ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alev ALTINEL

S_n -NORMAL YARIGRUPLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2014

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S_n-NORMAL YARIGRUPLAR

Alev ALTINEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 24/09/2014 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….	…….	……
Prof. Dr. Gonca AYIK	Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

S_n-NORMAL YARIGRUPLAR

Alev ALTINEL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2014, Sayfa: 99
Jüri : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

T_n ve S_n ile $X_n = \{1, 2, \mathbf{L}, n\}$ kümesi üzerinde sırasıyla tüm dönüşümlerin yarıgrubunu ve permütasyonların grubunu gösterelim. S, T_n nin bir alt yarıgrubu olsun. Eğer her $a \in S$ ve her $b \in S_n$ için $b^{-1}ab \in S$ oluyorsa S alt yarıgrubuna S_n-*normal yarıgrup* denir.

Bu çalışmada bir dönüşüm yarıgrubunun S_n-normal olması için gerek ve yeter koşullar ile $a \in T_n$ elemanını içeren T_n nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubunun yapısı incelenmiştir. Ayrıca S_n-normal yarıgruplar ile ilgili yapılan çalışmalar derlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, S_n-normal yarıgruplar

ABSTRACT

MS THESIS

S_n-NORMAL SEMIGROUPS

Alev ALTINEL

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

Supervisor : Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2014, Pages: 99
Jury : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

Let T_n and S_n denote the full transformation semigroup and symmetric group on the set $X_n = \{1, 2, \mathbf{L}, n\}$, respectively. A subsemigroup S of T_n is defined to be S_n-normal semigroup if for each $a \hat{I} S$ and for each $b \hat{I} S_n$, the element $b^{-1}ab$ is in S.

In this paper, it is investigated that the necessary and sufficient conditions for the S_n-normal transformation semigroup and the structure of minimal S_n-normal semigroup of T_n which contains the element a of T_n. Also the studies on S_n-normal semigroups have been compiled.

Key Words: Transformation semigroups, S_n-normal semigroups

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayırarak bilgi ve tecrübesiyle her zaman yol gösterici olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Gonca AYIK'a sunmuş olduğu hoşgörü ve sabır için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Hayrullah Ayık ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL'a destek ve teşviklerinden dolayı, eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen Ç.Ü. Matematik Bölümünün saygıdeğer öğretim üyelerine ve başta Arş. Gör. Ebru YİĞİT olmak üzere bütün öğretim elemanlarına teşekkürü borç bilirim.

Son olarak hayatımın her anında olduğu gibi yüksek lisans eğitimim boyunca da desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili babam Hasan ALTINEL, annem Sultan ALTINEL ve abim Ali ALTINEL'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışmamı canım aileme armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ŞEKİLLER DİZİNİ… VI
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER 3
2.1. Yarıgrup Tanımları ve Yarıgrup Örnekleri 3
2.2. Homomorfizmler 11
2.3. Bağıntılar ve Denklikler 12
2.4. Kongrüanslar 19
2.5. Green Denklik Bağıntıları 22
2.6. Doğuray Kümeleri 32
3. TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU 41
4. S_n-NORMAL YARIGRUPLAR ve ÖZELLİKLERİ 53
4.1. S_n-Normal Dönüşüm Yarıgrupları 53
4.2. S_n-Normal Dönüşüm Yarıgruplarının Özellikleri 66
5. SONUÇLAR 93
KAYNAKLAR 97
ÖZGEÇMİŞ 99

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1 Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı 25

1. GİRİŞ

Yarıgrup çalışmaları, gruplar ve halkalar gibi daha karmaşık aksiyomlu diğer cebirsel yapılardan daha sonra, 20. yüzyılın başlarında başlamıştır. Suschkewitsch A.K., yarıgruplar hakkında trivial olmayan ilk sonuçları elde etmiştir. David Rees, James Alexande Green, Egenii Sergeevich Lypain, Alfred H. Clifford ve Gordon Preston yarıgrup teorinin temelini atmaya yardımcı olmuşlardır. Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ile olan bağlantısı yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Her sonlu yarıgrup sonlu bir dönüşüm yarıgrubuna gömülebileceğinden dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teorisinde önemli bir yere sahiptir. Dönüşümler yarıgrubunda S_n-normal yarıgrup kavramını ilk olarak Levi I. 1994 yılındaki makalesinde ele almıştır. 2000 yılında Levi I., McAlister D.B. ve McFadden R.B. bu konuyu kısmi dönüşümler yarıgrubu için incelemişlerdir. Daha sonra Levi I., McAlister D.B. ve McFadden R.B. 2001 yılında A_n-normal yarıgruplar üzerine çalışma yapmışlardır. Araújo J., Cameron P.J., Mitchell J.D. ve Neunhöffer M., 2013 yılında normalizing grupları sınıflandırmışlardır.

Biz de çalışmamızda Symons J.S.V. nın 1976'daki "Normal Transformation Semigroups" ve Levi I. ve McFadden R.B. nin 1994'teki "S_n-Normal Semigroups" adlı çalışmalarını inceleyeceğiz.

İlk olarak çalışmamızın kaynağını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verip tüm dönüşüm yarıgruplarıyla ilgili teoremlerden bahsedeceğiz. Daha sonra normal dönüşüm yarıgrupları ile ilgili tanım ve yardımcı teoremleri verip bir dönüşüm yarıgrubunun S_n-normal olması için gerek ve yeter koşulları incelenecektir. Ardından S_n-normal yarıgrupların idempotent doğuraylı olduğu gösterilecek ve S_n-idempotent rankı bulunacaktır. Ayrıca S_n-normal yarıgruplar için Green denklik bağıntıları verilecektir. Son bölümde ise bu konuyla ilgili yapılmış diğer çalışmalardaki önemli teoremlerden bahsedilecektir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. YARIGRUP TANIMI ve YARIGRUP ÖRNEKLERİ

Bu bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde yarıgrup teorisinden kullanacağımız temel kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1.1. S boş olmayan bir küme ve μ de $S' S$ den S ye bir fonksiyon ise μ ye S üzerinde *ikili işlem* denir. Bu durumda (S,μ) ikilisine de bir *grupoid* denir.

Tanım 2.1.2. (S,μ) bir grupoid olsun. Eğer μ, S üzerinde birleşme özelliğine sahip ise, yani her $x,y,z \in S$ için

$$(x,(y,z)\mu)\mu=((x,y)\mu,z)\mu$$

ise (S,μ) grupoidine bir *yarıgrup* denir.

(S,μ) bir yarıgrup olmak üzere $\forall x,y,z \in S$ için $(x,y)\mu$ yerine xy ve $(x,(y,z)\mu)\mu=((x,y)\mu,z)\mu$ yerine de $x(yz)=(xy)z$ yazılır.

S bir yarıgrup olsun. O zaman $x_1,x_2,\ldots,x_n \in S$ için

$$\left((x_1,x_2)\ldots\left(x_i\left(x_{i+1},x_{i+2}\right)\ldots x_{n-1}\right)\right)x_n$$

yerine

$$x_1x_2\ldots x_n$$

ve $n \in N$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\underbrace{xx\cdots x}_{n \text{ tane}}$ yerine x^n yazılır.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun. Her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

ise S yarıgrubuna *değişmeli yarıgrup* denir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $zs = z$ ise $z \in S$ ye bir *sol sıfır eleman*, $sz = z$ ise $z \in S$ ye bir *sağ sıfır eleman* denir. Eğer $z \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise z ye S nin *sıfır elemanı* denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sağ veya sol sıfır eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta sıfır eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı sıfır eleman tektir ve 0 ile gösterilir.

Önerme 2.1.5. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun.

$$0 = 00' \quad (0, \text{ sıfır elemanı olduğundan})$$
$$00' = 0' \quad (0', \text{ sıfır eleman olduğundan})$$

olup $0 = 0'$ elde edilir. Böylece istenen ispatlanmış olur.■

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup olsun. Her $s \in S$ için $es = s$ oluyorsa $e \in S$ ye S nin bir *sol birim elemanı*, $se = s$ oluyorsa $e \in S$ ye S nin bir *sağ birim elemanı* denir. Eğer e hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye *birim eleman* denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sağ ve sol birim eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupta birim eleman varsa aşağıdaki önermeden dolayı birim eleman tektir ve genellikle 1_S veya kısaca 1 ile gösterilir.

Önerme 2.1.7. Bir S yarıgrubunun birim elemanı var ise tektir.

İspat: $e, f \in S$, S nin iki birim elemanı olsun. e birim eleman olduğundan $ef = f$ ve f birim eleman olduğundan $ef = e$ olup

$$f = ef = e$$

olacağından $e = f$ olur, yani birim eleman tektir.■

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun. Eğer S bir birim elemana sahip ise S ye bir *monoid* denir.

S herhangi bir yarıgrup olsun. O zaman

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlanan S^1 üzerinde bir ikili işlem, $\forall s,t \in S^1$ için

$$st = \begin{cases} st, & s,t \neq 1 \\ t, & s = 1 \\ s, & t = 1 \\ 1, & s = t = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise S^1 bir monoid olup buna *gerekli ise S ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.1.9. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall a \in S$ için $aS = S$ ve $Sa = S$ oluyor ise S ye bir *grup* denir. Diğer bir deyişle, S bir yarıgrup ve $e \in S$ iken $\forall a \in S$ için $ea = a = ae$ ve $ba = e = ab$ olacak şekilde bir $b \in S$ var ise S ye bir *grup* denir.

Tanım 2.1.10. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer her $a,b \in T$ için $ab \in T$, yani

$$TT = T^2 = \{st : s,t \in T\}$$

ise T ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir. Yani, $T^2 \subseteq T$ ise T ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir.

Tanım 2.1.11. S bir yarıgrup ve $G \neq S$ de S nin bir alt grubu olsun. Eğer S nin $G \subseteq H \subseteq S$ olacak şekilde bir H alt grubu mevcut olduğunda $H = G$ veya $H = S$ olmak zorunda kalıyor ise G ye S nin *maksimal alt grubu* denir.

Tanım 2.1.12. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun.

i) Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $sa \in I$ yani $SI \subseteq I$ ise I ya S nin bir *sol ideali*

ii) Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$ yani $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir s*ağ ideali*

iii) Eğer $SI \subseteq I$ ve $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir *ideali*

denir.

Eğer I, S nin bir ideali ise $I < S$ ile gösterilir. Her ideal bir alt yarıgruptur.

Tanım 2.1.13. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = ee = e$ ise e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Sağ ve sol birim ve sağ ve sol sıfır elemanların birer idempotent elemanlar olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.1.14. S, sıfır elemanı olmayan bir yarıgrup ve S nin kendisi dışında başka bir ideali yok ise S ye bir *basit yarıgrup* denir.

S, sıfır elemanlı (ve sıfırın dışında en az bir başka elemanı olan) bir yarıgrup olsun. Eğer $S^2 \neq \{0\}$ ve S nin $\{0\}$ ile kendisi dışında başka ideali yok ise S ye bir 0*-basit yarıgrup* denir.

Önerme 2.1.15. S, sıfır elemanlı bir yarıgrup olsun. S nin 0-basit yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul "$a \in S - \{0\}$ için $SaS = S$ olmasıdır, yani "$a, b \in S - \{0\}$ için $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ elemanlarının var olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 3.1.1' e bakınız. ■

Sonuç 2.1.16. S, sıfır elemansız bir yarıgrup iken S nin bir basit yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul "$a \in S$ için $SaS = S$ olması ve bunun için de gerek ve yeter koşul "$a \in S - \{0\}$ için $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ elemanlarının var olmasıdır.

Tanım 2.1.17. Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları idempotent ise yani $E(S) = S$ oluyorsa S yarıgrubuna bir *band* denir. Eğer S yarıgrubu değişmeli bir band ise S ye bir *yarılatis* denir.

Örnek 2.1.18. S herhangi bir küme ve S üzerindeki çarpma işlemi her $x, y \in S$ için

$$xy = x$$

olarak tanımlansın. S bu çarpma ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba *sol sıfır yarıgrup* denir. Eğer çarpma $xy = x$ şeklinde tanımlı ise bu durumda S yarıgrubuna *sağ sıfır yarıgrup* denir.

Tanım 2.1.19. S bir sıfır elemana sahip bir yarıgrup olsun. $s \in S$ elemanı için $s^m = 0$ ve $s^{m-1} \neq 0$ olacak şekilde m pozitif tamsayısı varsa $s \in S$ elemanına *nilpotent eleman*, m pozitif tamsayısına da s *elemanının indeksi* (veya *nilpotentlik derecesi*) denir.

Tanım 2.1.20. G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Herhangi bir $x \in G$ için tanımlanan $Hx = \{hx : h \in H\}$ ve $xH = \{xh : h \in H\}$ kümelerine sırasıyla H nin G deki *sol koseti* ve *sağ koseti* denir. Ayrıca, H nin G deki tüm sol kosetlerinin kümesi $sol(H)$ ve sağ kosetlerinin kümesi $sağ(H)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.21. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) G nin ikili işlemi $sol(H)$ kümesine taşınabilir.

ii) $\forall x \in G$ için $xH = Hx$ dir.

iii) $\forall x \in G$ için $xHx^{-1} = H$ dir.

iv) $\forall x \in G$ için $xHx^{-1} \subseteq H$ dir.

İspat: Karakaş (2008), Ders 8, Teorem 1'e bakınız. ■

Tanım 2.1.22. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer N Teorem 2.1.21'deki denk koşullardan birini sağlanıyorsa N ye G nin bir *normal alt grubu* denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

G değişmeli bir grup iken her alt grubu bir normal alt gruptur. N **(** G iken N nin her sol koseti aynı zamanda bir sağ koset olduğundan *sağ koset* ve *sol koset* yerine kısaca *koset* denir. Bu durumda N nin G deki tüm kosetlerinin ailesi

$$G/N = \{xN : x \in G\}$$

ile gösterilir. Bu küme " $xN, yN \in G/N$ için

$$(xN)(yN) = (xy)N$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birim elemanı N olan bir grup olup bu işleme *koset çarpımı* ve bu gruba da G nin N ile olan *bölüm grubu* denir.

Örnek 2.1.23. Her grup bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.24. $(Z^+, +)$, $(Z^+, \cdot)$ yarıgruptur.

Örnek 2.1.25. Bir R halkası üzerindeki $n \times n$ $(n \geq 1)$ matrislerinin kümesi $R^{n \times n}$, matrislerin çarpımı ile bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.26. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X üzerinde bir ikili işlem her $a, b \in X$ için $ab = a$ olarak tanımlanırsa X bir yarıgruptur.

Dikkat edilecek olursa X in her elemanı sol sıfırdır ve aynı zamanda sağ birimdir. Bu yüzden X e *sol sıfır yarıgrup* denir. Benzer şekilde sağ sıfır yarıgrup da tanımlanır.

Örnek 2.1.27. $Z \neq \emptyset$ bir küme ve bir $z \in Z$ seçelim. Z üzerinde bir ikili işlem, her $x, y \in Z$ için $xy = z$ şeklinde tanımlanır ise Z bir yarıgruptur.

Eğer $|Z| \geq 2$ ise Z ye *sıfır elemanı z olan bir sıfır yarıgrup* denir.

Örnek 2.1.28. $X \neq \emptyset$ $X \subset R$ olsun. O zaman X üzerinde bir ikili işlem her $x, y \in X$ için $xy = \min\{x, y\}$ $(\max\{x, y\})$ şeklinde tanımlanır ise X bir yarıgrup olur.

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ ise bu yarıgruba n-inci dereceden bir ***zincir*** denir ve C_n ile gösterilir.

Örnek 2.1.29. S bir yarıgrup ve $A, B \in S$ olsun. $AB = \{ab : a \in A \text{ ve } b \in B\}$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile S nin kuvvet kümesi $P(S)$, sıfır elemanı $\emptyset$ olan bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.30. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi B_X ile gösterilir. B_X üzerinde '$\circ$' bileşke işlemini, her $a, b \in B_X$ için

$$a \circ b = \{(a,b) \in X \times X : \exists c \text{ için } (a,c) \in a \text{ ve } (c,b) \in b\}$$

şeklinde tanımlanır ise $(B_X, \circ)$ ikilisi bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.31. $P_X \subset B_X$ dir. P_X e X *üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu* denir.

Örnek 2.1.32. $I_X \subset P_X$ dir. I_X e X *üzerindeki kısmi birebir dönüşümler yarıgrubu* denir.

Örnek 2.1.33. $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere X_n üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi T_n ile gösterilir. T_n, bileşke işlemi ile bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.34. $X_n = \{1, 2, \mathbf{L}, n\}$ olmak üzere X_n üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n, bileşke işlemi ile bir yarıgruptur.

2.2. HOMOMORFİZMLER

Tanım 2.2.1. S ve T iki yarıgrup ve $\mathrm{f} : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, s,t \in S$ için

$$(st)\mathrm{f} = (s)\mathrm{f}\ (t)\mathrm{f}$$

ise f ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.2.2. S ve T iki yarıgrup ve $\mathrm{f} : S \to T$ bir homomorfizm olsun.

i) f birebir ise f ye bir *monomorfizm;*

ii) f örten ise f ye bir *epimorfizm*;

iii) f hem birebir hem örten ise f ye bir *izomorfizm;*

iv) f , S den S ye bir homomorfizm ise f ye bir *endomorfizm*;

v) f , S den S ye bir izomorfizm ise f ye bir *otomorfizm*

denir.

S ve T yarıgrupları arasında bir izomorfizm var ise S ile T ye *izomorfik yarıgruplar* denir ve $S \cong T$ ile gösterilir.

Tanım2.2.3. S ve T iki yarıgrup ve $\mathrm{f} : S \to T$ bir homomorfizm olsun.

$$Ker\mathrm{f} = \{(x, y) \in S \times S : (x)\mathrm{f} = (y)\mathrm{f}\}$$

olarak tanımlanan kümeye f homomorfizminin *çekirdek kümesi* denir ve *Ker*f ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. S ve T iki yarıgrup ve $f : S \to T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$im f = S_f = \{(s)f : s \in S\}$$

olarak tanımlanan kümeye f homomorfizminin *görüntü kümesi* denir ve *im*f ile gösterilir. *im*f kümesi, T yarıgrubunun alt yarıgrubudur. Buna ek olarak, eğer f bir monomorfizm ise S, *im*f 'ye izomorfiktir.

Tanım 2.2.5. S ve T iki yarıgrup olsun. $S \times T = \{(s,t) : s \in S, t \in T\}$ kümesine S ile T nin *kartezyen çarpımı* denir. $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde tanımlanan ikili işlem

$$(s,t)(s',t') = (ss', tt')$$

şeklinde tanımlanır ise $S \times T$ de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba S ile T nin *direkt çarpımı* denir.

2.3. BAĞINTILAR ve DENKLİK

Tanım 2.3.1. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ nin her r alt kümesine X ten Y ye bir *bağıntı* denir. $X \times X$ in her bir r alt kümesine X *üzerinde bir bağıntı* denir.

X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir.

Æ, $\Delta_X = 1_X = \{(x,x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi X üzerinde birer bağıntı olurlar. Bu bağıntılara sırasıyla *boş bağıntı, birim bağıntı* ve *evrensel bağıntı* denir.

Tanım 2.3.2. Her $\alpha, \beta \in B(X)$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x,y) \in X \times X : z \in X \text{ için } (x,z) \in \alpha \text{ ve } (z,y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $B(X)$ bir yarıgruptur. Bu yarıguba *tüm bağıntılar yarıgrubu* denir. $B(X)$, birim elemanı Δ_X olan bir monoiddir.

