ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Zehra VELİOĞLU

PARASERBEST LIE CEBİRLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARASERBEST LIE CEBİRLERİ

Zehra VELİOĞLU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ../../2013 Tarihinde A şağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	…….....	…....
Prof.Dr. Naime EKİCİ	Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL	Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN ÜYE	ÜYE	

……..... .	……
Doç.Dr.Melis MİNİSKER	Yrd.Doç.Dr. Zeynep ÖZKURT
ÜYEÜYE	

Bu Tez Enstitümüz MatematikAnabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

PARASERBEST LIE CEBİRLERİ

Zehra VELİOĞLU

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Yıl: 2013, Sayfa:101
Jüri : Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
: Doç. Dr. Melis MİNİSKER
: Yrd. Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT

P karakteristiği sıfır olan bir k halkası üzerinde tanımlı bir Lie cebiri ve X boştan farklı bir küme olsun. Eğer P rezidülü nilpotent ve X tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip ise P ye X üzerinde paraserbest Lie cebiri denir. X kümesinin kardinalitesine P nin rankı denir.

Bu tezde paraserbest Lie cebirlerinin alt cebirlerini ve ideallerini inceledik. Bununla birlikte iki paraserbest Lie cebirin direkt toplamının yine paraserbest olduğunu gösterdik. Ayrıca bir paraserbest Lie cebirinin serbest çarpanlarının da paraserbest olduğunu ispatladık. Cebirlerin direkt limitini kullanarak iki üreteçli serbest Lie cebirlerin birleşiminin 2 ranklı ve paraserbest olduğunu gösterdik. Sonlu r ranklı paraserbest Lie cebirlerin artan bir serisini ele aldığımızda, bu serinin terimlerinin birleşimlerinin paraserbest olduğunu fakat serbest olmadığını ispatladık ve bu ispatı kullanarak farklı sonuçlar elde ettik. Bunlara ek olarak serbest olmayan paraserbest Lie cebiri örnekleri inceledik ve serbest olan bir paraserbest Lie cebiri örneği verdik.

Anahtar Kelimeler: Paraserbest Lie cebiri**,** Serbest Lie cebiri, Direkt Limit

ABSTRACT

PhD THESIS

PARAFREE LIE ALGEBRAS

Zehra VELİOĞLU

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL ANDAPPLIEDSCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Year: 2013, Pages: 101
Jury : Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Assoc. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
: Assoc. Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Asst. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT

Let P be a Lie algebra over a ring k of characteristic zero and X be a non-empty set. The Lie algebra P is called parafree over a set X, if P is residually nilpotent and has the same lower central sequence as a free Lie algebra genereted by the set X. The cardinality of X is called the rank of P.

In this thesis we investigate subalgebras and ideals of parafree Lie algebras. Furthermore we show that the direct sum of two parafree Lie algebras is again parafree. Also we prove that free factors of a parafree Lie algebra are parafree.
By using direct limit of algebras, we show that the union of two generated free Lie algebras is parafree of two rank and based on this result, we obtain several properites. We consider the ascending series of parafree Lie algebras of finite rank r and we prove that the union of this series is parafree but not free. Moreover we investigate some examples of nonfree parafree Lie algebras and we give an example of free parafree Lie algebra.

Keywords: Parafree Lie algebras, Free Lie algebras, Direct Limit

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri, görüş ve önerileriyle bana daima yol gösteren, beni tecrübeleriyle aydınlatan, kişiliğiyle daima örnek aldığım ve alacağımdanışman hocamsayın Naime EKİCİ' ye sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü değerli hocalarına doktora eğitimim boyunca vermiş oldukları bilgi ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan,beni destekleyen başta annem Devran VELİOĞLU olmak üzere aileme, değerli arkadaşım Göknur AYKANAT ve tüm arkadaşlarıma sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
2.1. Lie Cebirleri 3
2.2. Serbest Lie Cebirleri ve Hall Bazları 13
2.3. Paraserbest Lie Cebirleri 16
3. PARASERBEST LIE CEBİRLERİ, ALT CEBİRLERİ ve İDEALLERİ 25
4. PARASERBEST LIE CEBİRİ ÖRNEKLERİ 81
5. BAZI AÇIK PROBLEMLER 97
KAYNAKLAR 99
ÖZGEÇMİŞ 101

1. GİRİŞ

Serbest grupların alt merkezi serilerinin terimleri ile karakterize edilip edilemeyeceği hep merak edilen bir soru olmuştur. Bu soru paraserbest grupların tanımlanmasına neden olmuştur. Paraserbestlik kavramını ilk olarak Baumslag (1967) ortaya atmıştır ve bir serbest grup ile aynı alt merkezi diziye sahip, rezidülü nilpotent grupları paraserbest gruplar olarak tanımlamıştır. Daha sonra Baumslag (1969) paraserbest grupların elementer özeliklerini incelemiş, serbest olmayan paraserbest grup örnekleri vermiştir. Baumslag ve Stammbach (1977) serbest grupların ters limitini incelemiş ve bu ters limitin hangi durumlarda paraserbest olacağını belirlemişlerdir. Baumslag (2005) serbest gruplar ile paraserbest grupları karşılaştırmış, benzer ve farklı özelliklerini ortaya koymuştur. Daha sonra Baumslag ve Cleary (2006) paraserbest gruplar için bulduğu bazı sonuçları tek bağıntılı paraserbest gruplara uygulamışlardır.

Gruplar ve Lie cebirleri arasındaki benzerlikler göz önünde bulundurulduğunda paraserbestlik kavramını Lie cebirlerinde de çalışmak mümkün olmuştur. Bu anlamda ilk olarak paraserbest Lie cebiri tanımını Baur (1978) vermiştir. Baur paraserbest Lie cebirini, gruplardaki tanıma benzer biçimde, bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olan rezidülü nilpotent Lie cebiri olarak tanımlamıştır. Baur (1978) paraserbest Lie cebirleri için bazı temel tanım ve kavramları vermiş, paraserbest Lie cebirlerinin evrensel enveloping cebirini ve homolojisini tanımlamıştır. Bunlarla birlikteBaur bir paraserbest Lie cebirinin iki eleman tarafından üretilen her alt cebirinin paraserbest olması, her paraserbest Lie cebirinin iki ranklı rezidülü paraserbest olması gibi bazı temel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca Baur aynı çalışmasında serbest olmayan paraserbest Lie cebiri örneklerine de yer vermiştir. Daha sonra Baur (1980) de serbest olmayan üç üreteçli ve bir bağıntılı paraserbest Lie cebiri örnekleri vermiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızda kullandığımız bazı temel tanımları ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde paraserbest Lie cebirlerin alt cebirlerini ve ideallerini inceledik.

Bununla birlikte sonlu m ranklı bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip sonlu m üreteçli bir Lie cebirinin serbest olduğunu ispatladık. Bir paraserbest Lie cebirinin herhangi bir alt cebirinin ve bölüm cebirinin de paraserbest olduğunu gösterdik.

İki paraserbest Lie cebirin direkt toplamının da paraserbest olduğunu ve bir paraserbest Lie cebirinin serbest çarpanlarının yine paraserbest olduğunu gösterdik. Ayrıca direkt limitin evrensel dönüşüm özelliğini kullanarak iki üreteçli serbest Lie cebirlerinin birleşimlerinin de paraserbest olduğunu ispatladık. F iki üreteçli bir serbest Lie cebiri olsun. $V_k(P)$ ve$V_k(F)$ sırasıyla P ve F Lie cebirlerinin $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dizisine göre polisentral terimlerini göstermek üzere, $P/V_k(P) \cong F/V_k(F)$ ve P Lie cebirinin 2 ranklı serbest olmayan bir paraserbest Lie cebiri olduğunu ispatladık. Daha sonra bu sonucu serbest çözülebilir Lie cebirleri, metabelyen Lie cebirleri gibi farklı Lie cebirleri sınıflarında inceledik.$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \dots \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sonlu r ranklı paraserbest Lie cebirlerinin artan bir serisi olmak üzere, A nın rezidülü nilpotent, rezidülü sonlu ve paraserbest olduğunu fakat serbest olmadığını ispatladık bu ispatı kullanarak farklı sonuçlar elde ettik.

Dördüncü bölümde serbest olmayan paraserbest Lie cebirleri örneklerini ayrıntılı bir şekilde incelendik ve bu örneklerin ışığında serbest olan bir paraserbest Lie cebiri örneği verdik.

Beşinci bölümde bazı açık problemleri verdik. Paraserbest Lie cebiri yeni ve fazla çalışılmamış bir konu olduğundan şimdiye kadar elde edilmiş sonuçlar dışında merak uyandıran bir çok araştırma alanı vardır. Biz çalışılmaya değer bulduğumuz bazı problemlere bu bölümde yer verdik.

Tez içinde geçen temel sonuçlar (Bahturin, Baumslag, Baur) çalışmalarından alınmıştır.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez içinde geçen bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz. Aksi belirtilmedikçe bütün Lie cebirleri karakteristiği sıfır olan bir k cismi üzerinde düşünülecektir.

2.1. Lie Cebirleri

Tanım 2.1.1: k bir cisim ve L, k üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde bilineer bir

$$[\,,\,] : L \times L \to L,$$
$$(x, y) \to [x, y]$$

ikili işlemi tanımlıysa L cebirine bu işlemle birlikte bir Lie cebiri denir.

1. Her $x \in L$ için $[x, x]=0$
2. Her $x, y, z \in L$ için $[x,[y, z]]+[y,[z, x]]+[z,[x, y]]=0$ (Jacobi özdeşliği)

Eğer L vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise Lie cebiri olarak da sonlu boyutludur. Boyutu 1 olan bir tek Lie cebiri vardır ve abelyendir. Boyutu 2 olan, izomorfik olmayan sadece iki Lie cebiri vardır. Ayrıca Lie cebirleri Jacobi özdeşliğinden dolayı birleşmeli değildirler.

L herhangi bir Lie cebiri olmak üzere her $x \in L$ için $[x, x]=0$ koşulu, $y \in L$ için $[x, y]=-[y, x]$(anti-komütatif) olmasını gerektirir. Gerçektende $[x + y, x + y]=0$ olup buradan $[x, y] + [y, x]=0$ ve dolayısıyla $[x, y]=-[y, x]$ elde edilir.

Örnek 2.1.1: V, k cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V den kendi üzerine olan tüm lineer dönüşümlerin kümesini $gl(V)$ile gösterelim. $gl(V)$ fonksiyonların bilinen toplaması ve bir fonksiyonun bir skalerle çarpımı işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Her $x, y \in gl(V)$için

$$[\ ,\ ] : gl(V) \times gl(V) \rightarrow gl(V)$$
$$(x, y) \rightarrow [x, y] = xy\text{-}yx$$

işlemi ile birlikte $gl(V)$, k cismi üzerinde bir Lie cebiridir.

Tanım 2.1.2: L bir Lie cebiri olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $[x, y]=0$ ise L Lie cebirine abelyen Lie cebiri denir.
Eğer bir Lie cebirinde $[x, y]=0$ ise $[x, y]= -[y, x]=0$dir. Böylece

$$[x, y]= [y, x]$$

olur. Yani her x, y için $[x, y] = 0$ oluşu Lie cebirinin abelyen oluşuna denktir.

Tanım 2.1.3: L bir k cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinin bir M Lie alt cebiri her $x, y \in M$ için$[x, y] \in M$ koşulunu sağlayan bir alt vektör uzaydır. M alt cebirini $M \leq L$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.4: L bir Lie cebiri olsun. L cebirinin bir I ideali bir alt vektör uzayıdır öyle ki her $x \in L$ ve $y \in I$ için $[x, y] \in I$ dır. I, L Lie cebirinin bir ideali ise I v L ile gösterilir. Ayrıca görülüyor ki bir ideal aynı zaman da bir alt cebirdir.

Tanım 2.1.5: L bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinin merkezi

$$Z(L) = \{x \in L \ / \text{her } y \in L \text{ için } [x, y] = 0\}$$

olarak tanımlanır. Z(L), L Lie cebirinin bir idealidir. Ayrıca $Z(L) = L$ ise L abelyendir.

Tanım 2.1.6: L bir Lie cebiri ve I, L Lie cebirinin bir ideali olsun. $z \in L$ için $z + I = \{z + x : x \in I\}$ kümesini tanımlayalım. $z + I,\ w + I \in {}^{L}/_{I}$ için

$$[z + I, w + I] = [z, w] + I$$

çarpımı tanımlansın. Bu işlemle birlikte $L/I = \{z + I : z \in L\}$ kümesi bir Lie cebiri olup bu cebire L Lie cebirinin I ile bölüm cebiri denir.

Tanım 2.1.7: L_1, L_2 iki Lie cebiri ve $\varphi: L_1 \to L_2$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda φ dönüşümüne bir Lie cebiri homomorfizmi denir.

1. Her $a \in k$ ve $x,y \in L_1$ için $\varphi(ax + y) = a.\varphi(x) + \varphi(y)$
2. Her $x,y \in L_1$ için $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$

Eğer φ bijektif (birebir ve örten) ise φ dönüşümü bir izomorfizm olup L_1 ve L_2 Lie cebirlerine izomorf cebirler denir ve $L_1 \cong L_2$ şeklinde gösterilir.
Eğer φ dönüşümü bir L Lie cebiri üzerinde bir izomorfizm ise o zaman φ dönüşümüne L Lie cebirinin bir otomorfizmi denir.

Örnek 2.1.2: L bir Lie cebiri olsun. ad: $L \to gl(L)$ dönüşümünü her $x,y \in L$ için $(adx)(y) = [x, y]$ olarak tanımlayalım. Yani ad dönüşümü

$$\begin{aligned} ad: L &\to gl(L) \\ x &\to adx(y)=[x, y] \end{aligned}$$

şeklinde bir Lie cebiri homomorfizmidir.

Örnek 2.1.3: L bir Lie cebiri veI v L olsun.

$$\begin{aligned} \pi: L &\to L/I, \\ z &\to z+ I \end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüme doğal (kanonik) dönüşüm denir. Doğal dönüşüm bir Lie cebiri homomorfizmidir.

Tanım 2.1.8: L_1, L_2 iki Lie cebiri olmak üzere, L_1 Lie cebirinden L_2 Lie cebirine bir $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ homomorfizmi tanımlansın. φ homomorfizminin çekirdeği

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in L_1 : \varphi(x) = 0\}$$

ve görüntüsü ise

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) \in L_2 : x \in L_1\}$$

olarak tanımlanır.

Genellikle homomorfizm teoremleri Lie cebirleri için de doğrudur.

Teorem 2.1.1 (Stewart, 1970): L ve M k cismi üzerinde tanımlı iki Lie cebiri ve $\theta: L \rightarrow M$ bir homomorfizm olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.

i) $\theta(L) \leq M$; $\mathrm{Ker}(\theta)$ v L ve $L/\mathrm{Ker}(\theta) \cong \theta(L)$

ii) H,K v L ve K v H ise $(L/K)/(H/K) \cong L/H$

iii) H v K , K v L ise H v $(H + K)$ ve $(H \cap K)$ v K ve
$$(H + K)/K \cong K/(H \cap K)$$

iv) H v L ve $\phi: L \rightarrow L/H$ doğal homomorfizm olsun. L Lie cebirinin H yi içeren idealleri ile L/H bölüm cebirinin idealleri arasında bire bir ve örten bir ilişki vardır.

Tanım 2.1.9: A bir k cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her a, b ∈ A için D: A → A dönüşümü

$$D(a.b) = D(a).b + a.D(b)$$

eşitliğini sağlıyorsa D dönüşümüne A cebirinin bir derivasyonu(türevi) denir.

A cebirinin tüm derivasyonlarının kümesini DerA ile göstereceğiz. DerA bir vektör uzayıdır ve $gl(A)$ Lie cebirinin bir alt Lie cebiridir.

Tanım 2.1.10: L_1, L_2 iki Lie cebiri ve $L = \{(x_1, x_2) : x_i \in L_i, i = 1,2\}$ kümesi L_1 ve L_2 Lie cebirlerinin vektör uzayı olarak direkt toplamı olsun. L üzerinde

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$$

çarpımı tanımlayalım. Bu çarpımla birlikte L bir Lie cebiridir. L Lie cebirine L_1ve L_2 Lie cebirlerinin direkt toplamı (cebir olarak) denir ve $L= L_1 \oplus L_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11: L bir Lie cebiri olmak üzere,

$$L' = [L, L] = sp\{[x, y] : x, y \in L\}$$

olarak tanımlanan alt cebire L Lie cebirinin komütatör alt cebiri denir.

Tanım 2.1.12: L herhangi bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinin ideallerinden oluşan

$$L=L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset L^{(3)} \supset \ldots \supset L^{(k)} \supset \ldots$$

serisinin terimleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$L^{(0)}= L,\ L^{(1)}= [L,L],\ L^{(2)}= [L^{(1)}, L^{(1)}],\ L^{(3)}= [L^{(2)}, L^{(2)}], \ldots, L^{(k)}= [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \ldots$$

Bu seriye L Lie cebirinin türetilmiş serisi denir. Herhangi bir k tam sayısı için

$$L^{(k-1)}/_{L^{(k)}}$$

ifadesine, L Lie cebirinin bir faktörü denir. Her k tam sayısı için L Lie cebirinin faktörleri abelyendir.

Tanım 2.1.13: Bazı m≥1 tam sayıları için $L^{(m)}= \{0\}$ ise L Lie cebirine çözülebilir Lie cebiri denir. Pozitif m tam sayısına L Lie cebirinin türetilmiş uzunluğu denir.

Tanım 2.1.14: L bir Lie cebiri olsun.

$$\gamma_1(L) = L, \gamma_2(L) = [L, L], \gamma_3(L) =[L, \gamma_2(L)],\ldots, \gamma_k(L)= [L, \gamma_{k-1}(L)],...$$

olmak üzere,

$$L= \gamma_1(L)\supset\gamma_2(L)\supset\gamma_3(L)\supset\ldots\supset\gamma_k(L)\supset\ldots$$

serisine L Lie cebirinin alt merkezi serisi denir. Bu serinin k-yıncı terimi bazen $L_k$ile de gösterilir.

Tanım 2.1.15: Bazı k tam sayıları için $\gamma_k(L) =\{0\}$ ise L Lie cebirine nilpotent Lie cebiri denir. $\gamma_k(L) =\{0\}$ olacak şekildeki en küçük pozitif k tam sayısına L Lie cebirinin nilpotentlik derecesi denir. Eğer L Lie cebirinin nilpotentlik derecesi 2 ise L abelyendir.

Tanım 2.1.16: L bir Lie cebiri olmak üzere

i) $L/_{\gamma_2(L)}$, $L/_{\gamma_3(L)}$, $L/_{\gamma_4(L)}$,… faktörlerine L Lie cebirinin alt merkezi dizisi denir. L Lie cebirinin her alt merkezi serisine bir alt merkezi dizi karşılık gelir.

ii) L ve F herhangi iki Lie cebiri olsun. Eğer her $k\geq 1$ için $L/\gamma_k(L) \cong F/\gamma_k(F)$ ise L ve F aynı alt merkezi diziye sahiptir denir.

Tanım 2.1.17: i= 1,2,3,…,k,… için $n_i \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ dizisine göre L Lie cebirinin polisentral serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

L_{n_1}; L Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 – inci terimi

$L_{n_1,\ldots,n_i,\, n_{i+1}} = (L_{n_1,\ldots,n_i})_{n_{i+1}}$; $L_{n_1,\ldots,n_i}$ nin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun. Böylece

$$L \supseteq L_{n_1} \supseteq L_{n_1,n_2} \supseteq \ldots \supseteq L_{n_1,\ldots,n_i} \supseteq L_{n_1,\ldots,n_i,\, n_{i+1}} \supseteq \ldots$$

serisine L Lie cebirinin polisentral serisi denir.

Eğer $L_{n_1,\ldots,n_k}=\{0\}$ ise ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sayıları bu eşitlik sağlanacak şekildeki en küçük pozitif tam sayılar ise L Lie cebirine $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ dizisine göre bir polinilpotent Lie cebiri denir.

Eğer$n_1=n_2=2$ ve$L_{2,2}=\{0\}$ ise L Lie cebirine metabelyen Lie cebiri denir.

Tanım 2.1.18: X boş olmayan herhangi bir küme, F bir Lie cebiri ve i: X → F bir dönüşüm olsun. Her A Lie cebiri ve f: X→A dönüşümü için f = g o i olacak şekilde bir tek g: F → A Lie cebiri homomorfizmi varsa F Lie cebirine X üzerinde bir serbest Lie cebiri veya X tarafından üretilen serbest Lie cebiri denir. Herhangi bir X kümesi için, X tarafından üretilen bir tek F(X)=F serbest Lie cebiri vardır.

F(X), X kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri ise X kümesine F(X) serbest Lie cebirinin serbest üreteç kümesi denir. X kümesinin kardinalitesine F(X) serbest Lie cebirinin rankı denir. Bir serbest Lie cebiri izomorfizm göz önüne alındığında rankı ile bellidir.

Bir L Lie cebirinin boş olmayan bir X alt kümesi tarafından üretilen alt cebirini $\langle X \rangle$ ile göstereceğiz.

Serbest Lie cebirleri ile ilgili daha fazla bilgi Bölüm 2.2. de verilecektir.

Tanım 2.1.19: L ve M bir k halkası üzerinde tanımlı iki Lie cebiri olsun. φ ise L Lie cebirinden M Lie cebirinin derivasyonları kümesine bir homomorfizm olsun. x ∈ L ve y ∈ M olmak üzere tüm (x,y) çiftleri aşağıdaki işlemlere göre bir cebir oluşturur. λ∈ k olmak üzere

$\lambda(x,y)= (\lambda x, \lambda y)$,
$(x_1,y_1) + (x_2,y_2)= (x_1+x_2, y_1+y_2)$,
$(x_1,y_1).(x_2,y_2)= (x_1x_2, \varphi(x_1)(y_2)- \varphi(x_2)(y_1)+ y_1y_2)$

Bu cebire N diyelim. Yukarıdaki işlemlerle birlikte N bir Lie cebiri olup, N Lie cebirine L Lie cebirinin M ile yarı-direkt çarpımı denir ve $L \rtimes_{\varphi} M$ ile gösterilir. Eğer φ dönüşümü sıfır ise N Lie cebirine L ve M Lie cebirlerinin direkt toplamı denir ve $L \oplus M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.20: k birimli ve değişmeli bir halka, B k üzerindeki Lie cebirlerinin bir kümesi ve V asosyatif olmayan polinomların bir kümesi olsun. Aşağıdaki önerme sağlanacak şekildeki özdeş bağıntıların bir H= $\{v \equiv 0 : v \in V\}$ kümesi varsa B kümesine bir sınıf denir:
‘ ‘ Bir G Lie cebirinin B sınıfında olması için gerek ve yeter koşul H kümesindeki tüm bağıntıların G Lie cebirinde sağlanmasıdır.’ ’
Burada, H kümesi, $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ sayılabilir bir küme olmak üzere verilmiş bir $F(X)$ serbest Lie cebirinin bir alt kümesi olarak düşünülebilir.
Aşağıda bazı sınıf örnekleri verilmiştir.

1) k verilmiş bir halka olsun. x≡0 bağıntısı ile tanımlanmış sınıf, sadece sıfır cebirini içerir ve bu sınıf E ile gösterilir.
2) M cebiri k halkası üzerinde tanımlı bir öz ideal olmak üzere λ∈M için λx≡0 bağıntısı ile tanımlı sınıf O_M ile gösterilir. Eğer M={0} ise O_M=0 dır.
3) A sınıfı k halkası üzerinde tanımlı tüm abelyen Lie cebirlerini içeren sınıf olsun. Bu sınıfta tanımlı olan bağıntı $x_1.x_2 \equiv 0$dır.

4) N sınıfı nilpotentlik derecesi en fazla c olan tüm nilpotent Lie cebirlerinin sınıfı olsun. Bu sınıfta tanımlı olan bağıntı $x_1x_2..x_{c}\equiv 0$ dır.
5) S sınıfı çözülebilirlik derecesi en fazla p olan tüm çözülebilir Lie cebirlerini içeren sınıf olsun. Bu sınıfta tanımlı olan bağıntı $\delta_p(x_1x_2..x_{2^p})\equiv 0$ dır.

$\delta_0(x)=x$ olmak üzere $\delta_l(x_1x_2..x_{2^l})$ bir asosyatif polinomu temsil etsin. l üzerinden tümevarımla

$$\delta_l(x_1,\dots,x_{2^l}) = \delta_{l-1}(x_1,\dots,x_{2^{l-1}})\delta_{l-1}(x_{2^{l-1}+1},\dots,x_{2^l})$$

olarak tanımlansın. $l \geq 1$ için eğer bir L Lie cebiri çözülebilir ise yani $L^{(l)} = 0$ ise $\delta_l(x_1x_2..x_{2^l})\equiv 0$ dir. İspatı için Bahturin Bölüm1.8Teorem 10' a bakınız.

Not 2.1.1: U ve V iki sınıf olmak üzere, U∩V de bir sınıftır ama U∪V her zaman bir sınıf olmak zorunda değildir. Fakat genelde U ve V sınıflarındaki tüm cebirler tarafından üretilen sınıf U∪V ile gösterilir.

Tanım 2.1.21: $\mathfrak{V}$, birimli ve değişmeli bir k halkası üzerinde tanımlı Lie cebirlerin bir sınıfı olsun. A, $\mathfrak{V}$ sınıfında bir Lie cebiri, L ise k üzerinde herhangi bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları taşıması durumunda W Lie cebirine A ve L Lie cebirlerin wreath çarpımı denir ve $A\mathrm{wr}_V L$ ile gösterilir.

i) W=alg(A,L), A ve L tarafından üretilen alt cebirdir.
ii) Eğer $S=\mathrm{id}_W(A)$ cebiri W içinde A tarafından üretilen bir ideal ise $S\in\mathfrak{V}$dir.
iii) $\varphi: A\rightarrow C$, $\psi: L\rightarrow C$ birer homomorfizmdir öyle ki C= alg(φ(A), ψ (L)) ve $\mathrm{id}_C(\varphi(A))\in\mathfrak{V}$dir.

O zaman W Lie cebirinden C Lie cebirine $\chi|_A=\varphi$ ve $\chi|_L=\psi$ olacak şekildeki bir tek χ homomorfizmi vardır. Burada $\chi|_A$ ve $\chi|_L$ ile sırasıyla χ nın A ve L ye kısıtlanışı gösterilmiştir.

Tanım 2.1.22: F(X) bir k halkası üzerinde tanımlı bir serbest Lie cebiri ve V ise F(X) serbest Lie cebirinin bir alt kümesi olsun. L bir Lie cebiri olmak üzere π dönüşümü F(X) serbest Lie cebirinden L Lie cebirine giden herhangi bir homomorfizm olsun. v∈V olmak üzere V(L) cebiri L Lie cebirinin π(v) formundaki elemanları tarafından üretilen en küçük ideali olsun. V(L) idealine L Lie cebirinin asosyatif olmayan V polinomları tarafından üretilen verbal ideali denir. Açıktır ki V={0} ise V(L)={0} olur.

Tanım 2.1.23: L bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinden kendi üzerine olan her epimorfizmi bir izomorfizm ise L Lie cebirine hopfian denir. Bir L Lie cebirinin hopfian olması için gerek ve yeter koşul kendisinin, bir öz idealle olan bölüm cebirine izomorf olmamasıdır.

Tanım 2.1.24: $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$, k cebiri üzerinde tanımlı Lie cebirlerin bir ailesi ve her $\alpha \in I$ için (X_α / R_α), G_α ailesinin sunumu olsun öyle ki $\alpha \neq \beta$ için $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ dir.

$$X = \bigcup_\alpha X_\alpha \text{ ve } R = \bigcup_\alpha R_\alpha$$

olsun. O halde $G = (X, R)$ sunumuna $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesinin serbest çarpımı denir ve $G = \prod_\alpha * G_\alpha$ ile gösterilir.
Eğer $I = \{1,2,\dots,n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$$

ile gösterilir. Bu durumda bir $\alpha \in I$ için bir $I_\alpha : G_\alpha \to G$ bir homomorfizmi vardır öyle ki bu homomorfizm X_α dan X içine olan birim dönüşümün genişlemesidir.

Önerme 2.1.1: H herhangi bir Lie cebiri ve her $\alpha \in I$ için $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ bir homomorfizm olsun. O zaman $\varphi : G \to H$ olacak şekilde bir tek φ homomorfizmi vardır öyle ki $\varphi \circ I_\alpha = \varphi_\alpha$ dır.
Önermenin ispatı Bahturin (1987) de bulunmaktadır.

Sonuç 2.1.1: Herhangi bir α için I_α injektiftir. Yani$I_\alpha(G_\alpha)$, G_α Lie cebirinin G içinde bir izomorfik kopyasıdır.
Sonucun ispatı Bahturin (1987) de bulunmaktadır.

Tanım 2.1.25: L bir Lie cebiri ve I, L nin bir ideali olsun. Eğer $I \cap J = 0$,$I \oplus J = L$ ve $J \cong {}^{L}/_{I}$ olacak şekilde L nin bir J alt cebiri varsa L Lie cebirine projektiftir denir. Serbest Lie cebirleri projektiftir.

2.2. Serbest Lie Cebirleri ve Hall Bazları

Bir önceki bölümde serbest Lie cebirlerinin tanımı yapılmıştı. Aşağıda serbest Lie cebirleri için alternatif bir tanım verilecektir.

Tanım 2.2.1: L bir Lie cebiri ve $A = \{a_i : i \in I\}$, L Lie cebirinin elemanlarının bir kümesi olsun. F(I), I üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer

$$\sigma : i \to a_i$$

olacak şekilde $F(I)$serbest Lie cebirinden L içine bir σ homomorfizmi varsa ve

i) σ örten ise A kümesine L Lie cebirinin üreteç kümesi;
ii) σ birebir-örten ise L Lie cebirine bir serbest Lie cebir denir.

L serbest ise A kümesine L serbest Lie cebirinin serbest üreteç kümesi ve A kümesinin elemanlarına primitif eleman denir. A sonlu ise L serbest Lie cebirine sonlu üreteçli serbest Lie cebiri ya da sonlu üretilmiş Lie cebiri denir.

Teorem 2.2.1 (Shirsov, 1958): Bir serbest Lie cebirin her alt cebiri de serbesttir.

Tanım 2.2.2: X sayılabilir bir küme olsun. Uzunluğu 1 olan ve asosyatif olmayan bir monomial deyince X kümesinin elemanlarını anlayalım. $n > 1$ verilen bir doğal sayı

olmak üzere X üzerinde uzunluğu n olan asosyatif olmayan bir monomial $w = (u)(w)$ formundadır. Burada (u) uzunluğu i ve (w) uzunluğu n-i olan asosyatif olmayan monomiallerdir. w elemanının uzunluğunu $l(w)$ ile gösterelim. Eğer u ve v uzunluğu 1 olan monomialler ise $w = (uv)$ yazacağız.

Serbest Lie cebirleri için baz kümesi ilk kez M.Hall tarafından bulunmuştur. Bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.3: k cismi üzerinde serbest üreteç kümesi X olan bir F serbest Lie cebirinin Hall kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. X kümesine bir tam sırlama verelim ve $H_1 = X$ olsun.
2. $H_2 = \{(xy): x, y \in H_1, x, y \in X, x > y\}$ olsun.
3. $m = 1,2, \dots, n-1$ için H_m tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun. Yani u_1, u_2, v_1, v_2 elemanları X üzerinde asosyatif olmayan monomialler olmak üzere $u = (u_1 u_2)$ ve $v = (v_1 v_2)$ için $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ olsun. $l(u) = l(v)$ iken $u_1 < v_1$ veya $u_1 = u_2$ ve $u_2 < v_2$ ise $u < v$ olsun. $n \geq 3$ için

$H_n = \{((xy)z)/x, y, z, (xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}, x > y, (xy) > z, y \leq z\}$
olarak tanımlansın.

Teorem 2.2.2: F boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlanan bir serbest Lie cebiri ve $n \geq 1$ için H_n, X kümesi üzerinde tanımlı Hall kümesi olsun. O zaman $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi F serbest Lie cebirinin bir bazıdır. $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ bazına F nin Hall bazı denir.

Tanım 2.2.4: L bir X kümesi tarafından üretilen bir Lie cebiri olsun.

a) Eğer $L \cong {}^{F}/_{\gamma_n(F)}$ olacak şekilde X üzerinde bir serbest F Lie cebiri varsa L Lie cebrine n-yinci dereceden serbest nilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong {}^{F}/_{\gamma_2(F)}$ ise L Lie cebirine serbest abelyen Lie cebiri denir.

b) Eğer $L \cong {}^{F}/_{F(m)}$ olacak şekilde X üzerinde serbest bir F Lie cebiri varsa L Lie cebirine m-yinci dereceden serbest çözülebilir Lie cebiri denir.

c) Eğer $L \cong {}^{F}/_{F_{n_1,\dots,n_k}}$ olacak şekilde X üzerinde serbest bir F Lie cebiri varsa L Lie cebirine $\{n_1, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong {}^{F}/_{F_{2,2}}$ ise L Lie cebirine serbest metabelyen Lie cebiri denir.

Teorem 2.2.3: $L = {}^{F}/_{\gamma_n(F)}$ bir serbest nilpotent Lie cebiri ve H, F nin Hall bazı olsun. O zaman

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}$$

kümesi L serbest Lie cebirinin bir bazıdır.

Teorem 2.2.4: F bir X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. H kümesi F nin Hall bazı olsun. O zaman

$${\gamma_n(F)}/{\gamma_{n+1}(F)}$$

serbest Lie cebirinin bazı, uzunluğu n olan elemanlardan oluşur. Yani bu baz H_n dir.

2.3. Paraserbest Lie Cebirleri

Tanım 2.3.1: L bir Lie cebiri olsun. Eğer L Lie cebirinin sıfırdan farklı herhangi bir g elemanı için L Lie cebirinden sonlu boyutlu bir F Lie cebirine $\varphi_g(g)\neq 0$ olacak şekilde bir φ_g homomorfizmi varsa, L Lie cebirine rezidülü sonlu denir.

Her abelyen Lie cebiri rezidülü sonludur.

Tanım 2.3.2: L bir Lie cebiri olsun. Eğer herhangi bir $0\neq g\in L$ için L Lie cebirinden bir N nilpotent Lie cebirine $\psi_g(g)\neq 0$ olacak şekilde bir ψ_g homomorfizmi varsa L Lie cebirine rezidülü nilpotent denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz:

L Lie cebirinin alt merkezi serisinin terimlerinin kesişimi sıfır ise L Lie cebirine rezidülü nilpotent Lie cebiri denir.

Gerçekten eğer,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(L) = \{0\}$$

ise herhangi bir $0\neq g\in L$ için bir n tamsayısı bulabiliriz öyle ki $\gamma_n(L)$ terimi g elemanını içermez.

$0\neq g\in L$ olmak üzere,

$$\epsilon_n : L \rightarrow {}^{L}\!/_{\gamma_n(L)}$$

doğal homomorfizmi ele alalım. $\epsilon_n(g)\neq 0$ ve ${}^{L}\!/_{\gamma_n(L)}$ bir nilpotent Lie cebirdir.

Şimdi kabul edelim ki L rezidülü nilpotent ve $g\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(L)$ olsun. N nilpotentlik derecesi c olan bir nilpotent Lie cebiri olmak üzere, eğer $g\neq 0$ ise herhangi bir $\varphi: L\rightarrow N$ dönüşümü için $\varphi(g)\neq 0$ dır. Fakat,

$$\varphi(\gamma_c(L))= \gamma_c(\varphi(L))=\gamma_c(N)=\{0\}$$

dır. g∈ γ_c(L) olduğu için φ(g) ∈ φ(γ_c(L))={0} olur. Bu da bir çelişkidir. Böylece yukarıda verilen iki tanım denktir.

Bu tanımı genelleştirmek gerekirse; P bir özellik veya Lie cebirlerin bir sınıfı olsun. Eğer 0 ≠g∈L olmak üzere L Lie cebirinin bir I ideali için $^{L}/_{I}$ ∈ P ve g∉I ise L Lie cebirine rezidülü P denir.

Tanım 2.3.3: L karakteristiği sıfır olan bir k halkası üzerinde tanımlı bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda L Lie cebirine paraserbest Lie cebiri denir.

i) L rezidülü nilpotenttir,
ii) F bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olmak üzere ϕ: F→L doğal homomorfizmi her i≥1 için $\bar{\phi}_i$: $^{F}/_{\gamma_i(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_i(L)}$ izomorfizmlerini belirler.

X kümesinin kardinalitesine L Lie cebirinin rankı denir.
Bir başka ifadeyle, eğer bir L Lie cebiri, bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip rezidülü nilpotent ise L Lie cebirine paraserbest Lie cebiri denir. L bir Lie cebiri, $B \subset L, L \equiv \bar{L}\left(mod\ \gamma_2(L)\right)$ ve $B \equiv \bar{B}\left(mod\ \gamma_2(L)\right)$ olsun. Eğer $\bar{B}$ kümesi $\bar{L}$ yi serbestçe üretiyorsa ‘ ‘ B kümesi L Lie cebirini modülo $\gamma_2(L)$ serbestçe üretir’ ’ denir.

Tanım 2.3.4: L bir paraserbest Lie cebiri ve B kümesi L paraserbest Lie cebirinin bir alt kümesi olsun. Eğer B kümesi L Lie cebirini modülo γ_2(L) serbestçe üretiyorsa B kümesine L paraserbest Lie cebirinin paraüreteç kümesi denir. Paraüreteç kümesinin elemanlarına paraprimitif denir.

Tanım 2.3.5: P bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere H, P paraserbest Lie cebirinin bir Lie alt cebiri olsun. Eğer her $n \geq 1$ için,

$$H/\gamma_n(H) \cong K/\gamma_n(K)$$

olacak şekilde F serbest Lie cebirinin bir K alt cebiri varsa H Lie cebirine paraserbest Lie alt cebiri denir.

Tanım 2.3.6: P bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere I, P paraserbest Lie cebirinin bir Lie ideali olsun. Eğer her n için

$$I/\gamma_n(I) \cong J/\gamma_n(J)$$

olacak şekilde F serbest Lie cebirinin bir J ideali varsa I idealine paraserbest ideal denir.

Tanım 2.3.7: P bir paraserbest Lie cebiri olsun.

$$P^{(0)}= P,\ P^{(1)}= [P,P],\ P^{(2)}= [P^{(1)}, P^{(1)}],\ P^{(3)}= [P^{(2)}, P^{(2)}],\ldots,P^{(k)}= [P^{(k-1)}, P^{(k-1)}],\ldots$$

olmak üzere,

$$P=P^{(0)}\supset P^{(1)}\supset P^{(2)}\supset\ldots\supset P^{(k)}\supset\ldots$$

serisine P paraserbest Lie cebirinin türetilmiş serisi denir. Herhangi bir k tam sayısı için $P^{(k-1)}/P^{(k)}$ ifadesine, P paraserbest Lie cebirinin bir faktörü denir.

Tanım 2.3.8: Bazı $m\geq 1$ tam sayıları için $P^{(m)}= \{0\}$ ise P paraserbest Lie cebirine çözülebilir paraserbest Lie cebiri denir. Buradaki m tam sayısı P paraserbest Lie cebirinin türetilme uzunluğudur.

Tanım 2.3.9. P bir paraserbest Lie cebiri olsun.

$$\gamma_1(P) = L, \gamma_2(P) = [P, P], \gamma_3(P) = [P, \gamma_2(P)], \ldots, \gamma_k(P) = [P, \gamma_{k-1}(P)], \ldots$$

olmak üzere,

$$P = \gamma_1(P) \supset \gamma_2(P) \supset \gamma_3(P) \supset \ldots \supset \gamma_k(P) \supset \ldots$$

serisine P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisi denir. Bu serinin k-yıncı terimi bazen P_k ile gösterilir.

Tanım 2.3.10: Bazı k tam sayıları için $\gamma_k(P)=\{0\}$ ise P paraserbest Lie cebirine nilpotent paraserbest Lie cebiri denir. $\gamma_k(P)=\{0\}$ olacak şekildeki en küçük pozitif k tam sayısına P paraserbest Lie cebirinin nilpotentlik derecesi denir.

Tanım 2.3.11: P bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere

$$P/\gamma_2(P), P/\gamma_3(P), P/\gamma_4(P), \ldots$$

faktörlerine P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi dizisi denir. P paraserbest Lie cebirinin her alt merkezi serisine bir alt merkezi dizi karşılık gelir.

P ve R herhangi iki paraserbest Lie cebiri olsun. Aşağıdakilerin sağlanması durumunda P ve R aynı alt merkezi diziye sahiptir denir.

i) $k \geq 1$ için $\theta_k: P/\gamma_k(P) \longrightarrow R/\gamma_k(R)$ izomorfizmleri vardır.

ii) Her $k \geq 1$ için θ_k izomorfizmleri $\theta_{k-1}: P/\gamma_{k-1}(P) \longrightarrow R/\gamma_{k-1}(R)$ izomorfizmlerini belirler.

Tanım 2.3.12: i= 1,2,3,..,k,… için $n_i \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir $\{n_1, n_{2\ ,\ldots,}\, n_{k,\ldots}\}$ dizisi için P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

P_{n_1}; P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 – inci terimi,

P_{n_1,n_2}; P_{n_1} paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_2 – inci terimi,

$P_{n_1,\ldots,n_i,\,n_{i+1}} = (P_{n_1,\ldots,n_i})_{n_{i+1}}$; $P_{n_1,\ldots,n_i}$paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun. Böylece

$$P \supseteq P_{n_1} \supseteq P_{n_1,n_2} \supseteq \ldots \supseteq P_{n_1,\ldots,n_i} \supseteq P_{n_1,\ldots,n_i,\,n_{i+1}} \supseteq \ldots$$

serisine P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi denir.

Eğer $P_{n_1,\ldots,n_k}=\{0\}$ ve $n_1, n_{2\ ,\ldots,}\, n_k$ sayıları bu eşitlik sağlanacak şekildeki en küçük pozitif tamsayılar ise P paraserbest Lie cebirine $\{n_1, n_{2\ ,\ldots,}\, n_k\}$ dizisine göre bir polinilpotent paraserbest Lie cebiri denir.

Tanım 2.3.13:P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olsun.

$$P = \{(p_1, p_2) : p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}$$

kümesi P_1 ve P_2 nin vektör uzayı olarak direkt toplamı olsun. P üzerinde

$$[(p_1, p_2), (t_1, t_2)] = ([p_1, t_1], [p_2, t_2])$$

çarpımı tanımlansın. Bu çarpımla birlikte P bir Lie cebiridir. Bu durumda P paraserbest Lie cebirine P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerinin direkt toplamı denir ve $P = P_1 \oplus P_2$ ile gösterilir. Ayrıca $P = P_1 \oplus P_2$ olması durumunda aşağıdakiler doğrudur.

i) $P' = P_1' \oplus P_2'$

ii) $p \in P$ ise $p = p_1 + p_2$, $(p_1 \in P_1 \text{ve } p_2 \in P_2)$ olup $P = P_1 + P_2$ dir.

iii)$P_1 \cap P_2 = \{0\}$ dır.

Tanım 2.3.14:F, $X= \{x_1,x_2,...,x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir serbest Lie cebiri ve L, F ile aynı alt merkezi diziye sahip sonlu ranklı bir paraserbest Lie cebiri olsun. B, L Lie cebirinin bir üreteç kümesi olmak üzere

$$\hat{\phi}: X \to B$$
$$x_i \to \bar{x}_i$$

bir bijeksiyon olsun. $\hat{\phi}$ bijeksiyonunu ϕ: F → L epimorfizmine bilineer olarak genişletelim. O zaman,

$X= \{x_1,x_2,...,x_n\}$ için $\hat{\phi}(X)= \{\hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}(x_2),\ldots, \hat{\phi}(x_n)\}=\{\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \ldots , \bar{x}_n \}=B$ olur.

F serbest Lie cebirinin aşağıdaki Hall kümelerini düşünelim.

$H_1= X$,

$H_2=\{xy/ x,y \in H_1, x>y \},\ldots,$

$H_n=\{ x=(ab)c / a,b,c,ab \in H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1}, a>b, b \leq c, l(x)=n\}$

$H=\cup_{i=1}^{n} H_n$ dir.ϕ dönüşümünün X kümesine kısıtlanışı $\hat{\phi}$ olduğundan H_1 Hall kümesinin ϕ altındaki görüntüsü $\phi(H_1)=\hat{\phi}(H_1)= B$ dir. $\phi(H_1)=H_1^*$ olarak gösterilsin. O halde,

$H_1^* = B$,

$\phi(H_2)=H_2^* =\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)/ \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) \in H_1^*$ ve $\hat{\phi}(x)>\hat{\phi}(y)\},\ldots,$

$\phi(H_n)=H_n^*=\{\bar{x} = (\hat{\phi}(a)\hat{\phi}(b))\hat{\phi}(c) / \hat{\phi}(a),\hat{\phi}(b),\hat{\phi}(c),\hat{\phi}(a)\hat{\phi}(b) \in H_{n-1}^*$ ve $\hat{\phi}(a)>\hat{\phi}(b)$, $\hat{\phi}(b)\leq\hat{\phi}(c)$, $l(\bar{x}) =n \}$

kümeleri tanımlansın. L paraserbest olduğundan indislenmiş,

$$\bar{\phi}_n: {}^{F}/_{\gamma_n(F)} \to {}^{L}/_{\gamma_n(L)}$$
$$x + \gamma_n(F) \to \phi(x) + \gamma_n(L)$$

izomorfizmleri vardır. O halde n=2 için $i\in\{1,2,\ldots,n\}$olmak üzere

$$\bar{\phi}_2 : {}^{F}/_{\gamma_2(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_2(L)},$$

$$x_i + \gamma_2(F) \rightarrow \phi(x_i) + \gamma_2(L)$$

olur.

$$B^* = \{ \phi(x_1) + \gamma_2(L), \phi(x_2) + \gamma_2(L), \ldots, \phi(x_n) + \gamma_2(L)\}$$
$$= \{\bar{\phi}_2(x_1 + \gamma_2(F)), \bar{\phi}_2(x_2 + \gamma_2(F)), \ldots, \bar{\phi}_2(x_n + \gamma_2(F))\}$$

olsun. B^* kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $i = 1, \ldots, n$ için $\alpha_i \in K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\phi}_2(x_i + \gamma_2(F)) = \bar{0}$$

olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\phi}_2(\alpha_i x_i + \gamma_2(F)) = \bar{0}$$

$$\bar{\phi}_2\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i + \gamma_2(F))\right) = \bar{0}$$

olur. $\bar{\phi}_2$bir izomorfizm olduğundan,$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i + \gamma_2(F)) = \gamma_2(F)$olur. Eğer $\alpha_i \neq 0$ ise $\alpha_i x_i \in \gamma_2(F)$ olur. Bu ise imkansızdır. O halde $\alpha_i = 0$ olmalıdır. Böylece B^* kümesi lineer bağımsızdır.$\bar{\Phi}_n$bir izomorfizm olduğundan bunu her n için söyleyebiliriz. Yani,

$$\{ \phi(x_1) + \gamma_n(L), \phi(x_2) + \gamma_n(L), \ldots, \phi(x_n) + \gamma_n(L)\} = \{\bar{\Phi}_n(x_1 + \gamma_n(F)), \bar{\Phi}_n(x_2 + \gamma_n(F)), \ldots, \bar{\Phi}_n(x_n + \gamma_n(F))\}$$

kümesi lineer bağımsızdır. H kümesi F serbest Lie cebirin Hall bazı ise$\{H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1}\}$ kümesi ${}^{F}/_{\gamma_n(F)}$için bir baz kümesidir.

$$\bar{\Phi}_n : {}^{F}/_{\gamma_n(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_n(L)}$$

izomorfizmini gözönüne alırsak

$${}^{L}/_{\gamma_n(L)} = \bar{\Phi}_n({}^{F}/_{\gamma_n(F)}) = \bar{\Phi}_n(sp\{ H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1}\})$$
$$= sp\{ \bar{\Phi}_n(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1})$$

olur. Böylece

$$\bar{\Phi}_n(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1}) = \{H_1^{*} \cup H_2^{*} \cup \ldots \cup H_{n-1}^{*}\}$$

kümesi ${}^{L}/_{\gamma_n(L)}$ için bir baz kümesidir.

3. PARASERBEST LIE CEBİRLERİ, ALT CEBİRLERİ ve İDEALLERİ

Bu bölümde paraserbest Lie cebirlerinin alt cebirleri, idealleri ve bölüm cebirleri ile ilgili, paraserbest Lie cebirlerin temel yapısını ortaya koyan, bazı sonuçları inceleyeceğiz. Ayrıca paraserbest Lie cebirlerinin direkt toplamını ve bir paraserbest Lie cebirin serbest çarpanlarının da paraserbestlik koşullarını sağladıklarını göstereceğiz. Daha sonra paraserbest Lie cebirlerin artan birleşimlerinin ve rankı iki olan serbest Lie cebirlerinin birleşimlerinin paraserbest olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 3.1: Sonlu m ranklı bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip sonlu m üreteçli bir Lie cebiri serbesttir.

İspat: F cebiri rankı m olan bir serbest Lie cebiri olsun. L ise F ile aynı alt merkezi diziye sahip m-üreteçli bir Lie cebiri olsun. Kabul edelim ki L Lie cebiri serbest olmasın. O halde üreteci üretece götüren $\phi: F \rightarrow L$ kanonik dönüşümü çekirdeği sıfır olmayan bir epimorfizmdir. Yani bir $0 \neq w \in F$ vardır öyle ki $\phi(w) = 0$ dır.
F rezidülü nilpotent olduğundan öyle bir n tam sayısı vardır ki $w \in \gamma_n(F)$ fakat $w \notin \gamma_{n+1}(F)$ dır.
ϕ dönüşümü $\gamma_{n+1}(F)$ verbal idealini $\gamma_{n+1}(L)$ cebirine dönüştürür. O halde her n için indislenmiş bir

$$\bar{\Phi}_{n+1}: {}^{F}/_{\gamma_{n+1}(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_{n+1}(L)}$$
$$w + \gamma_{n+1}(F) \rightarrow \phi(w) + \gamma_{n+1}(L)$$

epimorfizmi vardır. $\bar{w} = w + \gamma_{n+1}(F)$ için,

$$\bar{\Phi}_{n+1}(\bar{w}) = \phi(w) + \gamma_{n+1}(L) = 0 + \gamma_{n+1}(L) = \bar{0}$$

olur. $w \notin \gamma_{n+1}(F)$ olduğundan $\bar{\Phi}_{n+1}$ çekirdeği 0 dan farklıdır. Açıktır ki $\bar{\Phi}_{n+1}$ sonlu üretilmiş bir Lie cebirinden izomorfik görüntüsüne olan bir dönüşümdür. Buda bir

çelişkidir. Çünkü sonlu üretilmiş nilpotent Lie cebirleri Hopfiandır (Evans, 1969). O halde L bir serbest Lie cebiridir.

$\mathcal{V}$ sınıfı serbest grupları rezidülü nilpotent olan bir sınıf olsun. Dean (2008) bir paraserbest-$\mathcal{V}$ grubunun bir X paraüreteç kümesinin bir serbest-$\mathcal{V}$ grubu ürettiğini ispatladı. Lie cebirlerinde de benzer durum söz konusudur. Aşağıdaki teorem gruplarda yapılan ispata benzer şekilde yapılmıştır.

Bir Lie cebirinin herhangi bir A alt kümesinin kardinalitesini $|A|$ ile gösterelim.

Teorem 3.2: P bir paraserbest Lie cebiri olsun. P nin bir X paraüreteç kümesi bir serbest Lie cebiri üretir.

İspat: H kümesi P paraserbest Lie cebirinin X tarafından üretilen alt cebiri ve F ise $|X| = |Y|$ olacak şekilde boş olmayan bir Y kümesi tarafından serbestçe üretilen bir serbest Lie cebiri olsun.

Teoremi ispatlamak için n=2,3,… için $H/\gamma_n(H) \cong F/\gamma_n(F)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece Teorem 3.1' den ispat tamamlanacaktır.

$y_i \in Y$, $x_i \in X$ ve $1 \leq i \leq |X|$ için aşağıdaki epimorfizmi ele alalım.

$$\phi: Y \to X,$$
$$\phi(y_i) = x_i.$$

ϕ epimorfizmini $\bar{\phi}: F \to H$ homomorfizmine genişletebiliriz. Şimdi $n \geq 1$ için

$$\bar{\Phi}_n: F/\gamma_n(F) \to H/\gamma_n(H)$$
$$f + \gamma_n(F) \to \bar{\phi}(f) + \gamma_n(H)$$

olarak tanımlanan indislenmiş epimorfizmlerin bir $\bar{\Phi}_n$ ailesini ele alalım.

1.Durum: $|X| = |Y| < \infty$ olsun. İspatı yapmak için öncelikle

$$H + \gamma_n(P)/\gamma_n(P) = P/\gamma_n(P)$$

eşitliğine ihtiyacımız var. X kümesi P paraserbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe ürettiğinden, X bir serbest Lie cebirini demodülo $\gamma_2(P)$ serbestçe üretir. Bahturin (1987) Bölüm 4.2.4, Teorem 9den dolayı X kümesi H cebirini de modülo $\gamma_2(H)$ serbestçe üretir. Böylece

$$H + \gamma_n(P)/\gamma_n(P) = P/\gamma_n(P)$$

dır. İkinci İzomorfizm Teoreminden

$$H/H \cap \gamma_n(P) = P/\gamma_n(P)$$

olur. $\gamma_n(H) \subset H \cap \gamma_n(P)$ olduğu açıktır. Böylece n=2,3,… için $H/\gamma_n(H)$ bölüm cebirinden $H/H \cap \gamma_n(P)$ üzerine bir doğal homomorfizm vardır.

n=2,3,... için aşağıdaki diyagramı ele alalım.

$$F/\gamma_n(F) \xrightarrow{\bar{\Phi}_n} H/\gamma_n(H) \to H/H \cap \gamma_n(P) \cong P/\gamma_n(P)$$

Bu diyagram $F/\gamma_n(F)$ bölüm cebirinden kendisine izomorf olan bir görüntüye giden bir homomorfizm tanımlar. Sonlu üretilmiş nilpotent Lie cebirleri Hopfiandır(Evans 1969). O halde bu homomorfizminin çekirdeği birim olmalıdır. Böylece n= 2,3,… için $\bar{\Phi}_n$izomorfizmdir. Teorem 3.1.' den H bir serbest Lie cebirdir ve serbest olarak X tarafından üretilir.

2.Durum: $|X| = |Y| = \infty$ olsun.

ϕ: F→ H dönüşümü 1. Durumdaki gibi olmak üzere w∈ $Ker\phi$ olsun. F_s cebiri w ∈ F_s olacak şekilde F serbest Lie cebirinin S⊆Y alt kümesi tarafından serbest olarak

üretilen sonlu üretilmiş bir alt cebir olsun. P paraserbest Lie cebirinin $\phi(S)$ tarafından üretilen en küçük ideali olan H_s idealini ele alalım.

$$\psi_n : {}^{F}\!/_{\gamma_n(F)} \rightarrow {}^{P}\!/_{\gamma_n(P)}$$

P ve F Lie cebirlerinin alt merkezi dizileri arasında tanımlanan bir izomorfizm olsun. O halde, n=2,3,…için

$${}^{F_s}\!/_{\gamma_n(F_s)} = {}^{(F_s + \gamma_n(F))}\!/_{\gamma_n(F)} \subseteq {}^{F}\!/_{\gamma_n(F)}$$

olur. $\psi_n\left({}^{F_s}\!/_{\gamma_n(F_s)}\right) = {}^{P_s}\!/_{\gamma_n(P_s)}$ olsun. Daha önce

$${}^{H_s}\!/_{H_s \cap \gamma_n(P_s)} \cong {}^{P_s}\!/_{\gamma_n(P_s)}$$

izomorfizmini elde etmiştik. O halde aşağıdaki diyagramı elde ederiz:

$${}^{F_s}\!/_{\gamma_n(F_s)} \rightarrow {}^{H_s}\!/_{\gamma_n(H_s)} \rightarrow {}^{H_s}\!/_{H_s \cap \gamma_n(P_s)} \cong {}^{P_s}\!/_{\gamma_n(P_s)}$$

Böylece hopfianlıktan bu diyagram

$${}^{F_s}\!/_{\gamma_n(F_s)} \cong {}^{H_s}\!/_{\gamma_n(H_s)}$$

izomorfizmini gerçekler. O halde Teorem 3.1.' den H_s serbesttir ve ϕ dönüşümünün F_s cebirine kısıtlanışı bir izomorfizmdir. O halde w=0 olup ϕ dönüşümünün kendisi de bir izomorfizmdir ve böylece H serbesttir.

Sonuç 3.1: P nin bir H alt cebiri Teorem 3.2. de tanımlandığı gibi olsun. O halde n=2,3,…için

$$\gamma_n(\mathrm{H}) = \mathrm{H} \cap \gamma_n(\mathrm{P}).$$

İspat: Teorem 3.2 ' den

$$\mathrm{P}/\gamma_n(\mathrm{P}) \cong \mathrm{F}/\gamma_n(\mathrm{F}) \cong \mathrm{H}/\gamma_n(\mathrm{H}) \cong \mathrm{H}/\mathrm{H} \cap \gamma_n(\mathrm{P})$$

olduğu açıktır. Böylece sonuç elde edilir.

Aşağıdaki önerme Bahturin (1987) Önerme 4.1.2.2 nin bir sonucu olarak açıkça görülebilir.

Önerme 3.1: X ve Y boş olmayan iki küme olsun. O zaman

$$F(X)/\gamma_n(F(X)) \cong F(Y)/\gamma_n(F(Y))$$

izomorfizmin doğru olması için gerek ve yeter koşul X ve Y kümelerinin aynı kardinaliteye sahip olmasıdır.
Aşağıdaki teorem Bahturin (1987) Teorem 9, Bölüm 4.2.4. den kolayca elde edilir.

Teorem 3.3: $G = F(X)/\gamma_n(F(X))$ ve Y kümesi G bölüm cebirinin modülo $\gamma_2(G)$ lineer bağımsız olan bir alt kümesi olsun. O zaman

$$\langle Y \rangle = F(Y)/\gamma_n(F(Y))$$

dir.

Lemma 3.1: Kabul edelim ki bir Y kümesi $F = F(X)$ serbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(F)$ serbestçe üretsin. O zaman n=2,3,... için Y kümesi F serbest Lie cebirini modülo $\gamma_n(F)$ serbestçe üretir.

İspat: Bu Lemma'nın ispatı Bokut ve Kukin (1994) Lemma 2.10.1. den kolaylıkla elde edilir.

Lemma 3.2: Bir X kümesi bir L Lie cebirini modülo $\gamma_2(\mathrm{L})$ olarak serbestçe üretsin. O halde X kümesi n=2,3,.. için L Lie cebirini modülo $\gamma_n(\mathrm{L})$ olarak da serbestçe üretir.

İspat: $\mathrm{L}/\gamma_2(\mathrm{L})$ faktörünü ele alalım.

$$\mathrm{L}/\gamma_2(\mathrm{L}) \cong \left.\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})\right/\left.\gamma_2(\mathrm{L})/\gamma_n(\mathrm{L})\right.$$

$$\cong \left.\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})\right/\left.\left(\gamma_2(\mathrm{L}) + \gamma_n(\mathrm{L})\right)/\gamma_n(\mathrm{L})\right.$$

$$\cong \left.\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})\right/\gamma_2\left(\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})\right)$$

olur. Hipotezden X, L yi modülo $\gamma_2(\mathrm{L})$ olarak üretiyor. O halde X kümesi $\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})$bölüm cebirini modülo türetilmiş cebirine göre de serbestçe üretir. Böylece Lemma 3.1. den X kümesi $\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L})$bölüm cebirini de serbestçe üretir.

Teorem 3.4: Bir paraserbest Lie cebirinin herhangi bir alt cebiri de paraserbesttir.

İspat: P bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir paraserbest Lie cebiri olsun. $x \in P, y \in F$ için

$$\phi: \mathrm{P} \to \mathrm{F}$$
$$\mathrm{x} \to \mathrm{y}$$

kanonik dönüşümünü tanımlayalım. O halde ϕ dönüşümü $n \geq 2$ için,

$$\phi_n: {}^{\mathrm{P}}\!/_{\gamma_n(\mathrm{P})} \to {}^{\mathrm{F}}\!/_{\gamma_n(\mathrm{F})}$$

$$\mathrm{x} + \gamma_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{y} + \gamma_n(\mathrm{F})$$

olarak tanımlanan indislenmiş bir ϕ_n ailesini belirler. H cebiri P Lie cebirinin bir Lie alt cebiri olsun.O halde

$$\bigcap_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{H}) \subset \bigcap_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P})$$

olur. P paraserbest olduğundan rezidülü nilpotenttir. Böylece

$$\bigcap_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{H}) = \{0\}$$

olur. Yani H rezidülü nilpotenttir. Şimdi H cebirinin bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim.

$$\mathrm{K} = \phi(\mathrm{H}) = \{\mathrm{y} \in \mathrm{F} : \exists \mathrm{x} \in \mathrm{H} \text{ için}, \phi(\mathrm{x}) = \mathrm{y}\}$$

olsun. Bir serbest Lie cebirinin her alt cebiri serbest olduğundan K alt cebiri de serbesttir. Her x∈ H için aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım,

$$\varphi: H \rightarrow {}^{K}/_{\gamma_n(K)}$$
$$x \rightarrow \phi(x) + \gamma_n(K)$$

Her $x_1, x_2 \in H$ olmak üzere $x_1 = x_2$ olsun. ϕ bir epimorfizm olduğundan

$$\varphi(x_1) = \phi(x_1) + \gamma_n(K) = \phi(x_2) + \gamma_n(K) = \varphi(x_2)$$

dır. Böylece, φ dönüşümü iyi tanımlıdır. Her $x_1, x_2 \in H$ için

$$\varphi[x_1, x_2] = \phi[x_1, x_2] + \gamma_n(K)$$

dır.ϕ bir epimorfizm olduğundan

$$\begin{aligned}\phi[x_1, x_2] + \gamma_n(K) &= [\phi(x_1), \phi(x_2)] + \gamma_n(K) \\ &= [\phi(x_1) + \gamma_n(K), \phi(x_2) + \gamma_n(K)] \\ &= [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\varphi[x_1, x_2] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$$

dır. O halde φ bir Lie cebiri homomorfizmidir. Benzer şekildeϕ bir epimorfizm olduğundan φ örtendir. Şimdi φ nin çekirdeğini hesaplayalım. x ∈Ker φ olsun. O halde

$$\varphi(x) = \phi(x) + \gamma_n(K) = \gamma_n(K)$$

olur. Böylece $\phi(x) \in \gamma_n(K) \subset \gamma_n(F)$ olur. H$\subseteq$ P olduğundan x$\in$ P dir. ϕ_n dönüşümünün tanımından

$$\phi_n(x + \gamma_n(P)) = \phi(x) + \gamma_n(F) \text{ ve } \phi(x) \in \gamma_n(K)$$

olduğundan $\phi_n(x + \gamma_n(P)) = \gamma_n(F)$ olup $x + \gamma_n(P) \in \text{Ker}\phi_n$ dir. ϕ_n bir izomorfizm olduğundan $\text{Ker}\phi_n = \gamma_n(P)$dir. O halde $x + \gamma_n(P) = \gamma_n(P)$ olup x$\in \gamma_n(P)$ dir. H $\cap$ $\gamma_n(P) = \gamma_n(H)$ olduğundan x $\in \gamma_n(H)$ olur ve dolayısıyla Ker $\varphi \subseteq \gamma_n(H)$elde edilir.
h $\in \gamma_n(H)$ olsun. H $\cap$ $\gamma_n(P) = \gamma_n(H)$ olduğundan h $\in$ H ve h $\in \gamma_n(P)$ dir. φ dönüşümünün tanımından

$$\varphi(h) = \phi(h) + \gamma_n(\phi(H))$$

olup $\phi(h) \in \gamma_n(F)$ dir.
Sonuç 3.1 den$\gamma_n(\phi(H)) = \phi(H) \cap \gamma_n(F)$ olduğu biliniyor. O halde $\phi(h) \in \phi(H)$ ve $\phi(h) \in \gamma_n(F)$olup $\phi(h) \in \gamma_n(\phi(H))$ olur. Böylece $\gamma_n(H) \subset$ Ker φ olup

$$\gamma_n(H) = \text{Ker } \varphi$$

dir. İzomorfizm teoremi gereği $H/_{\text{Ker } \varphi} \cong \text{Im}\varphi$olacağından

$$H/_{\gamma_n(H)} \cong K/_{\gamma_n(K)}$$

olur. O halde H Lie alt cebiri paraserbesttir.

Teorem 3.5: Bir paraserbest Lie cebirinin bölüm cebiri de paraserbesttir.

İspat: P bir paraserbest Lie cebiri ve I v P olsun. Bir u $\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/_I)$ alalım. Her n için

$$u \in \gamma_n\left(P/I\right) = \gamma_n(P) + I/I$$

olur. $a \in \gamma_n(P) + I$ olmak üzere $u = a + I$ olsun. Açıktır ki

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P) + I$$

dır. P rezidülü nilpotent olduğundan $a \in I$ olur. O zaman $u = I$ olup

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n\left(P/I\right) = 0$$

dır. O halde P/I rezidülü nilpotenttir. Şimdi P/I cebirinin bir serbest Lie cebir ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $\left(P/I\right)\Big/\gamma_n\left(P/I\right)$ cebirini ele alalım.

$$\left(\gamma_n(P) + I\right)/I \cong \gamma_n(P)/I$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\left(P/I\right)\Big/\gamma_n\left(P/I\right) \cong \left(P/I\right)\Big/\left(\gamma_n(P) + I\right)/I$$

$$\cong P/I \Big/ \left(\gamma_n(P)/I\right)$$

$$\cong P/\gamma_n(P)$$

olur. P paraserbest olduğundan

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F)$$

olacak şekilde bir F serbest Lie cebiri vardır. O zaman,

$$(P/I)/\gamma_n(P/I) \cong F/\gamma_n(F)$$

dir. Böylece, P/I bölüm cebiri paraserbesttir.

Lemma 3.3: P sonlu ranklı bir paraserbest Lie cebiri ve I ise P nin bir ideali olsun. Eğer P paraserbest Lie cebiri P/I bölüm cebiri ile aynı ranka sahip ise I={0} dır.

İspat: P ve P/I aynı ranka sahip ise her pozitif n tam sayısı için,

$$P/\gamma_n(P) \cong (P/I)/\gamma_n(P/I)$$

$$\cong (P/I)/(\gamma_n(P) + I)/I$$

$$\cong P/\gamma_n(P) + I$$

dır.$\mathcal{V}$ cebirlerin herhangi bir sınıfı ve A ise $\mathcal{V}$ de herhangi sonlu üretilmiş rezidülü sonlu bir cebir olsun.O zaman A cebiri hopfiandır (Evans, 1969).

O halde $P/\gamma_n(P)$ cebiri bir sonlu üretilmiş nilpotent Lie cebiri olduğundan Hopfiandır. Fakat

$$P/\gamma_n(P) \cong P/\gamma_n(P) + I$$

izomorfizmi elde edilmişti. Bu durum $P/\gamma_n(P)$ bölüm cebirinin hopfian olmasıyla çelişir. O halde

$$P/\gamma_n(P) \cong P/\gamma_n(P) + I$$

ve

$$\gamma_n(P) \subseteq \gamma_n(P) + I$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\gamma_n(P) = \gamma_n(P) + I$$

olduğu elde edilir. Böylece her n pozitif tam sayısı için $I \subseteq \gamma_n(P)$ olup $I=\{0\}$ dır.

Önerme 3.2: Bir serbest abelyen Lie cebiri paraserbesttir.

İspat: L bir abelyen Lie cebiri olsun. O halde $\gamma_2(L) = [L, L] = \{0\}$ dır.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(L) = \{0\}$$

olur. Böylece L rezidülü nilpotenttir. L serbest abelyen olduğundan $L \cong F/\gamma_2(F)$ olacak şekilde bir F serbest Lie cebiri vardır. Her $n \geq 2$ için $\gamma_n(L) = \{0\}$ olduğundan

$$L/\gamma_n(L) \cong \left(F/\gamma_2(F)\right) \Big/ \gamma_n\left(F/\gamma_2(F)\right) \cong F/\gamma_n(F)$$

dir. O halde L Lie cebiri paraserbesttir.

Önerme 3.3: İki paraserbest Lie cebirinin direkt toplamları da paraserbesttir.

İspat: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve $P = P_1 \oplus P_2$ olsun. İlk olarak P paraserbest Lie cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterelim.
Bunu göstermek için öncelikle

$$\gamma_n(P) = \gamma_n(P_1 \oplus P_2) = \gamma_n(P_1) \oplus \gamma_n(P_2)$$

eşitliğinin doğruluğunu tümevarımla ispatlayalım. n=1 için

$$\gamma_1(P) = P = P_1 \oplus P_2 = \gamma_1(P_1) \oplus \gamma_1(P_2)$$

olur. Her $m < n$ için

$$\gamma_m(P) = \gamma_m(P_1) \oplus \gamma_m(P_2)$$

olsun. O halde

$$\gamma_n(P) = [\gamma_{n-1}(P), P] = [\gamma_{n-1}(P_1) \oplus \gamma_{n-1}(P_2), P_1 \oplus P_2]$$

olur. P üzerinde tanımlanan çarpma işleminden,

$$\begin{aligned} \gamma_n(P) &= [\gamma_{n-1}(P_1) + \gamma_{n-1}(P_2), P_1 + P_2] \\ &= ([\gamma_{n-1}(P_1), P_1] + [\gamma_{n-1}(P_2), P_2]) \\ &= \gamma_n(P_1) + \gamma_n(P_2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\gamma_n(P_1) \cap \gamma_n(P_2) = \{0\}.$$

dır. O halde

$$\gamma_n(\mathrm{P}) = \gamma_n(\mathrm{P}_1) \oplus \gamma_n(\mathrm{P}_2)$$

Şimdi P paraserbest Lie cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterebiliriz.

$$\bigcap\nolimits_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n(\mathrm{P}_1) \oplus \gamma_n(\mathrm{P}_2)\right)$$

olur. Direkt toplamın tanımından,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n(\mathrm{P}_1) \oplus \gamma_n(\mathrm{P}_2)\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}_1)\right) \oplus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}_2)\right)$$

olur. P_1 ve P_2 paraserbest olduklarından rezidülü nilpotenttirler. O halde,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}_1) = \{0\}$$

ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}_2) = \{0\}$$

dır. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}) = \{0\}$$

olur. Yani P rezidülü nilpotenttir.Şimdi P paraserbest Lie cebirinin bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim.P_1 ve P_2 paraserbest olduklarından F_1 ve F_2 gibi iki serbest Lie cebiri vardır öyle ki $n \geq 1$ için,

$$P_1/\gamma_n(P_1) \cong F_1/\gamma_n(F_1)$$

ve

$$P_2/\gamma_n(P_2) \cong F_2/\gamma_n(F_2).$$

O halde P paraserbest Lie cebirinin P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerin direkt toplamı olduğu gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned} P/\gamma_n(P) &\cong (P_1 \oplus P_2)/\gamma_n(P_1 \oplus P_2) \\ &\cong P_1/\gamma_n(P_1) \oplus P_2/\gamma_n(P_2) \\ &\cong F_1/\gamma_n(F_1) \oplus F_2/\gamma_n(F_2) \\ &\cong (F_1 \oplus F_2)/\gamma_n(F_1 \oplus F_2). \end{aligned}$$

Biliyoruz ki $(F_1 \oplus F_2)/\gamma_n(F_1 \oplus F_2)$ cebirinden kendisinin $(F_1 * F_2)/\gamma_n(F_1 * F_2)$ bölüm cebirindeki izomorfik kopyasına bir θ dönüşümü vardır. Yani

$$\theta\left((F_1 \oplus F_2)/\gamma_n(F_1 \oplus F_2)\right) = (F_1 \oplus F_2)/\gamma_n(F_1 \oplus F_2) \subseteq (F_1 * F_2)/\gamma_n(F_1 * F_2)$$

Ayrıca bir serbest nilpotent Lie cebirinin her alt cebiri serbest nilpotent olduğundan bir G serbest Lie cebiri vardır öyle ki

$$\theta\left(\left.(F_1 \oplus F_2)\right/_{\gamma_n(F_1 \oplus F_2)}\right) = \left.G\right/_{\gamma_n(G)}$$

dır. O halde

$$\left.P\right/_{\gamma_n(P)} \cong \left.G\right/_{\gamma_n(G)}$$

olur. Yani P paraserbesttir.

Önerme 3.4: İki paraserbest Lie cebirin serbest çarpımları da paraserbesttir.
Önermenin ispatı Baur (1978) da bulunmaktadır.

Önerme 3.5: A ve B iki paraserbest Lie cebiri ve P bu cebirlerin serbest çarpımı olsun. O zaman

$$\left.P\right/_{\gamma_2(P)} = \left.A\right/_{\gamma_2(A)} \oplus \left.B\right/_{\gamma_2(B)}$$

dir.

İspat: Önermeyi ispatlamak için öncelikle aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

$$\left.A\right/_{\gamma_2(A)} \oplus \left.B\right/_{\gamma_2(B)} = \left.A \oplus B\right/_{\gamma_2(A) \oplus \gamma_2(B)} \tag{3.1}$$

$(a + \gamma_2(A)) + (b + \gamma_2(B) \in \left.A\right/_{\gamma_2(A)} \oplus \left.B\right/_{\gamma_2(B)}$ olmak üzere,

$(a + \gamma_2(A)) + (b + \gamma_2(B)) = (a + b + \gamma_2(A) + \gamma_2(B)) \in \left.A \oplus B\right/_{\gamma_2(A) \oplus \gamma_2(B)}$

Diğer yandan

$a + b + \gamma_2(A) + \gamma_2(B) \in {}^{A\oplus B}/_{\gamma_2(A)\oplus\gamma_2(B)}$ için

$$a + b + \gamma_2(A) + \gamma_2(B) = a + \gamma_2(A) + b + \gamma_2(A) \in {}^{A}/_{\gamma_2(A)} \oplus {}^{B}/_{\gamma_2(B)}$$

olur. O halde (3.1) eşitliği doğrudur. Şimdi $u \in P$ele alalım.

$$\varphi: P \to {}^{A\oplus B}/_{\gamma_2(A)\oplus\gamma_2(B)}$$

$$u + \gamma_2(P) \to u + \gamma_2(A) + \gamma_2(B)$$

homomorfizmini tanımlayalım. φ homomorfizminin tanımından Ker $\varphi = \gamma_2(P)$ dır ve φ örtendir. O halde izomorfizm teoreminden

$${}^{P}/_{\gamma_2(P)} \cong {}^{A\oplus B}/_{\gamma_2(A)\oplus\gamma_2(B)}$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinden

$${}^{P}/_{\gamma_2(P)} \cong {}^{A}/_{\gamma_2(A)} \oplus {}^{B}/_{\gamma_2(B)}$$

sonucuna varılır.

Lemma 3.4: Bir paraserbest Lie cebirinin serbest çarpanları da paraserbesttir.

İspat: P bir paraserbest Lie cebiri ve $P = A * B$ olsun. Önerme 3.5 den

$${}^{P}/_{\gamma_2(P)} \cong {}^{A}/_{\gamma_2(A)} \oplus {}^{B}/_{\gamma_2(B)}$$

dır. X kümesi A Lie cebirinin ve Y kümesi de B Lie cebirinin üreteç kümeleri olsunlar öyle ki X modülo $\gamma_2(A)$lineer bağımsız ve Y modülo $\gamma_2(B)$ lineer bağımsızdır. O halde Önerme 3.5 den $X \cup Y$ kümesi modülo $\gamma_2(P)$ lineer bağımsız

olup P paraserbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe üretir. Ayrıca X kümesi A Lie cebirini modülo $\gamma_2(A)$ve Y ise B Lie cebirini modülo $\gamma_2(B)$serbestçe üretir. Bunun dışında $P/\gamma_n(P)$ cebiri $X \cup Y$ tarafından serbestçe üretilen bir serbest nilpotent Lie cebiridir. O halde Bahturin (1978), Teorem 9 dan X kümesi modülo $\gamma_n(A)$bir serbest nilpotent Lie cebiri üretir. O halde A bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahiptir. P rezidülü nilpotent olduğundan A da rezidülü nilpotenttir. Böylece A paraserbesttir.

Benzeri işlemleri B için de yapılabilir. O halde bir P paraserbest Lie cebirinin serbest çarpanları da paraserbesttir.

Tanım 3.1: L bir Lie cebiri olsun, $i \geq 2$ için

$$L/\gamma_i(L) \to L/\gamma_{i-1}(L)$$

şeklindeki kanonik projeksiyonların sistemini düşünelim. Bu sistemin ters limitini $\hat{L} = \lim_{\leftarrow} L_i$ile ve kanonik dönüşümleri de

$$\tau_i : \hat{L} \to L/\gamma_i(L)$$

ile gösterelim.$\hat{L}$ yı i≥2 için $\oplus L/\gamma_i(L)$ direkt toplam cebirinin bir alt cebiri olarak düşünebiliriz öyle ki

$$a_i \in L \text{ ve } a_{i+1} \equiv a_i \text{mod} \gamma_{i+1}(L)$$

olmak üzere bir u∈ $\hat{L}$ elemanı $u=(a_1+ \gamma_2(L), a_2 + \gamma_3(L), \dots)$ formundadır. O zaman

$$\tau_i(u) = a_{i-1} + \gamma_i(L) \in L/\gamma_i(L)$$

olduğu açıktır.

$$\pi_i : L \to L/\gamma_i(L)$$

projeksiyonları $\tau_i h=\pi_i$ olacak şekilde bir

$$h: L\rightarrow \hat{L}$$

homomorfizmini belirler. Bu homomorfizm $v\in L$ için

$$h(v)= (v+ \gamma_2(L), v+ \gamma_3(L),\ldots)$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.6: Yukarıda tanımlanan h homomorfizminin injektif olması için gerek ve yeter koşul L Lie cebirinin rezidülü nilpotent olmasıdır.

İspat: h bir injektif homomorfizm olsun. $\bigcap_{i=1}^{\infty}\gamma_i(L)\neq\{0\}$ olduğunu varsayalım. O zaman bir

$$0\neq u\in \bigcap_{i=1}^{\infty}\gamma_i(L)$$

var olup her $i\geq 2$ için $u\in\gamma_i(L)$ dir. Bu durumda her i için

$$u+\gamma_i(L) = \gamma_i(L)$$

olacağından

$$h(u)= (u+ \gamma_2(L), u+ \gamma_3(L),\ldots) = (\gamma_2(L), \gamma_3(L),\ldots)$$

olur. Yani $0\neq u\in$ Ker h olur. O halde Ker h $\neq\{0\}$ dır. Bu ise h homomorfizminin injektif olmasıyla çelişir. O halde

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\gamma_i(L)=\{0\}$$

olmalıdır. Böylece L rezidülü nilpotenttir. Tersine L rezidülü nilpotent olsun. Her i için

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(L)=\{0\}$$

dır. u∈ Ker h ise

$$h(u)= (u+ \gamma_2(L), u+ \gamma_3(L),\ldots)$$

eşitliğinden

$$(u+ \gamma_2(L), u+ \gamma_3(L),\ldots) = (\gamma_2(L), \gamma_3(L),\ldots)$$

ve her i≥2 için

$$u+\gamma_i(L) = \gamma_i(L)$$

dır. Buradan her i için

$$u \in \gamma_i(L) \text{ ve } u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(L)$$

elde edilir. L rezidülü nilpotent olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(L)=\{0\}$$

dır. O haldeu=0 ve Ker h ={0}dır. Yani h injektiftir.

X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $K\langle X\rangle$, X üzerinde tanımlı polinamlar halkasını temsil etsin. $K\langle X\rangle$, üreteci X olan serbest asosyatif k-cebirdir. $(K\langle X\rangle)_n$ ise $K\langle X\rangle$ cebirinin n-inci dereceden homojen polinomlarından üretilen ideali olsun.
O halde $K\langle\langle X\rangle\rangle$ cebiri $K\langle X\rangle$ in $(K\langle X\rangle)_n$ ideali ile oluşturduğu bölüm cebirlerinin ters limiti olarak tanımlanır. Yani

$$K\langle\langle X\rangle\rangle = \lim_{\leftarrow} {K\langle X\rangle}\Big/{(K\langle X\rangle)_n}$$

dir.

Önerme 3.7(Baur,1978):L paraüreteç kümesi X olan bir paraserbest Lie cebiri ve F ise X üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman

$$L \xrightarrow{\ j\ } \hat{F} \xrightarrow{\ k\ } K\langle\langle X\rangle\rangle$$

dönüşümleri X üzerinde birim olup injektiftir.

Sonuç 3.2(Baur,1978):$\hat{F}$ Lie cebiri rezidülü nilpotenttir.

Tanım 3.2: (I, ≤) bir kısmi sıralı küme olsun. Her i,j∈I için i≤k ve j≤k olacak şekilde bir k∈I varsa I kümesine direkt küme denir.

Tanım 3.3: I bir direkt küme ve $\{A_i\}_{i\in I}$ Lie cebirlerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda $\left\{\{A_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i<j}\right\}$ sistemine Lie cebirlerinin bir direkt sistemi denir:

i) i≤j olacak şekildeki her i,j∈I çifti için bir $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ homomorfizmi vardır öyle ki $\varphi_{ii} = Id_{A_i}$ dir.
ii) i,j,k∈I için i≤j≤k ise $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ dir.

Tanım 3.4: $\left\{\{A_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i<j}\right\}$ sistemi A_i Lie cebirlerinin bir direkt sistemi olsun. Bu sistemin direkt limiti aşağıdaki evrensel dönüşüm özelliğini sağlayan ve izomorfizm göz önüne alındığında tek olan bir L Lie cebiridir:

i) i ≤j olacak şekilde her i,j çifti için $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ olacak şekilde $\varphi_i: A_i \to$ L fonksiyonları vardır.

ii) A_i Lie cebirlerinden bir C Lie cebirine her i ≤j için $\tau_i = \tau_j \circ \varphi_{ij}$olacak şekilde $\tau_i: A_i \to C$ dönüşümleri var olsun. O halde L Lie cebirinden C Lie cebirine bir tek $\tau: L \to C$ Lie cebiri homomorfizmi vardır öyle ki $\tau_i = \tau \circ \varphi_i$ dir.

Direkt limit $\lim_{\rightarrow} A_i$ ile gösterilir. Lie cebirlerinin bir $\left\{\{A_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j}\right\}$ direkt sisteminin direkt limiti aşağıdaki şekilde inşa edilebilir (Grätzer, 1979):
$\left\{\{A_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j}\right\}$ direkt sisteminin direkt limiti,$\cup A_i$kümesi üzerinde tanımlı bir $'\sim'$ denklik bağıntısı için ' modülo~ $\cup A_i$dir.' Yani direkt limit$'\sim'$ bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesidir. Bu kümeyi $\cup A_i/_{\sim}$ ile gösterelim.

$\cup A_i$kümesi üzerinde $'\sim'$ denklik bağıntısını aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $a_i \in A_i$ ve $a_j \in A_j$ için eğer $a_i \sim a_j$ ise en az bir k$\in I$ vardır öyle ki k$\geq i,j$ olmak üzere $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ dir. Bu tanımla ile birlikte $'\sim'$ bir denklik bağıntısıdır:

1. $a_i \in A_i$ ve k$\in I$, k$\geq i$ için $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{ik}(a_i)$ olduğundan $a_i \sim a_i$ dır. O halde$'\sim'$ bağıntısı yansıyandır.
2. $a_i \in A_i$ ve $a_j \in A_j$ için $a_i \sim a_j$ olsun. O halde en az bir k$\in I$ vardır öyle ki k$\geq i,j$ olmak üzere $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ dır. Aynı zamanda $\varphi_{jk}(a_j) = \varphi_{ik}(a_i)$ olduğundan $a_j \sim a_k$ olur. Böylece $'\sim'$ bağıntısı simetriktir.
3. $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ ve $a_t \in A_t$ için $a_i \sim a_j$ ve $a_j \sim a_t$ olsun. O halde en az bir k$\in I$ vardır öyle ki k$\geq i,j,t$ olmak üzere $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}(a_j)$ ve $\varphi_{jk}(a_j) = \varphi_{tk}(a_t)$ elde edilir. Böylece $\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{tk}(a_t)$ olup $a_j \sim a_t$ dir. Böylece $'\sim'$ bağıntısı geçişmelidir.

$a_l \in A_l$ elemanının denklik sınıfını $\bar{a}_l$ ile gösterelim.$k,l,m \in I$ ve $k \geq l,m$olmak üzere bu denklik sınıflarının kümesi üzerinde

$$[\bar{a}_l, \bar{a}_m] = \overline{[\varphi_{lk}(a_l), \varphi_{mk}(a_m)]}$$

braket çarpımı tanımlansın. Bu çarpımla birlikte $L = \cup A_l/_{\sim}$ kümesinin bir Lie cebiri olduğunu gösterelim:

a) $\bar{a}_l \in L$ için $[\bar{a}_l, \bar{a}_l] = \overline{\left[\underbrace{\varphi_{lk}(a_l)}_{\in A_k}, \underbrace{\varphi_{lk}(a_l)}_{\in A_k}\right]}$ olur. A_k bir Lie cebiri olduğundan $[\bar{a}_l, \bar{a}_l] = 0$ dır.

b) $\bar{a}_l, \bar{a}_m, \bar{a}_t \in L$ için $[\bar{a}_l, [\bar{a}_m, \bar{a}_t]]+[\bar{a}_m, [\bar{a}_t, \bar{a}_l]]+[\bar{a}_t, [\bar{a}_l, \bar{a}_m]]=0$ olduğunu gösterelim.

$$[\bar{a}_l, [\bar{a}_m, \bar{a}_t]] = \left[\bar{a}_l, \underbrace{\overline{[\varphi_{mk}(a_m), \varphi_{tk}(a_t)]}}_{u_k \in A_k}\right]$$
$$= \overline{[\varphi_{lk}(a_l), \varphi_{kk}(u_k)]}$$
$$= \overline{[\varphi_{lk}(a_l), u_k]}$$
$$= \overline{\left[\underbrace{\varphi_{lk}(a_l)}_{\in A_k}, \underbrace{\overline{[\varphi_{mk}(a_m), \varphi_{tk}(a_t)]}}_{u_k \in A_k}\right]}$$

elde edilir.

Aynı işlemler $[\bar{a}_m, [\bar{a}_t, \bar{a}_l]]$, $[\bar{a}_t, [\bar{a}_l, \bar{a}_m]]$ için yapılırsa;

$$[\bar{a}_m, [\bar{a}_t, \bar{a}_l]] = \overline{\left[\underbrace{\varphi_{mk}(a_m)}_{\in A_k}, \left[\underbrace{\varphi_{tk}(a_t)}_{\in A_k}, \underbrace{\varphi_{lk}(a_l)}_{\in A_k}\right]\right]}$$
$$[\bar{a}_t, [\bar{a}_l, \bar{a}_m]] = \overline{\left[\underbrace{\varphi_{tk}(a_t)}_{\in A_k}, \left[\underbrace{\varphi_{lk}(a_l)}_{\in A_k}, \underbrace{\varphi_{mk}(a_m)}_{\in A_k}\right]\right]}$$

elde edilir.

$[\bar{a}_l, [\bar{a}_m, \bar{a}_t]]+[\bar{a}_m, [\bar{a}_t, \bar{a}_l]]+[\bar{a}_t, [\bar{a}_l, \bar{a}_m]]$ toplamı $\varphi_{lk}(a_l), \varphi_{mk}(a_m), \varphi_{tk}(a_t)$ elemanlarının çarpımlarından oluştuğu görülür. Bu elemanların hepsi A_k cebirine ait olduklarından ve A_k bir Lie cebiri olduğundan Jacobi özdeşliği sağlanır. O halde L bir Lie cebiridir.

L Lie cebiri direkt limit ile aynı evrensel dönüşüm özelliklerine sahiptir (Morandi, 2012):

$$\sigma_l: A_l \to L$$

homomorfizmini

$$a_l \to \bar{a}_l$$

olarak tanımlayalım. Denklik bağıntısının tanımından, her $l \leq m$ için

$$\sigma_m(\varphi_{lm}(a_l)) = \overline{(\varphi_{lm}(a_l))} = \bar{a}_l$$

olup$\sigma_l = \sigma_m \circ \varphi_{lm}$ dir. Amacımız L Lie cebirinin direkt limit ile aynı dönüşüm özelliklerine sahip olduğunu göstermek yani L=$\lim_{\to} A_l$ doğruluğunu ispatlamak. Kabul edelim ki B bir Lie cebiri ve her $l \leq m$ için $\tau_l = \tau_m \circ \varphi_{lm}$ olacak şekilde bir

$$\tau_l: A_l \to B$$

Lie cebiri homomorfizmi var olsun. Şimdi

$$\tau: L \to B$$
$$\tau(\bar{a}) \to \tau_l(a)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm iyi tanımlıdır:
Eğer $\bar{a}_l = \bar{a}_m$ ise bir k elemanı vardır öyle ki $l,m \leq k$ ve $\varphi_{lk}(a_l) = \varphi_{mk}(a_m)$ dir. Böylece

$$\tau_l(a_l)=\tau_k(\varphi_{lk}(a_l))=\tau_k(\varphi_{mk}(a_m))=\tau_m(a_m)$$

olur.Açıktır ki τ bir Lie cebiri homomorfizmidir ve τ dönüşümünün tanımından $\tau_l = \tau \circ \sigma_l$ dır.

Eğer her l için $\tau' : L \to B$ dönüşümü$\tau_l = \tau' \circ \sigma_l$ eşitliğini sağlayan diğer bir dönüşüm ise

$$\tau'(\bar{a}_l)=\tau'\big(\sigma_l(a_l)\big)=\tau_l(a_l)=\tau(\bar{a}_l)$$

elde edilir. O halde $\tau' = \tau$ olur. Böylece L direkt limit ile aynı dönüşüm özelliklerini sağlar.

Bilinen dönüşüm özelliklerini kullanarak L$\cong \lim_{\rightarrow} A_i$ olduğunu göstermek kolaydır. Her $l \in I$ için $\sigma_l$dönüşümleri $\sigma_l = \sigma \circ \varphi_l$ olacak şekilde bir tek olan

$$\sigma : \lim_{\rightarrow} A_l \to L$$

dönüşümünü belirler. Benzer biçimde dönüşüm özeliklerini L Lie cebirine uyguladığımız zaman $\varphi_l = \tau \circ \sigma_l$ olacak şekide

$$\tau : L \to \lim_{\rightarrow} A_l$$

dönüşümünü elde ederiz. Böylece $\sigma \circ \tau : L \to L$ dönüşümü $\sigma_l = (\sigma \circ \tau) \circ \varphi_l$ eşitliğini sağlar. Ayrıca $id_L : L \to L$ dönüşümü $\sigma_l = id_L \circ \varphi_l$ eşitliğini sağlar.
Dönüşümün tekliğinden $\sigma \circ \tau = id_L$ olduğunu ve yine benzer biçimde $\tau \circ \sigma = id_{\lim_{\rightarrow} A_l}$ olduğunu hesaplarız. O halde σ (ve τ) bir izomorfizmdir. Yani $l \in I$ için;

$$\lim_{\rightarrow} A_l = \bigcup_l A_l / \sim \qquad (3.2)$$

olarak görülebilir.

Ayrıca Shang (2008) Teorem 3.13 den de denklik sınıfları üzerinde tanımlanan işlem göz önünde bulundurulduğunda direkt limiti denklik sınıflarının kümesi olarak elde edilebileceğini görebiliriz.

Nesnelerin sistemleri ve limitleri hakkında daha detaylı bilgiyi Eilenberg ve Steenrod (1952) da bulunabilir.

Aşağıdaki teorem direkt limitin temel özelliklerinden birini belirler.

Teorem 3.6: $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ sistemi A_i Lie cebirlerinin bir direkt sistemi olsun. O zaman,

1) $\lim_{\rightarrow} A_i$ direkt limitinin her elemanı bazı $a \in A_i$ ler için $\varphi_i(a)$ formundadır.
2) $a \in A_i$ için $\varphi_i(a)=0$ ise $\varphi_{ij}(a) = 0$ olacak şekilde bir $j \geq i$ vardır.

İspat: Bu koşulların ispatı yukarıda tanımlanan ve $\lim_{\rightarrow} A_i$ direkt limitine izomorf olan L Lie cebirinin tanımından kolaylıkla görülebilir. L Lie cebirinin her elemanı $\bar{a}_i = \sigma_i(a_i)$ formundadır. Aynı zamanda eğer $\bar{a}_i = 0$ ise $\bar{a}_i \sim 0$ dir. O halde bağıntının tanımından bir $j \geq i$ vardır öyle ki $\varphi_{ij}(a_i) = \varphi_{ij}(0) = 0$ dır. Böylece $\tau: L \rightarrow \lim_{\rightarrow} A_i$ izomorfizmini göz önüne aldığımızda L Lie cebirinin bu özellikleri $\lim_{\rightarrow} A_i$ için de geçerli olur.

Şimdi direkt limitin diğer bir inşasını inceleyelim (Morandi, 2012):

M, A_l abelyen Lie cebirlerinin direkt toplamı ve N ise M cebirinin her $l \leq m$ $l, m \in I$ ve her $a \in A_l$ için $a - \varphi_{lm}(a)$ formundaki elemanlar tarafından üretilen ideali olsun. O zaman M/N cebiri,

$$A_l \rightarrow M \rightarrow M/N$$

dönüşümlerinin bileşkesi olan φ_l dönüşümleriyle birlikte evrensel dönüşüm özelliğini sağlar. Yani G bir Lie cebiri ve $\psi_l: A_l \rightarrow G$, $\psi_m \varphi_{lm} = \psi_l$ olacak şekildeki homomorfizmler olmak üzere her l için $f\varphi_l = \psi_l$ olacak şekilde bir tek

$$f: M/N \rightarrow G$$

homomorfizmi vardır. O halde $\lim_{\rightarrow} A_l = M/N$ dir.

Böylece abelyen Lie cebirlerinin direkt limitinin daima var olduğu görülmektedir.

Örnek 3.1: A bir abelyen Lie cebiri olsun. $\{A_i\}_{i\epsilon I}$ ise A Lie cebirinin sonlu üretilmiş alt cebirlerinin bir kümesi olsun. I direkt kümesini herhangi i,j ikilisi için $A_i \subseteq A_j$ ise $i \leq j$ olarak tanımlansın. I bir direkt kümedir. Çünkü $A_i + A_j$ cebiri de sonlu üretilmiş olup A_i ve A_j Lie cebirlerini içerir. $i \leq j$ için, $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ içerme dönüşümü olarak tanımlanırsa, yani $i \leq j$ için $A_i \leq A_j$ ise $\{A_i, \varphi_{ij}\}$ sistemi bir direkt sistem olur. O halde $\lim_{\rightarrow} A_i$ direkt limiti vardır. Şimdi direkt limitin A Lie cebirine eşit olduğunu gösterelim.

H herhangi bir Lie cebiri olmak üzere $H = \lim_{\rightarrow} A_i$ olsun. $\sigma_i: A_i \to A$ içerme dönüşümünü ele alalım. Her i için $\varphi_i: A_i \to H$ kanonik dönüşümü olsun. $\sigma_i = \sigma_j \circ \varphi_{ij}$ olduğundan ve evrensel dönüşüm özelliklerini göz önüne bulundurduğumuzda her i için $\sigma_i = \sigma \circ \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\sigma: H \to A$ homomorfizmi vardır. $g \in A$ olsun bazı i ler için $g \in A_i$ olur. g elemanı tarafından üretilen $\langle g \rangle$bir boyutlu Lie cebiri A nın sonlu üretilmiş bir alt cebiri olacağından bazı i ler için $\langle g \rangle$ Lie cebri A_i Lie cebirine eşit olacaktır. O halde$g = \sigma_i(g) = \sigma(\varphi_i(g))$olur. Buda σ dönüşümünün örten olduğunu gösterir. $h \in ker(\sigma)$ olsun. Bazı $g \in A_i$ için $h = \varphi_i(g)$ dir. Böylece σ_i içerme dönüşümü olduğundan

$$0 = \sigma(h) = \sigma\big(\varphi_i(g)\big) = \sigma_i(g) = g$$

olur. O halde $g = 0$ dır ve böylece $h = \varphi_i(g) = 0$ dır. O halde σ birebir ve örtendir. Yani $A \cong H$ dir.

Teorem 3.7: Her $i \geq 1$ için F_i Lie cebirleri a_i, b_i elemanları tarafından üretilen serbest Lie cebirleri olsun. O halde,

$$P = \bigcup_{i \in I} F_i$$

Lie cebiri paraserbesttir.

İspat: I bir direkt küme ve $\alpha \in I$ için F_α Lie cebiri a_α, b_α elemanları tarafından serbestçe üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. $\alpha, \beta \in$ I için $\alpha < \beta$ ve $u_\beta \in \gamma_2(F_\beta)$olmak üzere,

$$\phi_{\alpha\beta}: F_\alpha \to F_\beta$$
$$a_\alpha \to a_\beta + u_\beta$$
$$b_\alpha \to b_\beta$$

homomorfizmi tanımlansın. Açıktır ki $u_\beta \neq 0$ ise$\phi_{\alpha\beta}(F_\alpha) = H_\beta = \langle a_\beta + u_\beta, b_\beta \rangle$ cebiri F_β serbest Lie cebirinin bir alt cebiridir. u_β nın seçimi şöyle olsun:

$$\alpha < \beta \text{ ise } u_\beta \neq 0$$
$$\alpha = \beta \text{ ise } u_\beta = 0$$

$i < j < k$ için $\varphi_{jk}\varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ olduğunu biliyoruz. O halde bir $a_i \in A_i$ için

$$\varphi_{ik}(a_i) = \varphi_{jk}\varphi_{ij}(a_i)$$
$$a_k + u_{ik} = \varphi_{jk}(a_j + u_{ij}), u_{ik} \in \gamma_2(A_k)$$
$$= a_k + u_{jk} + \varphi_{jk}(u_{ij}), u_{jk} \in \gamma_2(A_k)$$

elde edilir. O halde $i < j < k$ için$\varphi_{ik} = u_{jk} + \varphi_{jk}(u_{ij})$olur. Kolaylık olması bakımından I kümesini sonlu seçelim. Aşağıdaki rakamlar dizisini ele alalım öyle ki her bir ij sayısı bir u_{ij} elemanına karşılık gelsin. Dizide herbir sayıya karşılık gelen u_{ij} elemanı bir üstündeki sayıya karşılık gelen $u_{\alpha\beta}$ elemanından solundaki sayıya karşılık gelen $u_{\gamma\delta}$ elemanının çıkarılmasıyla elde edilsin.

12 13 14 15
23 24 15
34 35
45

Örneğin $u_{23}= u_{13} - u_{12}$, $u_{24}= u_{14} - u_{13}$, $u_{34}= u_{24} - u_{23}= u_{14} - u_{13} - u_{13} + u_{12}$ yazalım. Bu sayı dizisinden $i < j < k$ olacak şekilde seçilen herhangi $i,j,k \in I$ üçlüsü için $\varphi_{ik} = u_{jk} + \varphi_{jk}(u_{ij})$ eşitliğinin tek şekilde sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek istiyoruz. Örneğin bu sayı üçlüsü $i = 1, = 2, k = 4$ olsun. O halde

$$u_{14} = u_{24} + \varphi_{24}(u_{12}) = u_{14} - u_{13} + \varphi_{24}(u_{12})$$
$$u_{14} = u_{14} - u_{13} + u_{14} - u_{24}=u_{14} - u_{13} + u_{14} - u_{14} + u_{13}$$
$$u_{14} = u_{14}$$

elde edilir. Farklı bir sayı üçlüsü için farklı bir u_{14} bulunabilir mi? Bunun için $i < j < k$ olacak şeilde u_{14} elde edebileceğimiz farklı bir sayı üçlüsü ele alalım.
Örneğin $i = 1, j = 3, k = 4$ olsun. O halde

$$u_{14} = u_{24} + \varphi_{34}(u_{13}) = u_{14} - u_{13} - u_{13} + u_{12} + \varphi_{34}(u_{13})$$
$$u_{14} = u_{14} - u_{13} - u_{13} + u_{12} + u_{14} - u_{14} + u_{13} + u_{13} - u_{12}$$
$$u_{14} = u_{14}$$

elde ederiz. $-u_{13} + u_{14} - u_{24} = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde eşitliğin her iki tarafı u_{14} olup bir tek u_{14} vardır.
Benzer işlemler farklı sayılar için de yapılabilir. Bu hesaplamalarla u_β gibi bir elemandan bahsedebileceğimizi ispatlamış oluruz.

$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ serbest cebirlerin ailesinin $\phi_{\alpha\beta}$ dönüşümleri ile birlikte bir direkt sistem oluşturduklarını gösterelim.

$$\phi_{\alpha\alpha}: F_\alpha \to F_\alpha$$
$$a_\alpha \to a_\alpha + u_\alpha, \quad u_\alpha = 0$$
$$b_\alpha \to b_\beta$$

olduğundan $\phi_{\alpha\alpha} = Id_{F_\alpha}$ dır. Şimdi $\alpha < \beta < \gamma$ için $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$ olduğunu gösterelim.O halde,

$$\phi_{\alpha\gamma}(a_\alpha)=a_\gamma+u_\gamma,\ u_\gamma \in \gamma_2(F_\gamma)$$
$$\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta}(a_\alpha) = \phi_{\beta\gamma}(a_\beta + u_\beta), u_\beta \in \gamma_2(F_\beta)$$
$$\phi_{\beta\gamma}(a_\beta)+\phi_{\beta\gamma}(u_\beta)=a_\gamma+w_\gamma+u_\gamma+w'_\gamma=a_\gamma+u_\gamma$$

dir. $w_\gamma+w'_\gamma=0$ seçimi ile $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$ eşitliği elde edilir.
Böylece her $\alpha < \beta < \gamma$ için $\phi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{F_\alpha}$ ve $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$ olduğundan

$$\left(\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha<\beta}\right)$$

bir direkt sistem olur. Bu direkt sistemin direkt limiti P olsun. O halde tanımdan $\alpha \leq \beta$ olmak üzere $\alpha, \beta \in I$ için $\phi_\beta \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha$ olacak şekilde bir

$$\phi_\alpha: F_\alpha \to P$$

homomorfizmi vardır. $'\sim'$ bağıntısı direkt limitin tanımında kullanılan denklik bağıntısı olsun.$'\sim'$ bağıntısını$\cup_{\alpha\in I} F_\alpha$ üzerinde düşünelim. $\cup_{\alpha\in I} F_\alpha / \sim$ denklik sınıfları kümesinin $\cup_{\alpha\in I} F_\alpha$ kümesine eşit olduğunu gösterelim. Daha önce $L = \{\bar{a}_i / \ i \in I, a_i \in F_i\} = \cup_\alpha F_\alpha / \sim$denklik sınıfları kümesinin direkt limit ile aynı evrensel dönüşüm özelliklerine sahip olduğu gösterilmişti. Yani $\cup_\alpha F_\alpha / \sim = \lim_{\to} F_\alpha$ dır. Şimdi $L = \{\bar{a}_i / \ i \in I, a_i \in F_i\} = \cup_\alpha F_\alpha$olduğunu gösterelim.$\forall a_\alpha \in \bar{a}_\alpha$ için

$$\bar{a}_\alpha = \{a_\beta \in F_\beta / \beta \in I, a_\beta \sim a_\alpha\}$$

olduğundan $L \subset \cup_{\alpha\in I} F_\alpha$ dır. Tersine$a \in \cup_\alpha F_\alpha$ olsun. O halde bazı $\alpha \in$I için $a \in F_\alpha$ olur. $a \in \bar{a}_\alpha$ ise $a \in L$ dir. O halde $\cup_{\alpha\in I} F_\alpha \subset L$ olup L=$\cup_\alpha F_\alpha$ dir. Böylece

$$\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha / \sim$$

elde ederiz. (3.2) eşitliğinden

$$\lim_{\rightarrow} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$$

olur. Böylece P cebirini rankı iki olan serbest Lie cebirlerin birleşimi olarak düşünebiliriz. O halde,

$$P = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha \tag{3.3}$$

dır.Şimdi P cebirinin paraserbest olduğunu gösterelim. İlk olarak P cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\gamma_n(\mathrm{P}) = \bigcup_{i \in I} \gamma_n(\mathrm{F_i}) \tag{3.4}$$

eşitliğini ihtiyacımız vardır. P cebirinin denklik sınıflarından oluşan bir küme olduğunu biliyoruz. Yani

$$\mathrm{P} = \lim_{\rightarrow} F_i = \bigcup_{i \in I} F_i$$

dır. P üzerinde tanımlı olan Lie çarpımı ve P cebirinin alt merkezi serisinin n-yinci teriminin tanımı kullanılarak (3.4) eşitliğini şöyle ederiz:
$K = \{\overline{w}_i / i \in I, w_i \in \gamma_n(F_i)\}$ kümesini düşünelim. K kümesinin

$$\gamma_n(P) = \gamma_n(\overline{a}_i / i \in I, a_i \in F_i)$$

terimine eşit olduğunu göstermek istiyoruz. $\mathrm{K} \subset \gamma_n(P)$ olduğu açıktır.
$w \in \gamma_n(P) = sp\{[[u_1, u_2], \dots, u_n] / u_i \in P\}$olsun. $u_i \in P$ ise bazı j$\in I$ için $u_i \in F_j$ dir.

i) Bir k$\in I$ için $u_1, u_2 \in F_k$ ise

$$[\overline{u}_1, \overline{u}_2] = \underbrace{\overline{[\varphi_{\mathrm{kt}}(u_1), \varphi_{\mathrm{kt}}(\mathrm{u}_2)]}}_{\gamma_2(F_t)} \in K$$

olacak şekilde $t \in I$ vardır.

ii) $l,m \in I$ için $u_1 \in F_l$ ve $u_2 \in F_m$ ise

$$[\bar{u}_1, \bar{u}_2] = \underbrace{\overline{[\varphi_{lt}(u_1), \varphi_{mt}(u_2)]}}_{\gamma_2(F_t)} \in K$$

olacak şekilde $t \in I$ vardır.

iii) $[\bar{u}_1, \bar{u}_2] = \bar{v}$ olsun. Ayrıca

$$w = \sum \alpha_{(1,2,\dots,n)}[[\bar{v}, \bar{u}_3], \bar{u}_4, \dots, \bar{u}_n]$$

elemanını düşünelim. Eğer v, $u_3 \in F_t$ ise (i) den dolayı bir $t_1 > t$ vardır öyle ki $[v, u_3] \in \gamma_3(F_{t_1})$ olur. Böyle devam edilirse bir α için $\left[[u_1, u_2], u_3, \dots, u_n\right] \in \gamma_n(F_\alpha)$ dır. $\bar{w} = \left[[\bar{u}_1, \bar{u}_2], \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n\right] \in K$olur. Böylece

$$\gamma_n(P) = \bigcup_{i \in I} \gamma_n(F_i)$$

elde edilir. Şimdi P nin rezidülü nilpotent olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\cap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P) &= \cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{i \in I} \gamma_n(F_i)) \\
&= \cap_{n=1}^{\infty}(\gamma_n(F_1) \cup \gamma_n(F_2) \cup \dots) \\
&= (\gamma_1(F_1) \cup \gamma_1(F_2) \cup \dots) \cap (\gamma_2(F_1) \cup \gamma_2(F_2) \cup \dots) \cap \dots \\
&= \left(\gamma_1(F_1) \cap \gamma_2(F_1)\right) \cup \left(\gamma_1(F_1) \cap \gamma_2(F_2)\right) \cup \dots. \\
&= \cup_{i \in I}(\cap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(F_i))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(F_i) \right)$$

olur. Sonlu ranklı serbest Lie cebirleri rezidülü nilpotent olduğundan her i∈ I için $\bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(F_i) = 0$ olur. O halde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(P) = 0$$

olup P rezidülü nilpotenttir. Şimdi P Lie cebirinin bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim. Bir $0 \neq u_i \in \gamma_2(F_i)$ elemanı için $W_i = \{a_i + u_i, b_i\}$ kümesini ele alalım. Bu küme F_i serbest Lie cebirinin bir H_i alt cebirini üretir. Açıktır ki W_i modülo $\gamma_2(F_i)$ bağımsızdır. Yani W_i kümesi F_i serbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(F_i)$ serbestçe üretir. Şimdi ${F_i}/{\gamma_2(F_i)}$ cebirini ele alalım. n≥ 2 için

$${F_i}/{\gamma_2(F_i)} \cong {{F_i}/{\gamma_n(F_i)}}\Big/{{\gamma_2(F_i)}/{\gamma_n(F_i)}}$$

$$\cong {{F_i}/{\gamma_n(F_i)}}\Big/{\gamma_2(F_i)+\gamma_n(F_i)}/{\gamma_n(F_i)}$$

$$\cong {{F_i}/{\gamma_n(F_i)}}\Big/{\gamma_2\left({F_i}/{\gamma_n(F_i)}\right)}$$

W_i kümesi F_i serbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(F_i)$ ürettiğini biliyoruz. O halde Lemma 3.1. den W_i kümesi F_i serbest Lie cebirini modülo $\gamma_n(F_i)$ serbestçe üretir. Böylece

$$F_i = H_i + \gamma_n(F_i) \tag{3.5}$$

elde edilir. Böylece (3.5) ve izomorfizm teoreminden

$$F_i/\gamma_n(F_i) = H_i + \gamma_n(F_i)/\gamma_n(F_i) \cong H_i/H_i \cap \gamma_n(F_i)$$

olur. Açıktır ki

$$\gamma_n(H_i) \subseteq H_i \cap \gamma_n(F_i)$$

dir. Böylece n=2,3,.. için $H_i/\gamma_n(H_i)$ den $H_i/H_i \cap \gamma_n(F_i)$ cebirine bir doğal homomorfizm vardır. O halde n=2,3,.. için aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$H_i/\gamma_n(H_i) \to H_i/H_i \cap \gamma_n(F_i) \cong F_i/\gamma_n(F_i)$$

Diyagramdan $H_i/\gamma_n(H_i)$ den izomorfik görüntüsüne giden bir homomorfizminin var olduğu görülür. Sonlu üretilmiş serbest nilpotent Lie cebirleri hopfian olduğundan bu homomorfizminin çekirdeği sıfırdır. Böylece

$$H_i/\gamma_n(H_i) \cong F_i/\gamma_n(F_i) \cong H_i/H_i \cap \gamma_n(F_i)$$

olup

$$\gamma_n(H_i) = H_i \cap \gamma_n(F_i)$$

elde edilir. P cebirinin F_i serbest Lie cebirlerinin birleşimi olduğunu biliyoruz. O halde

$$H_i \cap \gamma_n(P) = H_i \cap \gamma_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = H_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_n(F_i)\right)$$

$$= \underbrace{(H_i \cap \gamma_n(F_1))}_{0} \cup \underbrace{(H_i \cap \gamma_n(F_2))}_{0} \cup \ldots \cup \underbrace{(H_i \cap \gamma_n(F_i))}_{\gamma_n(H_i)} \cup \ldots$$

$$= \gamma_n(H_i)$$

dır. Böylece

$$\gamma_n(H_i) = H_i \cap \gamma_n(P) \tag{3.6}$$

elde edilir. Şimdi bir a∈ P elemanı alalım. O zaman bazı i∈ I için a∈ F_i dir. (3.5) eşitliğinden $a \in H_i + \gamma_n(F_i) \subseteq H_i + \gamma_n(P)$olur. O halde P⊆ $H_i + \gamma_n(P)$ dir. Diğer yandan $H_i + \gamma_n(P) \subseteq P$ olduğu açıktır. O zaman

$$P = H_i + \gamma_n(P) \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) eşitliklerini kullanarak, her n için

$$P/\gamma_n(P) = (H_i + \gamma_n(P))/\gamma_n(P)$$

$$\cong H_i/(H_i \cap \gamma_n(P))$$

$$\cong H_i/\gamma_n(H_i)$$

elde ederiz. Böylece P bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olmuş olur. Yani P paraserbesttir.

Aşağıdaki teoremde $V_k(P) = P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ve $V_k(F) = F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sırasıyla P ve F Lie cebirlerinin $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ dizisine göre polisentral serilerinin terimlerini temsil edecektir.

Teorem 3.8: F Lie cebiri $\{a, b\}$ kümesi tarafından serbestçe üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman rankı 2 olan bir P paraserbest Lie cebiri vardır öyle ki

i) $P/_{V_k(P)} \cong F/_{V_k(F)}$ dır ve

ii) P serbest değildir.

İspat: **i)** I, F_α ve $\phi_{\alpha\beta}$ bir önceki teoremin ispatında tanımlanan ifadeler olsun. $\alpha < \beta$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in I$ için,

$$f_{\alpha\beta}: V_k(F_\alpha) \to V_k(F_\beta)$$

homomorfizmi tanımlansın öyle kif$_{\alpha\beta}$ dönüşümü $\phi_{\alpha\beta}$ dönüşümünün $V_k(F_\alpha)$ serbest Lie cebirine kısıtlanışı olsun. Her $\alpha < \beta < \gamma$ için $f_{\alpha\alpha} = Id_{V_k(F_\alpha)}$ ve $f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$ olacağından

$$\left\{V_k(F_\alpha)_{\alpha\epsilon I}, \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha<\beta}\right\}$$

sistemi de bir direkt sistem olur. i=1,2,.. için P, F_α Lie cebirlerinin direkt limiti olsun. O halde P=$\cup_{\alpha=1}^{\infty} F_\alpha$ olur. Şimdi

$$\cup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha) = V_k(P) \tag{3.8}$$

olduğunu gösterelim:

$$\lim_{\to} V_k(F_\alpha) = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha) = \{\bar{u}/u \in V_k(F_\alpha)\}$$

olduğunu biliyoruz.

Diğer yandan $a_\alpha \in F_\alpha$ ve $a_\beta \in F_\beta$ için

$$[\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta] = \underbrace{\overline{[\phi_{\alpha l}(a_\alpha), \phi_{\beta l}(a_\beta)]}}_{\in \gamma_2(F_l)} \in V_1(F_l)$$

olacak şekilde bir $l \in I$ vardır. Buda k=1 için eşitliğin sağlandığını gösterir. Benzer şekilde her k $\in I$ için sağlandığı kolayca gösterilebilir. Böylece

$$V_k(P) = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha)$$

Ayrıca tanımdan biliyoruz ki $\left\{V_k(F_\alpha)_{\alpha \epsilon I}, \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha<\beta}\right\}$ sisteminin direkt limiti $\cup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha)$ dir. Yani

$$\lim_{\rightarrow} V_k(F_\alpha) = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha)$$

dir. O halde (3.2) eşitliğinden

$$V_k(P) = \lim_{\rightarrow} V_k(F_\alpha)$$

elde edilir. F Lie cebiri a ve b elemanları tarafından üretilen bir serbest bir Lie cebiri olmak üzere

$$\psi_\alpha : F_\alpha \rightarrow {}^{F}/_{V_k(F)}$$
$$a_\alpha \rightarrow a + V_k(F)$$
$$b_\alpha \rightarrow b + V_k(F)$$

homomorfizmini düşünelim. Açıktır ki $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ \phi_{\alpha\beta}$ dır. O halde direkt limitin evrensel dönüşüm özelliğinden $\psi \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$ olacak şekilde bir tek

$$\psi: P \rightarrow {}^{F}/_{V_k(F)}$$

homomorfizmi vardır. Şimdi bu dönüşümün çekirdeğini hesaplayalım.Ker ψ = $\{x \in P \,/\, \psi(x) = \bar{0}\}$ dir. xϵKer ψ ise $x \in P$ dir. (3.3) den bir $\alpha \in I$ vardır öyle ki $x \in F_\alpha$ dır. $\phi_\alpha: F_\alpha \to P$ dönüşümü için $\phi_\alpha(x) = x$ olup $\psi \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$ eşitliğinden

$$\psi_\alpha(x) = \psi(\phi_\alpha(x)) = \psi(x) = \bar{0}$$

dır. Yani $x \in$Kerψ_α dır. Böylece her $x \in$Ker ψ için bir $\alpha \in I$ vardır öyle ki $x \in$Kerψ_α dır. O halde, Ker $\psi = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty}$ Kerψ_α olur. Diğer yandan her $\alpha \in I$ için Ker$\psi_\alpha = V_k(F_\alpha)$ dir. Çünkü Ker$\psi_\alpha = \{x \in F_\alpha / \psi_\alpha(x) = \bar{0}\}$ olduğundan $\psi_\alpha(x) = V_k(F)$ dır. Homomorfizmler altında verbal idealler invariant olduğundan $\psi_\alpha(x) \in V_k(F_\alpha)$. O halde

$$\text{Ker}\psi_\alpha = V_k(F_\alpha)$$

dir. Böylece (3.8) eşitliğini kullanarak

$$\text{Ker}\,\psi = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \text{Ker}\psi_\alpha = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_k(F_\alpha) = V_k(P)$$

elde ederiz. O halde izomofizm teoreminden

$$P/V_k(P) \cong F/V_k(F)$$

olur.

ii) Eğer i koşulunda k=1 ve $n_1 = 2$ alınırsa $V_1(P) = \gamma_2(P)$ olur ve böylece

$$P/\gamma_2(P) \cong F/\gamma_2(F)$$

olur. Böylece P sonlu ranklı bir paraserbest Lie cebiridir. Diğer yandan (3.3) eşitliğinden bir $u \in P$ için bir $i \in I$ vardır öyleki $u \in F_i$ dir. P denklik sınıflarının kümesi olduğundan $\bar{u}, \bar{v} \in P$ için bir $k \in I$ vardır öyle ki $u_k \in F_k = \langle a_k, b_k \rangle$ olmak üzere $[\bar{u}, \bar{w}] = \bar{u}_k$ dir. P Lie cebirindeki elemanların çarpımları bir F_k serbest Lie

cebirine ait olup bu elemanlar $\{a_k, b_k\}$ tarafından üretilir. Benzer işlemler P Lie cebirinin tüm elemanları için düşünülürse, her i için $\{a_i, b_i\}$ kümesi F_i nin sebest üreteç kümesi olmak üzere P nin sonsuz elemanlı bir $\{a_1, b_1, \dots, a_i, b_i, \dots\}$ üreteç kümesi elde edilmiş olur. O halde P sonlu üretilmiş değildir. Serbest Lie cebirleri sonlu ranklı ve sonsuz üreteçli olmadıklarından P serbest değildir.

Sonuç 3.3: P rankı 2 olan bir paraserbest Lie cebiri olsun. O zaman

i) P paraserbest Lie cebiri rankı 2 olan serbest Lie cebirlerinin birleşimidir,

ii) $\mathrm{P}/_{\delta^i(\mathrm{P})} \cong \mathrm{F}/_{\delta^i(\mathrm{F})}$ dır,

iii) P serbest değildir.

İspat. i ve iii koşulu bir önceki teoremin ispatından açıkça görülebilir.

ii) $\mathrm{V_k(P)} = P_{\underbrace{2,2,\dots,2}_{k-defa}}$ olsun. $P_{\underbrace{2,2,\dots,2}_{k-defa}} = \delta^i(P)$ olduğunu biliyoruz. Böylece ii koşulu ispatlanmış olur.

Teorem 3.9: Rankı iki olan bir P paraserbest çözülebilir Lie cebiri vardır öyle ki;

i) F rankı iki olan bir serbest çözülebilir Lie cebiri olmak üzere $\mathrm{P}/_{\mathrm{V_k(P)}} \cong \mathrm{F}/_{\mathrm{V_k(F)}}$dir.

ii) P rankı iki olan serbest çözülebilir Lie cebirlerinin birleşimidir.

iii) P serbest çözülebilir değildir.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.8. den kolayca görülebilir.
Bir L Lie cebirlerinin bir verbal idealini V(L) ile gösterelim.

Teorem 3.10: V Lie cebirlerinin bir ailesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlayan 2 ranklı bir P paraserbest Lie cebiri vardır:

i) F rankı 2 olan bir serbest Lie cebiri olmak üzere $P/_{V(P)} \cong F/_{V(F)}$ dır.

ii) P serbest değildir.

İspat: i) I bir direkt küme ve $\alpha \in I$ için $F_\alpha, a_\alpha, b_\alpha$ elemanları tarafından serbestçe üretilen serbest Lie cebiri olsun. $\alpha, \beta \in I$ için $\alpha < \beta$ ve $u_\beta \in \gamma_2(F_\beta)$olmak üzere,

$$\phi_{\alpha\beta}: F_\alpha \to F_\beta$$
$$a_\alpha \to a_\beta + u_\beta$$
$$b_\alpha \to b_\beta$$

homomorfizmini tanımlayalım. Açıktır ki $u_\beta \neq 0$ ise $\phi_{\alpha\beta}(F_\alpha) = H_\beta = \langle a_\beta + u_\beta, b_\beta \rangle$ cebiri $F_\beta$serbest Lie cebirinin bir alt cebiridir. u_β nın seçimi şöyle olsun:

$$\alpha < \beta \text{ ise } u_\beta \neq 0$$
$$\alpha = \beta \text{ ise } u_\beta = 0$$

O halde,

$$\phi_{\alpha\alpha}: F_\alpha \to F_\alpha$$
$$a_\alpha \to a_\alpha + u_\alpha, \quad u_\alpha = 0$$
$$b_\alpha \to b_\beta$$

olduğundan $\phi_{\alpha\alpha} = Id_{F_\alpha}$ dır.$a_\alpha \in A_\alpha$ için

$\phi_{\alpha\gamma}(a_\alpha)=a_\gamma+u_\gamma,\ u_\gamma \in \gamma_2(F_\gamma)$

$\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta}(a_\alpha) = \phi_{\beta\gamma}(a_\beta + u_\beta), u_\beta \in \gamma_2(F_\beta)$

$\phi_{\beta\gamma}(a_\beta)+\phi_{\beta\gamma}(u_\beta)=a_\gamma+w_\gamma+u_\gamma+w'_\gamma=a_\gamma+u_\gamma$

dir.$w_\gamma+w'_\gamma=0$ seçimi ile $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$eşitliği elde edilir. Böylece her $\alpha < \beta < \gamma$ için $\phi_{\alpha\alpha} = Id_{F_\alpha}$ ve $\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$ olduğundan

$$\left(\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{\phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha<\beta}\right)$$

bir direkt sistem olur. Bu direkt sistemin direkt limiti P olsun. O halde

$$P=\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha$$

yazabiliriz. Şimdi $\alpha < \beta$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in I$ için,

$$\varphi_{\alpha\beta}: V(F_\alpha) \to V(F_\beta)$$

homomorfizmini tanımlayalım öyle ki $\phi_{\alpha\beta}$ dönüşümünün $V(F_\alpha)$ serbest Lie cebirine kısıtlanışı $\varphi_{\alpha\beta}$ dönüşümüne eşit olsun. Her $\alpha < \beta < \gamma$ için $\varphi_{\alpha\alpha} = Id_{V(F_\alpha)}$ ve $\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$olacağından

$$\left\{V(F_\alpha)_{\alpha\in I}, \{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha<\beta}\right\}$$

sistemi de bir direkt sistem olur. Şimdi $V(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V(F_n)$ olduğunu gösterelim:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V(F_n) = \{\bar{u}/u \in V(F_n)\}$$

olup

$$\lim_{\rightarrow} V(F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V(F_n)$$

dır. Diğer yandan $a_\alpha \in F_\alpha$ ve $a_\beta \in F_\beta$ için bir$l \in I$vardır öyle ki

$$[\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta] = \underbrace{\overline{[\phi_{\alpha l}(a_\alpha), \phi_{\beta l}(a_\beta)]}}_{\in \gamma_2(F_l)} \in V(F_l)$$

dır. O halde

$$\lim_{\rightarrow} V(F_n) = V\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = V(P)$$

olur. Böylece

$$V(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V(F_n)$$

olur. Şimdi F Lie cebiri a ve b elemanları tarafından üretilen bir serbest bir Lie cebiri olsun.

$$\psi_\alpha : \mathrm{F}_\alpha \rightarrow {}^{F}\!/_{\mathrm{V(F)}}$$
$$a_\alpha \rightarrow a + \mathrm{V(F)}$$
$$b_\alpha \rightarrow b + \mathrm{V(F)}$$

homomorfizmini düşünelim. Açıktır ki $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ \phi_{\alpha\beta}$ dır. O halde direkt limitin evrensel dönüşüm özelliğinden $\psi \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$ olacak şekilde bir tek

$$\psi: \mathrm{P} \rightarrow {}^{F}\!/_{\mathrm{V(F)}}$$

homomorfizmi vardır. Şimdi bu dönüşümün çekirdeğini hesaplayalım. $\mathrm{Ker}\,\psi = \{x \in P \,/\, \psi(x) = \bar{0}\}$ dir. $x \in \mathrm{Ker}\,\psi$ ise $x \in P$ dir. P cebiri F_α serbest Lie cebirlerinin birleşimi olduğundan bir $\alpha \in I$ vardır öyle ki $x \in F_\alpha$ dır. $\phi_\alpha: F_\alpha \rightarrow P$ dönüşümü için $\phi_\alpha(x) = x$ olup $\psi \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$ eşitliğinden

$$\psi_\alpha(x) = \psi\big(\phi_\alpha(x)\big) = \psi(x) = \bar{0}$$

dır. Yani $x \in \mathrm{Ker}\psi_\alpha$ dır. Böylece her $x \in \mathrm{Ker}\,\psi$ için bir $\alpha \in I$ vardır öyle ki $x \in \mathrm{Ker}\psi_\alpha$ dır. Böylece,

$$\mathrm{Ker}\,\psi = \cup_{\alpha \in I} \mathrm{Ker}\psi_\alpha$$

olur. Diğer yandan her $\alpha \in I$ için $Ker\psi_\alpha = V(F_\alpha)$dir. Çünkü $Ker\psi_\alpha = \{x \in F_\alpha / \psi_\alpha(x) = \bar{0}\}$olduğundan $\psi_\alpha(x) = V(F)$ dır. Homomorfizmler altında verbal idealler invariant olduğundan $\psi_\alpha(x) \in V(F_\alpha)$. O halde

$$Ker\psi_\alpha = V(F_\alpha)$$

dir. Böylece,

$$Ker\,\psi = \cup_{\alpha\epsilon I} Ker\psi_\alpha = \cup_{\alpha\epsilon I} V(F_\alpha) = V(P)$$

elde ederiz. O halde izomorfizm teoreminden

$$P/_{V(P)} \cong F/_{V(F)}$$

olur.

ii) Birinci koşuldan P nin rankının 2 olduğunu biliyoruz. Ayrıca P cebiri $F_\alpha$serbest Lie cebirlerinin direkt limiti olduğundan sonlu üretilmiş değildir. Sonlu üretilmiş olmayan sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri olamayacağından P serbest değildir.

Teorem 3.10 un benzerini metabelyen Lie cebirleri için de ifade edebiliriz. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.5: M, $\{a, b\}$ kümesi tarafından serbestçe üretilen serbest metabelyen Lie cebiri olsun. u∈M olmak üzere $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmini

$$\theta: a \rightarrow a + u$$
$$b \rightarrow b$$

olarak tanımlayalım. O zaman θ dönüşümünün bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in k$ olmak üzere u= αb olmasıdır.

İspat: θ bir otomorfizm ise $\{a + u , b\}$ kümesi M yi üretir.

Bir metabelyen Lie cebirinin otomorfizmi bir iç ve bir lineer otomorfizminin bileşkesi olduğunu biliyoruz. O halde θ dönüşümü M Lie cebirinin bir otomorfizmi ise ya bir iç otomorfizm ya bir lineer dönüşüm ya da bir lineer ve bir iç dönüşümünün bileşkesidir.

1. Durum: θ bir iç otomorfizm olsun. $w \in M'$ olmak üzere

$$e^{adw} = I + adw + \frac{1}{2!}(adw)^2 + \cdots$$

dır. $a \in M$ için

$$e^{adw}(a) = I(a) + adw(a) + \frac{1}{2!}adw\big(adw(a)\big) + \cdots$$
$$= a + [a, w] + \frac{1}{2!}\big[[a, w], w\big] + \ldots$$

olur.

$$\big[[a, w], w\big] + \ldots = 0$$

olduğundan

$$e^{adw}(a) = a + [a, w]$$

olur ve böylece

$$e^{adw}(b) = b + [b, w]$$

olur. Bu da elemanının θ tarafından tekrar kendisine gitme şartıyla çelişir. O halde θ sadece iç otomorfizmden oluşmaz.

2. Durum: θ lineer ve iç otomorfizmlerin bileşkesi olsun. k_1, k_2,d_1, $d_2 \in K$ olmak üzere,

$$\varphi : a \rightarrow k_1 a + k_2 b$$
$$b \rightarrow d_1 a + d_2 b$$

olsun. O halde $k_1 d_2 - d k_2 \neq 0$ dir. Bir iç otomorfizm ile bileşkesi alınırsa

$$\theta = e^{adw}\varphi : a \xrightarrow{\varphi} k_1 a + k_2 b \xrightarrow{e^{adw}} k_1(a + [a,w]) + k_2(b + [b,w])$$
$$= k_1 a + k_2 b + k_1[a,w] + k_2[b,w] \text{ olur.}$$
$$e^{adw}\varphi : a \rightarrow k_1 a + k_2 b + k_1[a,w] + k_2[b,w]$$

olduğundan

$$b \rightarrow d_1 a + d_2 b + d_1[a,w] + d_2[b,w]$$

olur. Benzer şekilde bu durum da b elemanının θ tarafından tekrar kendisine gitme şartıyla çelişir. O halde θ lineer ve iç otomorfizmlerin bileşkelerinden oluşamaz. Bu durumda θ bir lineer dönüşümdür.

3. Durum: θ lineer dönüşüm olsun. O halde;

$$\theta(a) = k_1 a + k_2 b$$
$$\theta(b) = d_1 a + d_2 b$$

olur. $k_1 d_2 - d k_2 \neq 0$ olmalıdır. Böylece $\theta(b) = b$ olacağından $d_1 a + d_2 b = b$ olup $d_1=0$ ve $d_2=1$ olur. $k_1 d_2 - d k_2 \neq 0$ olduğundan $k_1 d_2 \neq 0$ olur ve böylece $k_1 \neq 0$ dır. $k_1=1$ olsun. O halde

$\theta(a) = a + k_2 b$ dir. $u=k_2 b$ ve $k_2=\alpha$ alınırsa ve $u= \alpha b$ olup $\theta(a) = a + u$ olur.

Sonuç 3.4: Rankı 2 olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir P paraserbest Lie cebiri vardır:

i) P rankı 2 olan serbest Lie cebirlerinin birleşimdir,

ii) P rankı 2 olan bir serbest Lie cebiri ile aynı sonlu boyutlu bölüm cebirlerine sahiptir.

iii) F rankı 2 olan serbest Lie cebiri ve $\mathcal{V}$ metabelyen Lie cebirlerin bir sınıfı olmak üzere $P/_{V(P)} \cong F/_{V(F)}$ dir.

iv) P serbest değildir,

v) P nin her sonlu üretilmiş bölüm cebiri iki eleman tarafından üretilir.

İspat: Sadece (v) koşulunu ispatlamak yeterlidir. Diğer koşulların ispatları Teorem 3.10 dan açıkça görülebilir.

v) $i \in I$ için F_i Lie cebiri $\{a_i, b_i\}$ kümesi tarafından serbestçe üretilen iki ranklı bir serbest Lie cebiri olmak üzere $P=\bigcup_{i\in I} F_i$ olsun. P Lie cebirinin $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ kümesi tarafından üretildiğini kabul edelim. I, P Lie cebirinin $\{x_3, \dots, x_n, \dots\}$ kümesi tarafından üretilen bir ideali ise $P/_I = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(F_i + I/_I \right)$ dır. O zaman $P/_I$ sonlu üretilmiş olduğundan bazı i-ler için $P/_I = F_i + I/_I$ olur.Böylece F_i serbest Lie cebiri $\{a_i, b_i\}$ tarafından üretildiğinden $P/_I$ bölüm cebiri de $\{a_i + I, b_i + I\}$ tarafında üretilir. Böylece $P/_I$ bölüm cebiri iki eleman tarafından üretilmiş olur.

Şimdi paraserbest Lie cebirlerinin birleşimlerinin hangi koşullar altında paraserbest olduğunu inceleyeceğiz.

Teorem 3.11: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \dots \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sonlu k ranklı paraserbest Lie cebirlerinin artan bir serisi olsun. O zaman,

i) A rezidülü nilpotenttir,

ii) A rezidülü sonludur,

iii) A paraserbesttir,

iv) A serbest değildir.

İspat: i) i≥1 için X_i, A_i paraserbest Lie cebirinin bir paraüreteç kümesi olsun. O zaman X_i kümesi A_i paraserbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(A_i)$ serbestçe üretir. Yani X_i kümesi modülo $\gamma_2(A_i)$ olarak bir serbest abelyen Lie cebiri üretir.

i≥1 için $A_i$cebirleri aynı ranka sahip olduklarından ve j≥i için $A_i \subseteq A_j$ olduğundan, X_i kümesi A_j içinde modülo $\gamma_2(A_j)$ bağımsızdır. O halde X_i kümesi modülo $\gamma_2(A_j)$ olarak bir serbest abelyen Lie cebiri üretir. Lemma 3.1. den n=2,3,... için X_i kümesi modülo $\gamma_n(A_j)$ olarak bir serbest nilpotent Lie cebiri üretir. Yani A_j cebirinin $\langle X_i \rangle$ alt cebiri $A_j / \gamma_n(A_j)$ bölüm cebirine izomorftur. Böylece

$$A_j = \langle X_i \rangle + \gamma_n(A_j)$$

elde edilir. O halde $i \leq j$ için,

$$A_j = A_i + \gamma_n(A_j) \tag{3.9}$$

(3.9) eşitliğinden ve 1. izomorfizm teoreminden

$$A_j / \gamma_n(A_j) \cong (A_i + \gamma_n(A_j)) / \gamma_n(A_j) \cong A_i / (A_i \cap \gamma_n(A_j)) \tag{3.10}$$

olur.A_j rankı r olan paraserbest Lie cebirleri olduklarından rankı r olan F_j serbest Lie cebirleri vardır öyleki $j \geq 1$ için

$$A_j / \gamma_n(A_j) \cong F_j / \gamma_n(F_j)$$

olur. Önerme 3.1 den her $i, j \geq 1$ için

$$\mathrm{F_j}/\gamma_n(\mathrm{F_j}) \cong \mathrm{F_i}/\gamma_n(\mathrm{F_i})$$

dir. Böylece

$$\mathrm{A_j}/\gamma_n(\mathrm{A_j}) \cong \mathrm{A_i}/\gamma_n(\mathrm{A_i}) \tag{3.11}$$

olur. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$$\mathrm{A_i}/\gamma_n(\mathrm{A_i}) \cong \mathrm{A_i}/\mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_j})$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\gamma_n(\mathrm{A_i}) \subseteq \mathrm{A_i} \text{ ve } \gamma_n(\mathrm{A_i}) \subseteq \gamma_n(\mathrm{A_j})$$

olduğundan

$$\gamma_n(\mathrm{A_i}) \subseteq \mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_j})$$

olduğu açıktır. $\mathrm{A_i}/\gamma_n(\mathrm{A_i})$ cebirinin hopfian olduğu göz önüne alınırsa

$$\gamma_n(\mathrm{A_i}) = \mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_j}) \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $i \leq j$ için $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ içerme dönüşümü olsun. O halde A_i Lie cebirleri φ_{ij} dönüşümleri ile birlikte bir direkt sistem oluşturur. P bu sistemin direkt limiti olsun. P cebirini A_iLie cebirlerinin birleşimi olarak alabiliriz:

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A$$

Direkt limitin tanımından A bir Lie cebirdir ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{A_i}) = \gamma_n(\mathrm{A})$ dir. Şimdi (3.12) eşitliğin, göz önüne alarak $A_i \cap \gamma_n(\mathrm{A})$kesişimini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} A_i \cap \gamma_n(\mathrm{A}) &= A_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{A_i}) \right) \\ &= \left(\mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_1})\right) \cup \ldots \cup \left(\mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_i})\right) \cup \ldots \cup \left(\mathrm{A_i} \cap \gamma_n(\mathrm{A_{i+1}})\right) \cup \ldots \\ &= \gamma_n(\mathrm{A_1}) \cup \ldots \cup \gamma_n(\mathrm{A_i}) \cup \ldots \cup \gamma_n(\mathrm{A_i}) \cup \ldots \\ &= \gamma_n(\mathrm{A_i}) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A_i \cap \gamma_n(\mathrm{A}) = \gamma_n(\mathrm{A_i}) \tag{3.13}$$

olur. $0 \neq a \in A$ elemanını ele alalım. O halde bazı i elemanı için $a \in A_i$ dir. A_i Lie cebirleri rezidülü nilpotent olduğundan bazı n pozitif tam sayıları için $a \notin \gamma_n(A_i)$. Böylece (3.13) eşitliğinden $a \notin \gamma_n(A)$ dır. Yani A da rezidülü nilpotenttir.

ii) A_i paraserbest olduğundan r ranklı bir F_i serbest Lie cebiri vardır öyleki $n \geq 2$ ve $i \geq 1$ için

$$\mathrm{A_i}/\gamma_n(\mathrm{A_i}) \cong \mathrm{F_i}/\gamma_n(\mathrm{F_i}) \tag{3.14}$$

olur. Biliyoruz ki sonlu ranklı serbest nilpotent Lie cebirleri sonlu boyutludur. Böylece (3.14) eşitliğinden $\mathrm{A_i}/\gamma_n(\mathrm{A_i})$ sonlu boyutludur. O halde $\mathrm{A_i}$ rezidülü sonludur. Şimdi $i \geq 1$ için $A = A_i + \gamma_n(A)$ eşitliğini gösterelim. $A_i + \gamma_n(A) \subseteq A$ olduğu açıktır. $a \in A$ elemanını olsun.O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A$olduğundan bir $j \in I$ için

$a \in A_j$ dir. Böylece (3.9) eşitliğinden $a_1 \in A_i, a_2 \in \gamma_n(A_j)$ olmak üzere $a = a_1 + a_2$olarak yazılabilir. $\gamma_n(A_j) \subseteq \gamma_n(A)$ olduğu açıktır. O halde $a_2 \in \gamma_n(A)$ olur ve$a \in A_i + \gamma_n(A)$olur. Böylece $A \subseteq A_i + \gamma_n(A)$ elde edilir. O zaman

$$A = A_i + \gamma_n(A) \tag{3.15}$$

olur. (3.15) eşitliği ve ikinci izomorfizm teoreminden

$$A/\gamma_n(A) \cong (A_i + \gamma_n(A))/\gamma_n(A) \cong A_i/(A_i \cap \gamma_n(A))$$

elde edilir. Böylece (3.13) den $i \geq 1, n \geq 2$ için

$$A/\gamma_n(A) \cong A_i/\gamma_n(A_i) \tag{3.16}$$

olur. $A_i/\gamma_n(A_i)$ nın sonlu boyutlu olduğundan $A/\gamma_n(A)$ de sonlu boyutludur. $0 \neq a \in A$ olsun. O halde bazı i elemanları için $a \in A_i$ dir. A_i rezidülü nilpotent olduğundan bazı $n \in I$ için $a \notin \gamma_n(A_i)$ dır. (3.13) eşitliğinden $a \notin \gamma_n(A)$ dır. O halde A rezidülü sonludur.

iii) (ii) nin ispatından (3.14) ve (3.16) eşitliklerini kullanırsak, $n \geq 2$ için

$$A/\gamma_n(A) \cong A_i/\gamma_n(A_i) \cong F_i/\gamma_n(F_i)$$

olacak şekilde bir r ranklı F_i serbest Lie cebiri vardır. Böylece A F_i serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahiptir. Ayrıca (i) den A nın rezidülü nilpotent olduğu biliniyor. O halde A paraserbesttir.

iv) A cebiri A_i paraserbest Lie cebirlerinin birleşimi olduğundan sonlu üretilmiş değildir. Fakat $A/\gamma_2(A)$ sonlu üretilmiştir. O halde A serbest değildir.

Şimdi Teorem 3.7 nin Teorem 3.11 in bir sonucu olarak kolayca elde edilebileceğini gösterelim.

Sonuç 3.5: F_1, F_2 ,... serisi rankı iki olan serbest Lie cebirlerinin bir serisi olmak üzere $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ olsun. O halde P Lie cebiri rankı iki olan bir paraserbest Lie cebiridir ve serbest değildir.

İspat: F_i Lie cebiri, $i \geq 1$için $X_i = \{u_i, v_i\}$ kümesi tarafından serbestçe üretilen bir serbest Lie cebiri olsun.

$$\phi_{ii+1}: F_i \to F_{i+1}$$
$$u_i \to [u_{i+1}, v_{i+1}],$$
$$v_i \to \left[[u_{i+1}, v_{i+1}], v_{i+1}\right]$$

monomorfizmini ele alalım. Açıktır ki $\phi_{ii+1}(F_i)$ cebiri $\left\{[u_{i+1}, v_{i+1}], \left[[u_{i+1}, v_{i+1}], v_{i+1}\right]\right\}$ kümesi tarafından üretilir ve F_{i+1} serbest Lie cebirinin bir öz alt cebiridir.

F_i serbest Lie cebirleri ϕ_{ii+1} monomorfizmleri ile birlikte bir direkt sistem oluşturur. Bu direkt sistemin direkt limiti P olsun. O halde

$$P = \bigcup_{n=}^{\infty} F_i$$

yazabiliriz. Teorem 3.11 den P paraserbesttir. Teorem 3.11 (ii) koşulundan, $n \geq 2$ için

$$P/\gamma_n(P) \cong F_i/\gamma_n(F_i)$$

dir. O halde P Lie cebirinin rankı ikidir. Direkt limitin yapısını ve ~ denklik bağıntısının tanımını göz önüne alalım. O hale $a \in A_i$ için $a \sim \phi_{ii+1}(a)$dır. Böylece $P = [P, P]$ olur. O halde P serbest değildir.

Teorem 3.12: Bir paraserbest Lie cebiri sonlu ranklı rezidülü paraserbesttir.

İspat: Bu teoremin ispatı Baur (1978) de bulunabilir.

Teorem 3.13: Üreteç sayısı 2 ya da daha fazla olan metabelyen bir P paraserbest Lie cebiri iki ranklı rezidülü paraserbesttir.

İspat: P, 2 ya da daha fazla üretece sahip bir metabelyen paraserbest Lie cebiri olsun. Teorem 3.12 den P Lie cebiri sonlu n ranklıdır($n \geq 2$). $0 \neq a \in P$ olsun. P paraserbest olduğundan bazı $c \geq 2$ için $a \notin \gamma_c(P)$ dir. $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebiri serbest metabelyen ve nilpotenttir. H, P paraserbest Lie cebirinin $a \notin H$ ve $H \supseteq \gamma_c(P)$ olacak şekildeki bir alt cebiri olsun. O halde

$$\left.P/\gamma_c(P)\right/H/\gamma_c(P)$$

bölüm cebirinin rankı 2 olup serbesttir. Serbest Lie cebirleri projektif olduklarından $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebirinin bir $H/\gamma_c(P)$ideali için

$$P/\gamma_c(P) \cong H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P) \text{ ve } \quad H/\gamma_c(P) \cap L/\gamma_c(P) = 0$$

olacak şekilde $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebirinin bir $L/\gamma_c(P)$ alt cebiri vardır öyleki

$$L/\gamma_c(P) \cong \left.P/\gamma_c(P)\right/ H/\gamma_c(P)$$

dir. Şimdi $P/\gamma_2(P)$ yi hesaplayalım:

$$P/\gamma_2(P) \cong \left.P/\gamma_c(P)\right/ \gamma_2\left(P/\gamma_c(P)\right)$$

dir.

$$P/\gamma_c(P) \cong H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)$$

olduğundan

$$\left.P/\gamma_c(P)\right/ \gamma_2\left(P/\gamma_c(P)\right) = \left.\left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right)\right/ \gamma_2\left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki bölüm cebirinin payda kısmındaki ifadeyi hesaplayalım.

$$\gamma_2\left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right) = \left[H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P), H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right]$$

$$= \left.[H,H] \oplus [H,L] \oplus [L,L]\right/ \gamma_c(P)$$

$$= \left.\gamma_2(H) \oplus [H,L] \oplus \gamma_2(L)\right/ \gamma_c(P)$$

elde edilir. O halde

$$\left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right) \Big/ \gamma_2\left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right)$$

$$= \left(H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)\right) \Big/ (\gamma_2(H) \oplus [H,L] \oplus \gamma_2(L))/\gamma_c(P)$$

$$= \left(H/\gamma_c(P)\right) \Big/ (\gamma_2(H) \oplus [H,L])/\gamma_c(P) \oplus \left(L/\gamma_c(P)\right) \Big/ \gamma_2(L)/\gamma_c(P)$$

$$= \left(H/\gamma_c(P)\right) \Big/ (\gamma_2(H) \oplus [H,L] + \gamma_c(P))/\gamma_c(P) \oplus \left(L/\gamma_c(P)\right) \Big/ (\gamma_2(L) + \gamma_c(P))/\gamma_c(P)$$

$$= H/\gamma_2(H) \oplus [H,L] + \gamma_c(P) \oplus L/\gamma_2(L) + \gamma_c(P)$$

elde edilir. O halde

$$P/\gamma_2(P) = H/\gamma_2(H) \oplus [H,L] + \gamma_c(P) \oplus L/\gamma_2(L) + \gamma_c(P)$$

$P/\gamma_2(P)$ bölüm cebirinin n ranklı serbest abelyen olduğunu biliyoruz. Ayrıca L Lie cebirinin seçiminden ve $L/\gamma_2(L) + \gamma_c(P)$ bölüm cebiri 2 ranklı serbest abelyen olduğundan $H/\gamma_2(H) \oplus [H,L] + \gamma_c(P)$ cebiri n-2 ranklı serbest abelyen olur.$a_1, \dots, a_{n-2} \in H, a_{n-1}, a_n \in L$olsun öyle ki $a_1, \dots, a_{n-2}$elemanları H Lie cebirini modülo $\gamma_2(H) \oplus [H,L] + \gamma_c(P)$ serbestçe üretir. Benzer şekilde a_{n-1}, a_n elemanları

L Lie cebirini modülo $\gamma_2(L) + \gamma_c(P)$ serbestçe üretir. Hopfianlıktan $a_1, \dots, a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe üretir. O halde yine hopfianlıktan, I, $\{a_1, \dots, a_{n-2}\}$ tarafından üretilen ideal olmak üzere $H = I + \gamma_c(P)$eşitliğini yazabiliriz. Şimdi I idealini ele alalım.

$$J/I = \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/I)$$

olsun. Şimdi P/J idealinin paraserbest olduğunu ve $a \notin J$ olduğunu gösterelim. $a \notin H$ olduğundan $a \notin J$ olduğu açıktır. O halde geriye P/J paraserbest olduğunu göstermek kalır. J idealinin tanımından P/J bölüm cebiri rezidülü nilpotenttir. $a_1, \dots, a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe ürettiğinden ve Lemma 3.1 den her $c \geq 1$ için $a_1, \dots, a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_c(P)$ serbestçe üretir. O halde $P/(I + \gamma_c(P))$ cebiri serbest metabelyen olup rankı 2 dir. J ideali P Lie cebirinin P/J bölüm cebiri rezidülü nilpotent olacak şekildeki I yı içeren en küçük ideali olarak seçilmişti. O halde $J \subseteq (I + \gamma_c(P))$ olur. Böylece

$$P/(I + \gamma_c(P)) = (P/J)/((I + \gamma_c(P))/J) = (P/J)/\gamma_c(P/J)$$

yazılabilir. $P/(I + \gamma_c(P))$ cebiri serbest olduğundan, $(P/J)/\gamma_c(P/J)$ cebiri de serbesttir. O halde P/J paraserbesttir.

4. PARASERBEST LIE CEBİRİÖRNEKLERİ

Bu bölümde paraserbest Lie cebirlerinin daha somut olarak anlaşılmasını sağlayan örnekler incelenecektir. Örnek 4.1. serbest olmayan bir paraserbest Lie cebiri örneği olup bunun sonucu olarak Örnek 4.2. verilmiştir (Baur, 1978). Örnek 4.3. diğer bir serbest olmayan paraserbest Lie cebiri örneği olup (Baur, 1980), bu örneklerin ışığında Örnek 4.4. de serbest bir paraserbest Lie cebiri örneği verilmiştir.

Örnek 4.1: $z = [y,[x,y]] + \left[x,\left[y,[x,y]\right]\right] + \cdots + [x,\dots,x,[y,[x,y]]\dots] + \cdots$ olmak üzere, L Lie cebiri $K\langle\langle x,y\rangle\rangle$ cebirinde x,y,z tarafından üretilen bir Lie cebiri olsun. L Lie cebiri $\{x,y\}$ kümesi üzerinde paraserbesttir fakat serbest değildir.

İspat: İspatta aşağıdaki ifadeleri kullanacağız.

R: $K\langle\langle x,y\rangle\rangle$ cebirinde x,y,z elemanları tarafından üretilen bir alt halka,

$J(u_1,u_2,\dots,u_n)$:R halkasında u_i elemanları tarafından üretilen iki taraflı ideal olsun $(u_i \in R)$.

h_i elemanları $K\langle\langle x,y\rangle\rangle$ cebirinde i-yinci dereceden homojen elemanlar olmak üzere,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \in K\langle\langle x,y\rangle\rangle$$

olsun. J_k, R halkasının u elemanlarından oluşan iki taraflı idealdir öyle ki u elemanlarının homojen toplamlarını oluşturan terimler x ve y çarpımlarından oluşup toplamdaki her homojen terimin y elemanına göre derecesi k dan büyük ya da eşittir. Yani

$$J_k = \left\{u \in R/her\ \ i,j \in I,\ \ u = \sum\nolimits_{i\in I} h_i,\ \ h_i = \sum\nolimits_{i\in I} \lambda_j m_j, deg_y m_j \geq k\right\}$$

Önerme 3.7 ve Sonuç 3.2 den L, $K\langle\langle x,y\rangle\rangle$' in alt cebiri olduğu için rezidülü nilpotettir.

F, L Lie cebirinde x,y elemanları tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. z elemanının tanımından L cebiri $z = [x,z] + \big[y,[x,y]\big]$ bağıntısını içerir. Bu bağıntının sağ tarafındaki ifade z de tekrar eden elemanların başlangıcı olduğundan, her n için

$$z \in F \; mod \; \gamma_n(L)$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \varphi\colon {}^{L}\!/_{\gamma_n(L)} &\to {}^{F}\!/_{\gamma_n(F)} \\ x + \gamma_n(L) &\to x + \gamma_n(F) \\ y + \gamma_n(L) &\to y + \gamma_n(F) \\ z + \gamma_n(L) &\to z + \gamma_n(F) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir φ izomorfizmi vardır. O halde

$${}^{F}\!/_{\gamma_n(F)} \cong {}^{L}\!/_{\gamma_n(L)}$$

dir. Yani L bir paraserbest Lie cebirdir.

Şimdi L Lie cebirinin serbest olmadığını ispatlayalım. I, L de $[x,y] - y$ ve $[y,z]$ tarafından üretilen bir ideal olsun. Yani $I = \langle [x,y] - y, [y,z] \rangle$olsun. Amacımız $Q = {}^{L}\!/_{I}$ bölüm cebirinin tek eleman tarafından üretilmediğini göstermek. Bunun için ilk olarak x,y,z elemanlarının modülo I lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta, \gamma \in k$ için

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \in I$$

olsun. $\alpha = \beta = \gamma = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. J_1 idealinin tanımından $\beta y + \gamma z \in J_1 \supseteq I$ olup $\alpha x \in J_1$ dir. Böylece $x \notin J_1$ olduğundan $\alpha = 0$ dır. Ayrıca $\beta y \in J(y) \supseteq I$ ve $\beta y + \gamma z \in I$ olduğundan $\gamma z \in J(y)$ dir.Her $v \in J(y)$ için v elemanı aşağıdaki gibi yazılsın:

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i m_i$$

m_i elemanları x,y,z elemanlarının çarpımlarından oluşmak üzere $\lambda_i \in k$ için y elemanı en az bir kez çarpan olarak elde edilsin.

z$\in J_2$ olduğundan ve m_i elemanları z elemanını içerdiğinden,m_i, J_3 idealinde bulunur ve böylece $v \in K\langle x,y\rangle + J_3$ olur. Fakat $z \notin K\langle x,y\rangle + J_3$ dır. O halde $\gamma = 0$ dır. Şimdi $\beta = 0$ yani $y \notin I$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \in I$ dır.

$$I \subseteq J([x,y] - y) + J_3$$

olduğundan dolayı, $w \in J_3$ olmak üzere y elemanı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i + w,$$

m_i elemanları $x, y, z, ([x,y] - y)$ elemanlarının çarpımlarından oluşur öyle ki bu çarpımlar $([x,y] - y)$ elemanını bir kez içerir.m_i elemanlarının yazılışında $[x,y] - y$ elemanı en az bir kez görünmek zorunda olup bu elemanların dışında y yada z elemanlarını içeren $m_i J_2$ de bulunur. Böylece$w' \in J_2$ olmak üzere y elemanını şöyle yazabiliriz:

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i + w',$$

m_i elemanları $x, ([x,y] - y)$ elemanlarının çarpımlarından oluşur öyle ki bu çarpımlar $([x,y] - y)$ elemanını bir kez içerir. Böylece

$$y = \sum_{i,j \in I} \lambda_{ij} x^i ([x,y] - y) x^j + w'$$
$$= \sum_{i,j \in I} \lambda_{ij} \left(x^{i+1} y x^j - x^i y x^{j+1} - x^i y x^j \right) + w'$$

olur. $y \notin J_2$ olduğundan tüm λ_{ij}elemanları sıfır değildir.(i,j) ikilileri, $\lambda_{ij} \neq 0$ olmak üzere, önce i+j toplamının büyüklüğüne göre sonra da alfabetik sıraya göre sıralanırsa ve yukarıda tanımlanan y elemanının sağdaki terim incelenirse, (i_0, j_0) çifti en büyük olmak üzere $\lambda_{i_0 j_0} x^{i_0+1} y x^{j_0}$terimi elde edilir ki bu terim kaldırılamaz. Bu da bir çelişkidir. Çünkü

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i + w' \subset J([x,y] - y) + J_3$$

olduğundan, $w \in J_3$ olmak üzere

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i + w' = ([x,y] - y)y + w$$
$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i = ([x,y] - y)y + w - w'$$

yazılabilir. $w - w'$ teriminde en az iki tane y elemanı vardır. $([x,y] - y)y$ teriminde de y elemanı bulunur. Bu durum m_i elemanınınJ_2 de olmasıyla çelişir. O halde $y \notin I$ olup $\beta = 0$ dır. Sonuç olarak x,y,z modülo I lineer bağımsızdır. Böylece $Q = {}^{L}/_{I}$ Lie cebirinin boyutu $dim_k Q \geq 3$ dır.
Q cebirindeki bağıntıları şöyle sıralayabiliriz:

$[y,z] = 0 \quad ([y,z] \in I)$
$[x,y] = y \quad ([x,y] - y \in I)$
$[x,z] = z(z = [x,z] + \big[y,[x,y]\big] = [x,z] + [y,y] = [x,z])$.

O halde aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

i) Q cebiri x,y,z elemanları tarafından üretilen bir vektör uzayıdır ve $dim_k Q = 3$ dür.

ii) $y, z \in \gamma_2(Q)$, fakat

$$Q/\gamma_2(Q) = (L/I)/\gamma_2(L/I) = \langle x \rangle$$

olduğundan $x \notin \gamma_2(Q)$ dır.

iii) Her $q \in Q$ için $q = \alpha x + \beta y + \gamma z$ temsili vardır, $(\alpha, \beta, \gamma \in k)$.

O halde x,y,z elemanlarının oluşturduğu küme Q cebiri için bir bazdır.

Şimdi$Q' = \langle u \rangle$ olduğunu kabul edelim; yaniQ' komütatör cebiri, bir $u \in Q$ elemanı tarafından üretilen bir Lie ideali olsun. $u = \zeta x + \eta y + \xi z$ olsun. $u, y, z \in Q'$ ve $x \notin Q'$ olduğundan $\zeta = 0$ olur.
O halde,

$$[q, u] = [\alpha x + \beta y + \gamma z\,, \eta y + \xi z] = \alpha\eta y + \alpha\xi z = \alpha u.$$

Böylece $dim_k Q' = 1$ dir. Bu da $y, z \in Q'$ için y ve z elemanlarının lineer bağımsız olmasıyla çelişir. O halde Q' bir eleman tarafında üretilen bir ideal değildir.
Eğer $L = F(r, s)$ rankı 2 olan bir serbest Lie cebiri olsaydı L Lie cebirinin her epimorfik görüntüsünün komütatörü bir eleman tarafından üretilen bir Lie ideal olurdu. Çünkü L Lie cebiri iki ranklı olduğundan otomorfizmleri lineerdir. O halde L den L ye giden bir φ otomorfizm şöyle olsun:

$$\varphi: L \to L$$
$$r \to r + s$$
$$s \to r - s$$

$[\varphi(r), \varphi(s)] = [r + s, r - s] = [r, r] - [r, s] + [s, r] - [s, s] = -2[r, s]$ olur.
Böylece

$L' = F' = \langle [r,s] \rangle$bir eleman tarafından üretilir. Fakat Q' komütatör cebiri bir eleman tarafından üretilmiyor ve $Q = {}^{L}/_{I}$ dir. O halde L paraserbest Lie cebiri serbest değildir.

Örnek 4.2: A bir Lie cebiri olmak üzere

$$A = \langle x, y, z / z - [x,z] - [y,[x,y]] \rangle$$

olarak tanımlansın. ${}^{A}/_{\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)}$ cebiri $\{x,y\}$ üzerinde paraserbesttir fakat serbest değildir.

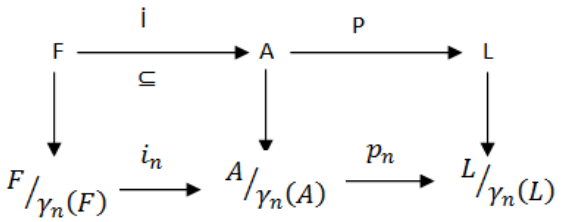
İspat: L bir önceki örnekte tanımlı olan Lie cebiri olsun. L Lie cebirinde $z - [x,z] - [y,[x,y]] = 0$ bağıntısı sağlanır. O halde A dan L ye bir

$$p: A \to L$$

epimorfizmi vardır öyle ki

$$p(x) = x,$$
$$p(y) = y,$$
$$p(z) = z.$$

$p(x)\ ve\ p(y)$ elemanları L Lie cebirinin paraprimitif elemanları olduklarından x ve y elemanları A Lie cebirinde bir F serbest Lie cebiri üretir. Şimdi aşağıdaki diyagramları ele alalım.



Böylece

$$p_n i_n : {}^{F}/_{\gamma_n(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_n(L)}$$

bir izomorfizmdir. Ayrıcap_n dönüşümleri p dönüşümü tarafından belirlendiğinden her n için i_n dönüşümleri injektiftir.${}^{A}/_{\gamma_2(A)}$ cebiri $x + \gamma_2(A)$ ve $y + \gamma_2(A)$ tarafından üretilip

$$i_2 : {}^{F}/_{\gamma_2(F)} \rightarrow {}^{A}/_{\gamma_2(A)}$$

dönüşümü surjektiftir. O halde her n için

$$i_n : {}^{F}/_{\gamma_n(F)} \rightarrow {}^{A}/_{\gamma_n(A)}$$

izomorfizmleri vardır (Baur,1978) Lemma1.3.O halde

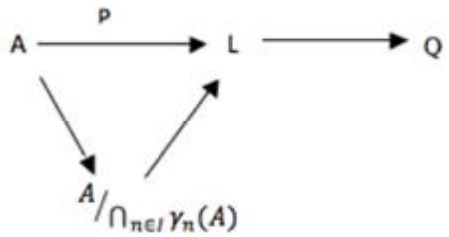
$$\left({}^{A}/_{\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)}\right)\Big/_{\gamma_n\left({}^{A}/_{\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)}\right)} \cong {}^{A}/_{\gamma_n(A)} \cong {}^{F}/_{\gamma_n(F)}$$

olur. Yani ${}^{A}/_{\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)}$ Lie cebiri bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahiptir. Şimdi $a \in \bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)$ elemanını ele alalım. Her n pozitif tam sayısı için $a \in \gamma_n(A)$ olur. O halde$a \in A$ dır. Böylece $p(a)$ elemanı tanımlıdır.$w' \in {}^{A}/_{\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)}$ elemanı için

$$w' = w + \gamma_n(A), w \in A$$

olur. O halde

dır. olduğundan W=0 olur. Böylece P nin A üzerindeki etkisi ile üzerindeki etkisi aynıdır.



Ayrıca olduğundan dir. p elemanının A üzerindeki etkisi ile üzerindeki etkisi aynı olduğunu biliyoruz. Böylece

olur. p bir epimorfizm olduğundan

dır. O halde rezidülü nilpotenttir. O halde Lie cebiri paraserbesttir.Yukarıdaki diyagramda bulunan Q bölüm cebiri bir önceki örnekte tanımlanan Lie cebiri olsun. serbest Lie cebirinin homomorfik görüntüsü de serbest olduğunu biliyoruz. Eğer Q serbest olsaydı cebiri de serbest olurdu. Yukarıdaki diyagram cebirinden Q bölüm cebirine giden homomorfizm ile tamamlanırsa Q bölüm cebirinin cebirinin bir homomorfik görüntüsü olduğundan görülür. Böylece Q serbest olmadığından ve Q

bölüm cebiri $A/\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)$ cebirinin bir homomorfik görüntüsü olduğundan $A/\bigcap_{n\in I}\gamma_n(A)$ cebiri serbest değildir.

Aşağıda diğer bir serbest olmayan paraserbest Lie cebiri örneği verilmiştir. Öncelikle örneğin ispatında kullanacağımız bazı ifadeleri tanımlayacağız.

Homoloji teorisi cebirlerde çok çalışılan bir konudur. Baur (1978) bu kavramı Lie cebirlerine uyarlamış ve bir Lie cebirinin homolojisi ile paraserbest olması arasında bir ilişki bulmuştur. Bunu aşağıdaki örnekte kullanmıştır. Öncelikle örnekte kullanılacak olan terimlerin tanımlarını verelim.

C_1, C_2 ve C_3 Lie cebirleri ve bu cebirler arasında n=0,1,2 için

$$C_2 \overset{\partial_2}{\to} C_1 \overset{\partial_1}{\to} C_0 \overset{\partial_0}{\to} 0$$

olacak şekilde $\partial_n: C_n \to C_{n-1}$ homomorfizmleri tanımlansın. Buhomomorfizmlern=0,1,2 için $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0_{n+1,n-1}$eşitliğini sağlar. Yani $im(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ dir.

$\ker(\partial_2)/\ker(\partial_2)$ bölüm cebirine ikinci homoloji denir.

Aşağıdaki örnekte L Lie cebirinin ikinci homolojisi$H_2L = H_2(L,k)$ ile temsil edilecektir.

Örnek 4.3: $i \geq 1$ olmak üzere

$$y_0 = y, \qquad y_1 = [x, y_0], \dots, y_{i+1} = [x, y_i]$$

olsun. $l \geq 1$ için sıfırdan farklı bir w elemanı şöyle tanımlansın: $j_1 \geq j_0$ olmak üzere

$$w = \left[y_{j_l}, \left[y_{j_{l-1}}, \dots, \left[y_{j_1}, y_{j_0}\right] \dots\right]\right] \in F(y_0, y_1, \dots)$$

O halde

$$P = \langle x, y, z / z = [x, z] + w \rangle$$

Lie cebiri $\{x, y\}$ üzerinde paraserbesttir fakat serbest değildir. P paraserbest Lie cebirinin z, y elemanları tarafından üretilen I ideali $\{z, y_0, y_1, \dots\}$ kümesi üzerinde serbesttir ve P Lie cebiri bir boyutlu $\langle x \rangle$ Lie cebiri ile I idealinin yarı direkt çarpımıdır.

İspat:Öncelikle P Lie cebirinin $\langle x \rangle$ cebiri ile I idealinin yarı direkt çarpımı olduğunu ve I idealinin $\{z, y_0, y_1, \dots\}$ kümesi üzerinde serbest olduğunu ispatlayalım.
H cebiri P Lie cebirinin $z, y_0, y_1, \dots$ elemanları tarafından üretilen alt cebiri olsun. $i \geq 0$ için

$$[x, y_i] = y_{i+1,} [x, z] = z - w$$

olduğundan H cebiri P Lie cebirinin bir idealidir. Açıktır ki I=H dır. ${}^{P}/_{I} \cong \langle x \rangle$ olduğundan $P = I \rtimes \langle x \rangle$ dır.
J, $\{z, y_0, y_1, \dots\}$ üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. x elemanının J üzerindeki etkisi şöyle olsun:

$$x \circ z = z - w,$$
$$x \circ y_i = y_{i+1}, \quad i \geq 0.$$

O halde

$$\phi: J \rtimes \langle x \rangle \to I \rtimes \langle x \rangle$$

homomorfizmi vardır. Diğer taraftan $y = y_0$ alınırsa $J \rtimes \langle x \rangle$ cebiri $z = [x, z] + w$ bağıntısını sağlar. Böylece

$$\psi: I \rtimes \langle x \rangle \to J \rtimes \langle x \rangle$$

dönüşümü elde ederiz. Açıktır ki ϕ ve ψ dönüşümleri birbirinin tersi olan dönüşümlerdir. O halde $I \cong J$ olup, P Lie cebirlerinin z,y elemanları tarafından üretilen I ideali $\{z, y_0, y_1, \dots\}$ kümesi üzerinde serbesttir.

Şimdi P Lie cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu göstermek istiyoruz. $0 \neq v \in P$ olsun. P Lie cebirinin bir nilpotent bölümünü bulmalıyız öyle ki bu bölüm cebirinin içinde v elemanının kanonik görüntüsü sıfırdan farklı olsun. Kabul edelim ki $v \in I$ dir. n öyle bir tam sayı olsun ki $v, w \in F(z, y_0, \dots, y_n)$, fakat v ve w elemanlarından en az bir tanesi $F(z, y_0, \dots, y_{n-1})$ de olmasın.

$y_{n+3}, y_{n+4}, \dots$ tarafından üretilen I serbest Lie cebirinin bir A idealini ele alalım. Açıktır ki A ideali P Lie cebirinin de bir idealidir.

B cebiri $\{z, y_0, \dots, y_{n+1}, y_{n+2}\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir serbest Lie cebiri ve $0 \neq v \in B$, $0 \neq w \in B$ olmak üzere x elemanının B üzerindeki etkisi şöyle tanımlansın:

$$x \circ z = z - w,$$
$$x \circ y_i = y_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq n+1,$$
$$x \circ y_{n+2} = 0.$$

O halde,

$$P/A \cong B \rtimes \langle x \rangle$$

dir. Şimdi

$$\bar{z} = w + x \circ w + x^2 \circ w + \cdots + x^m \circ w + \cdots$$

elemanını düşünelim. Belirtelim ki x elemanı $F(y_0, y_1, \dots, y_{n+2}) \subseteq B$ üzerinde nilpotent olarak etki ediyor öyle ki $\bar{z}$ bir sonlu toplamdan oluşur ve böylece $F(y_0, y_1, \dots, y_{n+2}) \subseteq B$ cebirinin bir elemanıdır. Ayrıca

$$x \circ \bar{z} = \bar{z} - w$$

olup x elemanının $\bar{z}$ üzerindeki etkisi z üzerindeki etkisi gibidir. Başka bir ifadeyle B cebirinin $u = z - \bar{z}$ elemanı tarafından üretilen U ideali $B \rtimes \langle x \rangle$ cebirinin bir idealidir.

$$B/_U = C$$

olsun. O halde

$$C \cong F(y_0, y_1, \dots, y_{n+2})$$

dır. Şimdi v elemanının $C \rtimes \langle x \rangle$ cebirindeki $\bar{v}$ kanonik görüntüsü trivial olmadığını göstermek istiyoruz.

$$\varphi: F(z, y_0, y_1, \dots, y_n) \to F(y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2})$$

dönüşümü $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\varphi(z) = \bar{z},$$
$$\varphi(y_i) = y_i,$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $\bar{v} = \varphi(v)$ dir. $\bar{z}$elemanı $[y_{n+2}, [y_{n+2}, \dots, [y_{n+2}, y_{n+1}] \dots]]$ elemanını içerdiğinden $im\varphi$, rankı n+2 olan bir serbest Lie cebirdir. Böylece φ injektif olup $\bar{v} = \varphi(v) \neq 0$ dır. C bir serbest Lie cebiri olduğundan bir m tamsayısı vardır öyle ki $\bar{v} \notin \gamma_m(C)$. Fakat x elemanı C üzerinde nilpotent olarak etki ettiğinden $C/_{\gamma_m(C) \rtimes \langle x \rangle}$ bir nilpotent Lie cebirdir. Bu durum P Lie cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterir.

Şimdi P Lie cebirinin $F(x, y)$serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim. Bunun için Knus ve Stambach (1967)de verilmiş olan Sonuç 1 ‘ i kullanacağız.

$H_1(P,k) = {}^{P}/_{\gamma_2(P)}$ cebirinin iki boyutlu olduğundan ispat için $H_2(P,k) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. P Lie cebirinin sunumunu göz önüne alalım. R cebiri $z - [x,z] - w$ elemanı tarafından üretilen ideal olmak üzere, bu sunum

$$F(x,y,z)/_R \to P$$

dir. Knuss ve Stambach (1967) de Önerme 2 verilmiş olan birbiriyle bağlantılı beş terimli diyagramı ele alalım.

$$0 \to H_2(P,k) \to {}^{R}/_{[F,R]} \to {}^{F}/_{\gamma_2(F)} \to {}^{P}/_{\gamma_2(P)} \to 0$$

dır. Ayrıca

$$dim\left({}^{F}/_{\gamma_2(F)}\right) = 3,$$
$$dim\left({}^{P}/_{\gamma_2(P)}\right) = 2,$$
$$dim\left({}^{R}/_{[F,R]}\right) \leq 1,$$

olduğundan $H_2(P,k) = 0$ dır. O halde P paraserbesttir.

Şimdi P nin serbest olmadığını göstereceğiz. Bunun için

$$[x,y] = y, \qquad [y,z] = 0$$

bağıntılarını ekleyerek elde edilen P Lie cebirinin Q cebiri ile bölüm cebirini düşünelim. Yukarıdaki bağıntıları $I \rtimes \langle x \rangle$ cebirinde yorumlarsak, Q cebirinde

$$y = y_0 = y_1 = \cdots = y_n = y_{n+1} = \cdots$$

olur ve böylece Q cebirinde w=0 olur. O halde Q cebiri $\{x,y,z\}$ kümesi tarafından üretilir ve boyutu 3 dür.

$$[x, y] = y,\ [x, z] = z$$

dir. Kolayca görülebilir ki Q cebiri 2 eleman tarafından üretilemez. Eğer P serbest olsaydı ${}^{P}/_{\gamma_2(P)}$cebirinin boyutu 2 olduğundan P iki elemanlı bir küme üzerinde serbest olmak zorunda kalırdı ve P Lie cebirinin her bölüm cebiri özellikle Q iki eleman tarafından üretilirdi. Bu da bir çelişkidir. O halde P serbest değildir.

Bu örneklerin dışında serbest olan paraserbest Lie cebirleri de mevcuttur. Aşağıda serbest olan bir paraserbest Lie cebiri örneği verdik.

Örnek 4.4:

$$L = \langle x, y, z / z = [x, z] + [x, y] \rangle$$

olsun. L Lie cebiri $\{x, z + y\}$ üzerinde serbest olan bir paraserbest Lie cebiridir.

İspat: İlk olarak P Lie cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterelim. $u \in L$ olsun. O halde $u \notin I$ve ${}^{L}/_{I}$ nilpotent olacak şekilde L Lie cebirinin bir I idealinin var olduğunu göstereceğiz.

$I = \langle x \rangle$ cebiri L Lie cebirinin x tarafından üretilen ideali olsun. O halde L Lie cebirinin I ile bölüm cebiri

$${}^{L}/_{I} = \{w + I \,/\, w \in L\} = \langle y \rangle$$

olur. ${}^{L}/_{I}$ bölüm cebiri tek eleman tarafından üretildiğinden nilpotenttir. Ayrıca $y \in L$ ve $y \notin I$ olduğundan L rezidülü nilpotent olur.

Şimdi L Lie cebirinin bir serbest Lie cebir ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim. ${}^{L}/_{I}$ abelyen olduğundan paraserbesttir. O halde bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahiptir. Yani

$${}^{\left({}^{L}/_{I}\right)}/_{\gamma_n\left({}^{L}/_{I}\right)} \cong {}^{F}/_{\gamma_n(F)} \qquad (4.1)$$

dir. Ayrıca

$$\left({}^{L}/_{I}\right)\Big/_{\gamma_n\left({}^{L}/_{I}\right)} \cong \left({}^{L}/_{I}\right)\Big/_{\gamma_n(L) + {}^{I}/_{I}} \cong {}^{L}/_{\gamma_n(L)}$$

dır. O halde $n \geq 2$ olmak üzere (4.1) eşitliğinden

$${}^{L}/_{\gamma_n(L)} \cong {}^{F}/_{\gamma_n(F)}$$

olur. Böylece L bir paraserbest Lie cebiridir. Ayrıca ${}^{L}/_{I}$ bölüm cebiri bir boyutlu olduğundan serbest abelyendir. O halde L serbesttir.

5. BAZI AÇIK PROBLEMLER

Paraserbest Lie cebirleri henüz fazla çalışılmamış bir konudur. Bu durum tezimizde ele aldığımız konular dışında bir çok alanlarda araştırma fırsatı tanımaktadır. Bu bölümdeparaserbest Lie cebirlerinde çalışılabilecek bazı açık problemleri verdik.

1. Bir paraserbest metabelyen nilpotent Lie cebirinin bir sunumu nasıl olabilir?
2. F rankı iki olan bir serbest Lie cebiri ve $m, n \geq 2$ olmak üzere $M_{n,m}$, rankı n olan, m-1-inci sınıftan nilpotent ve serbest metabelyen Lie cebirini ve temsil etsin. Yani

$$M_{n,m} = {}^{F}\!/_{\gamma_m(F) + F''}$$

olsun. $\bigcup_{m=1}^{\infty} M_{n,m}$ paraserbest midir?
3. A ve B paraserbest Lie cebirleri $P = A * B$ ise A ve B nin serbest çarpımları olsun. $' \circledast '$ işlemi serbest metabelyen çarpımı temsil etmek üzere

$${}^{P}\!/_{P''} = {}^{A}\!/_{\gamma_2(A)} \circledast {}^{B}\!/_{\gamma_2(B)}$$

eşitliği sağlanır mı?
4. Her rankı n olan paraserbest P Lie cebiri bir X kümesi üzerinde tanımlı, n üreteçli kuvvet serisi halkası içine gömülebilir mi? Eğer B kümesi P için bir paraüreteç ise bu gömme B den $1 + X = \{1 + x / x \in X\}$ kümesine gidecek şekilde özel seçilebilir mi?
5. Sayılabilir ranklı her paraserbest Lie cebiri rankı 2 olan bir paraserbest Lie cebiri içine gömülebilir mi?

6. Bir paraserbest Lie cebirinin abelyen alt cebiri tek üreteçli fakat abelyen olmayan iki üreteçli alt cebirler 2 ranklı serbest midir?
7. P tüm metabelyen Lie cebirlerin sınıfına ait bir paraserbest Lie cebiri olsun. O halde P nin iki üreteçli alt cebirleri, serbest metabelyen Lie cebirlerinin iki üreteçli alt cebirlerine izomorf olur mu?
8. $\mathfrak{B}$ tüm Lie cebirlerin bir ailesi ve $(\lambda \in \Lambda)$olmak üzere $\mathfrak{B}$ sınıfı $\mathfrak{B}_\lambda$ altsınıflarının birleşimi olsun. O zaman $\mathfrak{B}$ sınıfında paraserbest olan bir P Lie cebiri $\{\mathfrak{B}_\lambda \,/\, \lambda \in \Lambda\}$ sınıfında rezidülü paraserbest olur mu?.
9. Sonlu üretilmiş paraserbest Lie cebirlerinin Frattini idealleri trivial midir?
10. Türemiş uzunluğu en fazla n olan çözülebilir Lie cebirlerin sınıfına ait sonlu üretilmiş bir paraserbest Lie cebiri Frattini ideale sahip midir?
11. Bir cebirin ‘ nullity’ si cebiri üreten elemanlar sayısının en küçüğüdür. Cebirin boyutu ve ‘ nullity’ si arasındaki farka ise ‘ genus’ denir.P ve H aynı genusa sahipiki paraserbest Lie cebirleri olsun. P nin ikinci homolojisitrivialise H nin de ikinci homolojisitrivialolur mu?
12. P ve H aynı genusa sahip iki paraserbest Lie cebiri olsun. P sonlu sunumlu ise H de sonlu sunumlu olur mu?
13. P ve H aynı genusasahip iki paraserbest Lie cebiri olsun. P nin Frattini ideali trivial ise H nin de Frattini ideali trivial olur mu?
14. Sonlu üretilmiş rezidülü sonlu bir P Lie cebiri bir serbest Lie cebiri ile aynı sonlu görüntüye sahip olsun. G serbest mi dir? G paraserbest midir?
15. I bir paraserbest Lie cebirinin trivial olmayan bir ideali olsun. Eğer I sonsuz koboyuta sahip ise I idealinin üreteç kümesi de sonsuz elemanlı olur mu?
16. Bir paraserbest Lie cebirinin sonlu üretilmiş iki alt cebirinin kesişimi de sonlu üretilmiş olur mu?

KAYNAKLAR

BAHTURIN, Y.,1987.IdenticalRelations in Lie Algebras.VNUSciencePress, Utrecht, 309p.

BAUMSLAG, G., 1967.Groupswiththesamelowercentralsequence as a relatively freegroup I. Thegroups. Trans. Amer. Math. Soc., 129, 308-321.

BAUMSLAG, G., 1969. Groupswiththesamelowercentralsequence as a relatively freegroup. II Properties. Trans. Amer. Math. Soc., 142, 507-538.

BAUMSLAG, G., 2005. Parafreegroups.Progress in Math., Vol. 248, 1-14.

BAUMSLAG, G., STAMMBACH, U., 1977. On the inverse limit of free nilpotent Groups.Comment. Math. Helvetici, 52, 219-233.

BAUMSLAG, G., CLEARY, S., 2006. Parafreeone-relatorgroups. Jurnal of grouptheory, 9, 191-201.

BAUR, H., 1978. ParafreieLiealgebrenundhomologie. Diss. EthNr., 6126, Zürich, 60p.

BAUR, H., 1980. A note on parafree Lie algebras.Commun. in Alg., Vol 8, No 10, 953-960.

BOKUT,L.,A., KUKİN, G.P., 1994. AlgoritmicandCombinatorialAlgebra.Kluwer AcademicPublishers, Dortecht, TheNetherlands, 255p.

DEAN, M., 2008. FinitelyGeneratedMetabelianandSolvableGroups. PhD., City University of New York, 75p.

EILENBERG, S., STEENROD, N., 1952. Foundation of AlgebraicTopology. Princeton UniversityPress, Princeton, N.J., 328pp.

EVANS, T., 1969. FinitelyPresentedLoops, Lattices, Etc. Are Hopfian. J. London Math. Soc., 44, 551-552.

GRATZER, G., 1979. Universal Algebra. SpringerVerlag, New York,588pp.

KNUS, M.A., STAMBACH, U., 1967. Anwendungen der Homologietheorie der LiealgebrenaufZentralreihrenundaufPrasentierungen. Comment. Math. Helvetici, 42, 297-306.

MORANDI, P., 2012. Mathematical Notes. sierra.nmsu.edu/morandi/.

SHANG, Y., 2008. Direct Limit of PseudoeffectAlgebras. Natural Computation, ICNC' 08, FourtInt. Conf. On Natural Computation, Jinan, China, 309-313.

SHIRSOV, A.I., 1958. On Free Lie Rings. Part II. Mat. Sbornik, Russian 45, 113-122.

STEWART, I., 1970. Lie Algebras. Lecturenotes in Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg, New York, No.27, 97p.

ÖZGEÇMİŞ

20.12.1985 yılında Şanlıurfa' da doğdu. Orta ve lise öğrenimini Şanlıurfa' da tamamladı. 2002 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlayarak, 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında yüksek lisansı tamamladı. 2008-2009 yılında Şanlıurfa Özel Fırat Kolejinde matematik öğretmenliği yaptı. 2009 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı.