bir otomorfizm olduğu ispatlanmıştır.

Serbest metabelyen gruplar için benzer bir soru C.K. Gupta ve E.I.Timoshenko nun [6] makalesinde yer almıştır. C.K. Gupta ve E.I.Timoshenko daha genel bir durum olarak rankı 2 olan serbest metabelyen grupların primitif elemanları koruyan her bir endomorfizminin bir otomorfizm olduğunu ifade ettiler.

Karakteristiği sıfır olan cisimler üzerindeki sonlu ranklı serbest Lie cebirleri ve karakteristiği $p>0$ cisimler üzerindeki sonlu ranklı serbest p-Lie cebirleri için A.A.Zolotyhk ve A.A Mikhalev [12] de bir primitif elemanın otomorfik yörüngesini koruyan bir cebirin her bir endomorfizminin otomorfizm olduğunu ispatladılar.

Son zamanlarda Timoshenko, eğer rankı 2 olan bir serbest metabelyen Lie cebirinin bazı a endomorfizmleri cebirin sıfırdan farklı bir elemanının yörüngesini koruyorsa a nın otomorfizm olduğunun doğru olup olmadığını inceledi. Tez

boyunca genel olarak bunun mümkün olmadığı gösterildi, fakat karakteristiği sıfır olan cisimlerde bu mümkün olmaktadır.

Tez 5 ana konuya yer verilerek hazırlandı. 7.bölümün daha rahat anlaşılabilmesi için 3.,4.,5. ve 6. bölümlerde birbiriyle bağlantılı çeşitli konular ele alındı.

2. bölümde tez boyunca kullanılan bazı temel tanımlara yer verildi.

3.bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinin endomorfizmlerinin belirlenmesi ile ilgili bilgi verildi.

4.bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinin test rankı ve test kümeleri ile ilgili bilgi verildi.

5.bölümde rankı 2 olan serbest cebirlerde yörüngeler ile ilgili bilgi verildi.

6.bölümde iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin primitif elemanları ve otomorfizmleri ile ilgili bilgi verildi.

7.bölümde ise genel olarak ilk 6 bölüm boyunca verilen bilgiler yardımıyla sırasıyla sonlu cisimler, herhangi cisimler ve sonsuz cisimlerde serbest metabelyen Lie cebirlerinin yörüngeyi koruyan endomorfizmleri anlatıldı.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılan mutlaka bilinmesi gereken ve tez boyunca sürekli yer alan temel tanımlara yer verildi.

Tanım 2.1. F herhangi bir cisim ve L, F üzerinde bir vektör uzayı olsun.
L üzerinde

$[\ ,\ ] : L \times L \to L$

$(x,y) \to [x,y]$

şeklinde aşağıdaki koşulları sağlayan bilineer bir çarpım (Lie çarpımı veya braket çarpımı) tanımlı ise L ye bu çarpımla birlikte bir Lie cebiri denir.

L1: Her $x \in L$ için [x,x] = 0 dır.

L2: Her $x,y,z \in L$ için [x,[y,z]] +[y,[z,x]] +[z,[x,y]]=0 (Jacobian özdeşliği)

Tanım 2.2. $L^{n_1,\ldots,n_k}$ ile L nin polisentral serisinin $\{n_1,\ldots,n_k\}$dizisine göre olan terimini gösterelim.

Eğer $L^{n_1,\ldots,n_k} = \{0\}$ ve n_i lerin hiçbiri bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük pozitif tamsayılarla değiştirilemiyorsa L ye $\{n_1,\ldots,n_k\}$dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir.

Tanım 2.3. Polinilpotent Lie cebirinde $n_1 = n_2 = 2$ ise ve $L^{2,2} = \{0\}$ ise L ye metabelyen Lie cebiri denir.

Tanım 2.4. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $[x, y] = 0$ ise L ye Abelyen(değişmeli) Lie cebiri denir.

Tanım 2.5. L , X üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer X üzerinde $L \cong F/F^{n_1,\ldots,n_k}$ olacak şekilde bir F serbest Lie cebiri varsa , L ye $\{n_1,\ldots..n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir. Yazılıştaki kolaylık bakımından $L = F/F^{n_1,\ldots,n_k}$ yazacağız.

$L = F/F^{2,2}$ ise L ye serbest metabelyen Lie cebiri denir.

Tanım 2.6. L , bir K cismi üzerinde X kümesi tarafından üretilen Lie cebiri olsun. G herhangi bir Lie cebiri olmak üzere her $X \to$ G dönüşümü bir $f : L \to$G homomorfizmine genişletilebiliyorsa L ye X tarafından üretilen serbest Lie cebiri denir.

Tanım 2.7. L bir Lie cebiri ve K , L nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ise K ye L nin bir Lie alt cebiri denir.

Tanım 2.8. $[L, L] = L'$ olup L', L nin bir alt cebiridir bu alt cebire L nin türetilmiş alt cebiri veya komütatör alt cebiri denir.

Tanım 2.9. F_n **,** $n \geq 2$ olmak üzere bir $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$, kümesi tarafından serbestçe üretilen serbest Lie cebiri olsun. $Orbf(u)$ ile F_n cebirinin bir u elemanının f otomorfizminin etkisi altındaki yörüngesini gösterelim. Yani,
$Orbf(u) = \{v \in F_n : v = f^m(u), m \in Z_+\}$ dır.

Tanım 2.10. G , birimli ve değişmeli K halkası üzerinde bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda $U = U(G)$ cebirine G ' nin evrensel enveloping cebiri denir.

i) G den $U(G)$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $e : G \to U(G)$ homomorfizm vardır.

ii) K cismi üzerindeki birim elemanlı her birleşmeli B cebiri ve her

$j : G \to [B]$ homomorfizmi için $ye = j$ olacak şekilde bir tek $y : U[G] \to B$ homomorfizmi vardır.

Tanımdan da görüldüğü gibi $U[G]$ tektir. $U[G]$ nin varlığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

L, X üzerinde bir serbest Lie cebiri ve R de L nin bir ideali olmak üzere $G = L/R$ olarak ifade edilir.

Serbest asosyatif cebirler ve serbest birleşmeli cebirlerin evrensel özelliğinden dolayı X tarafından üretilen serbest birleşmeli A cebiri L nin evrensel enveloping cebiri olup $i : L(X) \to A(X)$ kanonik dönüşümü X üzerindeki birim dönüşümün bir genişlemesi olan bir homomorfizmdir.

S, A' da $i(R)$ yi içeren en küçük ideal olsun. O zaman $U(G) = A(X)/S$, G nin evrensel enveloping cebiridir.

F bir X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve A da X tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. $U(F) \cong A$ olduğu açıktır.

Tanım 2.11. Herhangi bir $u \in F$ elemanı $a_i \in U(F)$ olmak üzere $u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$ şeklinde yazılabilir. a_i elemanına u elemanının x_i üretecine göre sol Fox türevi denir ve $a_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ile gösterilir.

Daha açık olarak Fox türevi şu şekilde tanımlanabilir:

$e : U(L) \to K$

$1 \le i \le n$ için $e(x_i) = 0$ olacak şekildeki tanımlanan e homomorfizmine genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği bazı X olan bir serbest sol-modüldür.

$\ker e = \Delta$ olarak gösterilir.

Her $u \in \Delta$ elemanı $u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ formunda tek türlü yazılabilir.

Burada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları $U(L)$ de olup U nun X bazına göre koordinatları olan Fox türevleridir:Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i}: U(L) \to U(L)$ dönüşümleri Fox türevleri olarak adlandırılır.

1) $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = d_{ij}$ (Kronecker delta) ,

2)Her $u, v \in U(L)$ ve $a, b \in K$ için,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(au + bv) = a.\frac{\partial u}{\partial x_i} + b.\frac{\partial v}{\partial x_i} ,$$

3)Her $u, v \in U(L)$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}.e(v) + u.\frac{\partial v}{\partial x_i} .$$

Bu durumda $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dönüşümüne sol Fox türevi denir.

Δ, aynı zamanda sağ $U(L)$-modül olduğundan sağ Fox türevi benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.12. F bir serbest Lie cebiri ve u∈ F olsun. f (u) = u olacak şekilde her f endomorfizmi bir otomorfizm ise u ya F nin test elemanı denir.

Tanım 2.13.$\{u_1,\ldots,u_k\}$, k ≤ n F nin alt kümesi olsun. F nin f (u_i) = u_i i=1,….,k olacak şekildeki her endomorfizmi için f bir otomorfizm ise $\{u_1,\ldots,u_k\}$ kümesine F nin test kümesi denir.

Tanım 2.14. F nin test kümeleri içindeki en küçük elemanlı test kümesinin eleman sayısına F nin test rankı denir.

Tanım 2.15. $A = A(X)$ ve $X = \{x_1,....,x_n\}$ olsun. $Y = \{y_1,....,y_k\} \subset A$ olmak üzere Y nin Jacobian matrisi

$$J_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ olarak tanımlanır.

$$f : A \to A$$

$$x_i \to f(x_i)$$

Homomorfizminin Jacobian matrisi

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_2} & \mathbf{L} & \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.16. G bir Lie cebiri olsun $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$ şeklinde olup $v, w \in G$ olmak üzere $vadw = [v, w]$ olup adv, G nin bir derivasyonudur.

Not: Bu tez boyunca bir G Lie cebirinin otomorfizm grubunu $AutG$ ile göstereceğiz.

3.SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİNİN BELİRLENMESİ

M_n, n serbest üreteçli metabelyen Lie cebiri olsun.

Bu bölümde amaç M_n Lie cebirinin her j endomorfizminin b_i üzerindeki etkisinin tek türlü olarak belirlendiğini göstermektir.

K herhangi bir cisim ve L de K üzerinde herhangi bir Lie cebiri olsun.

$U(F)$deki F tarafından üretilen ideal; bazı $y_1,.....,y_n$ olan bir serbest sağ $U(F)-$modüldür. Bu nedenle; her $f \in FUF$ elemanı , $\partial_i f$ ler sağ Fox türevi olmak üzere,

$$f = \sum_{1\le i\le n} y_i \partial_i f \ , \ \partial_i f \in UF$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. (Buradaki y_i değişkeni f nin Fox türevine karşılık gelir.)

M bir metabelyen Lie cebiri ve A , M nin türetilmiş alt cebiri olsun. M nin adjoint temsili, M/A nın A üzerindeki bir temsilini belirler. Bu nedenle, A bir sağ $U(M/A)-$modül yapısı ile düşünülür. (Etki, aşağıda nokta ile gösterilmiştir.)

Eğer $a \in A$ ve $\overline{g}_1, \overline{g}_2,....,\overline{g}_k \in M/A$ ise;

$a.\overline{g}_1\overline{g}_2.....\overline{g}_k = [[.....[[a, g_1], g_2], ...], g_k]$ dır.

$U(M) \to U(M/A)$ cebir homomorfizmi altındaki elemanların görüntüleri üstü çizili olarak belirtilmiştir. $U(M/A)$ polinomlar cebirine izomorfiktir.

M_n ile rankı n olan serbest metabelyen Lie cebirini gösterelim.

$f \in U(F)$, $b_i \in M_n$ ve $a_i \in M_n' = [M_n,, M_n]$ olsun. (Timoshenko,1997) deki gibi,

$$f(b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n) = f(b_1, b_2, ..., b_n) + \sum_{i=1}^{n} a_i . \overline{\partial_i f}$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir.

$\{x_i \mid 1 \le i \le n\}$ üzerinde r dereceli bir f monomiali için bu formülü doğrulamak yeterlidir.

Formül $r = 1$ için doğru olduğundan f nin derecesini 1 den büyük kabul edebiliriz. O zaman f_1 ve f_2 , f den daha küçük dereceli monomialler olmak üzere $f = [f_1, f_2]$ yazabiliriz.

Formül, tümevarım hipotezinden , $U(M_n / M_n')$ nün M_n' üzerindeki etkisinin tanımından ve $U(M_n)$ deki $\partial_i [f_1, f_2] = (\partial_i f_1) f_2 - (\partial_i f_2) f_1$ eşitliğinden kolayca elde edilir.

Teorem 3.2. M_n nin $\bmod M_n'$ birim dönüşüm olacak şekildeki endomorfizmlerini tek olarak belirleyen n den daha az sayıda eleman bulunamaz.

İspat. $g_1, g_2, ...g_m$ M_n nin herhangi elemanları olsun. Açıkça,

$$\sum_{1 \le i \le n} \overline{l_i}.\overline{\partial_i g_j} = 0 \qquad (1 \le j \le m)$$

lineer denklem sisteminin aşikar olmayan bir $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ çözümü vardır.

$g_1, g_2, ..., g_n \in M_n$ olsun.

$n = 1$ için

$$\overline{l_1}.\frac{\overline{\partial g_1}}{\partial x_1} + \overline{l_2}.\frac{\overline{\partial g_1}}{\partial x_2} + ... + \overline{l_n}.\frac{\overline{\partial g_1}}{\partial x_n} = 0$$

$$\overline{l_1}.\frac{\overline{\partial g_2}}{\partial x_1} + \overline{l_2}.\frac{\overline{\partial g_2}}{\partial x_2} + ... + \overline{l_n}.\frac{\overline{\partial g_2}}{\partial x_n} = 0$$

M M

M M

$$\overline{l_1}.\frac{\overline{\partial g_m}}{\partial x_1} + \overline{l_2}.\frac{\overline{\partial g_m}}{\partial x_2} + ... + \overline{l_n}.\frac{\overline{\partial g_m}}{\partial x_n} = 0$$

Bu durumda n- denklem, m- bilinmeyen olup n-m tane bağımsız çözüm vardır.

$0 \neq c \in M_n'$ olsun.

$x_i \to x_i + c.\overline{l_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$

Şeklindeki etkiye sahip bir j homomorfizmi , $\bmod M_n'$ birimdir.

$$x_i j = x_i + c\,\overline{l_i} = x_i + [c, l_i] = x_i \qquad (\bmod M_n')$$

Buradan $x_i j = x_i \quad (\bmod M_n')$ elde edilir.

$g_j = g_j(x_1,.....,x_n)$ alalım.

Şimdi $g_j(j)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} g_j j(x_1,.....,x_n) &= g_j(j(x_1), j(x_2),.....,j(x_n)) \\ &= g_j\left(x_1 + c\,\overline{l_1},.....,x_n + c\,\overline{l_n}\right) \\ &= g_j(x_1,.....,x_n) + \sum c\,\overline{l_i}\,\overline{\partial_i g_j(x_1,...,x_n)} \\ &= g_j(x_1,.....,x_n) \end{aligned}$$

Böylece j , her g_j ye birim dönüşüm gibi etki eder.

Şimdi j nin birim dönüşüm olmadığını kontrol edelim:

E, $U(M_n/M_n')$ üzerinde bir serbest modül olsun.

(Artamonov , 1997) de E serbest modülü içine M_n nin nasıl gömüleceği gösterilmiştir. Bu yüzden E üzerindeki etki M_n' ne genişletilebilir.

Özellikle $U(M_n/M_n')-$modülü M_n' torsiyon-serbesttir.

Şimdi, 1 ve n arasında bir l sayısı seçelim. $\overline{l_l} \neq 0$ olsun.

O zaman

$$j \to x_l \to x_l + c.\overline{l_l} \quad , \qquad j(x_c) = x_l + c.\overline{l_l} \quad \text{olur.}$$

$c \neq 0$, $\overline{l_l} \neq 0$ ve M_n' torsiyon-serbest modül olduğundan $j(x_l) \neq x_l$ olup $j \neq 1$ elde edilir.

Buradan j birim dönüşüm değildir.

Lemma 3.3 $c \in A$, $A = [M_n, M_n]$ ve $l_1, l_2, ..., l_n \in U(M_n / M_n')$ olsun.

Eğer,

$$\sum_{1 \le i \le n} l_i \overline{\partial_i} c = 0$$

ise $x_i j = x_i + c\, l_i \qquad (1 \le i \le n)$ şeklinde tanımlanan j endomorfizmi M_n Lie cebirinin bir otomorfizmidir.

İspat. M_n serbest metabelyen Lie cebirinin bir j endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul j nin $J(j) = \left(\overline{\partial_i (x_j + c l j)}\right)$ Jacobian matrisinin tersinir olmasıdır.

L, sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri ve $q : L \to L$ bir endomorfizm ise q nın bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul $J(q)$ Jacobian matrisinin $U(L)$ üzerinde tersinir olmasıdır. (Umirbaev , 1993)

Bu sonuç serbest Lie cebirleri için iyi bilinen bir sonuçtur. Yani,

$$J_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial j(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial j(x_1)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial j(x_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial j(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial j(x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial j(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial c}{\partial x_1} l_1 & \frac{\partial c}{\partial x_2} l_1 & \cdots & \frac{\partial c}{\partial x_n} l_1 \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} l_2 & 1+\frac{\partial c}{\partial x_2} l_2 & \cdots & \frac{\partial c}{\partial x_n} l_2 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial c}{\partial x_n} l_n & \cdots & \cdots & 1+\frac{\partial c}{\partial x_n} l_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial c}{\partial x_2} l_1 & \dots & \frac{\partial c}{\partial x_n} l_1 \\ 0 & 1 & \dots & \frac{\partial c}{\partial x_n} l_2 \\ \mathbb{M} & \dots & \dots & \mathbb{M} \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} l_2 & \frac{\partial c}{\partial x_2} l_2 & \dots & \dots \\ \mathbb{M} & \dots & \dots & \mathbb{M} \\ \frac{\partial c}{\partial x_n} l_n & \dots & \dots & \frac{\partial c}{\partial x_n} l_n \end{bmatrix}$$

$$= 1 + \sum l_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = 1$$

$\Rightarrow J(j)$ tersinirdir. $(1 \neq 0)$

$\Rightarrow j$ otomorfizmdir.

Teorem 3.4. M_n $(n \geq 3)$ serbest metabelyen Lie cebiri olsun. Bu durumda M_n nin mod M_n' birim dönüşüm olacak şekildeki bir otomorfizmini tek olarak belirleyen $(n-1)-$tane eleman bulunamaz.

İspat. $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} e_i U(M_n / M_n')$, $U(M_n / M_n')$ üzerinde bir serbest modül olsun.

Artamonov (1997) de $g : M_n \to E$ gömme dönüşümünü inşa etmiş olup bu gömme dönüşümü,

$$M_n \to E \quad , \quad f \to \sum_{1 \leq i \leq n} e_i \overline{\partial_i f}$$

olarak ifade edilir. Bu nedenle; bir $f \in E$ elemanının türetilmiş cebirin $M_n' g$ görüntüsüne ait olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i \partial_i f} = 0$ olmasıdır.

$\sum_{i=1}^{n} l_i \overline{\partial_i g_j} = 0 \quad (1 \le j \le n-1)$ lineer denklem sisteminin bir aşikar olmayan $l_1, l_2, ..., l_n \in U(M_n / M_n')$ çözümünü göz önünde bulunduralım.

$n \ge 3$ için

$$\sum_{1 \le i \le n} \overline{l_i} z_i = 0 \qquad \text{(I)},$$

$$\sum_{1 \le i \le n} \overline{x_i} z_i = 0 \qquad \text{(II)}$$

Bu iki denklem sistemi $U(M_n / M_n')$ üzerindeki $z_1, z_2, ..., z_n$ bilinmeyenleriyle aşikar olmayan bir çözüme sahiptirler.

(II). denklem sisteminden öyle bir $c \in M_n'$ vardır ki $\overline{\partial_i} c = z_i$ dir.

Lemma 3.3 ten (I) denklem $j : M_n \to M_n$ endomorfizminin x_i' yi $x_i + c.\overline{l_i}$ ye götüren bir otomorfizm olduğunu ifade eder.

Buradan $x_i j = x_i + c.l_i$ olacak şekilde bir j otomorfizmi vardır.

Böylece tüm l_i lerin hepsi birden sıfır olmadığından j otomorfizmi birim değildir. Aynı zamanda g_j üzerinde birim rolünü oynar. Bu sonuç teoremi ispatlar.

Teorem 3.5. $m \ge n$ olsun. M_n Lie cebirinin endomorfizmlerinin $g_1, g_2, ..., g_m \in M_n$ elemanları ile tek bir şekilde belirlenebilmesi için gerek ve yeter koşul bu elemanlar tarafından üretilen cebirin M_n' ye izomorfik bir alt cebir içermesidir.

İspat. Genelliği kaybetmeksizin bir $k \in \{1, ..., n\}$ için

$g_i = x_i + c_i \quad (1 \le i \le k)$, $g_i = c_i \quad (k+1 \le i \le m)$ alabiliriz.

Burada $c_1, ..., c_m \in M_n'$ ve $g_1, ...g_k$ M_n de bir serbest metabelyen alt cebiri doğurur.

$k < n$ olsun: a ve b M_n' nün farklı elemanları olsun.

j ,

$x_1 j = a$, $x_i j = b$ $(i = 1,.....,n)$ ve

y ,

$x_1 y = a$, $x_i y = b$ $(i = 1,.....,n-1)$, $x_n y = a$ şeklinde tanımlansın.

$g_i j = g_i y$ $(i = 1,.....,k)$ ve her iki endomorfizm de $g_{k+1},.....,g_m$ için sıfırdır.

Böylece $g_1,.....,g_m$ elemanları M_n nin endomorfizmlerini tek bir şekilde belirlemez.

$k \geq n$ olsun:

$g_i j = g_i y$ $(1 \leq i \leq k)$ ve $x_i j = x_i y \pmod{M_n'}$

$a_i, b_i \in M_n'$, l_i üreteçlerin lineer kombinasyonları olmak üzere

$x_i j = l_i + a_i$, $x_i y = l_i + b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ olsun.

$g_i j$ ve $g_i y$ yi hesaplayalım.

$$g_i j = g_i(l_1 + a_1,.....,l_n + a_n) = g_i(l_1,.....,l_n) + \sum_{1 \leq j \leq n} a_j \overline{\partial_j g_i}$$

$$= g_i(l_1,.....,l_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} a_j \left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_j \overline{\partial_j g_i} = a_1 \overline{\partial_1 g_i} + ... + a_n \overline{\partial_n g_i} \qquad (g_i = x_i + c_i)$$

$$= a_1 \frac{\overline{\partial g_i}}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\overline{\partial g_i}}{\partial x_n}$$

$i = 1$ olsun. $= a_1 \left(1 + \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial c_1}{\partial x_n}\right)$

$$= a_1 + a_1.\frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots + a_1.a_n\frac{\partial c_1}{\partial x_n}$$
$$= \sum a_j\left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right)$$

Böylece $g_i j = g_i(l_1,\ldots\ldots,l_n) + \sum a_j\left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right)$ olur.

Benzer şekilde,

$$g_i y = g_i(l_1,\ldots\ldots,l_n) + \sum b_j\left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right) \text{ dir.}$$

Burada d_{ij} kronecker deltadır.

$a_i - b_i \in M_n'$, $U(M_n/M_n')$ de

$$g_i j - g_i y = \sum_{1\le j\le n}(a_j - b_j)\left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right) = \sum_{1\le j\le n} z_i\left(d_{ij} + \overline{\partial_j c_i}\right) = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

denklem sistemini sağlayan elemanlar $z_1,\ldots\ldots,z_n \in U(M_n/M_n')$ olsun.

e , birleşmeli ve değişmeli $U(M_n/M_n')$ cebirinden K cismine

$$e : U(M_n/M_n') \to K$$
$$x_i e = 0$$

şeklinde tanımlanan homomorfizmidir. Bu homomorfizm

$$e : M(n, U(M_n/M_n')) \to M(n,K)$$

homomorfizmine genişletilebilir.

$E = \bigoplus_{1\le i\le n} e_i U(M_n/M_n')$ de M_n yi bir $U(M_n/M_n')-$alt modülü olarak göz önünde bulunduralım.

M_n, $e_i\overline{x_j} - e_j\overline{x_i}$ kümesi tarafından üretilir.

Böylece $\forall$ i için $\overline{\partial_j c_i} \in \ker e$ sağlanır.

Buradan $\det(g_i j - g_i y) = 1 \pmod{\ker e}$ elde edilir.

Bu da sistemin sadece sıfır çözümüne sahip olması demektir.

Sonuç olarak $\forall\ i$ için $a_i = b_i$ olur.

Böylece $j = y$ olup ispat tamamlanır.

4.SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN TEST KÜMELERİ VE TEST RANKLARI

Bu bölümde rankı n olan bir serbest metabelyen L Lie cebirinin test rankının n-1 olduğu ve L nin test kümelerinin de L nin türetilmiş alt cebirinin içinde olduğu gösterilecektir.

K,bir cisim ve F de , K cismi üzerinde $X=\{x_1,.....,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $U(F)$ evrensel enveloping cebiri serbest üreteçleri X kümesi olan bir serbest asosyatif cebirdir. Gerçekten $U(F)$, $[a,b]=ab-ba$ işlemi ile bir Lie cebiridir ve F de, X tarafından üretilen bu cebirin bir alt cebiridir. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ile X kümesi üzerinde Fox türevini gösterelim. Fox türevinin özellikleri Fox da bulunabilir.(1995)

Lemma 4.1. Φ, L nin $\Phi(x_i)=x_i+l_ic$ olarak tanımlanan bir endomorfizmi olsun.

$$1\le i\le n\ ,\quad l_i\in U\left(L/L'\right)\ ,\quad c\in L'$$

Bir $u\in L$ elemanının Φ altında invaryant kalması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{n} l_i.\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$ olmasıdır.

İspat. Φ, L nin $\Phi(x_i)=x_i+l_ic$ ile bir endomorfizmi olsun.

$$1\le i\le n,\quad l_i\in U\left(L/L'\right),\quad c\in L'$$

Bir u$\in L$ elemanının Φ altında invaryant kalması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{n} l_i.\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\ ,\ \Phi(u)=u \text{ iken } \sum_{i=1}^{n} l_i.\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \text{ olmasıdır.}$$

Lemma 4.2. $c \in L'$ ve $l_1,.....,l_n \in U\left(L/L'\right)$ olsun. $\Phi(x_i) = x_i + l_i c \quad 1 \le i \le n$ endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{n} l_i . \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0$ olmasıdır.

Tanım 4.3. $a_1,.....,a_n \in U(L)$ olsun

$$v_1 a_1 + ... + v_k a_k = 0 \quad v_i \in U(L)$$

iken $v_1 = v_2 = ... = v_k = 0$ ise $a_1,.....,a_n$ elemanlarına bağımsızdır denir.

Lemma 4.4. (Drensky and Yu, 1998) L, $\{x_1, x_2\}$ kümesi tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri ve Ψ, $\Psi(g) = g$, $g \in L$ olacak şekilde bir endomorfizm olsun. O zaman Ψ nin lineer kısmı tersinirdir.

Teorem 4.5. F, $X = \{x_1, x_2\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $L = F/F''$ serbest metabelyen Lie cebiri olsun. O zaman L' türetilmiş alt cebirinin elemanları yegane test elemanlarıdır.

İspat. L_2 türetilmiş altcebirinin sıfırdan farklı her $g \in L'$ elemanı $v \in F''$ olmak üzere $g = v + F''$ şeklinde yazılabilir.

v elemanının F' nün serbest üreteçleri ile ilgili olarak ifade edilebildiği açıktır. Bu yüzden eğer u , F' nün bir serbest üreteci olmak üzere teoremi her $u + F''$ elemanı için ispatlarsak o zaman $v + F''$ için de sağlanır.

Böylece genelliği kaybetmeksizin v nin F'nün serbest üreteci olduğunu varsayabiliriz.

Böylece,

$x_1 > x_2$, $x_2 \le x_{i_1} \le .... \le x_{i_k}$, $x_{i_1},.....,x_{i_k} \in X$, $k \ge 0$ olmak üzere

v, $\lfloor ...[[x_1, x_2], x_{i_1}], ..., x_{i_k} \rfloor$ formundadır. (Shmelkin, 1996)

y , L nin bir endomorfizmi olsun öyle ki $y(g)=g$

O halde Lemma 4.4.' den

$$y(x_1)=ax_1+bx_2+f,$$

$$y(x_2)=ax_1+bx_2+h, \qquad f,h\in L' , \quad a,b,c,d\in K \text{ tanımlanır.}$$

Ayrıca,

$$t(x_1)=ax_1+bx_2,$$

$$t(x_2)=cx_1+dx_2,$$

Şeklinde tanımlanan endomorfizm tersinirdir.

$g=v+F''$ olmak üzere $y(g)$ yi hesaplayalım :

$$\begin{aligned}
y(g)&=y(v+F'')\\
&=y\left(\left[\ldots\left[\left[x_1,x_2\right],x_{i_1}\right],\ldots,x_{i_k}\right]+F''\right)\\
&=\left(\left[\ldots\left[\left[y(x_1),y(x_2)\right],y(x_{i_1})\right],\ldots,y(x_{i_k})\right]+F''\right)\\
&=\left[\left[\ldots\left[ax_1+bx_2+f,cx_1+dx_2+h\right],y(x_{i_1})\right]\ldots\right],y(x_{i_k})\Big]+F''\\
&=\left[\left[\ldots\left[(ad-bc)\left[x_1,x_2\right],y(x_{i_1})\right]\ldots\right],y(x_{i_k})\right]+\\
&\left[\left[\ldots\left[\left[ax_1+bx_2,h\right]+\left[f,cx_1+dx_2\right]+\left[f,h\right],y(x_{i_1})\right],\ldots\right],y(x_{i_k})\right]+F''\\
&\equiv\left(\begin{array}{l}(ad-bc).\left[\left[\ldots\left[\left[x_1,x_2\right],t(x_{i_1})\right]\ldots\right],t(x_{i_k})\right]+\\ \left[\left[\left[\ldots\left[ax_1+bx_2,h\right]+\left[f,cx_1+dx_2\right],t(x_{i_1})\right]\ldots,t(x_{i_k})\right]\right]\end{array}\right) \qquad (\text{mod } F'')
\end{aligned}$$

$y(g)=g$ eşitliğinde derecelerin karşılaştırılması ile $f=h=0$ elde ederiz.

Böylece $y=t$ bir otomorfizm olduğu görülür.

$g\in L$ ve $g\notin L'$ olsun. $l_1,l_2\in U(L/L')$ olmak üzere

$$f:x_1\to x_1+l_1.\left[x_1,x_2\right]$$
$$f:x_2\to x_2+l_2.\left[x_1,x_2\right]$$

endomorfizmini göz önüne alalım.

$l_1=\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$ ve $l_2=-\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ alalım.

O zaman,

$l_1.\frac{\partial g}{\partial x_1} + l_2.\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial x_2}.\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_1}.\frac{\partial g}{\partial x_2} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_1}\right]$ elde edilir.

$\left[\frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_1}\right]$ elemanı $U(L/L')$ cebirinde sıfıra eşittir. Lemma 4.1.' den g elemanı f altında invaryant kalır. Ancak ,

$l_1 \frac{\partial [x_1, x_2]}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial [x_1, x_2]}{\partial x_2} = -\frac{\partial g}{\partial x_2}.x_2 - \frac{\partial g}{\partial x_1}.x_1 = -g$ dir.

$g \notin L'$ olduğundan Lemma 4.2. den f bir otomorfizm değildir.

Teorem 4.6. F, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $L = F/F''$ olsun. O zaman L nin test rankı $n-1$' e eşittir.

İspat. $n \geq 3$ olsun ve $\{f_1, f_2, ..., f_{n-2}\}$ bir test kümesi olsun.

y endomorfizminin

$y(x_i) = x_i + l_i.c$, $c \in L'$, $l_i \in U(L/L')$, $1 \leq i \leq n$

$\{f_1, f_2, ..., f_{n-2}\}$ kümesini invaryant bırakması için gerek ve yeter koşul

$\sum_{i=1}^{n} l_i.\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \qquad j = 1,2,.....,n-2$ olmasıdır. (I)

$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)$ vektörleri tarafından üretilen alt modülün rankı $j = 1,2,.....,n-2$ için $n-2$ ye eşittir veya daha azdır.

(I) sisteminin $U(L/L')$ de en az iki lineer bağımsız çözümü olduğu açıktır.

c , $c_m = [x_1, x_m]$ $m = 2,.....,n$ şeklindeki komutatörlerden biri olsun.

$\left(\frac{\partial c_m}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial c_m}{\partial x_n}\right)$ vektörleri $U(L/L')$ üzerinde bağımsız olduklarından $m = 2,.....,n$ için (I) sisteminin çözümlerinden biri $\sum l_i \frac{\partial c_m}{\partial x_i} = 0$, $m = 2,.....,n$

denklem sistemini sağlamayacaktır bu yüzden y endomorfizmi $\{f_1, f_2, ..., f_{n-2}\}$ kümesini invaryant bırakır ve Lemma 4.2. den y bir otomorfizm değildir.

Böylece $\{f_1, f_2, ..., f_{n-2}\}$ bir test kümesi olamaz.

Şimdi $\{c_2, ..., c_n\}$ kümesinin bir test kümesi olduğunu ispatlayacağız.

f, L nin bir $\{c_2, ..., c_n\}$ kümesini invaryant bırakan bir endomorfizm olsun.

$i = 2, ..., n$, $j = 1,2, ..., n \in U(L/L')$ olmak üzere $\frac{\partial f(c_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$ Fox türevlerini hesaplayalım.

$c_i = [x_1, x_i]$ ise $f(c_i) = [f(x_1), f(x_i)]$ olur.

$$\frac{\partial f(c_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[f(x_1), f(x_i)] = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial f(x_1)} \cdot \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial f(x_i)} \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j}$$

$$= -f(x_i) \cdot \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_j} + f(x_1) \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j}$$

$j \neq i, 1$ için $-\overline{f(x_i)} \cdot \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_j} + \overline{f(x_1)} \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} = 0$

$j = i$ için $-\overline{f(x_i)} \cdot \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_i} + \overline{f(x_1)} \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \overline{x_1}$ (II)

$j = 1$ için $-\overline{f(x_i)} \cdot \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + \overline{f(x_1)} \cdot \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_1} = -\overline{x_i}$

Burada üst çizgi , $U(L) \to U(L/L')$ cebir homomorfizmi altında elemanların görüntüleridir.

Şimdi aşağıdaki matrisi düşünelim:

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & .... & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \\ \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_2)}{\partial x_1} & \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} & .... & \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_2)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_1} & \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_2} & .... & \overline{f(x_1)}\dfrac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(II)' yi kullanarak

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & .... & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \\ -\overline{x_2}+\overline{f(x_2)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \overline{x_1}+\overline{f(x_2)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & .... & \overline{f(x_2)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ -\overline{x_n}+\overline{f(x_n)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \overline{f(x_n)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & .... & \overline{x_1}+\overline{f(x_n)}\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\det A$' yı hesaplayalım:

$$\det A=\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_4} & .... & \dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_n} \\ -\overline{x_2} & \overline{x_1} & 0 & 0 & .... & 0 \\ -\overline{x_3} & 0 & \overline{x_1} & 0 & .... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ -\overline{x_n} & 0 & 0 & 0 & .... & \overline{x_1} \end{bmatrix}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_j}.\overline{x_j}\right)\overline{x_1}^{n-2}=\overline{f(x_1)}.\overline{x_1}^{n-2} \text{ olur.}$$

Aynı zamanda $\det A=\overline{f(x_1)}^{n-1}.\det J_f$ dir.

Burada J_f , $\left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ f nin jacobian matrisidir.

Bu yüzden $\overline{f(x_1)}^{n-1}.\det Jf = \overline{f(x_1)}.\overline{x_1}^{n-2}$ dir.

Sonuç olarak,

$\overline{f(x_1)}.\left[\overline{x_1}^{n-2} - \overline{f(x_1)}^{n-2}.\det J_f\right] = 0$ olup $\overline{f(x_1)}^{n-2}.\det J_f = x_1^{n-2}$ dir.

Teorem 4.7. L, $X = \{x_1,.....,x_n\}$ tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri olsun. $n \ge 2$ için L 'nin $\{f_1,....., f_{n-1}\}$ kümesi bir test kümesi ise

a)bu küme L nin türetilmiş alt cebirine aittir.

b)bu küme $U\left(L/L'\right)$ üzerinde bağımsızdır.

İspat. a) $\{f_1, f_2,...., f_{n-1}\}$ bir test kümesi olsun. Kabul edelim ki $f_1 \notin L'$ olsun.

$f_1 = ax_1 + u$, $a \neq 0$, $a \in K$, $u \in L$ şeklinde düşünebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözümü vardır.

$f(x_i) = x_i + l_i.u$, $i = 1,....,n$ endomorfizmi $\{f_1,....., f_{n-1}\}$ kümesinin elemanlarını invaryant bırakır. Bu yüzden $\sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ dır. (Lemma 4.1.' den)

(3)' ten $l_1\left(a + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + l_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + l_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ elde ederiz.

Buradan $l_1 = 0$ dır.

Kabul edelim ki $0, l_2,....., l_n$ (3) 'ün sıfırdan farklı bazı çözümleri olsun.

Şimdi, u yerine $c_j = \lfloor x_1, x_j \rfloor$, $j = 2,3,....,n$ yazalım.

O zaman $\sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = 0$, $j = 2,3,....,n$ sağlanmalıdır.

Bu yüzden,

$l_1 x_j + l_j x_1 = 0$, $j = 2,3,....,n$ ve $l_j = 0$, $j = 2,3,....,n$ elde ederiz.

Buradan, x_i' ler üreteç kümesi olduğundan, bütün $i = 1,.....,n$ için $l_i = 0$ olur bu da (3) sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözüme sahip olması ile çelişir.

b) Bazı $a_1,.....,a_{n-1} \in U\left(L/L'\right)$ için $a_1 f_1 = a_2 f_2 + ... + a_{n-1} f_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. f, otomorfizm olmayan bir endomorfizm olsun bu f endomorfizmi $f_2,....., f_{n-1}$ ' i invaryant bırakır.

O zaman,

$$f(a_1 f_1) = a_2 f_2 + ... + a_{n-1} f_{n-1} = a_1 f_1 \text{ ve } f(f_1) = f_1 \text{ dir.}$$

Yani f bütün $f_1,....., f_{n-1}$ elemanlarını invaryant bırakır ve bir otomorfizm değildir. Bu çelişki de ispatı tamamlar.

Şimdi verilen tüm bilgiler sayesinde aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.8. L**,** rankı 2 olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun

a) L**'** nin bir U test kümesini bulunuz.

b) U**'** yu sabit bırakan birkaç endomorfizm yazınız.

c) U**'** yu sabit bırakmayan bir otomorfizm yazınız.

Çözüm. a) L**,** $X = \{x_1, x_2\}$ kümesi tarafından üretilen sebest metabelyen Lie cebiri olsun. L' nin rankı 2 olduğundan L' nin test kümesi $(n-1)$ elemanlı olup $U = \{f_1\}$ formundadır ve $f_1 \in L'$ dir.

L' nün her elemanı bir test elemanıdır.

b) $f : x_1 \to x_1 - x_2$

$x_2 \to -x_1 + 2x_2$ ve $u = \{[x_1, x_2]\}$

olsun.

$$f[x_1, x_2] = [f(x_1), f(x_2)] = [x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2]$$
$$= [x_1, -x_1] + [x_1, 2x_2] + [-x_2, -x_1] + [-x_2, 2x_2]$$
$$= 2[x_1, x_2] + [x_2, x_1] = [x_1, x_2]$$

olup $f[x_1, x_2] = [x_1, x_2]$ dir.

O halde f, U 'yu sabit bırakan bir endomorfizmdir.

Ayrıca , $\Psi : x_1 \to 2x_1 + x_2$

$x_2 \to x_1 + x_2$

endomorfizmi de U ' yu sabit bırakır.

c) $a : x_1 \to x_1 - x_2$

$x_2 \to -x_1 - 2x_2$

olsun.

$$a[x_1, x_2] = [a(x_1), a(x_2)] = [x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2]$$
$$= [x_1, -x_1] - 2[x_1, x_2] + [x_2, x_1] + 2[x_2, x_2]$$
$$= -3[x_1, x_2]$$

Buradan da görüldüğü gibi $a[x_1, x_2] = -3[x_1, x_2]$ olup a, U 'yu sabit bırakmayan bir otomorfizmdir.

O halde

Örnek 4.9. L **,** rankı 3 olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun.

a) L **'** nin bir U test kümesini bulunuz.

b) U **'** yu sabit bırakan bir endomorfizm yazınız.

c) U **'** yu sabit bırakmayan bir otomorfizm yazınız.

Çözüm. a) $L=\{x_1,x_2,x_3\}$ olsun. L nin test kümesi $U=\{c_2,c_3\}$ olsun.

$i=1,2$ için $c_i=[x_1,x_i]$ alalım . O halde $c_2=[x_1,x_2]$ ve $c_3=[x_1,x_3]$ olur.

b) $j: x_1 \to x_1$

$x_2 \to x_2$

$x_3 \to x_1+x_3$

olsun.

$f(c_2)=f([x_1,x_2])=[f(x_1),f(x_2)]=[x_1,x_2]$

$f(c_3)=f([x_1,x_3])=[f(x_1),f(x_3)]=[x_1,x_1+x_3]=[x_1,x_1]+[x_1,x_3]=[x_1,x_3]$

Görüldüğü gibi f , U ' yu sabit bırakan bir endomorfizmdir.

c) $j: x_1 \to x_1+[x_2,x_3]$

$x_2 \to x_2$

$x_3 \to x_3$

olsun.

$j(c_2)$ ye bakalım:

$j(c_2)=j([x_1,x_2])=[j(x_1),j(x_2)]$

$=[x_1+[x_2,x_3],x_2]=[x_1,x_2]+[[x_2,x_3],x_2]$

şeklinde olup j , c_2 ' yi sabit bırakmıyor.

Buradan j , U 'yu sabit bırakmayan bir otomorfizmdir.

Not: Yukarıdaki örneklerden açıkça görüldüğü gibi bir test kümesi bir endomorfizm altında invaryant kalıyorsa o endomorfizm bir otomorfizm olmak zorundadır fakat her otomorfizmin bir test kümesini invaryant bırakması gerekmez.

5.RANKI 2 OLAN SERBEST CEBİRLERDE YÖRÜNGELER

Bu bölümde 2 üreteçli Lie cebirleri ve serbest metabelyen Lie cebirleri göz önüne alınarak yörüngeleri hakkında bilgi verilecektir. Serbest Lie cebirlerinde sıfırdan farklı bir yörüngeyi koruyan bir endomorfizmin otomorfizm olduğu gösterilecektir. Aynı sonuç elemanları komutatör idealden gelen serbest metabelyen Lie cebirleri için de doğrudur. Eğer elemanlar komutatör idealden gelmiyorsa sonuç cisime bağlıdır. Cismin sonlu olması halinde primitif elemanların yörüngelerini koruyan ve otomorfizm olmayan endomorfizmler vardır. Sonsuz cisimlerde ise yörüngeleri koruyan her endomorfizm bir otomorfizmdir.

K bir cisim , L de x ve y tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $w \in L$ için $O(w)$ ile w nun yörüngesini gösterelim.

Açıklama 5.1. y , L**'** nin $y\,(O(w)) \subseteq O(w)$ olacak şekilde bir endomorfizmi olsun. f, L nin bir otomorfizmi olsun.

$$(y\,o\,f)(O(w)) = y\,(O(w)) \subseteq O(w),$$

$$(f\,o\,y)(O(w)) \subseteq f(O(w)) = O(w)\ ,$$

olup $y\,o\,f$ ve $f\,o\,y$ ayrıca w nun yörüngesini korur.

$y\,o\,f$ veya $f\,o\,y$ otomorfizm ise y de bir otomorfizmdir.

Örneğin, eğer $y\,(w) = w_1 \in O(w)$ ise en az bir $f \in AutL$ vardır öyle ki $y\,(w_1) = w \in O(w)$ dır ve y yerine $f\,o\,y$ alınırsa $y\,(w) = w$ sonucu elde edilir.Yani y hem w'yu hem de $O(w)$' yu sabit bırakır.

Tanım 5.2. $X = \{x_1,.....,x_n\}$ ve $Y = \{y_1,...,y_n\}$ bir F serbest Lie cebirinin iki serbest üreteç kümesi olmak üzere her $f : X \to Y$ otomorfizmi F nin bir otomorfizmine genişletilebilir. Böyle otomorfizmlere "tame" denilir. Sonlu ranklı serbest Lie cebirinin her otomorfizmi tame dir

Önerme 5.3. L nin her f otomorfizmi lineerdir. Yani $GL_2(K)$ ya aittir ve $f(x)=ax+by$, $f(y)=gx+dy$, $a,b,g,d\in K$ şeklinde tanımlanır. $\begin{pmatrix} a & b \\ g & d \end{pmatrix}$ matrisi tersinirdir.

Lemma 5.4. $0\neq w\in L$ olmak üzere , y

$$y\,(O(w))\subseteq O(w)=(AutL)(w)$$

olacak şekilde bir endomorfizm olsun. y nin lineer kısmı tersinirdir, yani $y(x)=ax+gy+f$, $y(y)=bx+dy+g$ olup $a,b,g,d\in K$, $f,g\in L'=[L,L]$ ve $y_o(x)=ax+gy$, $y_o(y)=bx+dy$ şeklinde gösterilen $y_o\in GL_2(K)$ dır.

İspat. $y(x)=ax+gy+f$, $y(y)=bx+dy+g$, $a,b,g,d\in K$, $f,g\in L'=[L,L]$ olsun ve $w_o(x,y)$, w'nun minimal dereceli terimi olsun.

Eğer $\deg w_o>1$ ise açıklama 5.1 kullanılarak $y(w)=w$ olduğunu kabul edebiliriz.

Yani,

$w_o(ax+gy,bx+dy)=w_o(x,y)$ olup $(ax+gy,bx+dy)\neq(0,0)$ dır.

$w_o=[x,y]$ olsun.

$y(w_0)=w_0$ ise $y([x,y])=[x,y]$ buradan $[y(x),y(y)]=[x,y]$ dir.

Böylece $[ax+gy,bx+dy]+*=[x,y]$ şeklinde olur.

$ax+gy$, $bx+dy$ lineer bağımlı olsun $ax+gy=k(bx+dy)$ olur.

Buradan $[k(bx+dy),bx+dy]+*=[x,y]$ dır.

O halde $ax+gy$, $bx+dy$ lineer bağımsızdır ve y nin lineer kısmı tersinirdir.

Şimdi $\deg w_o=1$ olsun.

$w(x,y)=xx+ty+w_1$, $(x,t)\neq(0,0)$, $x,t\in K$, $w_1\in L'$ ve $ax+gy$, $bx+dy$ lineer bağımlı olsun.

$f \in AutL$ için y yerine de foy alınırsa $b = g = d = 0$ ve $g \in L'$ iken $y(x) = x + f$, $y(y) = g$ kabul edebiliriz. w nun yörüngesinden gelen her elemanın sıfırdan farklı bir bileşeni vardır. L nin öyle bir otomorfizmi vardır ki, $h \in L'$ olmak üzere $w \to v = y + h(x, y)$ elemanına götürür. Fakat $y(h) = g + y(h) \in L'$ olması mümkün değildir. Tekrar y nin lineer bileşeninin tersinir olduğunu elde ederiz.

Herhangi ranklı serbest Lie cebirinin sıfırdan farklı bir f elemanı için f' ile f nin en yüksek dereceli homogen kısmını gösterelim.

Önerme 5.5. $f_1, ..., f_m$ serbest bir Lie cebirinin sıfırdan farklı elemanları olsun. Eğer bu elemanlar arasında aşikar olmayan bir bağıntı varsa, $f_1', ..., f_m'$ terimlerinden birisi diğerlerinin ürettiği Lie cebirine aittir. $(f_i' \in < f_1', ..., f_{i-1}', f_{i+1}', ..., f_m' >)$

Sonuç 5.6. $0 \neq f$, $g \in L$ olsun. Eğer $h(f, g) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $h(x_1, x_2)$ Lie polinomu varsa o zaman $x \in K$ olmak üzere $f' = xg'$ dir.

Teorem 5.7. L rankı 2 olan serbest Lie cebiri olsun. y, L nin sıfırdan farklı bir elemanının yörüngesini sabit bırakan bir endomorfizm ise y bir otomorfizmdir.

İspat. $\deg y(x) + \deg y(y)$ üzerinde tümevarım ile gösterelim. Lemma 5.4' den $y(x)$ ve $y(y)$ nin lineer kısımları trivial olmayıp $\deg y(x) + \deg y(y) \geq 2$ dir.

Eğer $\deg y(x) + \deg y(y) = 2$ ise y lineer endomorfizm olup Lemma 5.4'den y bir otomorfizmdir.

Şimdi $\deg y(x) + \deg y(y) > 2$ olsun.

$y(x) = ax + gy + f$, $y(y) = bx + dy + g$, $a, b, g, d \in K$, $f, g \in L' = [L, L]$ olsun. f nin leading teriminin sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim.

$AutL = GL_2(K)$ olduğundan $O(w)$ daki bütün elemanların dereceleri aynıdır.

$g \neq 0$ olsun ve $y(x)$ ve $y(y)$ nin dereceleri aynı bileşenlerinin mümkün olan en yüksek dereceli homogen bileşenlerinin etkisini göz önünde bulunduralım.

f' ve g' $y(w)$ nın leading kısmında yer alır.

$$y(w) = w(ax + gy + f, bx + dy + g)$$

eşitliğindeki dereceler karşılaştırıldığında f' ve g' nün trivial olmayan bir bağıntı sağladığını söyleyebiliriz. Şimdi bunu inceleyelim:

$w = [x, y]$

$y(w) = w$ ise $[y(x), y(y)] = [x, y]$

$[ax + gy + f, bx + dy + g] = [x, y]$ dir.

$$[ax, bx] + [ax, dy] + [ax, g] + [gy, bx] + [gy, dy] + [gy, g] + [f, bx] + [f, dy] + [f, g] = [x, y]$$

$$(ad - gb)[x, y] + a[x, g] + g[y, g] + b[f, x] + d[f, y] + [f, g] = [x, y]$$

Sonuç 5.6'dan en az bir $x \in K$ vardır öyle ki $f' = xg'$ dir.

Eğer $g = 0$ kabul edersek $y(y)' = y(y)$ lineerdir.

Benzer yolla $g \neq 0$ ise $f' = xy(y)$ elde edilir ki bu mümkün değildir, çünkü $0 \neq f \in L'$ dir.

Şimdi L nin q lineer otomorfizminin

$$q(x) = x - xy$$

$$q(y) = y$$

şeklinde tanımlandığını kabul edelim.

$y_1 = y \circ q$ olsun. Açıklama 5.1'den y_1 de w nun yörüngesini korur.

$$y_1(x) = (y \circ q)(x) = y(x - xy) = y(x) - xy(y)$$

$$= ax + gy + f - x(bx + dy + g)$$

$$= (a - xb)x + (y - xd)y + (f - xg)$$

$(a - xb) = a_1$, $(g - xd) = g_1$ ve $(f - xg) = f_1$ alınırsa

$$= a_1 x + g_1 y + f_1 = y(x)$$ elde edilir.

Böylece $y_1(x) = y(x)$ elde edilir benzer şekilde $y_1(y) = y(y)$ dir.

Buradan $f_1 = f - xg$ dir.

$f' = xg'$ olduğundan eğer $f_1 \neq 0$ ise $\deg f_1 < \deg f$ olduğu sonucu elde edilir.

Eğer $f_1 = 0$ ise $\deg y_1(x) = 1 < \deg y(x)$ dir.

Buradan $\deg y_1(x) + \deg y_1(y) < \deg y(x) + \deg y(y)$ olduğundan y_1 bir otomorfizm olup y de bir otomorfizmdir. Ayrıca $y = y_1 o t^{-1}$ de bir otomorfizmdir.

Açıklama 5.8. İki üreteçli serbest Lie cebirinde test polinomları L' nün sıfır olmayan elemanlarıdır.

5.1. Serbest Metabelyen Lie Cebirleri

$G = L/L''$ ile x ve y tarfından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri gösterilsin.

L'/L'' cebiri $[y, x, x, ..., x, y, ..., y] = [y, x](ad^a x)(ad^b y),\ a, b \geq 0$

şeklindeki elemanlarından oluşan bir baza sahiptir.

İki değişkenli $K[t,u]$ polinom cebirinin L'/L'' üzerindeki etkisini

$t^c u^d * ([y, x](ad^a x)(ad^b y)) = [y, x](ad^{a+c} x)(ad^{b+d} y)$

şeklinde tanımlayalım.

Buradan L'/L'' , $[y, x]$ tarafından üretilen serbest $K[t,u]-$ modüldür.

G nin ∂ derivasyonu için

$$(\exp \partial)(w) = w + \frac{\partial(w)}{1!} + \frac{\partial^2(w)}{2!} + \mathbf{K}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm G nin bir otomorfizmidir.

Eğer $chaK = p > 0$ ise $\partial^p = 0$ dır.

$v \in L'/L''$ ise $adv(w) = [w, v]$ olarak tanımlanan dönüşüm için $ad^2 v = 0$ dır ve $\exp(adv)$ bir iç otomorfizmdir.

Önerme 5.1.1. L/L'' nin her otomorfizmi bir iç ve lineer otomorfizmin bileşkesidir.

L'/L'' üzerinde birim rolünü oynayan her otomorfizm bir iç otomorfizmdir.

Sonuç 5.1.2. $w \in L/L''$ nün primitif olması için gerek ve yeter koşul

$w = xx + hy + (xt + hu)h(t,u) * [y,x]$, $x,h \in \in K, (x,h) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 5.1.3. L/L'' nün y endomorfizmi eğer $0 \neq w \in L'/L''$ elemanının yörüngesini koruyorsa y bir otomorfizmdir.

Teorem 5.1.4. K sonlu bir cisim olsun. L/L'' nün otomorfizm olmayan ancak primitif elemanlarının yörüngelerini koruyan monomorfizmleri vardır.

İspat. $y(x) = x + \prod_{a \in K} (t + au) * [y,x]$ **,** $y(y) = y$

şeklinde tanımlanan y sonuç 5.1.2'den bir otomorfizm değildir.

$w = xx + hy + (xt + hu)h(t,u) * [y,x]$, $x,h \in K$, $(x,h) \neq (0,0)$, $h(t,u) \in K[t,u]$,

primitif eleman ise

$y(w) = xx + hy + x\prod_{a \in K} (t + au) * [y,x] + (xt + hu)h(t,u) * [y(y), y(x)]$ olur.

$(xt + hu)h(t,u) * [y(y), y(x)] = \otimes$ olalım.

Eğer $x \neq 0$ ise $xt + hu = x(t + au)$ dır.

Eğer $x = 0$, $h \neq 0$ ise $y(y)$ nin komutatör parçası $(\otimes)$, u ile bölünebilir ve $y(w)$ primitiftir.

Teorem 5.1.5. K sonsuz bir cisim olsun. Rankı iki olan serbest metabelyen Lie cebirinin primitif elemanlarının yörüngelerini koruyan her endomorfizmi bir otomorfizmdir.

İspat. y bu özelliğe sahip bir endomorfizm olsun. Önceki durumlardan dolayı y nin bir monomorfizm olduğunu kabul edelim. $y(y)$ bir primitif eleman olduğundan genelliği kaybetmeksizin $y(y) = y$ olduğunu kabul edelim. $y(x)$ de

$$y(x) = x + ft*[y,x],\quad f(t,u) \in K[t,u].$$

$x + ay,\ a \in K$ primitif elemanını düşünelim. Açıkça

$$y(x+ay) = x + ay + f(t,u)t*[y,x]$$

$x + ay = t + au$ alsun.

ve $y(x+ay)$ primitif olduğundan $t + au,\ f(t,u)t$ ' yi her $a \in K$ için böler.

Cisim sonsuz olduğundan $f(t,u).t = 0$ dır.

O halde y bir otomorfizmdir.

6.İKİ ÜRETEÇLİ SERBEST METEBALYEN LİE CEBİRLERİNİN PRİMİTİF ELEMANLARI VE OTOMORFİZİMLER

A=A(X) ve F sırasıyla bir K cismi üzerinde bir $X=\{x_1,...,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest asosyatif cebir ve serbest Lie cebiri olsun. A cebiri a,b ∈ A için $[a,b]$=ab-ba çarpımı ile bir serbest Lie cebiri olup bu cebiri $[A]$ ile gösterelim. Bu durumda F, $[A]$ cebirinin bir alt cebiridir. Gerek serbest gruplarda gerekse serbest Lie cebirlerinde bir elamanın primitif olup olmadığını belirleyen bir çok kriter elde edilmiştir. V.Drensky ve J.T. Yu iki üreteçli serbest Lie cebirlerinde yörüngeyi koruyan endomorfizmlerin birer otomorfizm olduklarını ispatlamışlardır. Bir endomorfizmin bir otomorfizm olup olmadığını ayırt etme problemi, üzerinde çok çalışılan bir problemdir. (Mikhalev, 1994) 'de cismin cebirsel kapalı olmaması durumunda serbest üreteçlerin herhangi bir lineer toplamının bir f endomorfizmi altındaki görüntüsü primitif olsa dahi f nin otomorfizm olamayacağını göstermiştir. Eğer cisim cebirsel kapalı ise rankın 2'den büyük olması durumunda bu problem açık bir problemdir.

Bu bölümde rankı 2 olan serbest metebalyen Lie cebirlerinin primitif elemanlarının yapısı incelendi. Ayrıca serbest üreteçlerinin herhangi bir lineer toplamının bir f endomorfizmi altındaki görüntüsünün primitif olması durumunda f 'nin bir otomorfizm olduğu ispatlandı.

$L = F/F''$ olsun.

Tanım 6.1. F serbest Lie cebirinin bir u elemanı eğer F nin bir serbest üreteç kümesine ait ise u ya F nin bir primitif elemanı denir.

Aşağıdaki teorem F nin bir elemanının primitif olup olmadığını belirlemede önemli rol oynar.

Teorem 6.2. F nin bir u elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul hepsi aynı anda sıfır olmayan $a_1,,,,,a_n \in A$ için

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}a_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}a_n = 1$$

olmasıdır.

İki üreteçli serbest Lie cebirlerinin otomorfizm grubu $GL(2,K)$ grubuna izomorf olduğundan bu cebirlerin primitif elemanları bir otomorfizm altında primitif elemanların görüntüsü olup $a,b \in K$ ve x_1, x_2 serbest üreteçler olmak üzere $ax_1 + bx_2$ formundadırlar. Gerçekten de $ad - bc \neq 0$ olacak şekildeki b,d skalerleri için

$$\Phi(x_1) = ax_1 + ax_2 \ , \quad \Phi(x_2) = cx_1 + dx_2$$

olarak tanımlanan endomorfizm bir otomorfizmdir. Bu da $ax_1 + bx_2$ elemanının primitif olduğunu gösterir.

İki üreteçli serbest Lie cebirlerinin otomorfizm grubu oldukça basit bir yapıya sahip olmasına rağmen, serbest metabelyen Lie cebirlerinin otomorfizm grubu daha karmaşıktır.

$A(X)$ asosyatif cebirinde F' tarafından üretilen sağ ideali I ile gösterelim.

Aşağıdaki teorem Shpilrain tarafından $[8]$'de ispatlanmıştır.

Teorem 6.3. Φ, L nin bir endomorfizmi olsun. Φ nin bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul J_Φ nin A/I üzerinde tersinir olmasıdır.

6.1.Primitif Elemanlar

$F,\{x_1,x_2\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri, $L=F/F''$ ve $I,A(X)$ in F' tarafından üretilen sağ ideali olsun.

Teorem 6.1.1. L nin bir w elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul $a,b\in K,\ (a,b)\neq(0,0)$ ve $v\in F'/F''$ için

$$w=ax_1+bx_2+a[x_1,v]+b[x_2,v]$$

olmasıdır.

İspat. $w\in L$ elemanı $w=ax_1+bx_2+a[x_1,v]+b[x_2,v]$ formunda olsun. Burada $a,b\in K,(a,b)\neq(0,0)$ ve $v\in F'/F''$ dür.

$$w=a(x_1+[x_1,v])+b(x_2+[x_2,v])$$

$$=ae^{adv}(x_1)+be^{adv}(x_2)$$

$$=e^{adv}(ax_1+bx_2)$$

Şimdi L'nin $ad-bc\neq 0,\ c,d\in K$ olmak üzere

$$t(x_1)=ax_1+bx_2$$

$$t(x_2)=cx_1+dx_2$$

şeklinde tanımlanan otomorfizmini düşünelim. Bu durumda

$$w=e^{adv}ot(x_1)$$

olup primitif elemanın bir otomorfizm altındaki görüntüsü de primitif olduğundan w primitif olur.

Şimdi L nin bir w elemanının primitif olduğunu varsayalım. O zaman L nin bir Φ otomorfizmi için $\Phi(x_1)=w$ dur.

bir $v\in F'/F''$ için ve L nin bir

$$t : x_1 \to ax_1 + bx_2$$
$$x_2 \to cx_1 + dx_2$$

lineer otomorfizmi için $\Phi = e^{adv} o\, t$ şeklindedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} w &= \Phi(x_1) \\ &= e^{adv} o\, t\,(x_1) \\ &= e^{adv}(ax_1 + bx_2) \\ &= ax_1 + bx_2 + a[x_1, v] + b[x_2, v] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.1.2. Φ, L nin bir endomorfizmi olsun. x_1, x_2 nin herhangi bir sıfırdan farklı lineer toplamının f altındaki görüntüsü primitif ise Φ bir otomorfizmdir.

İspat. $\Phi(x_1) = y_1$ diyelim. Hipotezden y_1 primitiftir. Bu durumda L' nin bir Ψ otomorfizmi için $\Psi(y_1) = x_1$ dir.

$q = \Psi\Phi : L \to L$ endomorfizmini düşünelim.

$\Psi\Phi(ax_1 + bx_2)$ elemanı Ψ bir otomorfizm olduğunda primitiftir.

O halde $\Psi\Phi$ x_1 ile x_2 nin herhangi bir lineer toplamını primitif elemana dönüştürür. Buna göre

$$q(x_1) = \Psi\Phi(x_1) = \Psi(y_1) = x_1$$
$$q(x_2) = ax_1 + bx_2 + a[x_1, v] + b[x_2, v] \;,\quad a, b \in K, a \neq 0, b \neq 0, v \in F'$$

şeklindedir.

Şimdi $g = x_2 - ax_1$ elemanını düşünelim.

$$\begin{aligned} q(g) &= q(x_2 - ax_1) \\ &= q(x_2) - aq(x_1) \\ &= ax_1 + bx_2 + a[x_1, v] + b[x_2, v] - ax_1 \end{aligned}$$

$$q(x_2 - ax_1) = bx_2 + a[x_1, v] + b[x_2, v]$$

olup buradan $q(x_2 - ax_1)$ primitif olduğundan $a[x_1, v] = 0$ ve $v \in F''$ elde edilir.

Bu sonuçları birleştirirsek

$$q(x_1) = x_1$$
$$q(x_2) = bx_2$$

olduğu görülür. q 'nın Jacobianı

$$J_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

olup

$\det J_q = b$ dır.

$\det J_q = 0 \pmod{I}$ olup Teorem 6.3'den q bir otomorfizmdir. O halde $\Psi^{-1} q = \Phi$ de bir otomorfizmdir.

7. SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN YÖRÜNGEYİ KORUYAN ENDOMORFİZMLERİ

K bir cisim olsun. F_2 ile K üzerinde x_1 ve x_2 tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebirini gösterelim ve A, F nin otomorfizm grubu olsun.

P_2 ile K üzerinde $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ bilinmeyenlerine sahip polinom cebirini gösterelim. Bu cebir U(F_2/F_2') evrensel enveloping cebirine izomorftur ve bu yüzden F_2' cebiri üzerinde doğal etkiye sahiptir. Yani; $v \in F'$ ve $x_1,....,x_k$ monomiali için $v.x_1.....x_k = [[v, x_1],....]x_k]$ dır.

c $= [x_1, x_2]$, elemanını düşünelim.

Nokta işareti ile P_2 nin F_2' üzerindeki etkisini ve $c.\overline{x_1}$ ve $c.\overline{x_1}\,\overline{x_2}^2$ ile aşağıdaki elemanları gösterelim.

$$c.\bar{x}_1 = [\,[\,x_1, x_2\,], x_1\,] \quad , \quad c.\bar{x}_1.\bar{x}_2^2 = [[[\,[\,x_1, x_2\,], x_1\,]\,, x_2\,]\,,\ x_2\,]$$

P_2 nin GL_2(K) üzerindeki etkisini $u \in P_2$ ve $l \in GL_2$(K) için $l.u$ ile gösterelim.

F_2 nin her bir a endomorfizmi x_1 ve x_2 üreteçlerinin görüntüleri olan y_1 ve y_2 tarafından belirlenir öyle ki $(x_1,\ x_2)\,a = (y_1,\ y_2)$ dır.

Tanım . $j : F_2 \to F_2$ otomorfizmi modulo F_2' birim oluyorsa j ye bir IA otomorfizm denir. F_2 nin tüm IA otomorfizmlerinin grubunu IA ile gösterelim.

F_2 nin otomorfizm grubu olan A , $GL_2(K)$ ya izomorf olan tersinir lineer otomorfizmlerin alt grubunu içerir. Her $s \in$ A otomorfizmi için öyle bir l lineer dönüşümü bulunabilir ki $l\,s$ tarafından belirlenen otomorfizm F_2/F_2' üzerinde aşikardır. Bu nedenle A, IA normal alt grubunun $GL_2(K)$ ile genişlemesidir.

Her $s \in$ A , F_2/F_2' üzerinde u$\in$ P_2 olmak üzere

$$(x_1, x_2)\, s = (x_1 + \text{c.u.}\, \bar{x}_1 ,\ x_2 + \text{c.u.}\, \bar{x}_2) \qquad (1)$$

şeklindedir. [9]

Önceki not ile beraber l_1 ve l_2 K nın aynı anda sıfır olmayan elemanları ve v$\in$ P_2 olmak üzere F_2 nin her primitif elemanı

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \text{c.}(l_1 \bar{x}_1 + l_2 \bar{x}_2).\text{v} \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca bu bölümde $s, t \in$ A olmak üzere a yerine $s\,a\,t$ kullanılacaktır.

7.1.Sonlu Cisimler

Bu kısımda, cismin sonlu olması durumunda serbest metabelyen Lie cebirinin bir primitif elemanının yörüngesini koruyan endomorfizmlerin otomorfizm olmayabileceğini gösteren örnekler vereceğiz.

Önerme 7.1.1. K sonlu bir cisim olsun. $w \in P_2$ öyle ki $w = \prod_{x \in K} (\bar{x}_1 + c\bar{x}_2)$ olarak tanımlansın. $g = x_1 \in F'$ ve a endomorfizmi

$$(x_1, x_2)a = (x_1 + c.\bar{x}_1, x_2 + c.\bar{x}_2(1-w))$$

olarak alınsın.

öyleyse

(i) a , gA nın yörüngesini korur;

(ii) a, F' nin bir otomorfizmi değildir.

İspat. (ii), (1) den elde edilir. (i) yi ispatlayalım. x_1 in yörüngesi

$$h = l_1 x_1 + l_2 x_2 + c.(l_1 \bar{x}_1 + l_2 \bar{x}_2)v,$$

şeklindeki elemanlardan oluşur. $l_1, l_2 \in K$ olup aynı anda sıfır değiller ve $v \in P_2$ dir.

Yani x_1 in yörüngesi $O(x_1) = \{f(x_1) \mid f \text{ otomorfizm}\} = \{h \mid l_1, l_2 \in K, (l_1, l_2) \neq 0\}$ şeklindedir.

$(x_1, x_2)a = (x_1 + \text{c.u.}\,\bar{x}_1\,,\ x_2 + \text{c.u.}\,\bar{x}_2)$ formunda idi.

a 'yı h'a uygularsak a nın h altındaki görüntüsü

$$ha = l_1x_1 + l_2x_2 + c(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2 - l_2\bar{x}_2w + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)(1 - \bar{x}_1\bar{x}_2w)v).$$

şeklinde olur.

ha primitiftir çünkü $l_1, l_2 \in K$ olup aynı anda sıfır değiller ve $\bar{x}_2w = 0 \bmod(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)$ alınırsa

$$ha = l_1x_1 + l_2x_2 + c(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2 + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v)$$

elde edilir bu da ispatı tamamlar.

7.2.Herhangi Cisimler

Lemma 7.2.1. Eğer F_2 nin bir a endomorfizmi sıfırdan farklı bir $g \in F_2$ nin otomorfik yörüngesini koruyorsa ve

$$(x_1, x_2)a = (l_{11}x_1 + l_{21}x_2 + c.w_1,\ l_{12}x_1 + l_{22}x_2 + c.w_2),$$

ise (l_{11}, l_{12}) ve (l_{21}, l_{22}) satırları lineer bağımsızdır. Burada $l_{ij} \in K$ ve $w_i \in P_2$, $i, j \in \{1,2\}$ dır.

İspat. Satırların hepsi sıfır alınırsa çelişki elde edilir. Çünkü otomorfik yörünge sıfır içermez. O halde iki durum vardır. Sırasıyla bunları inceleyelim.

Ayrıca $(x_1, x_2)a = (x_1 + c.w_1, c.w_2)$ kabul edebiliriz.

1.durum: $g = c.u \in F_2'$, $0 \neq u \in P_2$. a yı g ye uygulayalım.

$$a(g) = a(cu) = a([x_1, x_2].u) = [x_1 + cw_1, cw_2]u_1 = [x_1, cw_2]u_1 + [cw_1, cw_2]u_1$$
$$= [x_1, cw_2]u_1 = -[cw_2, x_1]u_1 = -c\bar{x}_1w_2u_1$$

$$= -[[x_1, x_2], x_1].w_2u_1$$

Şimdi $-[[x_1, x_2], x_1].w_2u_1$ ifadesine $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ dönüşümünü uygulayalım.

$-[[x_1, x_2], x_1]w_2u_1 = -[[x_2, x_1], x_1].w_2u_1 = [[x_1, x_2], x_2].w_2u_1$ elde edilir

$w_2u_1 = w \in P_2$ alalım.

Elde ettiğimiz son ifadeye a ' yı tekrar uygulayalım.

$$[[x_1, x_2], x_2].w_2u_1 = a([[x_1, x_2], x_2]w) = [[x_1 + cw_1, cw_2], cw_2].w$$
$$= [[x_1, cw_2] + [cw_1, cw_2], cw_2].w$$

$$= [[x_1, cw_2], cw_2].w = ([x_1, cw_2] + [cw_2, cw_2])w$$
$$= [x_1, [x_1, x_2].w_2].w = 0$$

elde edilir. Otomorfik yörünge sıfır içermez dolayısıyla bu çelişki ispatı tamamlar.

2.durum: $g \notin F_2'$ olsun. g lineer kısma sahip olsun.

$g = x_2 + c.u$, $u \in P_2$ olarak alabiliriz.

g nin a altındaki görüntüsüne bakalım:

$$a(g) = a(x_2 + [x_1, x_2].u) = a(cw_2 + [x_1 + cw_1, cw_2].u)$$
$$= (cw_2 + [x_1, cw_2].u + [cw_1, cw_2].u)$$
$$= 0$$

O halde (i) deki nedenden dolayı çelişki elde edilir.

Önerme 7.2.2. Eğer $0 \neq g \in F_2'$ ise F_2 nin $gAa \subseteq gA$ koşulunu sağlayan her a endomorfizmi F_2 nin bir otomorfizmidir.

7.3.Sonsuz Cisimler

Önerme 7.3.1. K sonsuz bir cisim olsun, bir $g \in F_2$ primitif elemanını alalım.

F_2 nin $gAa \subseteq gA$ koşulunu sağlayan her endomorfizmi F_2 nin bir otomorfizmidir.

İspat. $g = x_1$ alalım. a nın modulo F_2' birim olduğunu kabul edelim.

$(x_1, x_2) = (x_1 + c.w_1, x_2 + c.w_2)$, $w_1, w_2 \in P_2$ dir.

x_1' in yörüngesi F_2 nin bütün primitif elemanlarını içerir.

Bu elemanlar aynı anda sıfır olmayan $l_1, l_2 \in K$ ve $v \in P_2$ olmak üzere

$l_1x_1 + l_2x_2 + c.(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v$, formundadırlar.

Çünkü x_1 ve x_2 nin görüntüleri primitiftir, $w_1 = w_1'\bar{x}_1$ ve $w_2 = w_2'\bar{x}_2$ (2)

Herhangi bir $h = l_1x_1 + l_2x_2 + c.(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v \in gA$ alalım ve a yı uygulayalım.

$$ha = l_1(x_1 + c\bar{x}_1w_1') + l_2(x_2 + c\bar{x}_2w_2') + c(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v$$

$$= l_1x_1 + l_2x_2 + c.(l_1\bar{x}_1w_1' + l_2\bar{x}_2w_2' + (1 + \bar{x}_1\bar{x}_2(w_2' - w_1'))(l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v)$$

elde edilir. Buradan

$$l_1\bar{x}_1w_1' + l_2\bar{x}_2w_2' = l_1\bar{x}_1w_1' + l_1\bar{x}_1w_2' - l_1\bar{x}_1w_2' + l_2\bar{x}_2w_2'$$

$$= l_1\bar{x}_1(w_1' - w_2') + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)w_2'$$

elde edilir. Elde edilen son ifade $l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2$ ile bölünür.(bakınız(2))

$l_1 \neq 0$ olup $\bar{x}_1(w_1' - w_2')$ polinomu $l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2$ ile bölünebilir.

K nın sonsuz olması ancak $w_1' = w_2'$ olması durumunda mümkündür bu da a nın bir otomorfizm olduğunu gösterir.

Önerme 7.3.2. K sonsuz olsun ve bir $g \in F_2$ alalım öyle ki F_2' nün elemanı olmasın. Eğer F_2 nin bir a endomorfizmi A nın altında g nin yörüngesini koruyorsa a bir otomorfizmdir.

İspat. Lemma 7.2.1'den a nın lineer kısmı tersinirdir.

a ' yı bir lineer otomorfizmle değiştirelim,

$(x_1, x_2)a = (x_1 + c.w_1, x_2 + c.w_2)$, $w_1, w_2 \in P_2$.

Gerekirse g yerine gA nın bir elemanı ile değiştirilecek ve $g = x_1 + c.u$, $u \in P_2$ alalım. gA hesaplanırsa elemanlarının aşağıdaki formda olduğu görülür,

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + c.\left(|l|u^l + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v\right),$$

$l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ ve $v \in P_2$ dir.

a endomorfizmi uygulanırsa

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + c.(l_1 w_1 + l_2 w_2) + c.(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1)\left(|l|u^l + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v\right)$$

elde edilir.

Bütün $l \in GL_2(K)$ ve $v \in P_2$ için a ' nın gA' yı koruduğu gerekli ve yeterlidir $m \in GL(K)$ ve $v_1 \in P_2$ olsun ve aşağıdaki ifadeyi sağlasın

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + c.(l_1 w_1 + l_2 w_2) + c.(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1)\left(|l|u^l + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v\right)$$
$$= m_1 x_1 + m_2 x_2 + c.\left(|m|u^m + (m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2)v_1\right).$$

Bu da m nün birinci satırının l nın birinci satırı ile çakıştığını ifade eder.

$u, w_1, w_2 \in P_2$ verilsin öyle ki birinci satırı (l_1, l_2) ve her $v \in P_2$ ile her $l \in GL_2(K)$ için, birinci satırı l nın ki ile aynı olan en az bir $m \in GL_2(K)$ ve $v_1 \in P_2$ olsun, öyle ki

$$l_1 w_1 + l_2 w_2 + \left(|l|u^l + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v\right)(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1) = |m|u^m + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v_1. \quad (3)$$

a ' nın bir otomorfizm olduğunu göstermek için $w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1 = 0$ seçmek zorundayız.

(3) te kullandığımız l , birim matrise eş olarak aşağıdaki denkliği sağlar

$$w_1 + (1 + w_1\bar{x}_2)u \equiv 0 \bmod(\bar{x}_1)$$

w_1 in görüntüsünü ve $P_2 / \bar{x}_1 P_2$ bölümünde u yu göz önüne alalım.

Eğer $w_1 \neq 0 \bmod(\bar{x}_1)$ ise son sonuçta sol taraftaki ikinci terimin derecesi ,

$$K[\bar{x}_2] \cong P_2 / \bar{x}_1 P_2$$

bir polinom olarak birinci terimin derecesinden çok fazla büyüktür ki bu da imkansızdır. Bunun anlamı bazı $w_1' \in P_2$ için $w_1 = \bar{x}_1 w_1'$ dir.

Benzer şekilde

l , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $w_2 - (1 + w_2 \bar{x}_1) u^l \equiv 0 \bmod(\bar{x}_2)$ elde edilir, bazı $w_2' \in P_2$ için $w_2 = \bar{x}_2 w_2'$ olduğunu ifade eder.

$b = a\,t$ endomorfizmini göz önüne alalım. t bir otomorfizm olup

$$(x_1, x_2)t = (x_1 - c.w_2' \bar{x}_1, x_2 - c.w_2' \bar{x}_2)$$

şeklindedir.

$b = a\,t$ endomorfizmini göz önüne alalım.

t bir otomorfizm olup

$(x_1, x_2)t = (x_1 - c.w_2' \bar{x}_1, x_2 - c.w_2' \bar{x}_2)$ ifadesini sağlar.

b nın gA yörüngesini koruduğu açıktır.

a ve b bir otomorfizmdir ancak ve ancak $w_1' - w_2' = 0$ ise.

Gerçektende,

$w = w_1' - w_2'$ iken $(x_1, x_2)b = (x_1 - c.w\bar{x}_1, x_2)$, olduğunu gösterelim.

$t : x_1 \to x_1 - c.w_2' \bar{x}_1$, $a : x_1 \to x_1 + c.w_1$

$x_2 \to x_2 - c.w_2' \bar{x}_2$ $x_2 \to x_2 + c.w_2$

olup $b = a\,t$ yı hesaplayalım.

$b : x_1 \to t(x_1 + c.w_1) \to t(x_1) + t(c.w_1)$ (1. kısım)

$x_2 \to t(x_2 + c.w_2) \to t(x_2) + t(c.w_2)$ (2. kısım)

şeklindedir.

Şimdi bunları ispatlayalım:

1. kısmın ispatı;

$t(x_1 + c.w_1) = t(x_1) + t(c.w_1) = x_1 - c.w_2' \bar{x}_1 + t([x_1, x_2]).w_1$

$$= x_1 - c.w_2'\bar{x}_1 + ([t(x_1), t(x_2)]).w_1$$
$$= x_1 - c.w_2'\bar{x}_1 + [x_1 - c.w_2'\bar{x}_1, x_2 - c.w_2'\bar{x}_2].w_1$$
$$= x_1 - c.w_2'\bar{x}_1 + ([x_1, x_2] - [x_1, c.w_2'\bar{x}_2] - [c.w_2'\bar{x}_1, x_2] + [c.w_2'\overline{x_1}, c.w_2'\overline{x_2}]).w_1$$
$$= x_1 - c.w_2'\bar{x}_1 + (c + c.w_2'\overline{x_2}\,\overline{x_1} - c.w_2'\overline{x_1}\,\overline{x_2}).w_1$$
$$= x_1 - c.w_2'\bar{x}_1 + cw_1$$
$$= x_1 - c(w_2'\bar{x}_1 + w_1) \qquad (w_1 = \bar{x}_1 w_1')$$
$$= x_1 - c(w_2'\bar{x}_1 + \bar{x}_1 w_1')$$
$$= x_1 - c.\bar{x}_1(w_2' - w_1') = x_1 - c.\bar{x}_1 w$$

bulunur.

2.kısmın ispatı;

$$t(x_2 + c.w_2) = t(x_2) + t(c.w_2) = x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + t(c.w_2)$$
$$= x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + t([x_1, x_2]).w_2$$
$$= x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + [t(x_1), t(x_2)]w_2$$
$$= x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + ([x_1 - c.w_2'\bar{x}_1, x_2 - c.w_2'\bar{x}_2]).w_2$$
$$= x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + ([x_1, x_2] - [x_1, c.w_2'\bar{x}_2] - [c.w_2'\bar{x}_1, x_2] - 0).w_2$$
$$= x_2 - c.w_2'\bar{x}_2 + (c + c.w_2'\overline{x_2}\,\overline{x_1} - c.w_2'\overline{x_1}\,\overline{x_2}).w_2$$
$$= x_2 - c.w_2'\overline{x_2} + c.w_2 = x_2 - c.w_2 + c.w_2 = x_2$$ bulunur.

Böylece $b = a\,t$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $a = b$ olduğunu düşünelim.

$u = u_1 + \bar{x}_1 u_2$, $u_1 \in P_2$ olup sadece $\bar{x}_2$' ye bağlı olsun.

Şimdi bir s otomorfizmini düşünelim öyle ki

$(x_1, x_2)s = (x_1 - c.\bar{x}_1 u_2, x_2 - c.\bar{x}_2 u_2)$ olsun.

Açıkça,

$$gs = (x_1 + c.u)s = x_1 - c.\bar{x}_1 u_2 + c.u = x_1 - c.\bar{x}_1 u_2 + c.(u_1 + \bar{x}_1 u_2)$$
$$= x_1 - c.\bar{x}_1 u_2 + c.u_1 c.\bar{x}_1 u_2$$
$$= x_1 + c.u_1$$

olur.

g'nin yerine gA' nın bir elemanını alabiliriz özellikle gs alalım. Bu da u nun sadece $\bar{x}_2$ ye bağlı olduğunu düşünmemize izin verir.

Şimdi (3) 'ü tekrar yazalım,

$$l_1 w_1 + l_2 w_2 + \left(|l|u^l + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v\right)(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1) = |m|u^m + (l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2)v_1.$$

Burada $v = 0$ ve $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alınırsa,

$w_1 + tw_2 + u^l(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1) = |m|u^m + (\bar{x}_1 + t\bar{x}_2)v_1$ elde edilir.

Sabit bir t için $K[z] \cong K[y,z]/(y)$ den bilinmeyenler $\bar{x}_1 + t\bar{x}_2 = y$ ve $z = x_2$ şeklinde değiştirilebilir.

Bu durumda

$$\bar{x}_1 w_1' + t\bar{x}_2 w_2' + u(1 + \bar{x}_1 w_1'\bar{x}_2 - \bar{x}_2 w_2'\bar{x}_1) = |m|u^m + y.v_1 \text{ dır.}$$

Buradan $\bar{x}_1 w_1' + t\bar{x}_2 w_2' + u + u\bar{x}_1\bar{x}_2(w_1' - w_2') = |m|u^m + y.v_1$ olur.

$w_1' - w_2' = w$ alalım.

O halde $\bar{x}_1 w_1' + t\bar{x}_2 w_2' + u + u\bar{x}_1\bar{x}_2 w = |m|u^m + y.v_1$

elde edilir. Buradan

$$w\bar{x}_1 + u - |m|u^m \equiv -uw\bar{x}_1\bar{x}_2 \mod(\bar{x}_1 + t\bar{x}_2). \qquad (4)$$

olur.

Eğer $u = 0$ ise $w \equiv 0 \bmod(y)$ olur.

Buradan $w\bar{x}_1 \equiv 0 \bmod(y)$ olup $\bar{x}_1$ tamlık bölgesinde olduğundan $\bar{x}_1 \neq 0$ dır $w = 0$ zorundadır.

Kabul edelim ki $u \neq 0$, $t \neq 0$ ve $w \neq 0 \bmod(y)$ olsun.

(4) teki denkliğin her iki yanının derecelerini inceleyelim:

$a = \deg u$, $b = \deg w$ olsun.

O halde,

$$\deg(w\bar{x}_1 + u - |m|u^m) = \max\{b+1, a\}$$

$$\deg(-u\bar{x}_1\bar{x}_2 w) = a + b + 2$$

olup çelişki elde edilir.

Derecelerin eşitliği için $w = 0$ olmalıdır.

Böylece sıfırdan farklı tüm $t \in K$ için $w \equiv 0 \bmod(\bar{x}_1 + t\bar{x}_2)$ dır.

Dolayısıyla $w = w_1' - w_2' = 0$ olup $a = b$ olduğu görülür.

Sonuç 7.3.3. K sonsuz bir cisim olsun. F_2, K üzerinde rankı 2 olan serbest metabelyen Lie cebiri ve A, F_2 nin otomorfizm grubu olsun. Sıfırdan farklı bir $g \in F_2$ alalım. Eğer bir a endomorfizmi gA nın yörüngesini koruyorsa $a \in A$ dır.

KAYNAKLAR

[1] Artamonov V. A., "The categories of free metabelian groups and Lie algebras," Comn. Math. Univ. Carolinae, 18, No. 1, 143-159 (1977).

[2] Artamonov V. V., "Projective metabelian groups and Lie algebras," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 42, No. 2, 226-236 (1978).

[3] Chirkov I. V. and Shevelin M. A., "Test sets in free metabelian Lie algebras," Sibirsk. Mat. Zh., 43, No. 6, 1401-1407 (2002).

[4] Esmerligil, Z. ve N. Ekici, "Test sets and test rank of a free metabelian Lie algebra", communications in Algebra, 31, 5581-5590, (2003).

[5] Esmerligil, Z. ve N. Ekici, "İki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin primitif elemanları ve otomorfizmler", *XVI* . Ulusal Matematik Sempozyumu, Yüzüncü Yıl Üniv. Fen Bil. Ens.Dergisi, Özel Sayı 101-105, Van, 2003.

[6] Gupta C. K. and Timoshenko E.I., "Automorphic and endomorphic reducibility and primitive endomorphisms of free metabelian groups," Comn. Algebra, 25, No. 10, 3057-3070 (1997).

[7] Ivanov S., " On endomorphisms of a free group that preserve primitivity," Arch. Math ., No. 72, 92-100 (1999).

[8] I. V. Chirkov and M. A. Shevelin, "Determination of endomorphisms of free metabelian Lie Algebras," Siberian Math. Journal, Vol. 41, No. 6, 2000

[9] I. V. Chirkov and M. A. Shevelin, "Endomorphisms of free metabelian Lie algebras which preserve orbits," Siberian Math. Journal, Vol. 45, No. 6, pp. 1135-1139, 2004

[10] Lee D., "Primitivty preserving endomorphisms of free groups," Comn. Algebra, 30, No. 4, 1921-1947 (2002).

[11] Lee D., "Endomorphisms of free groups that preserve automorphic orbits," J.Algebra, 248, No. 1, 230-236 (2002).

[12] Mikhalev A. A. and Zolotykh A. A., "Automorphisms and primitive elements of free Lie superalgebras ," Comn. Algebra, 22, 5889-5901 (1994).

[13] Shpilrain V., “Recognizing automorphisms of free groups,” Arch. Math., 62, 385-392 (1994).

[14] Shpilrain V., “Generalized primitive elements of a free group,” Arch. Math., 71 270-278 (1998).

[15] Vesselin Drensky and Jie-Tai Yu, “Orbits in free algebras of rank two,” comn. Algebra, 26(6), 1895-1906 (1998).

[16] Zolotykh A. A. and Mikhalev A. A., “The endomorphisms of free Lie algebras which preserve primitivity of elements are automorphisms,” Uspekhi Mat. Nauk, 48, No. 6, 149-150 (1993).

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdu. Öğrenimini sırasıyla Lütfiye Kısacık İlkokulu, Ziyapaşa Ortaokulu ve Adana Borsa Lisesi'nde tamamladı. 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi. 2006 da Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Tezsiz Yüksek Lisans'a başladı. Daha sonra 2007'de Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Tezli Yüksek Lisans'a başladı. 2009'da Kahramanmaraş Türkoğlu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandı halen aynı lisede görev yapmaktadır.