Tanım 2.3.3. ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun.

$$\begin{aligned} dom\rho &= \{x \in X : \exists y \in X \text{ için} (x,y) \in \rho\} \\ x\rho &= \{y \in X : (x,y) \in \rho\} \\ im\rho &= \{y \in X : \exists x \in X \text{ için} (x,y) \in \rho\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla ρ bağıntısının *tanım kümesi,* $x \in X$ in ρ *altındaki görüntü kümesi,* ρ bağıntısının *görüntü kümesi* ve

$$\rho^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in \rho\}$$

bağıntısına ρ *nun ters bağıntısı (tersi)* denir.

$\alpha, \beta \in B(X)$ için

i) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow dom\alpha \subseteq dom\beta$ ve $im\alpha \subseteq im\beta$

ii) $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

iii) $a \in b \Rightarrow a^{-1} \in b^{-1}$

olduğu görülür.

$a,b,d,a_1,a_2,...,a_n \in B(X)$ olsun. O halde

i) $a \in b \Rightarrow a \circ d \in b \circ d$ ve $d \circ a \in d \circ b$

ii) $(a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n)^{-1} = a_n^{-1} \circ ... \circ a_2^{-1} \circ a_1^{-1}$

dır.

Tanım 2.3.4. $r \in B(X)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|xr| \leq 1$ ise r ya X üzerinde bir *kısmi dönüşüm* denir. $\forall x \in X$ için $|xr| = 1$ ise r ya X üzerinde bir *dönüşüm* denir. $r \in B(X)$ bir (kısmi) dönüşüm ve $(x,y) \in r$ ise genel olarak $(x)r = y$ veya $xr = y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.5. r , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

i) $D_X \subseteq r$ ise r ya *yansımalı bağıntı*;

ii) $r^{-1} = r$ ise r ya *simetrik bağıntı*;

iii) $r \circ r \subseteq r$ ise r ya *geçişmeli bağıntı*;

iv) $r \circ r^{-1} \subseteq D_X$ ise r ya *ters simetrik* bağıntı;

denir.

Eğer bir ρ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahipse ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.3.6. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x,y) \in \rho\}$$

kümesine bir *denklik sınıfı* ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine de ρ ile oluşturulan X *in bölüm kümesi* denir.

Önerme 2.3.7. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $x\rho, y\rho \in X/\rho$ için ya $x\rho \cap y\rho = \emptyset$ ya da $x\rho = y\rho$ dir.

İspat: Karakaş (2008), Ders 1, Teorem1'e bakınız. ■

Tanım 2.3.8. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O zaman $\forall x \in X$ için

$$(x)\rho^* = x\rho$$

olarak tanımlanan $\rho^* : X \to X/\rho$ dönüşümü örten bir dönüşüm olup bu dönüşüme X üzerinde bir *doğal dönüşüm* denir.

Tanım 2.3.9. X , Y boş olmayan iki küme ve $f : X \to Y$ ye bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f \circ f^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : xf = yf\}$$

şeklinde tanımlanan küme X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya f *nin çekirdeği* denir ve $Ker f = f \circ f^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.10. X boş olmayan olmayan bir küme ve R, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subset X \times X$ olduğundan R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. Böylece R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısına R *tarafından doğrulan denklik bağıntısı* denir ve R^e ile gösterilir.

$$R^e = \bigcap \{ r : R \subset r \text{ ve } r, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı} \}$$

R^e, R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Ayrıca R, X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

i) $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$

ii) R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$

iii) $R^e = \left(R^{-1}\right)^e$

olur.

Tanım 2.3.11. X, boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde yansımalı bir bağıntı $(\Delta_X \subset R)$ olsun. O zaman

$$R = \Delta_X \circ R \subset R \circ R \Rightarrow R \subset R^2$$

$$R^2 = \Delta_X \circ R^2 \subset R \circ R^2 \Rightarrow R^2 \subset R^3$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots \subseteq R^n \subseteq \cdots$$

olur. Böylece X üzerinde R^{∞} bağıntısı

$$R^{\infty} = \bigcup_{n \in Z^+} R^n$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.12. X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki herhangi bir R yansımalı bağıntısı için tanımlanan R^{∞}, X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Eğer $(x,y),(y,z) \in R^{\infty}$ ise $(x,y) \in R^m$ ve $(y,z) \in R^n$ olacak şekilde $m,n \in Z^+$ vardır. O zaman

$$(x,z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n} \subseteq R^{\infty}$$

olup $(x,z) \in R^{\infty}$ dır. Ayrıca $R \subseteq R^{\infty}$ olup R^{∞}, R yi içeren bir geçişmeli bağıntıdır. Şimdi R^{∞} un en küçük olduğunu gösterelim. T, R yi içeren herhangi bir geçişmeli bağıntı olsun. T geçişmeli olduğundan $T \circ T \subseteq T$ olup

$$R \subseteq T \Rightarrow R^2 = R \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T \Rightarrow R^2 \subseteq T$$

olur. Benzer şekilde devam edilir ise her $n \geq 1$ için $R^n \subseteq T$ olduğu ve dolayısıyla $R^{\infty} \subseteq T$ olduğu gösterilir. Böylece R^{∞}, R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. ■

Önerme 2.3.13. X boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde

$$R^e = \bigcap \{ S : R \subseteq S \text{ ve } S \text{ } \Delta_X \text{-denklik bağıntısı} \}$$

olur.

İspat: $S = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]$ ve $E = S^*$ olsun. Bir önceki önermeden E, R yi içeren yansımalı ve geçişmeli bağıntıdır. Ayrıca S simetrik olduğundan $S^{-1} = S$ olup her $n \in Z^+$ için

$$\begin{aligned}(S^n)^{-1} &= (S \circ S \circ \cdots \circ S)^{-1} \\ &= (S^{-1} \circ S^{-1} \circ \cdots \circ S^{-1})^{-1} \\ &= (S^{-1})^{-1} \circ (S^{-1})^{-1} \circ \cdots \circ (S^{-1})^{-1} \\ &= S \circ S \circ \cdots \circ S = S^n\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$E^{-1} = (S^*)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(S^n \right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = E$$

olup E simetriktir. O halde E, R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. Şimdi σ, X üzerinde R yi içeren bir başka denklik bağıntısı olsun. O zaman

$$\Delta_X \subseteq \sigma \text{ ve } R \subseteq \sigma \Rightarrow R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$$

olup $S = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X] \subseteq \sigma$ olur. Ayrıca σ nın geçişmeli oluşundan

$$S \circ S \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma \Rightarrow S^2 \subseteq \sigma$$

olur. Benzer şekilde devam edilir ise her $n \in Z^+$ için $S^n \subseteq \sigma$ olacağından $E = S^* \subseteq \sigma$ olur. O halde E, R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır.

2.4. KONGRÜANSLAR

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer, her $a \in S$ ve $(s,t),(s',t') \in R$ için

i) $(as,at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu,*

ii) $(sa,ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu;*

iii) $(ss',tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu*

bağıntı denir. Ayrıca sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans* ve uyumlu bir denklik bağıntısına *kongrüans* denir.

Önerme 2.4.2. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.1'e bakınız. ■

Tanım 2.4.3. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan görülüyor ki R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu olmasıdır. O halde $S \times S$ nin alt yarıgrubu olan Δ_S ve $S \times S$, S üzerinde birer kongrüanstır. Bu kongrüanslara sırasıyla S *nin aşikâr kongrüansı* ve *evrensel kongrüansı* denir.

Tanım 2.4.4. S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ ile elde edilen bölüm kümesi S/ρ üzerinde bir çarpma işlemi, $\forall\, x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlansın. S/ρ bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ ile *elde edilen bölüm yarıgrubu* denir. Üstelik S birim elemanı 1 olan bir monoid ise S/ρ da birim elemanı 1ρ olan bir monoiddir.

Tanım 2.4.5. S bir yarıgrup ve ρ , S üzerinde bir kongrüans olsun.

$$\rho^{\#}: S \to S/\rho$$
$$a \to a\rho$$

şeklinde tanımlanan $\rho^{\#}$ dönüşümü, örten bir homomorfizm olup bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

Önerme 2.4.6. S, T iki yarıgrup ve $\varphi: S \to T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$Ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = \{(x,y) \in S \times S : x\varphi = y\varphi\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: Howie (1995), Teorem 1.5.2' ye bakınız. ■

Teorem 2.4.7. (1. İzomorfizm Teoremi) S, T iki yarıgrup ve $\varphi: S \to T$ örten bir homomorfizm ise $S/Ker\varphi \cong T$ dir.

İspat: $\alpha: S/Ker\varphi \to T$ dönüşümü $(s Ker\varphi) \to s\varphi$ olarak tanımlansın.
Bu dönüşümün $im\alpha = im\varphi$ olacak şekilde bir homomorfizm olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca φ örten olduğundan $im\alpha = im\varphi = T$ olup α da örten bir homomorfizmdir.

Her $x, y \in S$ için $(xKer\varphi)\alpha = (yKer\varphi)\alpha$ olsun. Bu durumda $x\varphi = y\varphi$ olup $(x, y) \in Ker\varphi$ buradan $y \in xKer\varphi$ dir. Ayrıca $y \in yKer\varphi$ olup Önerme 2.3.7'den $xKer\varphi = yKer\varphi$ dir. O halde α birebirdir. ■

Tanım 2.4.8. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman R^c kümesi

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda kolayca görülür ki R^c, S yarıgrubu üzerinde R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır. Ayrıca Q da S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

i) $R \subseteq Q \Rightarrow R^c \subseteq Q^c$

ii) $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$

iii) $(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$

iv) R bir kongrüans ise $R^c = R$

dir.

Tanım 2.4.9. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq S \times S$ olup S üzerinde R yi içeren en az bir kongrüans vardır. S üzerinde R yi içeren tüm kongrüansların arakesiti de R yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa R *tarafından doğurulan kongrüans* denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir.

$$R^{\#} = \bigcap \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, S \text{ üzerinde bir kongrüans}\}$$

Tanımdan kolayca görülür ki $R^{\#}$, R yi içeren en küçük kongrüanstır.

Teorem 2.4.10. S bir yarıgrup ve R, S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı olsun. $R^{\#} = (R^{c})^{e}$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.8' e bakınız. ■

2.5. GREEN DENKLİK BAĞINTILARI

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$S^1a = Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}$$
$$aS^1 = aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\}$$
$$S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\}$$

şeklinde tanımlı kümelerine sırasıyla S nin a elemanını içeren *en küçük sol, en küçük sağ* ve *iki taraflı idealleri* denir. Bunun yardımı ile S üzerinde tanımlanan

$$L = \{(a,b) \in S \times S : S^1a = S^1b\}$$
$$R = \{(a,b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$
$$J = \{(a,b) \in S \times S : S^1aS^1 = S^1bS^1\}$$

bağıntılarına sırasıyla *sol-Green bağıntısı (L-Green), sağ-Green bağıntısı (R-Green) ve Green bağıntısı (J-Green)* denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.5.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

i) $aLb \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

ii) $aRb \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

iii) $aJb \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: i) $(\Rightarrow)$ $aLb \Rightarrow S^1a = S^1b \Rightarrow a \in S^1b$ olup $a = xb$ olacak şekilde $\exists x \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $b = ya$ olacak şekilde $y \in S^1$ olduğu gösterilir.

$(\Leftarrow)$ $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ var olsun. $S^1a = S^1xb \subseteq S^1b$ ve $S^1b = S^1ya \subseteq S^1a$ olup $S^1a = S^1b$ ve buradan $(a,b) \in L$ dir.

Diğerleri de benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 2.5.3. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki *sol* -Green bağıntısı L ve *sağ* -Green bağıntısı R değişmeli yani $L \circ R = R \circ L$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

Tanım 2.5.4. S bir yarıgrup olsun. L ve R sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki L -Green ve R -Green bağıntıları olmak üzere

$$H = L \cap R$$

olarak tanımlanan denklik bağıntısına H *-Green bağıntısı* ve S yarıgrubu üzerinde L ve R bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da D *-Green bağıntısı* denir. O halde

$$D = L \vee R = (L \cup R)^e$$

olur.

Dikkat edilirse L ve R simetrik ve yansımalı iki bağıntı olduğundan $(L \cup R) = (L \cup R)^{-1}$ ve $\Delta_S \subseteq L \cup R$ olup $(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup \Delta_S = L \cup R$ dir. Ayrıca $L \subseteq L \circ R$, $R \subseteq L \circ R$ ve $L \circ R = R \circ L$ olduğundan

$$\begin{aligned}(L \cup R) \circ (L \cup R) &= (L \circ L) \cup (L \circ R) \cup (R \circ L) \cup (R \circ R) \\ &= L \cup (L \circ R) \cup (R \circ L) \cup R \\ &= L \circ R\end{aligned}$$

ve

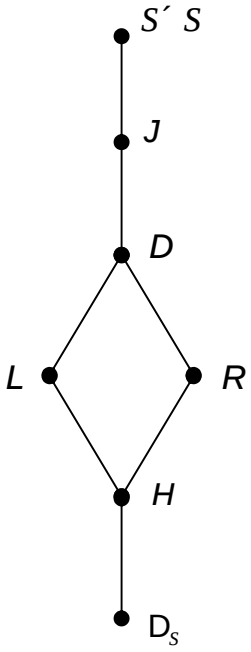
$$(L \cup R) \cup (L \circ R) = L \cup \left(R \cup (L \circ R)\right) = L \circ R$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\forall\, n \geq 2$ için $(L \cup R)^n = L \circ R$ olur. O halde

$$\begin{aligned}D &= (L \cup R)^e \\ &= \left((L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup D_S\right)^{\infty} \\ &= \bigcup_{n \in Z^+} \left((L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup D_S\right)^n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cup R)^n \\ &= (L \cup R) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (L \cup R)^n \\ &= (L \cup R) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (L \circ R)^n\right) \\ &= (L \cup R) \cup (L \circ R) \\ &= (L \circ R)\end{aligned}$$

dir.

Bir S yarıgrubu üzerindeki L, R, J, H ve D-Green denklik bağıntıları için $D_S \subseteq H \subseteq L, R \subseteq D \subseteq J \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama *Hasse Diyagramı* denir.



Şekil 2.1 Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı

Önerme 2.5.5. G bir grup ise $L = R = J = H = D = G' G$ olur.

İspat: " $a,b \in G$ için

$$a = ae = a\left(b^{-1}b\right) = \left(ab^{-1}\right)b$$

ve

$$b = be = b\left(a^{-1}a\right) = \left(ba^{-1}\right)a$$

olup $x = ab^{-1} \in G$ ve $y = ba^{-1} \in G$ alınırsa $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in G$ bulunmuş olur. O halde " $a,b \in G$ için aLb olup $L = G' G$ dir. Benzer şekilde $R = G' G$ olup $L = R = J = H = D = G' G$ elde edilir. ■

Önerme 2.5.6. S değişmeli bir yarıgrup ise $L = R = H = D$ olur.

İspat: aLb olsun. O halde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli olduğundan aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ya$ olup aRb olur. Böylece $L \subseteq R$ olduğu görülür. Benzer şekilde $R \subseteq L$ olup $L = R = H = D$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.7. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer

$$axa = a$$

olacak şekilde bir $x \in S$ varsa $a \in S$ elemanına ***regüler (düzgün) eleman*** denir. Ayrıca her elemanı regüler olan bir yarıgruba da ***regüler yarıgrup*** denir.

Örneğin, S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman ise e bir regüler elemandır. Ayrıca, her grup bir regüler yarıgruptur.

Önerme 2.5.8. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise L_a ve R_a sınıflarının her elemanı regülerdir.

İspat: S bir yarıgrup ve $a \in S$ bir regüler eleman olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Herhangi bir $b \in L_a$ yani $(a,b) \in L$ alalım. O zaman $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ mevcut olup

$$b(xt)b = bx(tb) = bxa = saxa = s(axa) = sa = b$$

olduğundan $b \in L_a$ regülerdir. Benzer şekilde " $c \in R_a$ elemanının da regüler olduğu gösterilebilir. ■

Sonuç 2.5.9. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise D_a nın her elemanı da regülerdir.

Sonuçtan kolayca görülüyor ki, bir D-Green denklik sınıfı D nin ya hiç regüler elemanı yoktur ya da tüm elemanları regülerdir. D nin tüm elemanları regüler ise D ye *regüler D-sınıfı* denir.

Önerme 2.5.10. Regüler bir D-sınıfında her L-sınıfı ve her R-sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir.

İspat: D bir regüler D-sınıfı ve $a \in D$ olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Bu durumda

$$(xa)(xa) = x(axa) = xa$$
$$(ax)(ax) = (axa)x = ax$$

olup xa ve ax birer idempotent elemandır. Ayrıca

$$a(xa) = a \text{ ve } x(a) = xa$$
$$(ax)a = a \text{ ve } (a)x = ax$$

olup bu eşitliklerden sırasıyla $xa \, L \, a$ ve $ax \, R \, a$ yani $xa \in L_a$ ve $ax \in R_a$ olduğu görülür. ■

Sonuç 2.5.11. Regüler bir D-sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir.

Önerme 2.5.12. S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman olsun. O zaman e, R_e nin bir sol birim elemanı ve L_e nin bir sağ birim elemanıdır.

İspat: e, bir idempotent eleman ve $a \in R_e$ olsun. O halde $a = ex$ olacak şekilde $x \in S^1$ mevcut olup

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

olur. Benzer şekilde $b \in L_e$ için $be = b$ olduğu da gösterilebilir. ■

Tanım 2.5.13. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer

$$axa = a \text{ ve } xax = x$$

olacak şekilde bir $x \in S$ var ise x'e a *nın tersi* ya da *tersinir eleman* denir ve a nın tüm terslerinin kümesini $V(a)$ ile gösteririz.

$$V(a) = \{x \in S : axa = a,\ xax = x\}$$

dir.

Eğer $e \in S$ bir idempotent eleman ise $eee = e$ olup $e \in V(e)$ dir.

$a \in S$ tersinir ise $V(a) \neq \emptyset$ dir. $a \in S$ tersinir değil ise $V(a) = \emptyset$ alınır. Dikkat edilecek olursa;

- G bir grup ise $\forall\ a \in G$ için $|V(a)| = 1$ dir.
- S bir dikdörtgensel band ise $\forall\ a \in S$ için $V(a) = S$ dir.
- S sıfır yarıgrup ise $V(0) = \{0\}$ ve $V(a) = \emptyset$ $(\forall\ a \neq 0)$ dir.

Önerme 2.5.14. S bir yarıgrup olmak üzere $a \in S$ nin bir tersinin var olması için gerek ve yeter koşul $a \in S$ nin regüler olmasıdır.

İspat: $a \in S$ nin bir tersi varsa aynı zamanda regüler olduğu tanımdan kolayca görülür. Tersine; $a \in S$ regüler iken a nın bir tersinin var olduğunu gösterelim. $a \in S$ regüler iken $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ var olup $y = xax$ olarak alırsak

$$aya = a(xax)a = (axa)xa = axa = a,$$

$$yay = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = y$$

olduğundan y, a nın bir tersi olur. ■

Teorem 2.5.15. S bir yarıgrup, D bir D-sınıfı ve $a \in D$ olsun.

i) $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ dir. Ayrıca $R_a \cap L_{a'}$ ve $R_{a'} \cap L_a$ H-sınıfları, sırasıyla aa' ve $a'a$ idempotent elemanlarını içerir.

ii) $b \in D$ için $R_a \cap L_b$ ve $R_b \cap L_a$ H-sınıfları, e ve f idempotent elemanlarını içeriyor olsunlar. O halde $aa' = e$ ve $a'a = f$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ vardır. Ayrıca $a' \in H_b$ dir.

iii) a nın birden fazla tersini içeren H-sınıfı yoktur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.3.4' e bakınız. ■

Önerme 2.5.16. S bir regüler yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

i) $a \mathrel{L} b \Leftrightarrow a'a = b'b$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

ii) $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

iii) $a \mathrel{H} b \Leftrightarrow aa' = bb'$ ve $a'a = b'b$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.4.1' e bakınız. ■

Tanım 2.5.17. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki L, R, H, D ve J-Green denklik bağıntılarına göre elde edilen denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla S/L, S/R, S/H, S/D, S/J ve $a \in S$ için a yı içeren L, R, H, D ve J-Green denklik sınıfları sırasıyla L_a, R_a, H_a, D_a, J_a ile gösterilir. Eğer L, R, H,

D ve J -Green denklik bağıntılarının S yarıgrubu üzerinde tanımlı olduğu içerikten belli olmuyor ise bu denklik bağıntıları sırasıyla L_S, R_S, H_S, D_S, J_S ile gösterilir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$H_a = L_a \cap R_a$$
$$H_a = L_a \cap D_a$$
$$H_a = R_a \cap D_a$$

olduğu ve D -Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$a D b \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. O halde bir D -Green denklik sınıfı D, ayrık L -Green denklik ve R -Green denklik sınıflarının birleşimidir. Bu yüzden Clifford ve Preston bir D -sınıfını, her satırı bir R -sınıfını, her sütunu bir L -sınıfını ve her hücresi de bir H -sınıfını temsil eden bir yumurta kefesi olarak düşünmüşlerdir.

Teorem 2.5.18. (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olmak üzere

i) Eğer $(a,b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ var olup

$$\rho_s : L_a \to L_b, \quad x \to xs$$
$$\rho_t : L_b \to L_a, \quad y \to yt$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki birebir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca ρ_s, L_a daki her bir H -sınıfını L_b de bu H -sınıfının bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıfına eşler. Benzer şekilde ρ_t, de L_b deki her bir H -sınıfını L_a da bu H -sınıfının bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıfına eşler.

ii) Eğer $(a,b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ var olup

$$\lambda_s : R_a \to R_b, \quad x \to sx$$
$$\lambda_t : R_b \to R_a, \quad y \to ty$$

şeklinde tanımlanan λ_s ve λ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki birebir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca λ_s, R_a daki her bir H -sınıfını R_b de bu H -sınıfının bulunduğu L -sınıfındaki H -sınıfına eşler. Benzer şekilde λ_t de R_b deki her bir H -sınıfını R_a da bu H -sınıfının bulunduğu L -sınıfındaki H -sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'ye bakınız. ■

Sonuç 2.5.19. H_a, H_b aynı D -sınıfında iki H -sınıfı ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie(1995), Lemma 2.2.3' e bakınız. ■

Sonuç 2.5.20. S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir H -sınıfı ise $H^2 \cap H = \emptyset$ veya $H^2 = H$ olur. Ayrıca $H^2 = H$ olduğunda H, S nin bir alt grubudur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.2.5' e bakınız. ■

Sonuç 2.5.21. S bir yarıgrup ve H, S de bir H -sınıfı olsun. Eğer H bir idempotent eleman içeriyor ise S nin bir alt grubudur.

Sonuç 2.5.22. S de bir H -sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerir.

2.6. DOĞURAY KÜMELERİ

Tanım 2.6.1. S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S *nin* X *tarafından doğurulan alt yarıgrubu* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T, T \leq S\}$$

Dikkat edilirse $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur.

Önerme 2.6.2. $\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in Z^+; x_1, x_2, \cdots, x_n \in X\}$, X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

İspat: $T = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in Z^+; x_1, x_2, \cdots, x_n \in X\}$ olsun. $\langle X \rangle = T$ ve T nin bir alt yarıgrup olduğunu göstermeliyiz.

Öncelikle T nin bir alt yarıgrup olduğunu gösterelim. $u, v \in T$ alalım. $u = x_1 x_2 \cdots x_n$ ve $v = y_1 y_2 \cdots y_m$ olacak şekilde $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m \in X$ vardır.

$$uv = x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_m$$

sonlu çarpımı da T ye ait olup T alt yarıgruptur. Şimdi $\langle X \rangle = T$ olduğunu gösterelim.

Aslında T kümesi X in elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının kümesidir. $x_i \in X \subseteq \langle X \rangle$ dir ve $\langle X \rangle$ yarıgrup olup kapalılık özelliğini sağladığından dolayı $x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle$ olur. Dolayısıyla $T \subseteq \langle X \rangle$ dir. Diğer yandan, $x_i \in X \subseteq T$ dir. T, X i içeren bir alt yarıgrup olup T, X i içeren en küçük alt yarıgrup olan $\langle X \rangle$ i de içerir. O halde, $\langle X \rangle \subseteq T$ olur. Bu durumda,

$$\langle X\rangle=\{x_1x_2\,\mathbf{L}\,x_n : n\in Z^+; x_1,x_2,\mathbf{L},x_n\in X\}$$

dir. ■

Benzer şekilde X *tarafından doğurulan alt monoid* ve X *tarafından doğurulan alt grup* da tanımlanabilir.

S bir yarıgrup, $\varnothing\neq X\subseteq S$ ve $\varnothing\neq Y\subseteq S$ olmak üzere $X\subseteq Y$ ise $\langle X\rangle\subseteq\langle Y\rangle$ olduğu açıktır.

Tanım 2.6.3. S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S=\langle X\rangle$ olacak şekilde bir $\varnothing\neq X\subseteq S$ kümesi var ise bu X kümesine S nin bir *doğuray kümesi*, X in her bir elemanına S nin bir *doğurayı* ve S ye de X *tarafından doğurulan yarıgrup* denir.

Eğer $S=\langle X\rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir X alt kümesi varsa S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir. Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır. Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

S bir yarıgrup ve $S=\langle X\rangle$ olsun. Eğer $X=\{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise S ye *monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup* denir ve $S=\langle X\rangle$ şeklinde de yazılabilir.

S bir yarıgrup ve $a\in S$ olsun. Eğer $T=\{a^n : n\in Z^+\}$ alınır ise $T\subseteq\langle a\rangle$ dır. Ayrıca T de bir alt yarıgrup olduğundan $T=\langle a\rangle$ olur. Yani $\langle a\rangle=\{a^n : n\in Z^+\}$ olur. Eğer S bir monoid ve $a\in S$ ise a tarafından doğurulan monojenik monoid

$$\langle a\rangle=\{a^n : n\in Z^+\}\cup\{1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer, her $n \neq m$ için $a^m \neq a^n$ ise

$$f : \langle a \rangle \to (Z^+, +)$$
$$a^n \to n$$

dönüşümü bir izomorfizm olup $\langle a \rangle \cong (Z^+, +)$ dır.

Eğer en az bir çift $n \neq m$ için $a^m = a^n$ ise

$$I = \{x \in Z^+ : \exists y \in Z^+,\ x \neq y \text{ ve } a^x = a^y\}$$

kümesi boş değildir. Böylece $\varnothing \neq I \subseteq Z^+$ ve Z^+ alttan sınırlı olduğundan I nın bir tek en küçük elemanı m mevcuttur. Ayrıca

$$J = \{x \in Z^+ : a^{x+m} = a^m\}$$

kümesi de boş olmayıp bir tek en küçük elemanı r mevcuttur.

$T = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ olsun. Bu elemanların hepsi birbirinden farklıdır. Gösterelim:

Eğer $1 \leq i \leq j \leq m+r-1$ için $a^i = a^j$ ise $i \in I$ olup m nin seçiminden $m \leq i$ olur. O zaman $i = m+q$ olacak şekilde $q \in Z^+ \cup \{0\}$ vardır. Ayrıca $i < j$ olduğundan $j = m+p$ olacak şekilde $p \in Z^+$ vardır. Ayrıca $q < p$ dir. p ve q lar mecburen r den küçük olacaktır.

$$a^{m+p-q} = a^{m+r+p-q} = a^{m+p}a^{r-q} = a^{m+q}a^{r-q} = a^{m+r} = a^m$$

O zaman $p - q \in J$ ve $p - q < r$ olur ki bu r nin seçilişi ile çelişir. Böylece T nin tüm elemanları farklı olup $|T| = m + r - 1$ olur.

Herhangi bir $n \geq m + r$ tamsayısı için bölme algoritmasından $n - m = qr + s$ ve $0 \leq s \leq r - 1$ olacak şekilde $q, s \in Z^+ \cup \{0\}$ vardır.

$$a^{m+qr} = a^{m+r}a^{(q-1)r} = a^m a^{(q-1)r} = \cdots = a^{m+r} = a^m$$

Dolayısıyla $a^n = a^{m+qr+s} = a^{m+qr}a^s = a^m a^s = a^{m+s} \in T$ olur. Böylece

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$$

olur. Bu monojenik yarıgrup $M_{m,r}(a) = \langle a : a^{m+r} = a^m \rangle$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.6.4. S, bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. $\langle a \rangle$ sonlu ise

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\} \text{ ve } a^{m+r} = a^m$$

olacak şekilde $m, r \in Z^+$ vardır.

İspat: $M = \langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ sonlu olsun. $M = M_{m,r}(a)$ olduğunu gösterelim. $M \supseteq M_{m,r}(a)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x \in M - M_{m,r}(a)$ alalım. $x = a^{m+p}$, $p \geq r$ şeklindedir. p ve r ye bölme algoritması uygularsak;

$p = kr + q$, $0 \leq q \leq r - 1$ olacak şekilde $k, q \in Z^+$ vardır.

$$\begin{aligned} x = a^{m+p} &= a^{m+kr+q} \\ &= a^{m+r+(k-1)r+q} = a^{m+r}a^{(k-1)r+q} \\ &= a^{m}a^{(k-1)r+q} \\ &\text{k defa} \\ &= a^{m+q} \end{aligned}$$

a^{m+q} ve $0 \le q \le r-1$ olup $x = a^{m+p} \in M_{m,r}(a)$ dır. Bu durum $x \in M - M_{m,r}(a)$ oluşu ile çelişir. O halde $M = M_{m,r}(a)$ dır.

$\langle a \rangle$ sonlu ise $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ ve $a^{m+r} = a^m$ dir. ■

Tanım 2.6.5. Yukarıdaki notasyonlarla m ye *a nın indeksi,* r ye de *a nın periyodu* denir.

Teorem 2.6.6. S bir yarıgrup, $a \in S$, a nın indeksi m, periyodu r olsun.
$k, l \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ elemanları

$$m + k \equiv 0 \pmod{r}$$
$$m + k \equiv 1 \pmod{r}$$

olacak şekilde seçilir ise $K_a = \langle a \rangle = \{a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ kümesi birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan bir devirli gruptur.

İspat: $a^{m+u}, a^{m+v} \in K_a$, $u, v \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ alalım.
$a^{m+u}a^{m+x} = a^{m+v}$ ve $x = v - u - m$, $x \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ alalım.

$$\begin{aligned} a^{m+u}a^{m+x} &= a^{m+u}a^{m+v-u-m} \\ &= a^{m+u+m+v-u-m} \\ &= a^{m+v} \end{aligned}$$

olup $a^{m+u}\,a^{m+x}=a^{m+v}$ nin bir tek $a^{m+x}\in K_a$ çözümü vardır ve tektir. Böylece K_a bir gruptur.

a^{m+l} nin K_a nın doğurayı olduğunu gösterelim.

" $a^q\in K_a$ yı a^{m+l} nin bir kuvveti olarak yazılabildiğini gösterelim. $m+l\equiv 1(\mathrm{mod}\,r)$ olup

$$q(m+l)\equiv q(\mathrm{mod}\,r)$$
$$q(m+l)-q\equiv 0r$$

olacak şekilde d vardır. O halde $q(m+l)\equiv dr+q$ olup $\left(a^{m+l}\right)^q=a^{dr+q}$, $\left(a^q\in K_a\right)$ dır. $a^q\in K_a\Rightarrow m\le q\le m+r-1$ dir.

$$\begin{aligned}\left(a^{m+l}\right)^q&=a^{dr+q}=a^{m+x+dr}\\&=a^{m+r}a^{x+(d-1)r}\\&=a^{m}a^{x+(d-1)r}\\&\Downarrow d\ adım\ sonra\\&=a^{m+x}=a^q\end{aligned}$$

(Burada $q=m+x$, $0\le x\le r-1$ dir.)

" $a^q\in K_a$ için $a^q=\left(a^{m+1}\right)^q$ dir. O halde K_a, a^{m+l} tarafından doğurulan devirli gruptur.

a^{m+k} nın K_a nın birimi olduğunu gösterelim.

$m+k\equiv 0(\mathrm{mod}\,r)$ yani $m+k\equiv mr$ olacak şekilde $m\in Z^+$ vardır. " $a^q\in K_a$ için

$$\begin{aligned}a^q a^{m+k}&=a^q a^{mr}\\&\Downarrow m\ adım\ sonra\\&=a^q\end{aligned}$$

vardır. O halde a^{m+k}, K_a nın birimidir. ■

Tanım 2.6.7. S, sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

tam sayısına S nin *yarıgrup rankı* denir ve $rank(S)$ ile gösterilir. Benzer şekilde *monoid rankı* ve *grup rankı* da tanımlanabilir.

Tanım 2.6.8. S bir yarıgrup ve S nin tüm idempotentlerinin kümesi $E(S)$ olsun. Eğer bir $A \subseteq E(S)$ için $\langle A \rangle = S$ oluyorsa S ye *idempotent doğuraylıdır* denir. Eğer S idempotent doğuraylı bir yarıgrup ise

$$idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanan $idrank(S)$ pozitif tam sayısına S *nin idempotent rankı* denir.

Önerme 2.6.9. S, T birim elemanları sırasıyla 1_S, 1_T olan iki monoid ve X, Y sırasıyla S ile T nin birer doğuray kümesi olsun. O halde

$$Z = \{(x, 1_T) : x \in X\} \cup \{(1_S, y) : y \in Y\}$$

kümesi $S \times T$ monoidinin bir doğurayıdır.

İspat: $(s,t) \in S \times T$ olsun. O halde $s \in S$ ve $t \in T$ olup $s = x_1, x_2, \ldots, x_m$ ve $t = y_1, y_2, \ldots, y_n$ olacak şekilde $x_i \in X$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ve $y_j \in Y$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vardır. Bu durumda

$$(s,t)=(x_1,x_2,\mathbf{L},x_m,y_1,y_2,\mathbf{L},y_n)=(x_1,1_T)\,\mathbf{L}\,(x_m,1_T)(1_S,y_1)\,\mathbf{L}\,(1_S,y_n)$$

olup $S\acute{}\,T=\langle Z\rangle$ olur. ■

Sonuç 2.6.10. S ve T sonlu doğuraylı iki monoid ise $S\acute{}\,T$ de sonlu doğuraylıdır.

Önerme 2.6.11. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A, S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. O halde S nin bir doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq A$ alt kümesi vardır.

İspat: S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A, S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. $B=\{b_1,b_2,\mathbf{L},b_n\}$, S nin bir sonlu doğuray kümesi olmak üzere " $b_i \in B$ $(i=1,2,\mathbf{L},n)$ için

$$b_i=a_{i_1}a_{i_2}\,\mathbf{L}\,a_{i_n}$$

olacak şekilde $a_{i_1},a_{i_2},\mathbf{L},a_{i_n}\in A$ ve $i_k\in Z^+$ $(k\in\{1,2,\mathbf{L},n\})$ vardır.

$A_0=\bigcup_{i=1}^{n}\{a_{i_1},a_{i_2},\mathbf{L},a_{i_n}\}$ olarak tanımlanır ise $A_0\subseteq A$, sonlu bir kümedir ve $S=\langle B\rangle\subseteq\langle A_0\rangle\subseteq\langle A\rangle=S$ olup A_0, S nin bir doğuray kümesidir. ■

3. TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBU

Gruplarda bir kümenin permütasyonlarının grubu gibi yarıgruplarda da bir kümeden yine o kümenin kendisine daha genel dönüşümler kavramı vardır. Bir $X=\{1,2,\mathbf{L},n\}$ sonlu kümesindeki tüm permütasyonların simetrik grubu $(S_X,\mathbf{0})$ yarıgrubuna benzer olarak, X ten X e tüm dönüşümlerin yarıgrubuna *tüm dönüşümler yarıgrubu* denir ve $(T_X,\mathbf{0})$ ile gösterilir. Özel olarak $X=X_n=\{1,2,\mathbf{L},n\}$ sonlu kümesi için tüm dönüşümler yarıgrubu $(T_n,\mathbf{0})$ şeklinde göstereceğiz. Yukarıda bahsedildiği gibi tüm bu yarıgruplarda işlem bileşke işlemi olup bu işlem birleşmelidir. $(S_n,\mathbf{0})$, X_n den X_n e tüm birebir ve örten dönüşümleri içeriyor olup $(T_n,\mathbf{0})$ in alt yarıgrubudur (aynı zamanda alt grubudur). Dikkat edilirse

$X=X_n=\{1,2,\mathbf{L},n\}$, $|X|=n$ ise

$$|S_n|=n!,\ |T_n|=n^n$$

dir.

Eğer S, tüm dönüşümler yarıgrubu T_n nin bir alt yarıgrubu ise S ye *dönüşümler yarıgrubu* veya *dönüşümlerin yarıgrubu* denir. Bir S yarıgrubundan T_n ye bir j homomorfizmasına S nin *temsili* denir. Eğer j birebir ise j ye *güvenilir temsil* denir. Her durumda j nin görüntüsü Sj kümesi S ye izomorfik bir dönüşümler yarıgrubudur.

Aşağıdaki teorem gruplardaki Cayley Teoremi'ne benzer olup her yarıgrubun bir dönüşüm yarıgrubuna izomorfik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.1. Kardinalitesi n olan her sonlu S yarıgrubu ya T_n ya da T_{n+1} in bir alt yarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: İlk olarak S nin birim elemanına sahip olduğunu kabul edelim. $S=\{a_1=1,a_2,\mathbf{L},a_n\}$ ve $k=1,2,\mathbf{L},n$ için i_k sayıları $aa_k=a_{i_k}$ eşitliği ile tek türlü tanımlı olmak üzere $\mathrm{j}:S\to T_n$ dönüşümünü

$$\mathrm{j}(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \mathbf{L} & n\\ i_1 & i_2 & \mathbf{L} & i_n\end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. $\mathrm{j}:S\to \mathrm{j}(S)$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Ayrıca $(ab)a_k=a(ba_k)$ olup her $k=1,2,\mathbf{L},n$ için

$$\mathrm{j}(ab)(k)=\mathrm{j}(a)\big(\mathrm{j}(b)(k)\big)$$

dir. Böylece her $a,b\in S$ için $\mathrm{j}(ab)=\mathrm{j}(a)\mathrm{j}(b)$ olup j bir izomorfizmdir. O halde; j , S den T_n nin bir alt yarıgrubu $\mathrm{j}(S)$ ye bir izomorfizmdir. Eğer S bir birim eleman içermiyor ise S yi S^1 yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olarak göz önüne alabiliriz. Bu durumda ise S^1,T_{n+1} in bir alt yarıgrubuna izomorfiktir. ■

Dikkat edilirse T_n değişmeli olmayan bir yarıgruptur. Örneğin; $\mathrm{a},\mathrm{b}\in T_5$ için $\mathrm{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}$ ve $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ alınırsa

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

olup $\mathrm{ba}\neq\mathrm{ab}$ olduğu görülür.

Önerme 3.2. $n>1$ için T_n nin sağ sıfır elemanı yoktur. $a \in T_n$ nin bir sol sıfır olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $a \in X_n = \{1,2,\mathbf{L},n\}$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ a & a & \mathbf{L} & a \end{pmatrix}$$

olmasıdır. Buna ek olarak, T_n yarıgrubunun n tane sol sıfırı vardır.

İspat: $a \in X_n = \{1,2,\mathbf{L},n\}$ olmak üzere $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ a & a & \mathbf{L} & a \end{pmatrix}$ ile gösterelim. Herhangi bir $b \in T_n$ için $(x)ab = (x)a$ olduğundan a, T_n nin sol sıfırdır. Bu yüzden T_n en azından n tane sol sıfır içerir. Özellikle, $n>1$ için T_n yarıgrubu sağ sıfır içermez. Sabit dönüşümler rankı 1 olan dönüşümlerdir. $b \in T_n$ elemanının rankı en az 2 olsun. Herhangi bir $a \in T_n$ için ba nın rankı 1 olup $x \in X_n$ için $(x)ab = (x)b$ olması imkânsızdır. O halde rankı 2 olan sabit dönüşüm sol sıfır eleman olamaz. O halde T_n nin n tane sol sıfır elemanı vardır. ■

Önerme 3.3. $a \in T_n$ nin bir idempotent olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in im a$ için $xa = x$ olmasıdır.

İspat: a, bir idempotent olsun. Bu durumda $a^2 = a$ dır. $\forall x \in im a$ alalım. $ya = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $xa = xa^2 = (xa)a = ya = x$ dir. Dolayısıyla $x \in im a$ iken $xa = x$ elde edilir. Tersine; $\forall x \in im a$ için $xa = x$ olsun. Herhangi bir $x \in X_n$ alalım. $xa = (xa)a = xa^2$ dir. Yani $x \in X_n$ için $xa = xa^2$ dir. Dolayısıyla a, idempotenttir. ■

Örnek 3.4. T_3 ün idempotent elemanlarını inceleyelim.

	L_1	L_2	L_3	
D_1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$	R_{123}

	L_{12}	L_{13}	L_{23}	
D_2	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$	$R_{1/23}$
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}$	$R_{2/13}$
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$	$R_{3/12}$

$$D_3 = S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \right\}$$

dir. T_3 ün idempotent elemanları

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 3.5. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun. O halde

i) $\alpha \mathrel{L} \beta \Leftrightarrow im\alpha = im\beta$

ii) $\alpha \mathrel{R} \beta \Leftrightarrow \ker\alpha = \ker\beta$

iii) $\alpha \mathrel{D} \beta \Leftrightarrow |im\alpha| = |im\beta|$

olmasıdır.

İspat: i) $\alpha \mathrel{L} \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \gamma\beta$ ve $\beta = \delta\alpha$ olacak şekilde $\delta, \gamma \in T_n$ vardır. O zaman $im\alpha = im(\gamma\beta) \subseteq im\beta$ ve benzer şekilde $im\beta \subseteq im\alpha$ olup $im\alpha = im\beta$ dir. Tersine; $im\alpha = im\beta = I$ olduğunu kabul edelim. Her $i \in I$ için $a_i\alpha = b_i\beta = i$ olacak şekilde $a_i, b_i \in I$ seçelim. μ ve ν dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x\mu = a_i \Leftrightarrow x\beta = i$$
$$x\nu = b_i \Leftrightarrow x\alpha = i$$

Böylece $\mu\alpha = \beta$ ve $\nu\beta = \alpha$ olup $\alpha \mathrel{L} \beta$ olduğu ispatlanmış olur.

ii) $\alpha \mathrel{R} \beta$ olsun. Bu durumda $\alpha = \beta\gamma$ ve $\beta = \alpha\delta$ olacak şekilde $\delta, \gamma \in T_n$ vardır. $(x, y) \in \ker\alpha$ için $x\alpha = y\alpha$ dir. Böylece

$$xb = xad = yad = yb$$

olup $(x,y) \in \ker b$ dir. Yani $\ker a \subseteq \ker b$ olduğu gösterilmiş olur. Simetriden dolayı $\ker b \subseteq \ker a$ olup $\ker a = \ker b$ ispatlanmış olur. Tersine; $\ker a = \ker b = p$ olsun. p nin denklik sınıflarının sayısı $ima = J$ nin eleman sayısına eşittir. Bu da $imb = K$ olup bu sayıyı q ile gösterelim. p nin her bir denklik sınıfından bir p_i $(i = 1,2,\mathbf{L},q)$ seçelim. $j_i = p_i a$ ve $k_i = p_i b$ olmak üzere $J = \{j_1, j_2, \mathbf{L}, j_q\}$ ve $K = \{k_1, k_2, \mathbf{L}, k_q\}$ olsun. m ve n dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$j_i m = k_i \ (i = 1,2,\mathbf{L},q),\ x \notin J \text{ ise } xm = \text{rastgele tanımlansın.}$$
$$k_i n = j_i \ (i = 1,2,\mathbf{L},q),\ x \notin I \text{ ise } xn = \text{rastgele tanımlansın.}$$

$am = b$ dir. Herhangi bir $x \in \{1,2,\mathbf{L},q\}$ ve $(x, p_i) \in p$ olacak şekildeki tek p_i temsili olsun. O zaman $xam = p_i am = j_i m = k_i = p_i b = xb$ dir. Benzer şekilde $bn = a$ olduğu gösterilip $a \, R \, b$ olduğu ispatlanmış olur.

iii) $a \, D \, b$ olsun. $D = L \circ R$ olup $(a,g) \in L$ ve $(g,b) \in R$ olacak şekilde $g \in T_n$ vardır. (i) ve (ii) den $ima = img$ ve $\ker g = \ker b$ dır. Dolayısıyla $|ima| = |img|$ ve $|img| = |imb|$ olur. Buradan $|ima| = |imb|$ olduğu elde edilir. Tersine; $|ima| = |imb| = r$ olsun. O zaman X_n nin r elemanlı iki alt kümesi $ima = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r\}$ ve $imb = \{b_1, b_2, \mathbf{L}, b_r\}$ vardır. $\forall\, 1 \le i \le r$ için $A_i = a_i a^{-1}$ ve $B_i = b_i b^{-1}$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda $a = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{L} & B_r \\ b_1 & \mathbf{L} & b_r \end{pmatrix}$ olur. $g : X_n \to X_n$ dönüşümünü her $x \in X_n$ için $x \in B_i$ ise

$x\gamma = a_i$ olarak tanımlarsak $\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{L} & B_r \\ a_1 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$ olur. Bu durumda $im\gamma = im\alpha$ olup $\alpha \mathrel{L} \gamma$ ve $\ker\gamma = \ker\beta$ olup $\gamma \mathrel{R} \beta$ olur. Yani $\alpha \mathrel{D} \beta$ olur. ■

Bir $\alpha \in T_n$ elemanını alalım. Eğer $\alpha \in S_n$ ise o zaman $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$ olup α regülerdir. Eğer $\alpha \notin S_n$ ise bir $i_0 \in X_n - im\alpha$ mevcuttur. Her bir $j \in im\alpha$ için $i_1\alpha = j$ olacak şekilde bir tek $i_1 \in X_n$ seçelim. Bu durumda $\beta : X_n \to X_n$ dönüşümü $\forall\, j \in X_n$ için

$$j\beta = \begin{cases} i_1, & i\alpha = j \\ i_0, & i\alpha \neq j \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\forall\, i \in X_n$ için

$$i(\alpha\beta\alpha) = ((i\alpha)\beta)\alpha = (j\beta)\alpha = i_1\alpha = j = i\alpha$$

olup $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olur. O halde T_n bir regüler yarıgruptur.

S_n nin herhangi bir elemanının ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabileceğini biliyoruz. $\alpha \in S_n$ elemanı $\alpha = (a_1 \;\; a_2)$ şeklinde bir devir ise bu devire *transpozisyon* denir. Her deviri transpozisyonların çarpımı olarak

$$(a_1 \;\; a_2 \;\; \mathbf{L} \;\; a_k) = (a_1 \;\; a_k)(a_1 \;\; a_{k-1})\,\mathbf{L}\,(a_1 \;\; a_3)(a_1 \;\; a_2)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\alpha \in S_n$ elemanı çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılıyorsa α ya *çift permütasyon*, tek sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılıyorsa α ya *tek*

permütasyon denir. Eğer $\alpha = (a_1 \quad a_2 \quad \mathbf{L} \quad a_k)$ devirinde k tek sayı ise α nın çift permütasyon, k çift sayı ise α nın tek permütasyon olduğuna dikkat edelim.

$\alpha, \beta \in S_n$ elemanlarını $\alpha = (1 \quad 2)$ ve $\beta = (1 \quad 2 \quad \mathbf{L} \quad n)$ olarak alalım.

$$\beta^{-1} = \beta^{n-1}$$

$$\beta^{-1}\alpha\beta = (2 \quad 3)$$

$i = 1, 2, \mathbf{L}, n-1$ olmak üzere

$$\beta^{-i+1}\alpha\beta^{i-1} = (i \quad i+1)$$

$j = 2, 3, \mathbf{L}, n-1$ olmak üzere

$$(j \quad j+1)(j-1 \quad j)\mathbf{L}(2 \quad 3)(1 \quad 2)(2 \quad 3)\mathbf{L}(j-1 \quad j)(j \quad j+1) = (1 \quad j+1)$$

$i = 1, 2, \mathbf{L}, n-1$ ve $j = 1, 2, \mathbf{L}, n-i$ olmak üzere

$$\beta^{-i+1}(1 \quad j+1)\beta^{i-1} = (i \quad i+j)$$

eşitlikleri S_n de sağlanır.

Böylece yukarıdaki eşitlikler göz önünde bulundurulursa permütasyon gruplarının doğuray kümesini veren grup teoride iyi bilinen aşağıdaki teorem, ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.6. $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ dir.

$n \geq 3$ olmak üzere T_n tüm dönüşümler yarıgrubundaki $\alpha, \beta, \gamma \in T_n$ elemanlarını

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ ve } x\gamma = x\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{cases} 2, & x = 1 \text{ ise} \\ x, & x \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} i & 2 \end{Vmatrix},\ (i \geq 3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j \end{pmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} 2 & j \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & j \end{Vmatrix},\ (j \geq 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & j \end{pmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} 2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} j \end{Vmatrix},\ (i, j \geq 3, i \neq j)$$

$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\begin{Vmatrix} i & j \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} j & i \end{Vmatrix},\ (i, j \geq 1, i \neq j)$$

eşitlikleri T_n de sağlanır. Ayrıca $|im\alpha| = r \leq n-1$ olmak üzere herhangi bir $\varphi \in T_n$ elemanını alalım. $i \neq j$, $i\varphi = j\varphi$ olacak şekilde i, j ve $z \in X_n - im\varphi$ alalım. $\hat{\varphi} : X_n \to X_n$ dönüşümünü her $x \in X_n$ için

$$x\hat{\varphi} = \begin{cases} z, & x = i \\ x\varphi, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $\varphi = \begin{Vmatrix} i & j \end{Vmatrix}\hat{\varphi}$ dir.

Böylece yukarıdaki eşitlikler göz önünde bulundurulursa tüm dönüşümler yarıgrubunun doğuray kümesini veren yarıgrup teoride iyi bilinen aşağıdaki teorem, ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.7. $T_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ dir.

Teorem 3.8. $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere $im(\alpha\beta) \subseteq im\beta$ ve $\ker\alpha \subseteq \ker(\alpha\beta)$ dır.

İspat: Öncelikle $im(\alpha\beta) \subseteq im\beta$ olduğunu gösterelim.

Bir $y \in im(\alpha\beta)$ alalım. O halde, $(x,y) \in \alpha\beta$ olacak şekilde $x \in X_n$ vardır. Dahası $(x,y) \in \alpha\beta$ olup $(x,z) \in \alpha$ ve $(z,y) \in \beta$ olacak şekilde $z \in X_n$ vardır. $(z,y) \in \beta$ olup $y \in im\beta$ dır. Bu durumda $im(\alpha\beta) \subseteq im\beta$ olur.

Şimdi $\ker\alpha \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğunu gösterelim. $(x,y) \in \ker\alpha$ alalım. Bu durumda, $x\alpha = y\alpha$ dir. $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ olup $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olur. Buradan $(x,y) \in \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, $\ker\alpha \subseteq \ker(\alpha\beta)$ dir. ■

$\ker\alpha$ bir denklik bağıntısı olduğundan $1 \le r \le n$ ve $|im\alpha| = r$ olmak üzere her $\alpha \in T_n$ için X_n nin bir $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$ parçalanışı vardır. O halde her $\alpha \in T_n$ elemanını $im\alpha = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Herhangi bir $\beta \in S_n$ için $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$, X_n nin bir parçalanışı ve $im\alpha = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r\}$ olmak üzere

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} A_1\beta^{-1} & A_2\beta^{-1} & \mathbf{L} & A_r\beta^{-1} \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$$

ve

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1\beta & a_2\beta & \mathbf{L} & a_r\beta \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece $\alpha \in T_n$ ve $\beta \in S_n$ için $\alpha L \beta\alpha$ ve $\alpha R \alpha\beta$ olduğu açıktır. Dahası

$$\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$$

$$im(\beta\alpha) = im(\alpha)$$

$$im(\alpha)\beta = im(\alpha\beta) = im\left(\beta^{-1}\alpha\beta\right)$$

olduğu görülür. ■

Örnek 3.9. $\alpha \in T_6$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ ve $\beta \in S_6$ olmak üzere $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ alalım.

$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,3,4\} & \{5,6\} & \{2\} \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ olup $A_1 = \{1,3,4\}$, $A_2 = \{5,6\}$, $A_3 = \{2\}$ olmak üzere $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi α nın bir parçalanışıdır. $i = 1,2,3$ için α nın imajındaki " $a_i \in A_i$ elemanını $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$ olarak belirleyelim. Bu durumda

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \{1,3,4\} & \{5,6\} & \{2\} \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

olur. Yani $\alpha R \alpha\beta$ olup

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1\beta & a_2\beta & \mathbf{L} & a_r\beta \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğu görülür.

Benzer şekilde

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \{2,4,5\} & \{3,6\} & \{1\} \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

olur. Yani $a \; L \; ba$ olup

$$ba = \begin{pmatrix} A_1 b^{-1} & A_2 b^{-1} & \mathbf{L} & A_r b^{-1} \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğu görülür.

Tanım 3.10. $X_n = \{1, 2, \mathbf{L}, n\}$ olsun. $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$, X_n nin bir parçalanışı olsun. Her i için bir $a_i \in A_i$ alalım. $T = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r\}$ kümesine $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$ nin bir *trasnversali* denir.

Tezin bundan sonraki kısımlarında T_n nin bazı özel alt yarıgrupları özellikle S_n-normal yarıgrup olarak adlandırılan alt yarıgrubu incelenecektir. Öncelikle S_n-normal yarıgrup aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.11. S, T_n nin bir alt yarıgrubu olsun. Her $a \in S$ ve her $s \in S_n$ için

$$s^{-1}as \in S$$

oluyorsa S ye S_n*-normal yarıgrup* denir.

4. S_n-NORMAL YARIGRUPLAR ve ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Symons J.S.V. nin "Normal Transformation Semigroups" ve LEVI I. ve McFADDEN R.B. nin "S_n-Normal Semigroups" çalışması incelenecektir.

4.1. S_n-NORMAL DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

Bu bölümde, iç otomorfizm özelliğine sahip olan sonlu X kümesi üzerindeki tüm dönüşümler yarıgruplarını tanımlayarak Symons J.S.V. nin "Normal Transformation Semigroups" adlı çalışması inceleyeceğiz. Üstelik h_r dönüşümü altında invariant olan tüm dönüşümler yarıgruplarını karakterize edeceğiz ve bunları, S_n-normal dönüşüm yarıgrupları olarak adlandıracağız.

Tanım 4.1.1. S, T_n nin bir alt yarıgrubu ve $a \in S$ olsun. S nin otomorfizmleri bir sabit $r \in S$ permütasyonu için

$$h_r : S \to S$$
$$a \to r^{-1}ar$$

formunda oluyor ise S *iç otomorfizm özelliğine sahiptir* denir.

Örnek 4.1.2. T_n tüm dönüşümler yarıgrubunun, T_n nin herhangi iki yanlı idealinin, küçük kardinaliteli bazı istisnalar hariç A_n alterne grubun ve S_n simetrik grupların iç otomorfizm özelliğine sahip olduğu Malcev (1952) ve Scott (1965, Bölüm 11) tarafından gösterilmiştir.

$S \subset T_n$ ve S, T_n nin iki yanlı ideali olsun. $\rho \in S$ permütasyonu için $\rho, \rho^{-1} \in T_n$ olup $\forall \alpha \in S$ için $\rho^{-1}\alpha\rho \in S$ (S, iki yanlı ideal) dir. Yani, T_n nin S iki yanlı ideali iç otomorfizm özelliğine sahiptir. ■

Her $i \in I$ için

$$im(\alpha) = \{x_i : i \in I\} \text{ ve } X_i = x_i\alpha^{-1}$$

olmak üzere $\alpha \in T_n$ elemanını

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

olarak göstereceğiz.

Tanım 4.1.3. $\{X_i : i \in I\}$ kümesine α *ile belirli* X *in parçalanışı*; $i \in I$ için X_i lere α *nın parçalanış sınıfları* denir.

Doğal sayılar kümesi $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. N kümesinde n nin bir P parçalanışı,

$$\sum_{i \in I} n_i = n \text{ ve } n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$$

olmak üzere $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ şeklinde bir doğal sayılar sistemidir.

Tanım 4.1.4. N kümesinde n nin bir P parçalanışı ve $\sum_{i \in I} n_i = n$ olacak şekilde $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ sistemi var olsun. $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ya P *nin terimleri* denir.

Aslında $\alpha \in T_n$ elemanını düşünecek olursak her $i \in I$ için $|X_i| = n_i$ olmak üzere α nın parçalanışı $P = (|X_1|, |X_2|, \mathbf{L}, |X_k|)$ olup α ya P ***tipindedir*** diyeceğiz.

Tanım 4.1.5. N kümesinde n nin bir P parçalanışı ve $\sum_i n_i = n$ olacak şekilde $(n_1, n_2, \mathbf{L}, n_k)$ sistemi var olsun. P nin terimlerinin sayısına P nin ***kardinalitesi*** denir ve $|P|$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.6. $\mathrm{P}(P)$ yi P nin çeşitli terimlerinin toplanmasıyla elde edilen n nin tüm parçalanışlarının kümesi olarak tanımlayalım. $\mathrm{P}(P)$ kümesine P ***-sınıfı*** deriz.

Örnek 4.1.7. $n = 5$ ve $P = (2,2,1)$ alınırsa $\mathrm{P}(P) = \{(2,2,1), (3,2), (4,1), (5)\}$ dir.

Tanım 4.1.8. $\alpha \in T_n$ ve P, n nin bir parçalanışı olsun. Eğer α nın parçalanış sınıflarının kardinalitesi ile P nin terimleri arasında birebir ve örten bir eşleme yapılabiliyor ise α , P ***tipindedir*** denir.

Örnek 4.1.9. $X = \{1,2,3,4,5\}$ ve $\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4\} & \{5\} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in T_5$ alalım. $n = 5$ olup $P = (3,1,1)$ parçalanışı için $|\{1,2,3\}| = 3$, $|\{4\}| = 1$, $|\{5\}| = 1$ şeklinde bir eşleme elde edildiğinden α , $P = (3,1,1)$ tipindedir.

$T(X;P) = \bigcup_{Q \in \mathrm{P}(P)} \{\alpha \in T_n : \alpha$, Q ***tipindedir.***$\}$ olarak tanımlayalım.

Tanım 4.1.10. $\alpha \in T(X;P)$ ise α , P ***-sınıfına aittir*** denir.

Bir $\alpha \in T_n$ dönüşümünün parçalanış tipi tektir fakat α birçok P-sınıfına ait olabilir.

Örnek 4.1.11. $X=\{1,2,3,4,5\}$ ve $\alpha=\begin{pmatrix}\{1,2,3\} & \{4\} & \{5\}\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \in T_5$ alalım. Bu durumda, α nın $P=(3,1,1)$ tipinde olduğunu Örnek 4.1.9'da belirtmiştik. Şimdi α nın $P_1=(2,1,1,1)$, $P_2=(1,1,1,1,1)$ ve $P_3=(3,1,1)$-sınıflarına ait olduğunu görelim:

$$P(P_1)=\{(2,1,1,1),(2,2,1),(3,1,1),(4,1),(3,2),(5)\}$$
$$P(P_2)=\{(1,1,1,1,1),(2,1,1,1),(2,2,1),(3,1,1),(4,1),(3,2),(5)\}$$
$$P(P_3)=\{(3,1,1),(4,1),(3,2),(5)\}$$

olup α , P_1, P_2 ve P_3-sınıflarına ait olur.

Tanım 4.1.12. $\alpha \in T_n$ için α , bir P-sınıfına ait ve $|im\alpha|=|P|$ ise α , P *tipindedir* denir.

Lemma 4.1.13. P, n nin herhangi bir parçalanışı olsun. $T(X;P)$, T_n nin sağ idealidir.

İspat: Önce $T(X;P)$ nin T_n nin bir alt yarıgrubu olduğunu gösterelim.

$\alpha,\beta \in T(X;P)$ alalım. $im(\alpha\beta) \subseteq im(\beta)$ olup $\alpha\beta$ nın parçalanışı ya β ile aynıdır ya da β nın parçalanışının terimlerinin bir kısmının toplamı şeklindedir. Dolayısıyla $\alpha\beta \in T(X;P)$ olup $T(X;P)$, T_n nin alt yarıgrubudur.

Şimdi $T(X;P)$ nin T_n nin bir sağ ideali olduğunu gösterelim. $\alpha \in T(X;P)$ alalım. α nın parçalanışı Q olsun. $\alpha \in T(X;P)$ olduğundan $Q \in P(P)$ dir. Kabul

edelim ki P parçalanışı $n_1 \geq n_2 \geq \mathbf{L} \geq n_k$ olacak şekilde $P=(n_1,n_2,\mathbf{L},n_k)$ olsun. $\mathrm{P}(P)=\mathrm{P}((n_1,n_2,\mathbf{L},n_k))$ deki her bir parçalanış P nin çeşitli terimlerinin toplamıyla elde edilmiştir. O halde $\forall Q\in \mathrm{P}(P)$ ve $|X_i|=m_i$ için $Q=(m_1,m_2,\mathbf{L},m_t)\in \mathrm{P}(P)$ olmak üzere $a=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \mathbf{L} & X_t \\ x_1 & x_2 & \mathbf{L} & x_t \end{pmatrix}$ ve $1\leq i\leq t\leq k$ şeklindedir. $\forall b\in T_n$ için $ab=\begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}b=\begin{pmatrix} X_i \\ x_ib \end{pmatrix}$ olur.

Eğer $\forall i,j\in\{1,2,\mathbf{L},t\}$ için $x_ib\neq x_jb$ ise ab nın ve a nın parçalanışı aynıdır. O halde $ab\in T(X;P)$ olur.

$\forall i,j\in\{1,2,\mathbf{L},t\}$ için $x_ib\neq x_jb$ olmasın. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $x_1b=x_2b$ olsun.

$$ab=\begin{pmatrix} X_1\cup X_2 & X_3 & \mathbf{L} & X_t \\ x_1b & x_3b & \mathbf{L} & x_tb \end{pmatrix}$$

olup ab nın parçalanışını R ile gösterirsek $R\in \mathrm{P}(Q)$ olur. Yani $R\in \mathrm{P}(Q)\subseteq \mathrm{P}(P)$ olup $ab\in T(X;P)$ dir. Dolayısıyla $T(X;P)$, T_n nin bir sağ idealidir. ■

$(1,1,\mathbf{L},1)$ şeklindeki n-terimli parçalanış yerine (1) yazılacaktır. $T(X;(1))=T_n$ olduğu açıktır. Ayrıca $P=(1)$ tipindeki tüm dönüşümlerin kümesi S_n dir.

Lemma 4.1.14. Eğer $P\neq(1)$ ise T_n nin P-sınıfındaki her bir idempotenti P tipindeki idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: T_n nin idempotentleri tam olarak $x_i\in X_i$ için

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \mathbf{L} & X_k \\ x_1 & x_2 & \mathbf{L} & x_k \end{pmatrix}$$

formundaki dönüşümlerdir.

Eğer ε, P-sınıfına ait ise $X_1, X_2, \mathbf{L}, X_k$ nin $k \leq j$ olmak üzere $P = \left(|Y|_1, |Y_2|, \mathbf{L}, |Y_j|\right)$ olacak şekilde $Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_j$ inceltilmişi vardır.

Her bir $i \leq j$ için y_i, Y_i nin herhangi bir elemanı olmak üzere η_1 dönüşümünü

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \mathbf{L} & Y_j \\ y_1 & y_2 & \mathbf{L} & y_j \end{pmatrix}$$

olarak alalım. η_1, P tipinde ve $P^{-1}(1)$ olduğu için η_1 birebir ve örten fonksiyon değildir. Yani $\eta_1 \notin T_n - S_n$ dir. O zaman $X\eta_1$ de olmayan bir z elemanını vardır.

$$\{y_1, y_2\}, z, y_3, y_4, \mathbf{L}, y_j$$

sistemi her bir Z_i, dizinin ilgili elemanını veya kümesini içerecek şekilde X in bir $Z_1, Z_2, \mathbf{L}, Z_j$ parçalanışına genişletilebilir ve üstelik $P = \left(|Z_1|, |Z_2|, \mathbf{L}, |Z_j|\right)$ dir.

($P = (n)$ durumunu ihmal ediyoruz. Bu durumda, ε sabit fonksiyondur ve sonuç açıktır.)

η_2 dönüşümünü

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & \mathbf{L} & Z_j \\ y_1 & z & y_3 & \mathbf{L} & y_j \end{pmatrix}$$

olarak alırsak; η_2, P tipindedir ve

$$\eta_1\eta_2 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \mathbf{L} & Y_j \\ y_1 & & y_3 & \mathbf{L} & y_j \end{pmatrix}$$

dir.

Böylece $i \le k$ için her bir X_i, bazı Y_i lerin birleşimi olduğundan imaj için y_i lerin uygun bir seçimi ve tümevarım ile ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.1.15. ε dönüşümü $Q=(4,1)$ parçalanışına sahip bir idempotent olsun. $P=(2,2,1)$ alalım. $\mathrm{P}(P)=\{(2,2,1),(4,1),(3,2),(5)\}$ olup $Q \in \mathrm{P}(P)$ dir.

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \{1,2,3,4\} & \{5\} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ alalım. Şimdi ε dönüşümünün $P=(2,2,1)$ tipindeki parçalanışa sahip iki η_1 ve η_2 idempotentlerin çarpımı olarak yazılabileceğini Lemma 4.1.14'ün ispatındaki yöntemi kullanarak gösterelim.

$\varepsilon = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1,2,3,4\} & \{5\} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. η_1 idempotentini

$\eta_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3,4\} & \{5\} \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ olarak alalım. $\{y_1, y_2\}, z, y_3$ sistemi $\{1,3\},2,5$ olarak alınırsa η_2 idempotentini

$\eta_2 = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ y_1 & z & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1,3\} & \{2,4\} & \{5\} \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ olarak belirleyebiliriz. O halde

$$\eta_1\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \varepsilon$$

elde edilir.

Örnek 4.1.16. $X=\{1,2,3,4,5\}$ de $P=(3,1,1)$ için $\mathrm{P}(P)=\{(3,1,1),(4,1),(3,2),(5)\}$ olur. $\alpha=\begin{pmatrix}\{1,2,3\} & \{4,5\}\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in T_5$ elemanı $Q=(3,2)$ tipinde bir idempotent olsun. $Q\in \mathrm{P}(P)$ olup $\alpha\in T(X;P)$ idempotentini P parçalanışına sahip iki idempotentin çarpımı olarak yazabiliriz. Bu idempotentleri belirleyelim:

$\alpha=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}$ ise X_1, X_2 nin bir Y_1, Y_2, Y_3 şeklinde bir inceltilmişi vardır. Bu durumda

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\{4\} & \{5\} & \{1,2,3\}\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

P parçalanışına sahip bir idempotent olsun. Şimdi $\{y_1,y_2\}=\{4,5\}\subseteq Z_1$, $z\in im\eta_1$ için $\{z\}=\{3\}\subseteq Z_2$, $\{y_3\}=\{2\}\subseteq Z_3$ ve $|Z_1|=|Y_1|$, $|Z_2|=|Y_2|$, $|Z_3|=|Y_3|$ olacak şekilde X_5 in bir parçalanışı olarak Z_1, Z_2, Z_3 e genişletilebilir.

$\eta_2=\begin{pmatrix}\{1,4,5\} & \{3\} & \{2\}\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, P parçalanışına sahip bir idempotentini alalım.

$$\eta_1\eta_2=\begin{pmatrix}\{4\} & \{5\} & \{1,2,3\}\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\{1,4,5\} & \{3\} & \{2\}\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{1,2,3\} & \{4,5\}\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\alpha$$

elde edilir.

Lemma 4.1.17. Eğer $P^{1}(1)$ ise $T(X;P)$, P tipindeki idempotentleri tarafından doğurulur.

İspat: Q tipindeki her bir $\alpha\in T(X;P)$ nin, Q tipindeki idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz ve sonuç, Lemma 4.1.14'ten tamamlanır.

α , Q tipinde ve $\alpha = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \mathbf{L} & X_k \\ x_1 & x_2 & \mathbf{L} & x_k \end{pmatrix}$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\beta \in T_n$ seçelim:

A) $\beta = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \mathbf{L} & X_k \\ y_1 & y_2 & \mathbf{L} & y_k \end{pmatrix}$, $y_1, y_2, \mathbf{L}, y_k \in X$ dir.

B) β , Q tipindeki idempotentlerin bir çarpımıdır.

C) Eğer γ, A ve B özelliklerine sahip ise

$$m = \left|\{X_i : X_i\beta = X_i\alpha\}\right| \geq \left|\{X_i : X_i\gamma = X_i\alpha\}\right|$$

dir.

$m = k$ olduğunu göstereceğiz. Çelişki için $m < k$ olduğunu varsayalım. Kolaylık için X_i leri, $x_i = y_i \Leftrightarrow i \leq m$ olacak şekilde yeniden numaralandıralım. Düşünülecek 2 durum vardır:

<u>1.durum:</u> $x_{m+1} \notin X\beta$ olsun. Lemma 4.1.14'te olduğu gibi

$$y_1, \mathbf{L}, y_m, \{y_{m+1}, x_{m+1}\}, y_{m+2}, \mathbf{L}, y_k$$

sistemi $Q = \left(|Y_1|, |Y_2|, \mathbf{L}, |Y_k|\right)$ olmak üzere X in bir $Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_k$ parçalanışına genişletilebilir.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} Y_1 & \mathbf{L} & Y_m & Y_{m+1} & Y_{m+2} & \mathbf{L} & Y_k \\ y_1 & \mathbf{L} & y_m & x_{m+1} & y_{m+2} & \mathbf{L} & y_k \end{pmatrix}$$

elemanını alalım. ε, bir idempotenttir ve Q tipindedir. Üstelik $\beta\varepsilon$ nin parçalanış sınıfları $X_1, X_2, \mathbf{L}, X_k$ ve $i \leq m$ için $X_i\beta\varepsilon = y_i\varepsilon = y_i$ ve $X_{m+1}\beta\varepsilon = y_{m+1}\varepsilon = x_{m+1} = X_{m+1}\alpha$ olur. Bu ise β nin seçimi ile çelişir.

2.durum: $x_{m+1} \in X$ ve $x_{m+1} = y_{m+2}$ olsun. (Çünkü x_{m+1}, $i \leq m+1$ için herhangi bir y_i olamaz.)

$z \notin X$ seçelim ve $y_1, \mathbf{L}, y_{m+1}, \{z, y_{m+2}\}, y_{m+3}, \mathbf{L}, y_k$ yı X in Q tipindeki $Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_k$ parçalanışına genişletelim. Eğer

$$e = \begin{pmatrix} Y_1 & \mathbf{L} & Y_{m+1} & Y_{m+2} & Y_{m+3} & \mathbf{L} & Y_k \\ y_1 & \mathbf{L} & y_{m+1} & z & y_{m+3} & \mathbf{L} & y_k \end{pmatrix}$$

elemanını alırsak

$$be = \begin{pmatrix} X_1 & \mathbf{L} & X_{m+1} & X_{m+2} & X_{m+3} & \mathbf{L} & X_k \\ y_1 & \mathbf{L} & y_{m+1} & z & y_{m+3} & \mathbf{L} & y_k \end{pmatrix}$$

ve $x_{m+1} \notin Xbe$ olur. Böylece 1. durum elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.1.18. T_n nin bir alt yarıgrubu S, S_n-normal ve $a \in S$, P tipinde olsun. O zaman, S, P tipinde bir idempotent içerir.

İspat: $a \in S$, P tipinde ve A, $\{r^{-1}ar : r \in S_n\}$ tarafından doğurulan S nin bir alt yarıgrubu olsun.

$b \in A$ yı P tipinde ve A nın P tipindeki tüm dönüşümleri içinde X in maksimal sayıda elemanını sabit tutacak şekilde seçelim. Bu sayı k olsun. $i \leq k$ için $x_i \in X_i$ olacak şekilde

$$b = \begin{pmatrix} X_1 & \mathbf{L} & X_k & \mathbf{L} & X_{k+m} \\ x_1 & \mathbf{L} & x_k & \mathbf{L} & x_{k+m} \end{pmatrix}$$

alalım, bu durumda $m = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$m \neq 0$ olduğunu varsayalım ve $R = \bigcup_{i=1}^{m} X_{k+i}$ alalım. $R \in X\beta$ ise $Y \in R$ iken $R = X\beta$ dır. (Çünkü $\beta : X|R \to X|R$ dir.) Böylece $\beta|R$, R nin $(\beta|R)^p = i_R$ (bazı p ler için) şeklinde bir permütasyonudur. Dolayısıyla β^p, $(|X_1|, |X_2|, \mathbf{L}, |X_k|, 1, 1, \mathbf{L}, 1)$ tipinde bir idempotenttir, yani β ile aynı tipte olur.

Böylece $z\rho = X\beta$ olacak şekilde bazı $z \in X_{k+1}$ lerin var olduğunu varsayabiliriz. $y_{k+1}, y_{k+2}, \mathbf{L}, y_{k+m}$, $X_{k+1}, X_{k+2}, \mathbf{L}, X_{k+m}$ nin temsilcilerinin bir dizisi olsun. $x_{k+1} \rho = X_{k+1}$ olduğunu görelim. ρ dönüşümünü aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} x_i\rho &= x_i \quad (i \le k) \\ x_{k+1}\rho &= z \\ z\rho &= x_{k+1} \\ x_{k+i}\rho &= y_{k+i} \quad (2 \le i \le m) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Eğer ρ birebir ise ρ yu S_n nin bir elemanına genişletelim ve $\rho^{-1}\beta\rho \in A$ elemanını göz önüne alalım. Şimdi $\rho^{-1}\beta\rho = \begin{pmatrix} X_i\rho \\ x_i\rho \end{pmatrix}$ olduğundan $\rho^{-1}\beta\rho$, P tipindedir. $T(X;P)$ bir sağ ideal olduğu için $\rho^{-1}\beta\rho\beta$, P-sınıfına aittir.

Diğer taraftan, $X\beta\rho$, β nın her bir parçalanış sınıfından bir eleman içerdiğinden

$$|X\rho^{-1}\beta\rho\beta| = |X\beta\rho\beta| = |X\beta|$$

ve $\rho^{-1}\beta\rho\beta$ nın P tipinde olduğu ispatlanmış olur. Fakat

$$x_i\rho^{-1}\beta\rho\beta = x_i \quad (i \le k)$$

ve

$$x_{k+1}r^{-1}br\,b = zbr\,b = x_{k+1}r\,b = zb = x_{k+1}$$

dir. Böylece $r^{-1}br\,b$, X in en az $k+1$ elemanını sabit tutar. Bu ise b nın seçimi ile çelişir.

Eğer r birebir değil ise y_{k+i} lerden biri x_{k+1} e eşit olmak durumundadır. $x_{k+1} = y_{k+2}$ olsun. y_{k+i}, X_{k+i} nin temsilcisi olarak seçilmişti. y_{k+2} nin X_{k+2} nin bazı elemanlarıyla yer değiştirmesi mümkün olabilir. Eğer böyleyse r nun birebirliğindeki gibi ispat tamamlanır. Aksi takdirde $X_{k+2} = \{x_{k+1}\}$ olduğunu kabul etmek zorunda kalırız. Bir s dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} x_i s &= x_i \quad (i \le k+1) \\ x_{k+2} s &= z \\ x_{k+i} s &= y_{k+i} \quad (i > 2) \end{aligned}$$

s nın birebir olduğu kolaylıkla gösterilir. Önceden olduğu gibi $w(X)$ e genişletebiliriz ve $s^{-1}bsb$ elemanını ele alalım.

$s^{-1}bsb$, P-sınıfına aittir ve yukarıdakine benzer bir argümanla P tipinde olur. $s^{-1}bsb$, x_i lerin ilk $k+1$ terimini sabit tutar. Bu ise b nın seçimi ile çelişir. Böylece $m = 0$ olup ispat tamamlanır. ■

Eğer $a = \begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} Y_i \\ y_i \end{pmatrix}$ aynı tipte iki idempotentler ise

$$r^{-1}ar = \begin{pmatrix} X_i r \\ x_i r \end{pmatrix}$$

nin parçalanışı $Y_1, Y_2, \mathbf{L}$ olacak şekilde $r \in w(X)$ bulmak kolaydır. Eğer

$$r^{-1}ar = \begin{pmatrix} Y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

ve $s \in S_n$ bütün $(z_i \quad y_i)$ ayrık transpozisyonlarının çarpımı olarak alınır ise

$$(rs)^{-1}a(rs) = s^{-1}r^{-1}ars = \begin{pmatrix} Y_i s \\ z_i s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i \\ y_i \end{pmatrix} = b$$

dır. Böylece S, S_n-normal ve belirli bir tipte bir idempotent içeriyor ise S bu tipteki bütün idempotentleri içerir.

Lemma 4.1.18. in Doğal Sonucu. Lemma 4.1.18'in varsayımlarıyla, S, P tipindeki bütün idempotentleri içerir ve dolayısıyla Lemma 4.1.17'den, S, $T(X;P)$ yi içerir.

Lemma 4.1.19. S, T_n nin S_n-normal alt yarıgrubu ve $S \cap S_n \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $S \cap S_n$, S_n nin bir normal alt grubudur.

İspat: Eğer $S \cap S_n \neq \emptyset$ ise $S \cap S_n$, kısalma özelliğine sahip sonlu bir yarıgruptur ve dolayısıyla bir gruptur. Üstelik $\forall r \in S_n$ için

$$r^{-1}(S \cap S_n)r = r^{-1}Sr \cap r^{-1}S_n r = S \cap S_n$$

dir. ■

Bu son iki sonuçtan aşağıdaki teoremin gerek koşulu gösterilmiş olup yeter koşul ise açıktır.

Teorem 4.1.20. S, T_n nin bir alt yarıgrubu olsun. S nin S_n-normal olması için gerek ve yeter koşul S nin aşağıdaki özelliklerden birini sağlamasıdır.

i) S_n nin bir normal alt grubudur.

ii) $T(X;P)$ biçimindeki yarıgrupların bir birleşimidir.

iii) Yukarıdaki ikisinin bir birleşimidir.

UYARI: Eğer S, S_n-normal ise ve S_n nin bir normal alt grubu değil ise sonuçtan S, X üzerindeki bütün sabit fonksiyonları içerir. Bu ise çok iyi bilinen S nin tüm otomorfizimlerinin iç otomorfizm olduğu sonucunu verir (Malcev, 1952). Dolayısıyla S, iç otomorfizm özelliğine sahiptir. Böylece eğer S, S_n tarafından içerilmiyor ise S nin S_n-normal olması için gerek ve yeter koşul S nin iç otomorfizm özelliğine sahip olmasıdır deriz.

4.2. S_n-NORMAL DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Levi I. ve McFadden R.B. tarafından 1994 yılında hazırlanan "S_n-Normal Semigroups" adlı çalışma incelenmiştir. Aksi belirtilmedikçe sonlu $X_n = \{1, 2, \mathbf{L}, n\}$ kümesi üzerindeki simetrik grubunu S_n ve tüm dönüşümler yarıgrubunu T_n ile göstereceğiz.

Tanım 4.2.1. S, T_n nin bir alt yarıgrubu olsun. Her $a \in S$ ve her $s \in S_n$ için

$$s^{-1}as \in S$$

oluyorsa S ye S_n*-normal yarıgrup* denir.

Örnek 4.2.2. T_n ve S_n, S_n-normal yarıgruptur. Çünkü;

$a \in T_n$ ve $s \in S_n$ için $|im(a)| \leq n$ ise $|im(s^{-1}as)| \leq n$ olup $s^{-1}as \in T_n$ dir. Böylece T_n, S_n-normal yarıgruptur.

Benzer şekilde $r \in S_n$ ve $s \in S_n$ alalım. $s \in S_n$ olup $s^{-1} \in S_n$ vardır. O halde $s^{-1}as \in S_n$ olup S_n, S_n-normal yarıgruptur.

Örnek 4.2.3. $1 \leq r \leq n$ için $K(n,r) = \{a \in T_n : |im(a)| \leq r\}$ idealleri de S_n-normal yarıgruptur.

Öncelikle $K(n,r)$ nin T_n nin bir alt yarıgrubu olduğunu gösterelim. $\forall a,b \in K(n,r)$ alalım. $a,b \in T_n$ olduğundan $im(ab) \subseteq im(b)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $|im(ab)| \leq |im(b)|$ dir ve $b \in K(n,r)$ olduğundan $|im(b)| \leq r$ olup

$$|im(ab)| \leq |im(b)| \leq r$$

elde edilir. Dolayısıyla $ab \in K(n,r)$ dir. Yani $K(n,r)$, T_n nin bir alt yarıgrubudur.

Şimdi $K(n,r)$ nin T_n nin bir ideali olduğunu gösterelim.
$\forall a \in K(n,r)$ ve $t \in T_n$ için

$$|im(ta)| \leq |im(a)| \leq r$$

olup $\forall a \in K(n,r)$ için $ta \in K(n,r)$ olur. Yani, $K(n,r)$, T_n nin bir sol idealidir. Diğer yandan, $\forall a \in K(n,r)$ ve $d \in T_n$ için $|\ker(a)| \leq |\ker(ad)|$ olup

$$|im(ad)| \leq |im(a)| \leq r$$

olup $a\hat{\imath} K(n,r)$ olur. Yani, $K(n,r)$, T_n nin bir sağ idealidir.

$K(n,r)$ nin T_n nin hem sol ideali hem de sağ ideali olduğundan $K(n,r)$, T_n nin bir idealidir.

Son olarak, $K(n,r)$ nin S_n-normal yarıgrup olduğunu gösterelim. $"a\hat{\imath} K(n,r)$ ve $s\hat{\imath} S_n$ alalım. $|im(a)|£ r$ olup $|im(s^{-1}as)|£ r$ olur. Dolayısıyla $K(n,r)$, S_n-normal yarıgruptur. ■

Örnek 4.2.4. T_3 ün D -sınflarının yapısını inceleyelim. $|im(a)|=r$ ise D -sınflarını D_r ile gösterelim. Böylece D_3 sınıfı S_3 ün elemanlarından oluşur. $|im(a)|=2$ ise D_2 nin elemanlarını aşağıdaki gibi $3´3$ tipinde bir tabloya yerleştirebiliriz. Bu tabloda sütunlar L -sınıflarını, satırlar ise R -sınıflarını göstersin. $i,j\hat{\imath} X_3$ olmak üzere $im(a)=\{i,j\}$ için L -sınıflarını $L_{\{i,j\}}$ ile gösterelim. O halde tüm L -sınıfları $L_{\{1,2\}}$, $L_{\{1,3\}}$, $L_{\{2,3\}}$ dir. Eğer $k,l\hat{\imath} X_3$ ve $\{m\}=X_3-\{k,l\}$ olmak üzere $(k)a=(l)a$ ise R -sınıflarını $R_{kl/m}$ veya kısaca kl/m şeklinde yazarız. Böylece D_2 tablosu

	$L_{\{1,2\}}$	$L_{\{1,3\}}$	$L_{\{2,3\}}$	
D_2	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$	$R_{23/1}$
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}$	$R_{13/2}$
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$	$R_{12/3}$

Benzer şekilde $\left|im(a)\right|=1$ ise D_1 in 1´ 3 tipindeki tablosu aşağıdaki gibidir.

$i\in X_n$ olmak üzere $im(a)=\{i\}$ için tüm L-sınıfları $L_{\{1\}}$, $L_{\{2\}}$, $L_{\{3\}}$ dir.

	$L_{\{1\}}$	$L_{\{2\}}$	$L_{\{3\}}$	
D_1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$	R_{123}

Şimdi bir $S \leq T_3$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$ alalım.

"$s \in S_3$ ve bir $a \in S \leq T_3$ için $s^{-1}as$ elemanını inceleyelim. Bir $s \in S_3$ alındığında $s^{-1} \in S_3$ olduğunu biliyoruz. Bir $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in S \leq T_3$ alalım ve

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ ün her elemanı için $s^{-1}as$ elemanını inceleyelim.

$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ alınırsa $s_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olup

$$s_1^{-1}as_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = a \in S \text{ elde edilir.}$$

$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ alınırsa $s_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ olup

$$s_2^{-1}as_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = a \in S \text{ elde edilir.}$$

$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alınırsa $s_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olup

$$s_3^{-1}as_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = a \in S \text{ elde edilir.}$$

$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ alınırsa $s_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olup

$$s_4^{-1}as_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = a \in S \text{ elde edilir.}$$

$s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alınırsa $s_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ olup

$$\sigma_5^{-1}\alpha\sigma_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix} \in S \text{ elde edilir.}$$

$\sigma_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ alınırsa $\sigma_6^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ olup

$$\sigma_6^{-1}\alpha\sigma_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix} \in S \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $\alpha \in S \subseteq T_3$ için $\sigma^{-1}\alpha\sigma \in S$ olup T_3 ün S alt yarıgrubu S_3-normal yarıgruptur. ■

Herhangi bir $\alpha \in T_n$ elemanı için $\langle \alpha : S_n \rangle$ ile α yı içeren T_n nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubunu gösterelim.

Teorem 4.2.5. $\langle \alpha : S_n \rangle$, α yı içeren T_n nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubu olmak üzere

$$\langle \alpha : S_n \rangle = \left\langle \left\{ \rho^{-1}\alpha\rho : \rho \in S_n \right\} \right\rangle$$

dir.

İspat: $S = \langle \alpha : S_n \rangle$ ve $A = \left\{ \rho^{-1}\alpha\rho : \rho \in S_n \right\}$ olsun.

$A \subseteq S$ oluşu S nin S_n-normal yarıgrup oluşundan açıktır.

e, S_n deki birim dönüşüm ise $e^{-1}\alpha e = \alpha \in \langle A \rangle \subseteq S$ dir. Şimdi $\langle A \rangle$ nın S_n-normal olduğunu gösterelim.

Bir $\sigma \in \langle A \rangle$ alalım. Bu durumda $\sigma = \rho_1^{-1}\alpha\rho_1\rho_2^{-1}\alpha\rho_2\rho_3^{-1}\alpha\rho_3 \cdots \rho_k^{-1}\alpha\rho_k$ olacak şekilde $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k \in S_n$ vardır. $\forall \rho \in S_n$ için

$$\begin{aligned} r^{-1}sr &= r^{-1}\left(r_1^{-1}ar_1r_2^{-1}ar_2r_3^{-1}ar_3\,\mathbf{L}\,r_k^{-1}ar_k\right)r \\ &= r^{-1}\left(r_1^{-1}ar_1\left(rr^{-1}\right)r_2^{-1}ar_2\left(rr^{-1}\right)r_3^{-1}ar_3\left(rr^{-1}\right)\mathbf{L}\left(rr^{-1}\right)r_k^{-1}ar_k\right)r \\ &= \left(r^{-1}r_1^{-1}\right)a\left(r_1r\right)\left(r^{-1}r_2^{-1}\right)a\left(r_2r\right)\left(r^{-1}r_3^{-1}\right)a\left(r_3r\right)\mathbf{L}\left(r^{-1}r_k^{-1}\right)a\left(r_kr\right) \\ &= \left[\left(r_1r\right)^{-1}a\left(r_1r\right)\right]\left[\left(r_2r\right)^{-1}a\left(r_2r\right)\right]\left[\left(r_3r\right)^{-1}a\left(r_3r\right)\right]\mathbf{L}\left[\left(r_kr\right)^{-1}a\left(r_kr\right)\right] \end{aligned}$$

olup $r^{-1}sr \in \langle A\rangle$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, $\langle A\rangle$, S_n-normal yarıgruptur.

Şimdi $\langle A\rangle$ nın a yı içeren T_n nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubu olduğunu gösterelim. B, a yı içeren T_n nin bir S_n-normal alt yarıgrubu olsun. $a \in B$ ve B, S_n-normal yarıgrup olup $\forall\, r \in S_n$ için $r^{-1}ar \in B$ dir. Dolayısıyla, A nın tanımından $r^{-1}sr \in A \subset B$ olup $\langle A\rangle \subset B$ olur. $\langle A\rangle = \left\langle\left\{r^{-1}ar : r \in S_n\right\}\right\rangle$, a yı içeren T_n nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubudur. Böylece $\langle a : S_n\rangle = \left\langle\left\{r^{-1}ar : r \in S_n\right\}\right\rangle$ olduğu gösterilmiştir. ■

S, S_n-normal yarıgrup ve $A \subset S$ olsun. S nin A yı içeren en küçük S_n-normal alt yarıgrubu $\langle A : S_n\rangle$ ile gösterilir. Şimdi de $\langle A : S_n\rangle = \left\langle\left\{r^{-1}ar : a \in A, r \in S_n\right\}\right\rangle$ olduğunu gösterelim.

İspat: $T = \langle A : S_n\rangle$ ve $B = \left\{r^{-1}ar : a \in A, r \in S_n\right\}$ olsun. $\langle B\rangle$ nin S_n-normal olduğunu gösterelim. Herhangi bir $b \in \langle B\rangle$ alalım.

$b = r_1^{-1}a_1r_1r_2^{-1}a_2r_2r_3^{-1}a_3r_3\,\mathbf{L}\,r_k^{-1}a_kr_k$ olacak şekilde $r_1, r_2, \mathbf{L}, r_k \in S_n$, $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_k \in A$ vardır. $\forall\, r \in S_n$ için

$$\begin{aligned} r^{-1}br &= r^{-1}\left(r_1^{-1}a_1r_1r_2^{-1}a_2r_2r_3^{-1}a_3r_3\,\mathbf{L}\,r_k^{-1}a_kr_k\right)r \\ &= r^{-1}\left(r_1^{-1}a_1r_1\left(rr^{-1}\right)r_2^{-1}a_2r_2\left(rr^{-1}\right)r_3^{-1}a_3r_3\left(rr^{-1}\right)\mathbf{L}\left(rr^{-1}\right)r_k^{-1}a_kr_k\right)r \\ &= \left(r^{-1}r_1^{-1}\right)a_1(r_1r)\left(r^{-1}r_2^{-1}\right)a_2(r_2r)\left(r^{-1}r_3^{-1}\right)a_3(r_3r)\,\mathbf{L}\left(r^{-1}r_k^{-1}\right)a_k(r_kr) \\ &= \left[(r_1r)^{-1}a_1(r_1r)\right]\left[(r_2r)^{-1}a_2(r_2r)\right]\left[(r_3r)^{-1}a_3(r_3r)\right]\mathbf{L}\left[(r_kr)^{-1}a_k(r_kr)\right] \end{aligned}$$

olup $r^{-1}br \in \langle B\rangle$ elde edilir. O halde $\langle B\rangle$, S_n-normal yarıgruptur.

$\forall a \in A$ için $r^{-1}ar \in B$ olup $A \subset \langle B\rangle$ dir.

$\langle B\rangle$ nin S de A yı içeren en küçük S_n-normal alt yarıgrup olduğunu gösterelim.

C, S de A yı içeren bir S_n-normal alt yarıgrup olsun. O halde,

$$A \subset C$$

dir. Her $a \in A$ için C, S_n-normal olduğundan

$$r^{-1}ar \in C$$

dir. B nin tanımından

$$r^{-1}ar \in B \subset C$$

olur. C alt yarıgrup olup $\langle B\rangle \subset C$ dir. Dolayısıyla, $\langle B\rangle$, A yı içeren S nin en küçük S_n-normal alt yarıgrubudur. Yani,

$$\langle A : S_n\rangle = \left\langle \left\{ r^{-1}ar : a \in A, r \in S_n \right\} \right\rangle$$

dir.■

α nın bir permütasyon olmadığını varsayalım. α ya karşılık gelen X_n nin $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$ parçalanışını $p(\alpha)$ ile gösterelim. x ve y nin $p(\alpha)$ nın aynı sınıfına ait olması yani, bir $i \in \{1,2,\mathbf{L},r\}$ için $x, y \in A_i$ olması için gerek ve yeter koşul $x\alpha = y\alpha$ olmasıdır.

P ve Q, X_n nin iki parçalanışı olsun. Eğer her bir $1 \le r \le n$ için P ve Q da aynı sayıda r elemanlı sınıf var ise X_n nin P ve Q parçalanışlarına *aynı tiptedir* denir. $P \circ Q$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ olsun.

$\alpha = \begin{pmatrix} \{3,4,5\} & \{1,2\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} \{2,4,5\} & \{1,3\} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ olup $\alpha \neq \beta$ fakat $p(\alpha) \circ p(\beta)$ dir.

Bu çalışmada $\langle \alpha : S_n \rangle$ nin idempotent doğuraylı olduğu ve $\langle \alpha : S_n \rangle$ nin $p(\alpha)$ ile aynı tipte parçalanışa sahip olan $p(\beta)$ parçalanışları için tüm $\beta \in T_n$ dönüşümlerini içerdiği gösterilmiştir.

Tanım 4.2.7. S bir yarıgrup ve S nin tüm idempotentlerinin kümesi $E(S)$ olsun. Eğer bir $A \subseteq E(S)$ için $\langle A \rangle = S$ oluyorsa S ye *idempotent doğuraylıdır* denir.

Tanım 4.2.8. Eğer S idempotent doğuraylı bir yarıgrup ise

$$idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanan $idrank(S)$ ye S *nin idempotent rankı* denir.

$$idrankK(n,r) = S(n,r)$$

olduğu Howie ve McFadden tarafından gösterilmiştir.

Tanım 4.2.9. Eğer bir $A \subseteq E(S)$ için

$$\langle A : S_n \rangle = S$$

ise S ye S_n*-idempotent doğuraylı yarıgrup* denir.

$$S_n\text{-}\,idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A : S_n \rangle = S\}$$

sayısına da S ye S_n*-idempotent rankı* denir.

Tanım 4.2.10. X bir küme ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r \subseteq X$ olsun. Eğer $Y_i \neq \emptyset$, $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ve $\bigcup Y_i = X$ ise $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_r\}$ ye X *in bir parçalanışı* denir.

$1 \leq r \leq n$ için $T(n,r)$ ile n elemanlı bir kümenin r tane alt kümeye farklı tipteki parçalanışlarının sayısını gösterelim. $S_n\text{-}\,idrankK(n,r) = T(n,r)$ olduğu ve $T(n,r)$ için bir indirgenme bağıntısı Teorem 4.2.28'de gösterildi.

Ayrıca, bir minimal S_n-idempotent doğuray kümesinin T_n ve S nin bir tek L-sınıfından seçilebileceği gösterildi.

$2 \leq r \leq n$ için T_n nin principal faktörü P_r

$$P_r = K(n,r) \Big/ K(n,r-1)$$

şeklinde Howie ve McFadden (1990) tarafından tanımlandı. Aslında, P_r bir Rees Bölümü'dür. Yani $P_r = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| = r\} \cup \{0\}$ ve $\alpha, \beta \in P_r$ için çarpma

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha\beta, & |im(\alpha\beta)| = r \\ 0, & |im(\alpha\beta)| < r \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, P_r tam sıfır basit yarıgruptur.

P_r nin $T(n,r)$ tane S_n-idempotent rankı 1 olan S_n-normal yarıgruplarının bölüm yarıgrubunun bir bandı olduğu Teorem 4.2.29'da gösterildi.

Tanım 4.2.11. S bir yarıgrup, I bir band olsun. Eğer $\forall i \in I$ için $S_i \subseteq S$, her $i \neq j$ için $S_i \cap S_j = \emptyset$ ve $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ ise S ye S_i *yarıgruplarının bandı* denir.

$\alpha \in T_n$ ve $\pi \in S_n$ için $p(\alpha)$, X in bir parçalanışı olup $p(\alpha)\pi$ da

$$p(\alpha)\pi = \{A\pi : A \in p(\alpha)\}$$

X in bir parçalanışıdır.

Örnek 4.2.12. $\alpha \in T_5$ ve $\pi \in S_5$ alalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$p(\alpha) = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ dir.

$$A_1 = \{1,2\} \text{ olup } A_1\pi = \{1,2\}\pi = \{1,4\}$$

$$A_2 = \{3,4\} \text{ olup } A_2\pi = \{3,4\}\pi = \{2,5\}$$

$$A_3 = \{5\} \text{ olup } A_3 r = \{5\} r = \{3\}$$

elde edilir. $p(a) r = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}$ dir. Dolayısıyla, $p(a) \circ p(a) r$ ve $p(a) r$ da X in bir parçalanışıdır.

Dikkat edilecek olursa, $p(a)$, $\ker(a)$ nın denklik sınıflarının kümesidir.

Örnek 4.2.13. T_5 in imajında 2 eleman görünen dönüşümlerini inceleyelim.

$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ alalım ve seçilen $a_i \in T_5$ için $p(a_i) \circ p(a_i) r$ olduğunu gösterelim.

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in T_5$ olsun. $p(a_1) = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ dir.

$\{1,2,3\} r = \{2,4,5\}$ ve $\{4,5\} r = \{1,3\}$ olduğundan $p(a_1) r = \{\{2,4,5\},\{1,3\}\}$ olur.

$p(a_1)$ ve $p(a_1) r$ parçalanışları aynı tipte olup $p(a_1) \circ p(a_1) r$ dir.

$a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in T_5$ olsun. $p(a_2) = \{\{1,2,5\},\{3,4\}\}$ dir.

$\{1,2,5\} r = \{2,3,5\}$ ve $\{3,4\} r = \{1,4\}$ olduğundan $p(a_2) r = \{\{2,3,5\},\{1,4\}\}$ olur.

$p(a_2)$ ve $p(a_2) r$ parçalanışları aynı tipte olup $p(a_2) \circ p(a_2) r$ dir.

Lemma 4.2.14. $a \in T_n$ ve $r \in S_n$ olsun. $a R ar$ ve $ra L a$ dır.

İspat: Öncelikle $a R ar \Leftrightarrow \ker(a) = \ker(ar)$ olduğunu Teorem 3.5 (ii)'den biliyoruz. Bu durumda $\ker(a) = \ker(ar)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\ker(a) \subseteq \ker(ar)$ olduğunu Teorem 3.8'de göstermiştik. O halde $\ker(ar) \subseteq \ker(a)$ olduğunu göstermeliyiz.

$(x, y) \in \ker(ar)$ alalım. O zaman

$$x(ar) = y(ar)$$

$(xa)r = (ya)r$ ve r permütasyon olduğundan $xa = ya$ olmalıdır. Bu nedenle $(x, y) \in \ker(a)$ dir. Dolayısıyla $\ker(a) = \ker(ar)$ olup $a \mathrel{R} ar$ dır.

Şimdi $ra \mathrel{L} a$ olduğunu göstermek için $ra \mathrel{L} a \Leftrightarrow im(ra) = im(a)$ olduğunu Teorem 3.5 (i)'de göstermiştik. Bu durumda $im(ra) = im(a)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$im(ra) \subseteq im(a)$ olduğunu Teorem 3.8'de göstermiştik. O halde $im(a) \subseteq im(ra)$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in im(a)$ alalım. Bu durumda $ya = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. r permütasyon olup $im(r) = X_n$ dir. O halde $y = zr$ olacak şekilde $z \in X_n$ vardır. Dolayısıyla $x = ya = (z)ra$ olup $x \in im(ra)$ olur. O halde $im(a) \subseteq im(ra)$ olup $im(ra) = im(a)$ dır. Yani, $ra \mathrel{L} a$ dır. ■

Lemma 4.2.15.

i) Eğer $a \in T_n$ ve $r \in S_n$ ise

$im(ar) = im(a)r = im(r^{-1}ar)$ ve $p(r^{-1}a) = p(a)r = p(r^{-1}ar)$ dır.

ii) A, $|A| = |im(a)|$ olacak şekilde herhangi bir alt küme ve $P \circ p(a)$ olan X in bir P parçalanışı için $im(b) = A$ ve $p(d) = P$ olacak şekilde $b, d \in \langle a : S_n \rangle$ vardır.

iii) e, f, $p(e) \circ p(f)$ olacak şekilde idempotentler olsunlar. $e = r^{-1} f r$ olacak şekilde X_n nin bir r permütasyonu vardır.

İspat: i) İlk olarak $im(ar) = im(a)r = im(r^{-1}ar)$ olduğunu gösterelim.

$a \in T_n$ ve $r \in S_n$ için $ra L a \Rightarrow im(ra) = im(a)$ olduğunu Lemma 4.2.14'te göstermiştik. Bu nedenle $r \in S_n$ için $r^{-1} \in S_n$ olup $ar L r^{-1}ar$ dır. Lemma 4.2.14'teki a yerine ar ve ra yerine ise $r^{-1}ar$ alırsak,

$$ar L r^{-1}ar \Rightarrow im(ar) = im(r^{-1}ar) \qquad \textbf{……(1)}$$

dır. Şimdi $im(ar) = im(a)r$ olduğunu gösterelim.

İlk olarak $im(a)r \subseteq im(ar)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $z \in im(a)r$ alalım. Bu durumda $z = yr$ olacak şekilde $y \in im(a)$ vardır. O halde $y \in im(a)$ olduğundan $y = xa$ olacak şekilde $x \in X_n$ vardır.

$$z = yr = (x)ar$$

olup $z \in im(ar)$ dır. Dolayısıyla, $im(a)r \subseteq im(ar)$ dır.

Şimdi $im(ar) \subseteq im(a)r$ olduğunu gösterelim. $z \in im(ar)$ alalım. Bu durumda $z = (x)ar$ olacak şekilde $x \in X_n$ vardır. $a \in T_n$ olup $xa = y$ olacak şekilde $y \in im(a)$ vardır.

$$z = (x)ar = (xa)r = yr$$

olup $z \in im(a)r$ dır. Dolayısıyla $im(ar) \subseteq im(a)r$ dır. Böylece

$$im(ar) = im(a)r \qquad \textbf{……(2)}$$

dır. **(1)** ve **(2)** den dolayı $im(ar) = im(a)r = im(r^{-1}ar)$ dır.

Şimdi $p(r^{-1}a) = p(a)r = p(r^{-1}ar)$ olduğunu gösterelim.

$p(a)$, $\ker(a)$ nın denklik sınıflarının kümesidir. $aRar \Leftrightarrow \ker(a) = \ker(ar)$ olduğunu Lemma 4.2.14'ten biliyoruz. O halde

$$aRar \Leftrightarrow p(a) = p(ar)$$

olur. Lemma 4.2.14'te a yerine $r^{-1}a$ alırsak, $aRar$ olduğundan $r^{-1}aRr^{-1}ar$ olur.

$r^{-1}aRr^{-1}ar \Leftrightarrow p(r^{-1}a) = p(r^{-1}ar)$ olur. **……(3)**

Şimdi $p(r^{-1}a) = p(a)r$ olduğunu gösterelim. $p(a) = \bigcup B_j$ ve $p(r^{-1}a) = \bigcup A_i$ olsun. $p(r^{-1}a)$ dan herhangi bir A_i kümesi alalım. $A_i = B_j r$ olacak şekilde bir j için B_j kümesinin var olduğunu göstermeliyiz. $\forall x \in A_i$ için $xr^{-1}a = k$ olacak şekilde $k \in X_n$ var olup $xr^{-1} \in B_j$ dir. $\forall x \in A_i$ için $x = xr^{-1}r \in B_j r$ dır. Dolayısıyla $A_i \subseteq B_j r$ olacak şekilde B_j vardır. Şimdi $p(a)r$ parçalanışından herhangi bir $B_j r$ alalım. $\forall x \in B_j r$ için $xr^{-1} \in B_j$ dir. Bu durumda $(xr^{-1})a = x(r^{-1}a) \in B_j a$ olup $x \in A_i$ dir. Böylece $B_j r \subseteq A_i$ olur. O halde $\forall A_i$ için $A_i = B_j r$ olacak şekilde B_j vardır. Dolayısıyla

$$p(r^{-1}a) = p(a)r \qquad \text{……(4)}$$

elde edilir. **(3)** ve **(4)** ten dolayı $p(r^{-1}a) = p(a)r = p(r^{-1}ar)$ dir.

iii) Bir e idempotentinin imajı e nin parçalanışının bir transversalidir. $\pi(e) \neq \pi(f)$ olup $\pi(e)=\pi(f)\rho$ ve $im(e)=im(f)\rho$ olacak şekilde bir ρ permütasyonu seçebiliriz.

Herhangi bir $x \in X_n$ ve x i içeren $B \in \pi(e)$ için $B = A\rho$ olacak şekilde $A \in \pi(f)$ vardır. O zaman $B \cap im(e) = A\rho \cap im(f)\rho = (A \cap im(f))\rho$ olur ve böylece $x\rho^{-1}f\rho = Af\rho = (A \cap im(f))\rho = B \cap im(e) = Be = xe$ dir. ■

Örnek 4.2.16. $\alpha \in T_6$ olsun. Bir $\rho \in S_6$ için $im(\alpha\rho) = im(\alpha)\rho = im(\rho^{-1}\alpha\rho)$ ve $\pi(\rho^{-1}\alpha) = \pi(\alpha)\rho = \pi(\rho^{-1}\alpha\rho)$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{3,5,6\} & \{1,4\} & \{2\} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ alalım.

$im(\alpha) = \{2,3,4\}$ ve $\pi(\alpha) = \{3,5,6\} \dot{\cup} \{1,4\} \dot{\cup} \{2\}$ dir. $A_1 = \{3,5,6\}$, $A_2 = \{1,4\}$, $A_3 = \{2\}$ alırsak $\{A_1, A_2, A_3\}$, X_6 nın bir parçalanışıdır. $\rho \in S_6$,

$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dir. Bu durumda

$$\alpha\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{3,5,6\} & \{1,4\} & \{2\} \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

olur. O halde $im(\alpha\rho) = \{1,5,6\}$ ve $im(\alpha)\rho = \{2,3,4\}\rho = \{1,5,6\} = im(\alpha\rho)$ ve

$\pi(\alpha)\rho = A_1\rho \dot{\cup} A_2\rho \dot{\cup} A_3\rho = \{2,3,5\} \dot{\cup} \{4,6\} \dot{\cup} \{1\}$ dir.

Diğer yandan $\rho^{-1}\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{2,3,5\} & \{4,6\} & \{1\} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ olup

$\pi(\rho^{-1}\alpha) = \{2,3,5\} \dot{\cup} \{4,6\} \dot{\cup} \{1\} = \pi(\alpha)\rho$ dir.

Ayrıca $\rho^{-1}\alpha\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{2,3,5\} & \{4,6\} & \{1\} \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ olup

$im(r^{-1}ar)=\{1,5,6\}=im(ar)$ ve $p(r^{-1}ar)=\{2,3,5\}\cup\{4,6\}\cup\{1\}=p(a)r$ dir.

Dolayısıyla $im(ar)=im(a)r=im(r^{-1}ar)$ ve $p(r^{-1}a)=p(a)r=p(r^{-1}ar)$ elde edilir. ■

Örnek 4.2.17. $e\in T_4$ de idempotent olsun. $e=r^{-1}er$ olacak şekilde $r\in S_4$ bulalım.

$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\end{pmatrix}\in T_4$ alalım.

$1r=1, 3r=3$ olmak üzere $2r$ ve $4r$, $X_4-\{1,3\}$ ile eşleşecek şekilde bir $r\in S_4$ belirleyebiliriz.

$2r=4$ ve $4r=2$ iken seçilen $r=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\in S_4$ olup

$r^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\in S_4$ dir. Dolayısıyla

$$r^{-1}er=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\end{pmatrix}=e$$

elde edilir.

$2r=2$ ve $4r=4$ iken seçilen $r=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in S_4$ olup

$r^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in S_4$ dir. Dolayısıyla

$$r^{-1}er=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\end{pmatrix}=e$$

elde edilir.

Örnek 4.2.18. $e, f \in T_6$ da idempotent ve $p(e) \circ p(f)$ olsun. $e = r^{-1} f r$ olacak şekilde $r \in S_6$ bulalım.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ olarak alalım.}$$

$p(f)r = p(e)$ ve $im(f)r = im(e)$ olacak şekilde bir $r \in S_6$ belirleyebiliriz. Bunun için $1r = 6, 4r = 2, 5r = 3, 6r = 4$ olmak üzere $2r$ ve $3r$ da $X_6 - \{2,3,4,6\}$ ile eşleşecek şekilde seçerek $r \in S_6$ yı bulabiliriz.

$2r = 5$ ve $3r = 1$ için seçilen $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ olup

$r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r^{-1} f r &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= e \end{aligned}$$

olur.

$2r = 1$ ve $3r = 5$ için seçilen $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ olup

$r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r^{-1} f r &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= e \end{aligned}$$

olur. ■

Teorem 4.2.19. $\alpha \in T_n$ olsun. α nın idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\alpha|_{im(\alpha)} = 1_{im(\alpha)}$ olmasıdır.

İspat: $\alpha \in T_n$ alalım. α , idempotent olsun. Bu durumda $\alpha^2 = \alpha$ dır. " $x \in im(\alpha)$ alalım. $y\alpha = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $x\alpha = (y\alpha)\alpha = y\alpha^2 = y\alpha = x$ dir. Dolayısıyla $x \in im(\alpha)$ iken $x\alpha = x$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha|_{im(\alpha)} = 1_{im(\alpha)}$ dir. Tersine; $\alpha|_{im(\alpha)} = 1_{im(\alpha)}$ olsun. " $x \in im(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olur. Herhangi bir $x \in X_n$ alalım. $x\alpha = (x\alpha)\alpha = x\alpha^2$ dir. Yani $x \in X_n$ için $x\alpha = x\alpha^2$ dir. Dolayısıyla α , idempotenttir. ■

Ayrıca, $\alpha \in T_n$ olsun. $\alpha^2 = \alpha$ olması için gerek ve yeter koşul X_n nin bir parçalanışı $\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_r\}$ ve $|im(\alpha)| = r$ olmak üzere $1 \le i \le r$ için $a_i \in A_i$ iken $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$ olmasıdır.

Örnek 4.2.20. $\alpha \in T_n$ bir idempotent olsun. $\alpha^2 = \alpha$ ve $\alpha|_{im(\alpha)} = 1_{im(\alpha)}$ oluşunu örnekleyelim.

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in T_6$ idempotentini alalım. O halde

$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha$ dır.

$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2,5\} & \{3,6\} & \{4\} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $im(\alpha) = \{2,3,4\}$ olup $\alpha|_{im(\alpha)} = \{2,3,4\}$ dir. Ayrıca $2\alpha = 2,\ 3\alpha = 3,\ 4\alpha = 4$ olup $\alpha|_{im(\alpha)} = 1_{im(\alpha)}$ dir.

$\forall a,b \in T_n$ ve $r \in S_n$ için $p(a) \circ p(r^{-1}ar)$ ve $p(a) \subseteq p(ab)$ olup $\langle a : S_n \rangle \subseteq \{d \in T_n : p(d), P \circ p(a)$ *yı içerir.*$\}$ olur. Diğer kapsama Lemma 4.2.21, Lemma 4.2.22 ve Önerme 4.2.24'ten elde edilir.

Her $a \in T_n$ için a nın her eşleniği a ya D-denktir ve a nın her eşleniğinin grup olan bir H-sınıfında olması için gerek ve yeter koşul a nın grup olan bir H-sınıfında olmasıdır. Eğer a, grup olan bir H-sınıfında değil ise $\langle a : S_n \rangle$ nın a nın D-sınıfından bir tane bile idempotent içerdiği açık değildir. Fakat bunu Lemma 4.2.21'de göstereceğiz.

Lemma 4.2.21. $\langle a : S_n \rangle$, $p(e) \circ p(a)$ olacak şekilde tüm e idempotentlerini içerir.

İspat: $|im(b)| = |im(d)|$ olan iki dönüşüm için $p(bd) = p(b)$ olması için gerek ve yeter koşulun $im(b)$ nın $p(d)$ nun bir transversali olması gerektiğini gösterelim.

$a = a_0$ alalım ve her bir $i = 1, 2, \mathbf{L}, n$ için $im(a_{i-1})$, $p(a_i)$ nın bir transversali olacak şekilde a_i ler a nın bir eşleniği olmak üzere

$$a_0, a_0a_1, a_0a_1a_2, \mathbf{L}$$

formundaki tüm çarpımları göz önünde bulunduralım. $\langle a : S_n \rangle$ sonlu olup

$$a_0a_1a_2 \mathbf{L} a_i = a_0a_1a_2 \mathbf{L} a_ia_{i+1} \mathbf{L} a_j$$

olacak şekilde $i < j$ vardır. $u = a_0a_1a_2 \mathbf{L} a_i$ ve $v = a_{i+1} \mathbf{L} a_j$ olarak tanımlayalım. O zaman $u = uv$, $p(u) = p(a) \circ p(v)$ olup $im(u) = im(v)$ ve $im(v)$, $p(v)$ nın bir

trasnversali olur. Böylece v nin $im(v)$ ye kısıtlanması birim dönüşüm olup v bir idempotenttir. O zaman Lemma 4.2.15 (iii)'den ispat biter. ■

α, β dönüşümleri için $D(\alpha,\beta)=\{x \in X : x\alpha \neq x\beta\}$ alalım.

Lemma 4.2.22. $\alpha, \beta \in T_n$ için $p(\alpha)=p(\beta)$ ve E_α, $p(e) \subseteq p(\alpha)$ olacak şekildeki T_n nin tüm e idempotentlerinin kümesi olsun. O zaman

$$\beta \in \langle \{\alpha\} \cup E_\alpha \rangle \subseteq \langle \alpha : S_n \rangle$$

dır.

İspat: $S=\langle \alpha : S_n \rangle$ olsun ve $p(\alpha)=p(\beta)$ olacak şekilde $\beta \in T_n$ alalım. $\beta \in S$ olduğunu göstermek için $\beta \neq \alpha$ ise yukarıda tanımladığımız $D(\alpha,\beta)$ kümesini $|D(\beta,\delta)|<|D(\alpha,\beta)|$ olacak şekilde $\delta \in S$ bularak genişletebileceğimizi göstermek yeterli olacaktır ve burada $S=\langle \alpha : S_n \rangle \neq \langle \delta : S_n \rangle$ olduğuna da görelim. Böylece sonuç $|D(\alpha,\beta)|$ üzerinden tümevarım ile açıktır.

Genelliği bozmaksızın $im(\alpha) \neq im(\beta)$ olduğunu varsayabiliriz.

Eğer $im(\alpha)=im(\beta)$ ise $D(\alpha f,\beta)=D(\alpha,\beta)$ olacak şekilde bir $f \in S$ idempotentini seçerek α yerine αf yi alabiliriz.

$v\alpha^{-1} \neq v\beta^{-1}$ olacak şekilde $v \in im(\alpha)$ ve $w \in X - im(\alpha)$ alalım.

f yi $p(f) \subseteq p(\alpha)$ olmak üzere $im(\alpha)$, $p(f)$ nin bir transversali, $vf=wf=w$ ve her $u \in im(\alpha)-\{v\}$ için $uf=u$ olacak şekilde seçelim.

$w=vf \in im(\alpha f)-im(\alpha)=im(\alpha f)-im(\beta)$ ve $D(\alpha f,\beta)=D(\alpha,\beta)$ iken $p(\alpha f)=p(\alpha)=p(\beta)$ olur.

Şimdi $Ab = z$ olacak şekildeki herhangi bir $z \in im(b) - im(a)$ ve $A \in p(af) = p(a)$ olmak üzere

$$" x \in X - A \text{ için } Ad = Ab \text{ ve } xd = xa$$

olacak şekilde $d \in S$ nun var olduğunu gösterelim.

$Aa = y$ olsun. Bir $e \in S$ idempotentini $p(e) \circ p(a)$, $ye = ze = z$ ve her $u \in im(a) - \{y\}$ için $ue = u$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $d = ae$ aradığımız dönüşüm olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.2.23. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. $p(a) = p(b)$ dır ve $im(a) = im(b) = \{1,2,3\}$ olup $D(a,b) = \{1,2,3,6\}$ dir. $v = 3$ alalım. $3a^{-1} = \{1,2,3\}$ ve $3b^{-1} = \{6\}$ dir. $w = 4$ olsun. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alınırsa $af = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olup $im(af) = \{1,2,4\} \neq im(b)$ ve $D(af,b) = D(a,b)$ olur. a yerine af alınırsa $af = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olur.

Şimdi $v = 3$, $A = \{6\}$, $y = 2$ alalım. O zaman $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ alınırsa $d = ae = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olup $|D(b,d)| = 3 < 4 = |D(a,b)|$ dir.

Önerme 4.2.24. $a \in T_n$ için $\langle a : S_n \rangle = \{b \in T_n : p(b), P \circ p(a)$ *yı içerir.*$\}$ dir.

İspat: $p(b)$, $p(a)$ yı içerecek ve $|im(b)| = |im(a)| - 1$ olacak şekilde herhangi bir $b \in X$ dönüşümü için $p(d) \circ p(s) \circ p(a)$ ve $b = ds$ olacak şekilde d ve s

dönüşümlerinin var olduğunu gösterelim. O zaman sonuç tümevarım kullanılarak Lemma 4.2.15 ve Lemma 4.2.22'den elde edilir.

$\rho(\alpha)=\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_{r-1}, A_r\}$, $\rho(\beta)=\{A_1, A_2, \mathbf{L}, A_{r-1} \cup A_r\}$ ve $i=1,2,\mathbf{L},r-1$ için $A_i\beta = x_i$ olsun. $\rho(\delta)=\rho(\alpha)$ olacak şekilde bir δ idempotenti seçelim ve $i=1,2,\mathbf{L},r$ için $y_i = A_i\delta$ olsun. $\{y_i : i=1,2,\mathbf{L},r-1\}$, P nin bir transversali ve y_{r-1} ile y_r, P nin aynı sınıfında olacak şekilde $P \circ \rho(\alpha)$ parçalanışını seçelim. $\rho(\sigma)=P$ ve $i=1,2,\mathbf{L},r-1$ için $y_i\sigma = x_i$ olacak şekilde bir σ dönüşümü alalım. Bu durumda $\beta=\delta\sigma$ olur. ■

Önerme 4.2.24'teki $\langle \alpha : S_n \rangle$ nin tanımından ve Lemma 4.2.15'ten $\langle \alpha : S_n \rangle$, α ve S_n tarafından üretilen yarıgrup içinde simetrik grubun tümleyeni olur. Aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi bu şaşırtıcı sonuç sonsuz X kümesi üzerindeki S_X-normal yarıgruplar ve sonsuz S_n-normal yarıgruplar için genelde doğru değildir. (Sonsuz X kümesi üzerindeki simetrik grup S_X ile gösterilir. Eğer X in bir dönüşümler yarıgrubu, S_X in elemanları ile konjügasyon altında sabit kalıyor ise bu yarıgruba S_X*-normal* denir.)

Örnek 4.2.25. X tam sayıların kümesi ve α, $x \geq 0$ için $x\alpha = x+1$ ve $x<0$ için $x\alpha = x$ olarak tanımlanan X in bir dönüşümü olsun. α, $|X - im(\alpha)|=1$ olan birebir dönüşümdür. σ, $\forall x \in X$ için $x\sigma = x+1$ ile tanımlı X in bir permütasyonu olsun. Bu durumda, $\alpha\sigma \in \langle \{\alpha\}, S_X \rangle - \langle \alpha : S_X \rangle$ dir. Gerçekten β ve δ birebir dönüşümleri için $|X - im(\beta\delta)| = |X - im(\beta)| + |X - im(\delta)|$ dir. Böylece $\alpha\sigma \in \langle \alpha : S_X \rangle$ ise $\alpha\sigma$, α nın bir eşleniğine sahip olmalıdır. Bununla birlikte $\alpha\sigma$, X in hiçbir elemanını sabit bırakmadığı için bu imkansızdır fakat α nın herhangi bir $\rho^{-1}\alpha\rho$ eşleniği X in sonsuz çoklukta noktasını sabitler. ($x\rho^{-1} < 0$ olacak şekildeki her bir $x \in X$ için $x\rho^{-1}\alpha\rho = x\rho^{-1}\rho = x$ dir.)

İki S_n - $(S_X$ - $)$ normal yarıgrubun kesişiminin de yine bir S_n - $(S_X$ - $)$ normal yarıgrup olduğunu göstermek kolaydır. LEVI I., "Normal semigruops of one-to-one transformations" adlı çalışmasında sonsuz bir X kümesinin bütün birebir dönüşümlerinin S_X-normal yarıgruplarını tanımladı. Bu tanımdan iki S_X-normal yarıgrubun birleşimi bir yarıgrup olmak zorunda olmadığı anlaşılır. Bununla birlikte herhangi $a,b \in T_n - S_n$ için $p(a) \subseteq p(ab)$ olduğundan ve Önerme 4.2.24'ten

$$\langle a : S_n \rangle \cup \langle b : S_n \rangle = \langle a, b : S_n \rangle$$

bir S_n-normal yarıgruptur. Böylece iki S_n-normal yarıgrubun birleşimi yine bir S_n-normal yarıgrup olup aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 4.2.26. S, bir S_n-normal yarıgrup olsun. S nin S_n-normal alt yarıgruplarının kümesi $S(\cup, \cap)$ bir modüler latis oluşturur.

Teorem 4.2.27. Bir S_n-normal yarıgrup, idempotentleri tarafından doğurulur.

İspat: Önerme 4.2.24'ten a, X in herhangi bir dönüşümü ve e, $p(e) \circ p(a)$ olacak şekilde bir idempotent ise $\langle a : S_n \rangle = \langle e : S_n \rangle$ olduğu anlaşılır ve bu nedenle Teorem 4.2.27 doğrudur. ■

$1 \le r \le n$ için $T(n,r)$ nin bir n elemanlı kümenin r tane alt kümeye farklı tipteki parçalanışlarının sayısını gösterdiğini hatırlayalım. P, X in bir parçalanışı ve $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, P nin sınıflarının genişliği olsun ve P nin t_i genişliğindeki bütün m_i sınıflarını içerdiğini varsayalım. O zaman P nin, $t = \{(m_i, t_i) : i = 1,2,\ldots,k\}$ tipindeki bir parçalanış olduğunu söyleriz.

Lemma 4.2.28. $T(n,r)=\sum_{k=1}^{\min(r,n-r)}T(n-r,k)$ dir.

Üretici fonksiyonların klasik parçalanışını kullanarak Lemma 4.2.29'u göstermek mümkündür. Bunu HARDY G.H. ve WRIGHT E.M. nin "Sayılar Teorisi'ne Başlangıç" çalışmasında görebiliriz.

İspat: P nin, X in r sınıfa sahip olan $t=\{(m_i,t_i):i=1,2,\mathbf{L},k\}$ tipindeki bir parçalanışı olduğunu varsayalım. Yani $m_1+m_2+\mathbf{L}+m_k=r$ dir. Y, P nin bir transversali olsun. P nin $X-Y$ ye kısıtlaması,

$$t_1>1 \text{ ise } t_1=\{(m_i,t_i-1):i=1,2,\mathbf{L},k\}$$

$$t_1=1 \text{ ise } t_2=\{(m_i,t_i-1):i=2,\mathbf{L},k\}$$

tipindeki $X-Y$ nin parçalanışıdır. t_1 ve t_2 nin sırasıyla r ve $r-m_1$ sınıfa sahip olan $(n-r)$ elemanlı kümenin parçalanış tipleri olduğuna dikkat edelim. Böylece her bir t yu, $k\le r$, $k\le n-r$ iken $(n-r)$ elemanlı bir kümenin k tane sınıfa sahip bir parçalanış tipi ile tek türlü ilişkilendirebiliriz. Bu yüzden,

$$T(n,r)\le\sum_{k=1}^{\min(r,n-r)}T(n-r,k)$$

dir.

Tersine, $1\le k\le\min\{r,n-r\}$ için Q, k tane sınıf içeren $t_3=\{(m_i',t_i'):i=1,2,\mathbf{L},s\}$ tipindeki X in $(n-r)$ elemanlı Z alt kümesinin bir parçalanışı olsun. g, t_3 ün sınıflarından $X-Z$ ye bir birebir fonksiyon olsun. $Q=\{\{x\}\cup xg^{-1}:x\in X-Z\}$

$$k = r \text{ ise } X \text{ in } \left\{\left(m_i, t_i+1\right) : i = 1, 2, \ldots, s\right\}$$

$$m_1 = r - k \text{ iken } k < r \text{ ise } \left\{\left(m_1, 1\right), \left(m_1, t_1+1\right), \ldots, \left(m_s, t_s\right)\right\}$$

tipindeki bir parçalanışıdır. Böylece eşitlik elde edilir. ■

T_n nin her L-sınıfı L için $K(n,0)$ boş küme olmak üzere $L \subset K(n,r) - K(n,r-1)$ olacak şekilde bir r, $1 \leq r \leq n$ nin var olduğunu hatırlayalım.

Teorem 4.2.29.

i) Her $1 \leq r \leq n-1$ ve T_n nin $L \subset K(n,r) - K(n,r-1)$ olacak şekildeki her L-sınıfı L için $\langle E : S_n \rangle = K(n,r)$ olacak şekilde L de idempotentlerin bir E alt kümesi vardır.

ii) $K(n,r)$ nin S_n-idempotent rankı, $T(n,r)$ dir.

iii) $1 \leq r \leq n$ olmak üzere her bir r için P_r, her biri S_n-idempotent rankı 1 olan S_n-normal yarıgrubun bir bölüm yarıgrubu olan $T(n,r)$ tane alt yarıgrubun bir bandıdır.

İspat: i) r ve L yi teoremdeki gibi alalım. $A \subset X$, L deki bir dönüşümün imajı olsun. r tane sınıfa sahip bir $\mathrm{t} = \{(m_i, t_i) : i = 1, 2, \ldots, s\}$ parçalanış tipi verilsin. $im(e) = A$, $\mathrm{p}(e) = \mathrm{t}$ olacak şekilde bir $e \in T_n$ idempotentinin varlığının gösterilmesi yeterli olacaktır.

Q, $t_1 > 1$ ise $j = 1$ ve $t_1 = 1$ ise $j = 2$ olacak şekilde $X - A$ nın $\{(m_i, t_i - 1) : i = j, \ldots, s\}$ tipindeki bir parçalanışı ve g, Q nun sınıflarından A ya giden bir birebir fonksiyon olsun. A üzerinde e yi $x \in X - A$ için B, x i içeren Q sınıfı olmak üzere $xe = Bg$ olarak tanımlayalım.

ii) Yukarıdan anlaşıldığı gibi $K(n,r)$ nin S_n-idempotent rankı, en fazla $T(n,r)$ dir. Ayrıca, C, $\langle C:S_n\rangle = K(n,r)$ olacak şekilde T_n deki idempotentlerin herhangi bir kümesi ise her $f \in C$ için $|im(f)| < r+1$ dir. $a \in K(n,r)$, $|im(a)| = r$ ise $a = \rho^{-1} t \rho b$ olacak şekilde $t \in C$, $\rho \in S_n$, $b \in T_n$ vardır, bu yüzden $p(t) \circ p(\rho^{-1} t \rho) \subseteq p(a)$ dır. $p(t)$ ve $p(a)$ nın her biri r tane sınıf içerdiğinden $p(t) \circ p(a)$ elde edilir. Bu nedenle, $K(n,r)$ nin S_n-idempotent rankı, en az $T(n,r)$ dir.

iii) E, (i) de inşa edilen $K(n,r)$ nin S_n-doğuray kümesi ve her $e \in E$ için $S(e) = \langle e:S_n\rangle / (\langle e:S_n\rangle \cap K(n,r-1))$ olsun. Bu durumda $S(e)$, P_r nin bir alt yarıgrubudur. e ve f, E nin farklı elemanları ise $p(e) \neq p(f)$ olup herhangi bir $b \in \langle e:S_n\rangle \cap K(n,r)$ ve $c \in \langle f:S_n\rangle \cap K(n,r)$ için $p(b) \neq p(c)$ olur. Böylece, $S(e) \cap S(f) = 0$ dır. Üstelik $S(e)S(f) = S(e)$ dir. Gerçekten herhangi bir $u \in \langle e:S_n\rangle$, $v \in \langle f:S_n\rangle$ için $p(u) \subseteq p(uv)$ olup $S(e)S(f) \subseteq S(e)$ dir. Ayrıca, $im(e) = im(f)$ olduğundan $ef = e$ dir. Dolayısıyla $S(e) \subseteq S(e)S(f)$ dir. ■

5. SONUÇLAR

Bu bölümde konumuzla ilgili yapılmış olan Levi, McAlister, McFadden'nin 2000 yılındaki "Groups Associated with Finite Transformation Semigroups" ve 2001 yılındaki "A_n-normal Semigroups" ile Araújo, Cameron, Mitchell ve Neunhöffer'in 2013 yılındaki "The Classification of Normalizing Groups" adlı çalışmalarındaki önemli sonuçlara yer vereceğiz.

U, sonlu n elemanlı bir N kümesinin dönüşümlerinin kümesi ve G de N üzerindeki permütasyonların kümesi olsun. $u \in U$ için

$$K(u) = \{k \in G : rank(uku) = rank(u)\} = \{k \in G : T_n \text{ de } u \text{ H } uku \text{ dir.}\}$$

ve

$$rank(u) = |im(u)|$$

olarak tanımlansın.

Sonuç 5.1. $u \in U$ ve $r = rank(u) < n$ olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $rank(xy) = r$ olacak şekilde rankı r olan $x, y \in \langle u : G \rangle$ elemanları vardır.

ii) $rank(xy) = r$ olacak şekilde birim olmayan $x, y \in \langle u : G \rangle$ elemanları vardır.

iii) $K(u)$ ¹ Æ dir.

iv) u, $\langle u : G \rangle$ de regülerdir.

v) u, $\langle G, u \rangle$ de regülerdir.

İspat: Levi, McAlister, McFadden (2000), Teorem 2.3'e bakınız. ■

Tanım 5.2. u^2 bir boş dönüşüm ise u ya *derecesi* 2 *olan nilpotent* denir. X, $dom(u) \cup im(u) = X_n$ özelliğini sağlayan derecesi 2 olan tüm birebir nilpotentlerin ürettiği yarıgrup olsun. Bu yarıgrup S_n-normal yarıgruptur. X in bu şekildeki nilpotent doğuraylarına *x -nilpotent* denir. (Levi, McAlister, McFadden, 2000)

Sonuç 5.3. $n = 2m \geq 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$ ve u bir x-nilpotent olsun.

i) $\langle u : A_n \rangle$ nin rankı m olan her bir D-sınıfı $2(m!)$ elemana sahiptir.

ii) $\langle u : S_n \rangle$ nin rankı m olan her bir D-sınıfı $4(m!)$ elemana sahiptir.

iii) $\langle u : A_n \rangle \neq \langle u : S_n \rangle$ dir.

iv) K, $K(u)$ tarafından doğurulan G nin alt grubunu göstermek üzere $\langle u : A_n \rangle$ ve $\langle u : S_n \rangle$ nin rankı m olan D-sınıflarının konjugesi $|A_n| / |K| = (n!/2) / (m!)^2 = n! / 2(m!)^2$ tanedir.

v) $\langle u : A_n \rangle$, rankı m olan $\left\lfloor n! / 2(m!)^2 \right\rfloor 2(m!) = n!/m!$ tane elemana sahiptir.

vi) $\langle u : S_n \rangle$ rankı m olan $2(n!)/m!$ tane elemana sahiptir.

vii) $t < m$ olmak üzere rankı en fazla t olan $\langle u : A_n \rangle$ ve $\langle u : S_n \rangle$ nin elemanlarının kümesi aynıdır ve her birinin eleman sayısı $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i}^2 i!$ dır.

İspat: Levi, McAlister, McFadden (2000), Teorem 3.4'e bakınız. ■

Sonuç 5.4. $S = \langle u : A_n \rangle$, $t < m$ ve $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ kümesi, her $i, j \in I$ için $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ve eğer A, N nin m elemanlı bir alt kümesi ise $A \in \mathcal{A}$ veya $N - A \in \mathcal{A}$ olacak şekilde N nin m elemanlı bir alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Bu durumda S nin idealleri herhangi bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ için

$J_t(S)=\{b\in S : rank(b)\le t\}$ ve $J_B=\{b\in B : im(b)\in B \text{ veya } dom(b)\in B\}$ şeklindedir.

İspat: Levi, McAlister, McFadden (2000), Bölüm 4'e bakınız. ■

I_n birebir dönüşümler yarıgrubu, E_k, rankı en fazla k olan I_n nin tüm idempotentlerinin yarılatisi ($k\le n$, k pozitif tamsayı), J_k, rankı en fazla k olan tüm dönüşümleri içeren I_n nin bir ideali ve $\{i_N\}$, N üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere F, D ve C kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

F kümesi $\varnothing, \{i_N\}, E_t - E_m$ veya $(E_t - E_m)\cup\{i_N\}$ ($m<t<n$ olacak şekildeki t tamsayısı için);

u, x-nilpotenti için $D=\{v\in \langle u : A_n\rangle : rank(v)=m\}$;

C, J_{m-1} i ve rankı en fazla $m-1$ olan dönüşümleri içeren tam S_n-normal yarıgruptur.

Sonuç 5.5. S bir A_n-normal yarıgrup ise $n\neq 0 \pmod 4$ ve S yukarıda tanımlanmış olan F, D ve C alt kümelerinin bir ayrık birleşimidir.

İspat: Levi, McAlister, McFadden (2001), Teorem 2'ye bakınız. ■

Tanım 5.6. Her $a\in T_n - S_n$ için $\langle a, G\rangle - G=\langle g^{-1}ag : g\in G\rangle$ ise $G\le S_n$ alt grubuna a *-normalizing* denir. Eğer her $a\in T_n - S_n$ için G, a-normalizing ise G ye *normalizing* denir. (Araújo, Cameron, Mitchell ve Neunhöffer, 2013)

KAYNAKLAR

ARAUJO, J., CAMERON, P.J., MITCHELL, J.D., NEUNHÖFFER, M., 2013. The classification of normalizing semigroups. Journal of Algebra, 373: 481-490.

CLIFFORD, A.H., PRESTON, G.B., 1967. The algebric of semigroups. II Math. Surveys of the American Math. Soc. 7: pg. 241.

HARDY, G.H., WRIGHT, E.M., 1960. An introduction to the theory of numbers. Fourth Edition, Oxford University Press.

HOWIE, J.M., McFADDEN, R.B., 1990. Idempotent rank in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 114A: 161-167.

HOWIE, J. M., 1995. Fundamentals of semigroup theory. Clarendon Pres., Oxford, 315s.

KARAKAŞ, H. İ., 2008. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402s.

LEVI, I., 1991. Normal semigroups of one to one transformations. Proc. Edinburgh. Math. Soc. 34: 65-76.

LEVI, I., McFADDEN, R.B., 1994. S_n -normal semigroups. Proc. Edinburgh. Math. Soc. 37: 471-476.

LEVI, I., Green's relations and G-semigroups, 1998. Math. Japon. 47 ,no. 2, 305-310.

LEVI, I., McALISTER, D.B., McFADDEN, R.B., 2000. Groups associated with finite transformation semigroups. Semigroup Forum, Vol. 61: 453-467.

LEVI, I., McALISTER, D.B., McFADDEN, R.B., 2001. A_n -normal semigroups. Semigroup Forum, Vol. 62: 173-177.

MALCEV, A.I., 1952. Symmetric groupoids. Math. Sb., (N.S.) 31: 136-151.

SCOTT, W.R., 1965. Group theory. Prentice-Hall, New Jersey: Chapter 11.

SYMONS, J.S.V., 1976. Normal transformation semigroups. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 22: 385-390.

ÖZGEÇMİŞ

06/12/1988 tarihinde Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. 2007 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. Bu öğrenim sürecinin 2010-11 güz dönemini ERASMUS öğrenci değişim programı kapsamında Linköping Universitet Linköping/İSVEÇ'te sürdürdü. 2011 yılında Çukurova Üniversitesi Tezli Yüksek Lisans eğitimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir.