06

Niğde Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 7 Sayı1- 2, (2003), 31-47

ZAMANLA DEĞİŞEN YÜKLER ALTINDA VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

Beytullah TEMEL[1] ve Faruk Fırat ÇALIM[2]
[1]*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 01330 Balcalı / ADANA*
[2] *Mustafa Kemal Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, HATAY*

ÖZET

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında davranışı Laplace uzayında incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk toerisi kullanarak elde edilmiş ve silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de gözönüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, izotrop ve lineer viskoelastik kabul edilmiştir. Viskoelastik bünye denklemleri Boltzmann-Volterra formunda yazılmaktadır. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmektedir. Viskoelastik modelin yarı-statik ve dinamik davranışı için sayısal sonuçlar grafik formda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Boltzmann-Volterra teorisi, Viskoelastik malzemeler, Helisel çubuklar, Ters Laplace dönüşümleri

FORCED VIBRATION OF VISCOELASTIC HELICAL RODS UNDER TIME-DEPENDENT LOADS

ABSTRACT

In this study, the dynamic behaviour of cylindrical helical rods made of linear viscoelastic materials under time-dependent loads are investigated in the Laplace domain. The governing equations for naturally twisted and curved spatial rods obtained using the Timoshenko beam theory are rewritten for cylindrical helical rods. The curvature of the rod axis, effect of rotary inertia and, shear and axial deformations are considered in the formulation. The material of the rod is assumed to be homogeneous, isotropic and linear viscoelastic. The viscoelastic constitutive equations are written in the Boltzmann-Volterra form. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically with the help of the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. Numerical results for quasi-static and dynamic response of viscoelastic models are presented in the form of graphics.

Key Words : Boltzmann-Volterra theory, Viscoelastic materials, Helical rods, Inverse Laplace transforms

1.GİRİŞ

Eğri eksenli ve helisel çubukların dinamik davranışı önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Helisel çubuklar, helisel merdivenler gibi yapı elemanı, araç süspansiyon sistemi ve araç sübap yayı gibi makina elemanı olarak kullanılmaktadır. Mühendislik problemlerinin analizlerinde, basitliği nedeniyle, malzemenin elastik olduğu kabulü yapılmaktadır. Gerçekte ise bu malzemelerin hemen hepsi, bünyelerindeki iç sürtünmeden dolayı az veya çok viskoelastik özelliğe sahiptir. Dolayısı ile malzeme davranışının doğru yansıtılması bakımından viskoelastik bünye bağıntısı, elastik bünye bağıntısından daha gerçekçi olmaktadır. Birçok araştırmacı, çeşitli modeller kullanarak viskoelastik malzemelerin dinamik davanışını incelemişlerdir.

Flügge [1], viskoelastik kirişlerin Laplace dönüşüm uygulamalarını incelemiştir. Kıral ve ark. [2], eğri eksenli viskoelastik çubukların hareket denklemlerini vermişlerdir. Fakat bu problemi etkin olarak çözememişlerdir. Analizlerinde Taşıma Matrisi metodunu kullanmışlardır. Ters Laplace dönüşümü için "Maximum Degree of Precision" yöntemi kullanılmış olup, bu yöntem çok kısa zaman aralığı için doğru sonuç vermektedir. Findley ve ark. [3], viskoelastik kirişlerin davranışını idare eden diferansiyel denklemleri çözmek için mütekabiliyet (karşıtlık) prensibi ve süperpoziyon prensibini kullanmışlardır. Christensen [4], Fourier dönüşümü kullanarak viskoelastik kirişlerin dinamik davranışını incelemiştir. Kompleks geometri ve bünye bağıntılarının kapalı çözümü mümkün olmadığından, sayısal çözüm tekniklerini adapte etmiştir.

Kompleks geometriler için, birçok araştırmacı tarafından sonlu elemanlar uygulamaları sunulmuştur. White [5], yarı-statik bir problemi sonlu elemanlar yöntemiyle çözebilmek için, zamana bağlı terimlere sonlu farklar yaklaşımı uygulayarak, Hereditary integral tipinde bünye bağıntılarını kullanmıştır. Addey ve Brebbia [6], ortak elastik problemin ters dönüşümünü elde etmek için yaklaşık bir yöntem kullanmışlardır. Chen ve Lin [7], viskoelastik malzeme modeli için zamana bağlı sünme ifadesini kullanarak kirişlerin dinamik davranışlarını çalışmışlardır. Yamada ve ark. [8], viskoelastik kiriş ve çubukların doğal frekanslarını incelemişlerdir.

Chen [9], lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin yarı-statik ve dinamik davranışını incelemiştir. Formülasyonda Poisson oranı sabit, sadece elastisite modülü viskoelastik olarak alınmıştır. Normal gerilme-şekil değiştirme ve kayma gerilmesi-şekil değiştirme bağıntılarını aynı Prony serisine açmıştır. Laplace dönüşümü yardımıyla zaman terimini yok etmek için Hybrid metodunu kullanmış ve ortak denklemleri sonlu elemanlar ile çözmüştür. Aköz ve Kadıoğlu [10], Gâteaux diferansiyeli kullanarak elastik dairesel kirişler için karışık sonlu elemanlar yöntemini incelemişlerdir. Benzer bir yaklaşım kullanarak, Aköz ve Kadıoğlu [11], viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişinin yarı-statik ve dinamik davranışını çalışmışlardır. Kadıoğlu ve Aköz [12], hem Poisson oranı hem de elastisite modülünü viskoelastik alarak dairesel kirişlerin yarı-statik ve dinamik davranışı için gevşeme modülünün genel formunu incelemişlerdir. Olayı idare eden diferansiyel denklem ve sınır şartlarındaki zamana bağlı türevlerden kurtulmak için Laplace–Carson dönüşümünü kullanmışlardır. Ilyasov ve Aköz [13] plakların statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Viskoelastik bünye denklemlerini Boltzmann-Volterra formunda ifade etmişlerdir.

Park ve Schapery [14], Prony serilerine dayanan lineer viskoelastik malzeme fonksiyonları ile modülleri arasında dönüşümü sağlayan sayısal bir metot önermişler ve bu metodu polimerik malzemeler için seçilen deneysel verileri kullanarak test etmişlerdir.

Schapery ve Park [15], bir önceki çalışmalarında önerdikleri modelin doğruluğunu sayısal örnekler üzerinde göstermişlerdir. Park [16], viskoelastik sönümleyicilerin matematiksel modeli için farklı yaklaşımları incelemiş ve diğer teorik yöntemlerle kıyaslamıştır.

Kim ve Kim [17], periyodik yük altında tabakalı kirişlerin parametrik kararsızlığını çalışmışlardır. Lineer viskoelastik bünye denklemleri için Boltzmann süperpozisyonu ile Hamilton prensibini kullanarak çubuk davranışını idare eden denklemleri elde etmişlerdir.

Yukarıda bahsedildiği gibi, viskoelastik modeller doğru eksenli çubuklar, plaklar ve kabuklar gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte, yazarların bilgisine göre, helisel çubukların viskoelastik analizi ile ilgili yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bu araştırmada, helisel çubukların viskoelastik analizi için etkin bir yöntemin uygulaması gerçekleştirilecektir.

Bu çalışmada, viskoelastik helisel çubukların zamana bağlı yükler altında yarı-statik ve dinamik davranışları Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak uzaysal eğri eksenli çubukların davranışını idare eden denklemler, silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Viskoelastik bünye denklemleri Boltzmann-Volterra formunda yazılmaktadır. Formülasyonda hem Poisson oranı hem de elastisite modülü kompleks seçilmektedir. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel

denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak [18-20] problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [21-23] kullanılmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi yüzlerce eleman ile tanımlamak gerekirken, önerilen bu yöntemde sadece birkaç elemanla tanımlayarak istenilen hassasiyette kesin sonuçlar elde edilmektedir. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler de tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla Laplace uzayında istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir. Helisel çubukların elastik-statik, yarı-statik, elasto-dinamik ve viskoelastik-dinamik davranışları için sayısal sonuçlar grafik formda sunulmuştur.

2. ÇUBUK GEOMETRİSİ

Tabii olarak eğilmiş ve burulmuş uzaysal narin bir çubuğu gözönüne alalım. Çubuk ekseni, geometrik merkezi G'nin yörüngesi olarak tanımlanır. t=0 anındaki durum vektörü $\mathbf{r}^o$=$\mathbf{r}^o(s, 0)$ olarak verilir (Şekil 1.a). Herhangi bir t anında, çubuk ekseninin orijini ile **t**, **n**, **b** birim vektörleri olarak tanımlanan bir hareketli koordinat takımı seçilmiştir.

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}^o(s,t)}{\partial s} \tag{1}$$

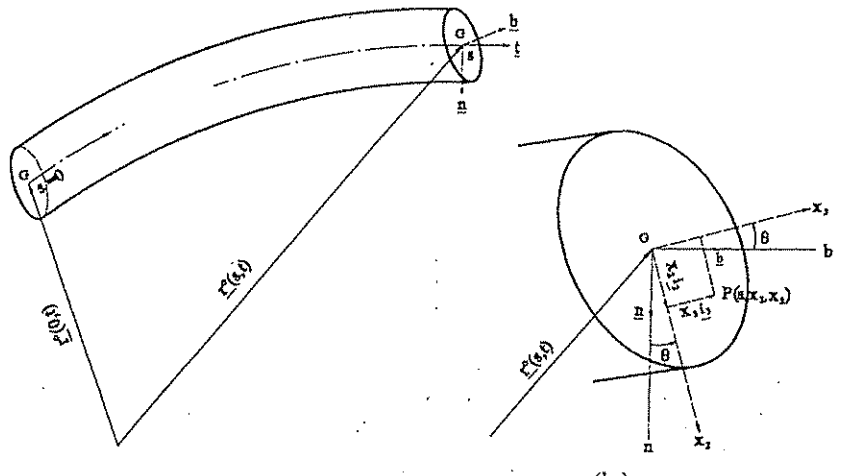
Burada **t**, **n** ve **b** sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektör olarak tanımlanır. **t**, **n**, **b** birim vektörleri arasındaki diferansiyel bağıntılar Frenet formülleri [24] ile verilmektedir.

$$\partial \mathbf{t}/\partial s = \chi \mathbf{n} \ , \quad \partial \mathbf{n}/\partial s = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t} \ , \quad \partial \mathbf{b}/\partial s = -\tau \mathbf{n} \tag{2}$$

Burada, χ ve τ eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır. χ, eğrilik daima pozitiftir ve sağ el kuralına göre, **t** artan s yönünde ilerlediği zaman τ pozitiftir. χ ve τ ifadeleri yer vektörü $\mathbf{r}^o(s, t)$'nin türevleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\chi = \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}^o}{\partial s^2} \right| , \qquad \tau = -\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial s} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}^o}{\partial s^2} \times \dfrac{\partial^3 \mathbf{r}^o}{\partial s^3}}{\chi^2} \tag{3}$$

Özel olarak, düzlemsel çubuklar için τ=0 ve doğrusal çubuklar için χ=τ=0 alınmaktadır.



Şekil 1. Çubuk geometrisi

Kesitin tabii burulmasını gözönüne almak için, x_1 ekseni t kesitin doğrultusu ve x_2, x_3 kesitin asal eksenleri olmak üzere, ikinci bir dik koordinat takımı (x_1, x_2, x_3) seçilmektedir (Şekil 1.b). $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ ve $\mathbf{i}_3$ birim vektörleri sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 eksenleri üzerindedir. (Şekil 1.b)'den (4) ifadesi yazılabilir.

$$\mathbf{t}=\mathbf{i}_1, \qquad \mathbf{n}=\mathbf{i}_2\cos\theta-\mathbf{i}_3\sin\theta, \qquad \mathbf{b}=\mathbf{i}_2\sin\theta+\mathbf{i}_3\cos\theta \tag{4}$$

3. HAREKET DENKLEMLERİ

Çubuk ekseni üzerinde herhangi bir *s* noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^o(s, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\boldsymbol{\Omega}^o(s, t)$ olarak gösterilsin. Ayrıca, çubuk ekseni üzerinde birim boyun bağıl uzaması $\boldsymbol{\gamma}^o(s, t)$ ve bağıl dönmesi $\boldsymbol{\omega}^o(s, t)$ olarak tanımlanır.

$\mathbf{T}(s, t)$ vektörü ile *t* anında *s* noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(s, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(s, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(s, t)$ olsun.

Yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile, geometrik uygunluk ve hareket denklemleri [18, 25] ile verilmektedir.

$$\boldsymbol{\gamma}^o=\frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial s}+\mathbf{t}\times\boldsymbol{\Omega}^o, \qquad \boldsymbol{\omega}^o=\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^o}{\partial s} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial s}+\mathbf{p}^{(ex)}=\mathbf{p}^{(in)}, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial s}+\mathbf{t}\times\mathbf{T}^o+\mathbf{m}^{(ex)}=\mathbf{m}^{(in)} \tag{6}$$

$\mathbf{p}^{in}$ kütlesel atalet kuvveti ve $\mathbf{m}^{in}$ kütlesel atalet momenti, x_1, x_2 ve x_3 eksenleri üzerindeki bileşenleri olarak tanımlanır.

$$p_i^{(in)}=-\rho A\frac{\partial^2 U_i^o}{\partial t^2}, \qquad m_i^{(in)}=-\rho I_i\frac{\partial^2 \Omega_i^o}{\partial t^2} \qquad (i=1, 2, 3) \tag{7}$$

Burada ρ, kütlesel yoğunluktur.

Kesitin herhangibir noktasındaki şekil değiştirme tansörü e_{ij}, bu noktayı içine alan kesitin geometrik merkezinin rölatif birim uzaması γ^o ve rölatif birim dönmesi ω^o ile elde edilebilmektedir [2].

$$\begin{aligned} e_{11}&=\gamma_1^o-x_2\omega_3^o+x_3\omega_2^o \\ e_{12}&=\frac{1}{2}(\gamma_2^o-x_3\omega_1^o) \\ e_{13}&=\frac{1}{2}(\gamma_3^o+x_2\omega_1^o) \\ e_{23}&\cong 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Yerdeğiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü altında geometrik uygunluk ve hareket denklemleri türetilebilir. Ayrıca, kesitin en büyük boyutu, çubuk ekseninin burulması ve eğrilik yarıçapına kıyasla çok küçüktür. Bununla birlikte kesit çarpılmasının etkisi ihmal edilmektedir.

Çubuk malzemesinin bünyesine bakılmaksızın, geometrik uygunluk (5) ve hareket denklemleri (6) geçerlidir. Böylece, $\mathbf{U}^o$, $\boldsymbol{\Omega}^o$, $\mathbf{T}^o$, $\mathbf{M}^o$, $\boldsymbol{\gamma}^o$, $\boldsymbol{\omega}^o$ olmak üzere altı vektörel bilinmeyen ve dört vektörel denklem vardır. Bu bilinmeyenlerin hesaplanması için gerekli olan iki denklem, bünye denklemleridir.

Çubuk malzemesi, homojen, izotrop ve lineer viskoelastik olduğu ve ayrıca *t=0* anında gerilmelerin etkimediği kabulü yapılmaktadır. Genel çubuk teorisinden (9) ifadesi yazılabilir.

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=0 \tag{9}$$

4. İNTEGRAL FORMDA BÜNYE DENKLEMLERİ

İntegral veya diferansiyel formda bünye denklemleri Eringen [26]'de bulunabilir. Boltzmann-Volterra tipinde eşdeğer bir gerilme bünye denklemi düşünüldüğünde

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial e_{rr}(\tau)}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau + 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial e'_{ij}}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

yazılabilir. Deviatorik şekil değiştirme bileşenleri e'_{ij} (11) ifadesinde tanımlanmaktadır.

$$e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{rr}\, \delta_{ij} \tag{11}$$

Burada, $e_{rr} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ şeklindedir. (10) ifadesinde görülen hafıza fonfsiyonları K(t) ve G(t), sırasıyla hacim genleşme modülü ve kayma modülü ile adlandırılmaktadır.

Gerilme tansörünün ilgili büyüklükleri için, (10) denkleminin zamana göre Laplace dönüşümü alınarak, (9) eşitliği ve $e'_{ii} = 0$ olduğu düşünülürse aşağıdaki dönüşmüş ifadeler elde edilmektedir.

$$\overline{\sigma}_{11} = \mathrm{z}\,\overline{E}\,\overline{e}_{11}\,,\ \overline{\sigma}_{12} = 2\,\mathrm{z}\,\overline{G}\,\overline{e}_{12}\,,\ \overline{\sigma}_{13} = 2\,\mathrm{z}\,\overline{G}\,\overline{e}_{13}\,,\ \overline{\sigma}_{23} = 0 \tag{12}$$

z Laplace dönüşüm parametresi olmak üzere, $E(t)$ gevşeme elastisite modülü ve $\upsilon(t)$ Poisson oranı, Laplace uzayında (13) ifadesiyle tanımlanmaktadır.

$$\overline{E} = \frac{9\,\overline{K}\,\overline{G}}{3\,\overline{K} + \overline{G}}\,, \qquad \overline{\upsilon} = \frac{3\,\overline{K} - 2\,\overline{G}}{6\,\overline{K} + 2\,\overline{G}} \tag{13}$$

Konvolüsyon teoremi [27] yardımıyla, (12) denkleminin ters Laplace dönüşümü:

$$\sigma_{11} = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial e_{11}(\tau)}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau \tag{14}$$

$$\sigma_{12} = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial e_{12}(\tau)}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau$$

$$\sigma_{13} = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial e_{13}(\tau)}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$$

Gerilme bileşkeleri olan $\mathbf{T}(s,t)$ ve $\mathbf{M}(s,t)$ vektörlerinin kesit üzerinde x_i dik koordinat takımındaki bileşenleri (15) ve (16) ile ifade edilmektedir.

$$T_i = \int_A \sigma_{1i}\, \mathrm{d}A \qquad (i=1,2,3) \tag{15}$$

$$M_1 = \int_A (x_2\,\sigma_{13} - x_3\,\sigma_{12})\,\mathrm{d}A\,,\quad M_2 = \int_A x_3\,\sigma_{11}\,\mathrm{d}A\,,\quad M_3 = -\int_A x_2\,\sigma_{11}\,\mathrm{d}A \tag{16}$$

Burada, A kesit alanıdır. (8), (15) ve (16) ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınıp (11) ve (12) denklemlerinde yerlerine konulduğu zaman, sonuç olarak Laplace uzayında bileşke bünye denklemleri aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\overline{T}_1 = z\overline{E}\,A\overline{\gamma}_1^{\circ} \quad , \quad \overline{T}_2 = z\overline{G}\,A\overline{\gamma}_2^{\circ} \quad , \quad \overline{T}_3 = z\overline{G}\,A\overline{\gamma}_3^{\circ} \tag{17}$$

$$\overline{M}_1 = z\overline{G}\,I_1\,\overline{\omega}_1^{\circ} \quad , \quad \overline{M}_2 = z\overline{E}\,I_2\,\overline{\omega}_2^{\circ} \quad , \quad \overline{M}_3 = z\overline{E}\,I_3\,\overline{\omega}_3^{\circ} \tag{18}$$

Dönüşmüş viskoelastik bileşke bünye denklemleri, elastisite modülü E yerine $z\overline{E}$ ve G yerine $z\overline{G}$ konularak elde edilebilmektedir. (17) ve (18) denklemlerinin ters dönüşümleri de alınırsa, konvolüsyon teoremi yardımıyla bileşke bünye denklemleri zaman uzayına dönüştürülmektedir.

$$T_1 = A\int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial \gamma_1^o}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \ , \ T_i = A\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial \gamma_i^o}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \qquad (i=2,3) \tag{19}$$

$$M_1 = I_1\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial \omega_1^o}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \ , \ M_i = I_i\int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial \omega_i^o}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \qquad (i=2,3) \tag{20}$$

5. HAREKET DENKLEMLERİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Zorlanmış titreşim durumu için, $\mathbf{Y}(s, t)$ vektörü,

$$\mathbf{Y}(s,t) = \left\{U_1^o,\ U_2^o,\ U_3^o,\ \Omega_1^o,\ \Omega_2^o,\ \Omega_3^o,\ T_1^o,\ T_2^o,\ T_3^o,\ M_1^o,\ M_2^o,\ M_3^o\right\}^T \tag{21}$$

olarak tanımlanmaktadır. (21) denklemlerinin zamana göre Laplace dönüşümü,

$$\overline{\mathbf{Y}}(s,z) = L\left[\mathbf{Y}(s,t)\right] \tag{22}$$

olup burada Laplace dönüşüm parametresi z kompleks bir sayıdır. Laplace dönüşüm uzayında elde edilen birinci mertebeden oniki adet adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{Y}}(s,z)}{\mathrm{d}\,s} = \overline{\mathbf{F}}(s,z)\overline{\mathbf{Y}}(s,z) + \overline{\mathbf{B}}(s,z) \tag{23}$$

$\overline{\mathbf{F}}(s,z)$ katsayılar matrisinin bazı elemanlarında bulunan ikinci türev ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınırsa

$$L\left[\rho A\frac{\partial^2 U_k^{\circ}}{\partial t^2}\right] = \rho A\left[z^2\overline{U}_k^{\circ} - zU_k^{\circ}(s,0) - \frac{\partial U_k^{\circ}(s,0)}{\partial t}\right] \tag{24}$$

$$L\left[\rho I_k\frac{\partial^2 \Omega_k^{\circ}}{\partial t^2}\right] = \rho I_k\left[z^2\overline{\Omega}_k^{\circ} - z\Omega_k^{\circ}(s,0) - \frac{\partial \Omega_k^{\circ}(s,0)}{\partial t}\right] \qquad (k=1,2,3)$$

olur. (24) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anında verilen başlangıç şartlarıdır. $\overline{\mathbf{B}}(s,z)$ kolon matrisinin elemanları (25) denkleminde verilmiştir.

$$\overline{B}_i(s,z) = 0 \qquad (i=1, 2,..., 6) \qquad (25)$$

$$\overline{B}_{6+j}(s,z) = -\left(\overline{p}_k^{(ex)}\right) - \rho A\left[zU_k^{\circ}(s,0) + \frac{\partial U_k^{\circ}(s,0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\overline{B}_{9+j}(s,z) = -\left(\overline{m}_k^{(ex)}\right) - \rho I_k\left[z\Omega_k^{\circ}(s,0) + \frac{\partial \Omega_k^{\circ}(s,0)}{\partial t} \right] \quad (k= 1, 2, 3)$$

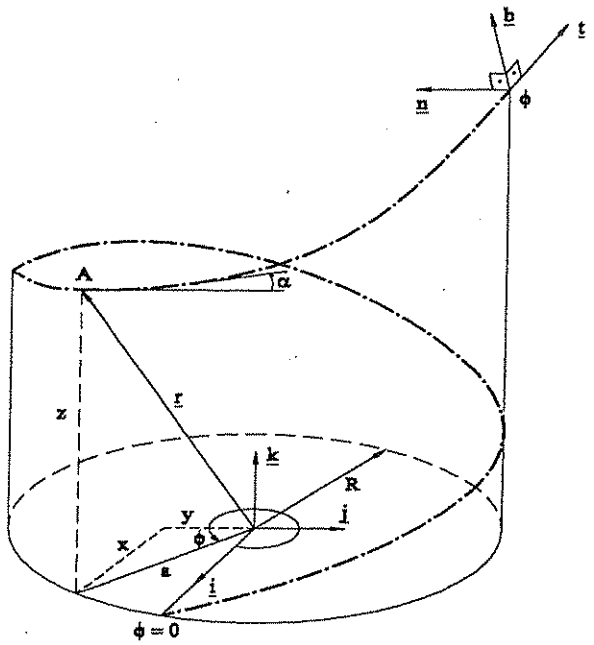
(24) ifadesinde görülen başlangıç şartları, $\overline{\mathbf{B}}(s,z)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

6. ÖZEL DURUM

Helisel çubuklar, eğri eksenli uzaysal çubukların özel durumu olarak ele alınmıştır. Helisin parametrik denklemi aşağıda verilmektedir [18] (Şekil 2).

$$x = a\cos\phi \ , \ y = a\sin\phi \ , \ z = h\phi \qquad (26)$$

Burada, ϕ helisi çevreleyen silindirin taban dairesinde x-ekseninden itibaren ölçülen açıdır.



Şekil 2. Silindirik helisin geometrisi

Helis üzerinde çok küçük bir eleman uzunluğu için

$$c = \sqrt{a^2 + h^2} \ , \ \mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\phi \ , \ \cos\alpha = \frac{a}{c} \ , \ \sin\alpha = \frac{h}{c} \qquad (27)$$

tarifleri yapılmaktadır. Burada, α ve a sırasıyla yükselme açısı ve helisin sarıldığı silindirin yarıçapıdır. Silindirik helisel yayların eğrilikleri ise

$$\chi = \frac{a}{c^2} = \text{sabit} \ , \ \tau = \frac{h}{c^2} = \text{sabit} \qquad (28)$$

şeklindedir. Hareketli koordinat takımı (**t, n, b**) ile ortak koordinat takımı (**i, j, k**) arasında aşağıdaki ilişki vardır (Şekil 2).

$$\{V\}_{tnb} = [B]\{V\}_{ijk} \qquad \begin{Bmatrix} V_t \\ V_n \\ V_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a/c)\sin\phi & (a/c)\cos\phi & (h/c) \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ (h/c)\sin\phi & -(h/c)\cos\phi & (a/c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix} \tag{29}$$

Laplace uzayında boyutsuzlaştırma parametreleri (30) ifadeleri ile tanımlanmaktadır.

$$\overline{U}_i = \frac{1}{c} U_i^o \;,\; \overline{\Omega}_i = \Omega_i^o \;,\; \overline{T}_i = \frac{c^2}{EI_n} T_i^o \;,\; \overline{M}_i = \frac{c}{EI_n} M_i^o \quad (i = \text{t, n, b}) \tag{30}$$

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse **n, b** eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli viskoelastik çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler, dönüşmüş uygunluk denklemi (5), dönüşmüş bünye denklemleri (17) ve (18) ile birlikte dönüşmüş hareket denklemleri (6) kullanılarak elde edilmektedir. Sonuç olarak (27), (28) ve (30) ifadeleri yardımı ile silindirik helisel çubukları idare eden denklemler kanonik formda aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{d\overline{U}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\overline{U}_n + \frac{EI_n}{z\overline{E}Ac^2}\overline{T}_t \tag{31a}$$

$$\frac{d\overline{U}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\overline{U}_t + \frac{h}{c}\overline{U}_b + \overline{\Omega}_b + \frac{\alpha_n EI_n}{z\overline{G}Ac^2}\overline{T}_n \tag{31b}$$

$$\frac{d\overline{U}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\overline{U}_n - \overline{\Omega}_n + \frac{\alpha_b EI_n}{z\overline{G}Ac^2}\overline{T}_b \tag{31c}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\overline{\Omega}_n + \frac{EI_n}{z\overline{G}I_t}\overline{M}_t \tag{31d}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\overline{\Omega}_t + \frac{h}{c}\overline{\Omega}_b + \frac{E}{z\overline{E}}\overline{M}_n \tag{31e}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\overline{\Omega}_n + \frac{EI_n}{z\overline{E}I_b}\overline{M}_b \tag{31f}$$

$$\frac{d\overline{T}_t}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_t + \frac{a}{c}\overline{T}_n + \overline{B}_7 \tag{31g}$$

$$\frac{d\overline{T}_n}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_n - \frac{a}{c}\overline{T}_t + \frac{h}{c}\overline{T}_b + \overline{B}_8 \tag{31h}$$

$$\frac{d\overline{T}_b}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_b - \frac{h}{c}\overline{T}_n + \overline{B}_9 \tag{31i}$$

$$\frac{d\overline{M}_t}{d\phi} = \frac{\rho I_t c^2 z^2}{EI_n}\overline{\Omega}_t + \frac{a}{c}\overline{M}_n + \overline{B}_{10} \tag{31j}$$

$$\frac{d\overline{M}_n}{d\phi} = \frac{\rho c^2 z^2}{E}\overline{\Omega}_n + \overline{T}_b - \frac{a}{c}\overline{M}_t + \frac{h}{c}\overline{M}_b + \overline{B}_{11} \tag{31k}$$

$$\frac{d\overline{M}_b}{d\phi} = \frac{\rho I_b c^2 z^2}{EI_n}\overline{\Omega}_b - \overline{T}_n - \frac{h}{c}\overline{M}_n + \overline{B}_{12} \tag{31l}$$

Çubuğun geometrisine bakılmaksızın, helislerin davranışı dört ayrı durum için incelenecektir.

Durum 1 : Statik yük, elastik malzeme,
Durum 2 : Statik yük, viskoelastik malzeme (yarı-statik),
Durum 3 : Dinamik yük, elastik malzeme,
Durum 4 : Dinamik yük, viskoelastik malzeme.

Çubuk malzemesinin elastik veya viskoelastik olduğuna bakılmaksızın, statik yükleme durumunda (31g-l) denklemlerindeki kütlesel yoğunluk içeren terimler sıfır alınmaktadır. Çubuk malzemesi viskoelastik olduğu durumda, elastisite modülü ve kayma modülü yerine sırasıyla $z\overline{E}$ ve $z\overline{G}$ kullanılmaktadır.

7. TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Sabit katsayılı oniki adet diferansiyel denklem (31 a-l) eşitliklerinde verilmiştir. Bu denklemlerin her biri yere göre birinci mertebe türevleri içermektedir. Laplace uzayında dinamik yükleme durumu için verilen tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi [18-20], viskoelastik malzeme durumları için düzenlenmiştir. (31 a-l) denklemleri matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\overline{\mathbf{Y}}(\phi,z)}{d\phi}=\overline{\mathbf{F}}(\phi,z)\overline{\mathbf{Y}}(\phi,z)+\overline{\mathbf{B}}(\phi,z) \tag{32}$$

Uzaysal çubuklar için, durum vektörünün elemanları (33) ifadesinde tanımlanmaktadır.

$$\overline{\mathbf{Y}}(\phi,z)=\left\{\overline{\mathbf{U}}(\phi,z),\ \overline{\mathbf{\Omega}}(\phi,z),\overline{\mathbf{T}}(\phi,z),\ \overline{\mathbf{M}}(\phi,z)\right\}^T \tag{33}$$

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, başlangıç şartları yardımı ile (33) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. (33) denkleminin genel çözümü

$$\overline{\mathbf{Y}}(\phi,z)=\sum_{m=1}^{12}C_m(\overline{\mathbf{U}}^{(m)}(\phi,z))+\overline{\mathbf{V}}(\phi,z) \tag{34}$$

şeklindedir. $\overline{\mathbf{U}}^{(m)}(\phi,z)$ m'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $\overline{\mathbf{V}}(\phi,z)$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabitleri sınır şartlarından elde edilmektedir.

8. DİNAMİK RİJİTLİK MATRİSİNİN HESAPLANMASI

Eleman denklemi Laplace uzayında aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\{\overline{p}\}=[\overline{k}]\{\overline{d}\}+\{\overline{f}\} \tag{35}$$

Her düğümde altı serbestlik derecesi olmak üzere, bunun üçü deplasman, üçü dönmedir. Elemanın başlangıç düğümü i, diğer ucu j düğümü olamak üzere eleman deplasman ve eleman uç kuvvetleri vektörleri,

$$\{\overline{d}\}^T=\left\{\overline{\mathbf{U}}(\phi_i,z),\ \overline{\mathbf{\Omega}}(\phi_i,z),\ \overline{\mathbf{U}}(\phi_j,z),\ \overline{\mathbf{\Omega}}(\phi_j,z)\right\} \tag{36}$$

$$\{\overline{p}\}^T=\left\{\overline{\mathbf{T}}(\phi_i,z),\ \overline{\mathbf{M}}(\phi_i,z),\overline{\mathbf{T}}(\phi_j,z),\ \overline{\mathbf{M}}(\phi_j,z)\right\} \tag{37}$$

şeklinde verilir. Eleman rijitlik matrisini hesaplamak için (36) ifadesinde tanımlandığı gibi elemanın uç deplasmanlarına sırasıyla birim deplasman uygulanır. Bu işlem oniki kez tekrarlanır. (31) denkleminin

homojen çözümünden eleman uç kuvvetleri elde edilir ve bu kuvvetler eleman dinamik rijitlik matrisinin bileşenlerini oluşturmaktadır.

Ankastrelik uç kuvvetleri ise, bütün uç deplasmanları sıfıra eşitleyerek yine (31) denkleminin çözümünden hesaplanmaktadır.

$$\left\{\bar{f}\right\}^T = \left\{-\bar{\mathbf{T}}(\phi_i, z), -\bar{\mathbf{M}}(\phi_i, z), \bar{\mathbf{T}}(\phi_j, z), \bar{\mathbf{M}}(\phi_j, z)\right\} \tag{38}$$

Eleman koordinatlarında elde edilen bu denklemlerden sistem koordinatlarına geçmek için aşağıdaki transformasyon işlemi uygulanmalıdır.

$$\left[\bar{k}\right]_{ijk} = [T]^T \left[\bar{k}\right]_{mb} [T] \tag{39}$$

$$\left\{\bar{f}\right\}_{ijk} = [T]^T \left\{\bar{f}\right\}_{mb} \tag{40}$$

Transformasyon matrisi [T]

$$[T] = \begin{bmatrix} [B(\phi_i)] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B(\phi_i)] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [B(\phi_j)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B(\phi_j)] \end{bmatrix}_{12\times12} \tag{41}$$

olup [B] matrisi (29) ifadesinde tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, hem eleman dinamik rijitlik matrisi $\left[\bar{k}\right]$ hem de ankastrelik uç kuvvetleri, Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımı ile (31) denkleminin çözümünden hesaplanmaktadır. Eleman dinamik rijitlik matrisi ve yük vektöründen sistem hareket denklemleri elde edilebilir.

$$\left[\mathbf{K(z)}\right]\left\{\mathbf{D}\right\} = \left\{\mathbf{P(z)}\right\} \tag{42}$$

$\left[\mathbf{K(z)}\right]$ ve $\left\{\mathbf{P(z)}\right\}$ sistem dinamik rijitlik matrisi ve yük vektörüdür. $\left\{\mathbf{D}\right\}$ ise, sistemin bilinmeyen düğüm deplasmanları vektörüdür.

9. SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış zamana bağlı yükler altında silindirik helisel çubukların yarı-statik ve dinamik analizini yapan FORTRAN dilinde genel amaçlı bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runga-Kutta algoritması [28] uygulanmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [21, 22] kullanılmıştır (**Ek**'e bakınız).

Çözümlerde, çubuk malzemesinin viskoelastik karekteristik özellikleri aşağıdaki formda seçilmiştir [2].

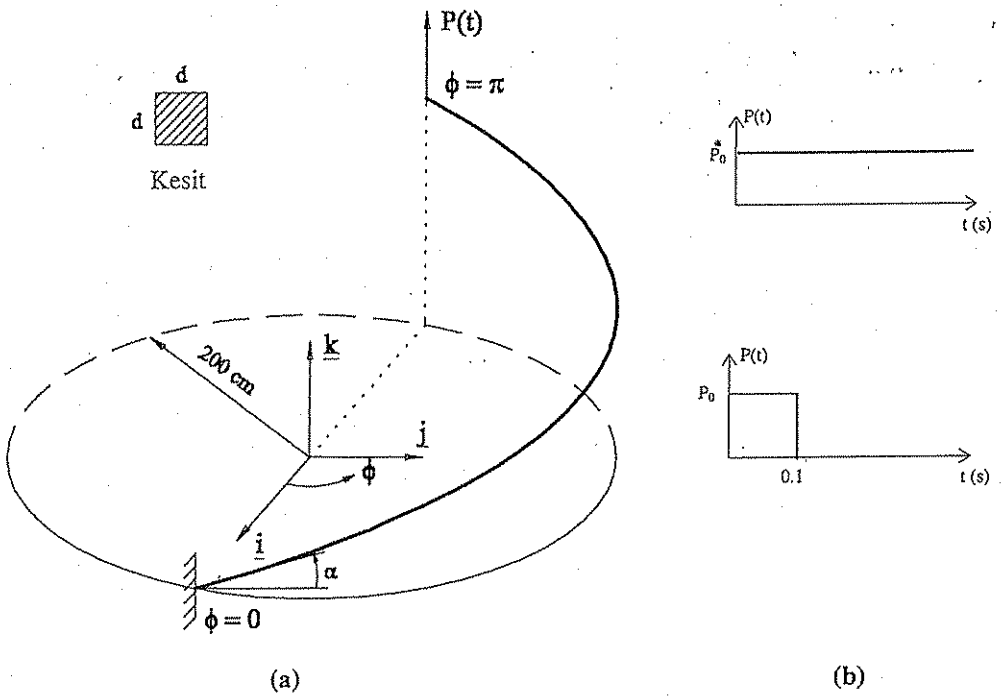
$$G(t) = G_0\left[1 + B\,Exp\left(-t/\lambda\right)\right] \;,\; K(t) = K_0 \tag{43}$$

ve bunların Laplace dönüşümleri

$$\bar{G}(z) = G_0\left(\frac{1}{z} + \frac{B}{z + \frac{1}{\lambda}}\right) \;,\; \bar{K}(z) = \frac{K_0}{z} \tag{44}$$

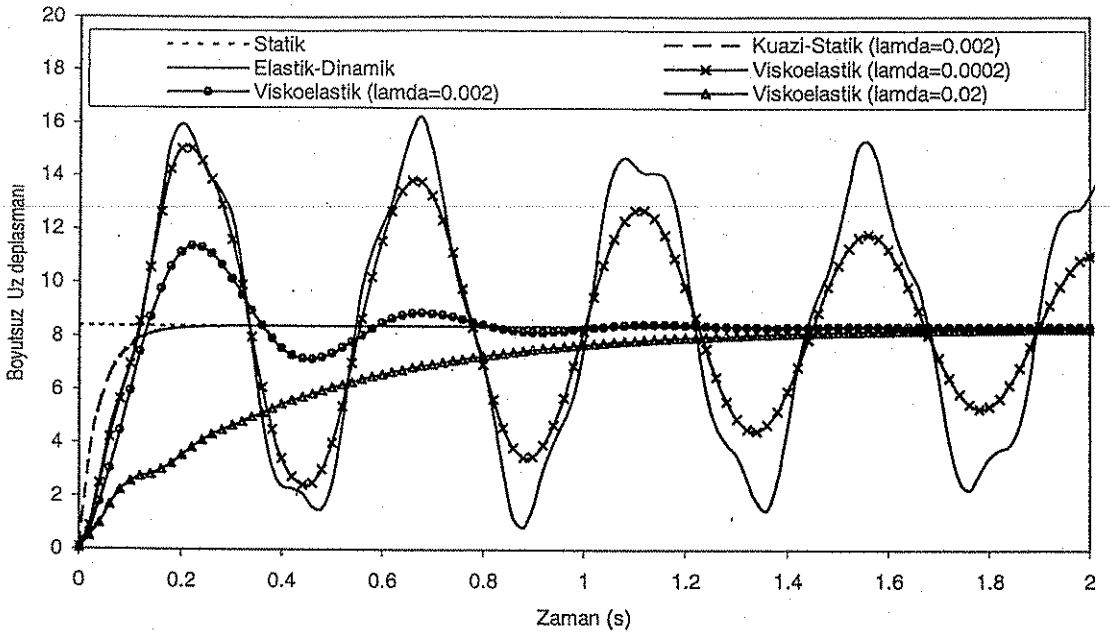
olup burada λ gevşeme zamanıdır. G_o ve K_o , elastik kayma ve hacim modüllerini göstermektedir. Bu çalışmada B=20 alınmıştır.

Örnek Helisel konsol bir çubuk gözönüne alınmıştır. Bu örnekte kullanılan parametreler, elastik malzeme için [18]'de kullanılan değerlerdir. Malzeme ve geometrik özellikleri : d=12 cm, α=25.52°, a=200 cm, E=2.06x10^{11} N/m^2, ρ=7850 kg/m^3 ve ν=0.3 (Şekil 3.). Konsol helisin serbest ucuna düşey doğrultuda, P_o=10^6 N şiddetinde dinamik tekil yük uygulanmıştır. Hesaplarda zaman artımı olarak 0.02 s alınmıştır.

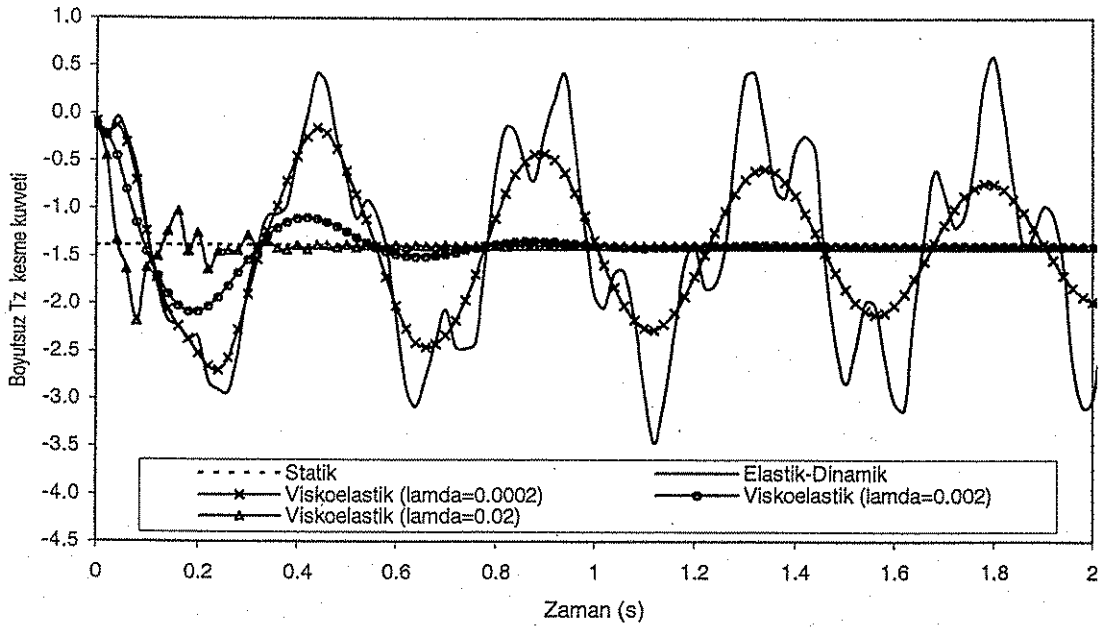


Şekil 3. (a) Konsol helis; (b) Dinamik yük tipleri

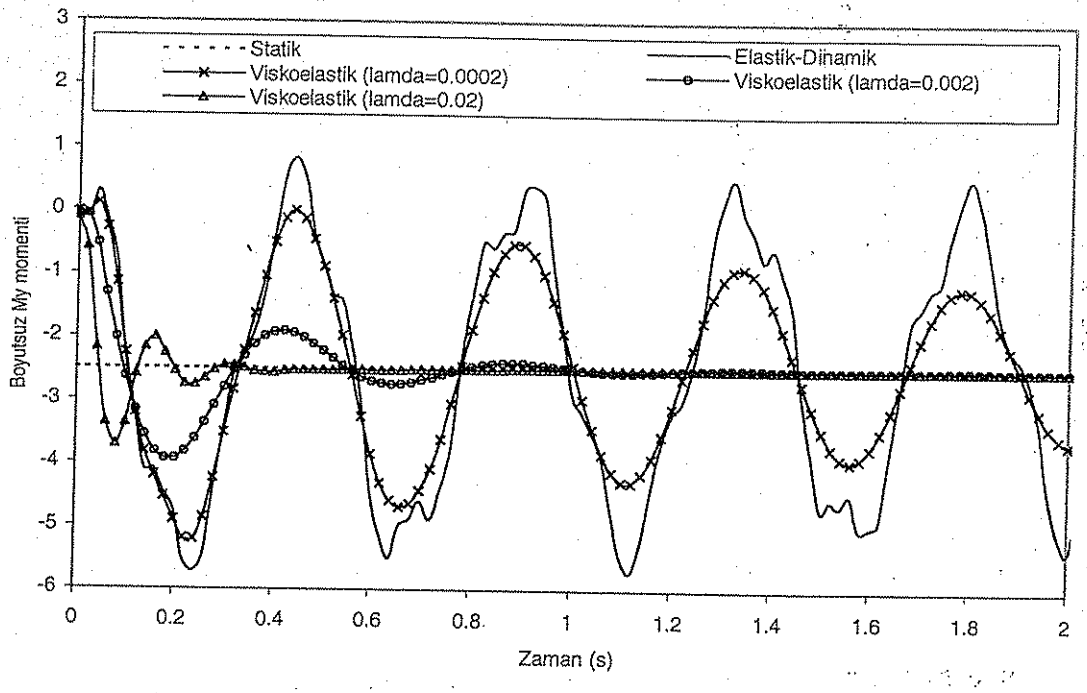
Çeşitli yükleme durumları için serbest uçtaki boyutsuz düşey deplasman ve ankastre uçtaki boyutsuz moment ve kesme kuvveti grafik formda gösterilmiştir (Şekil 4a-d ve Şekil 5a-d). Şekiller, çeşitli sönüm oranları için statik, yarı-statik, elastik-dinamik ve viskoelastik durumları içermektedir.



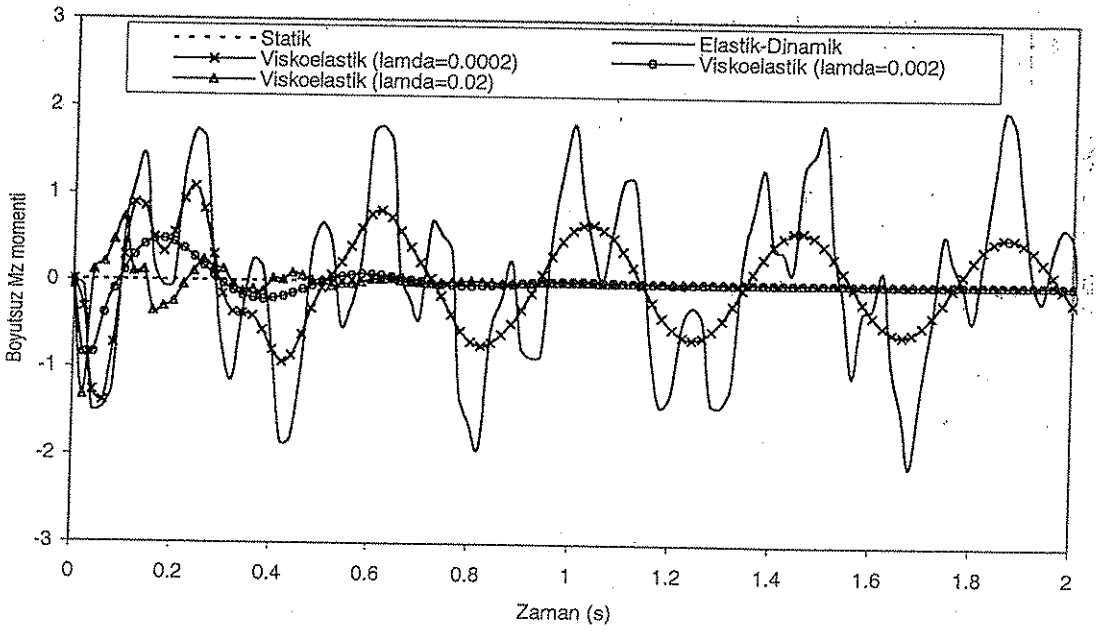
Şekil 4a. Adım tipi yük altında serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



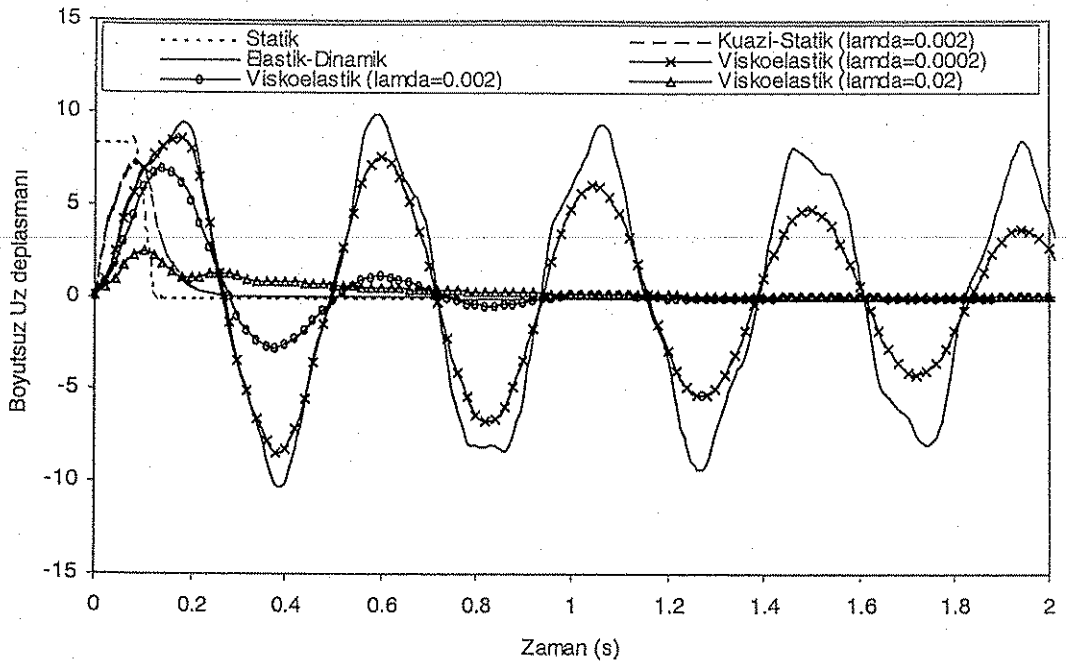
Şekil 4b. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi



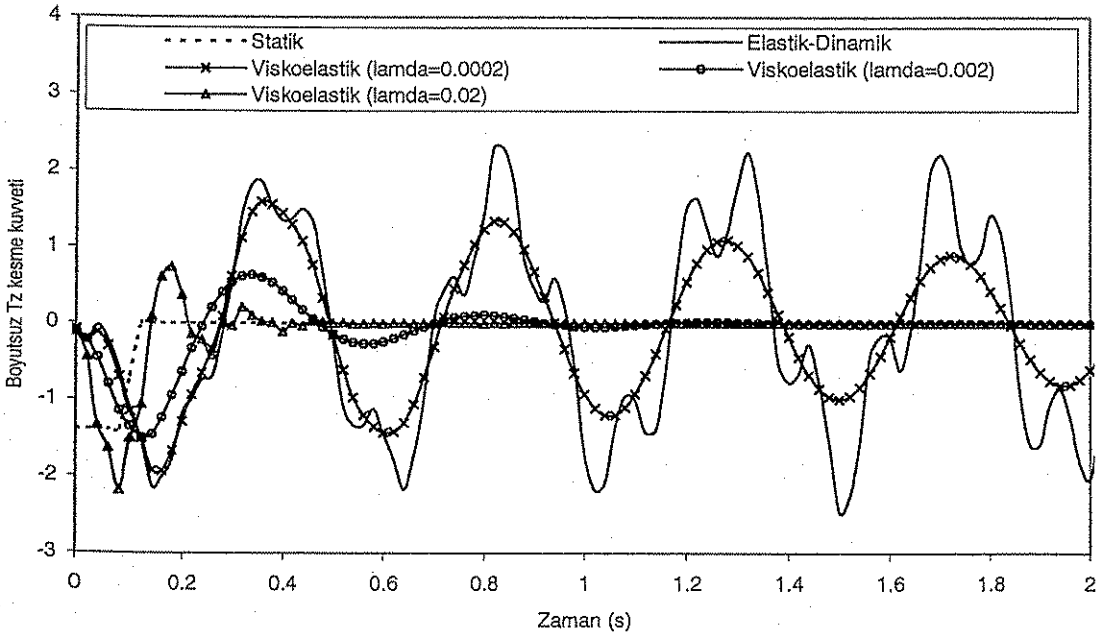
Şekil 4c. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi



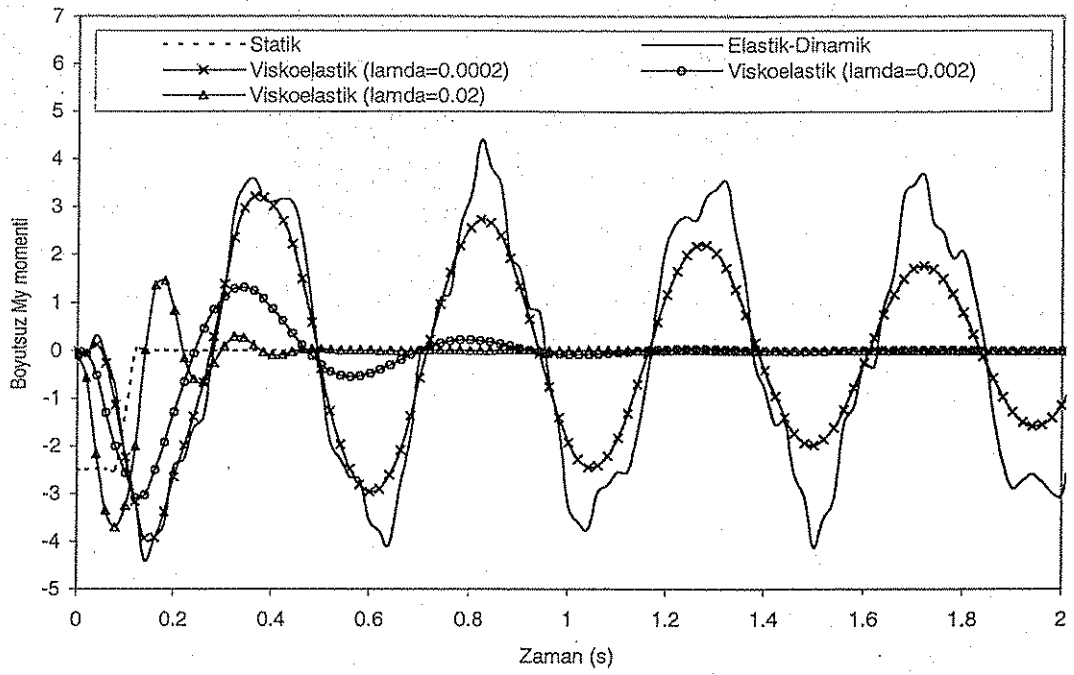
Şekil 4d. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki Mz momentinin zamanla değişimi



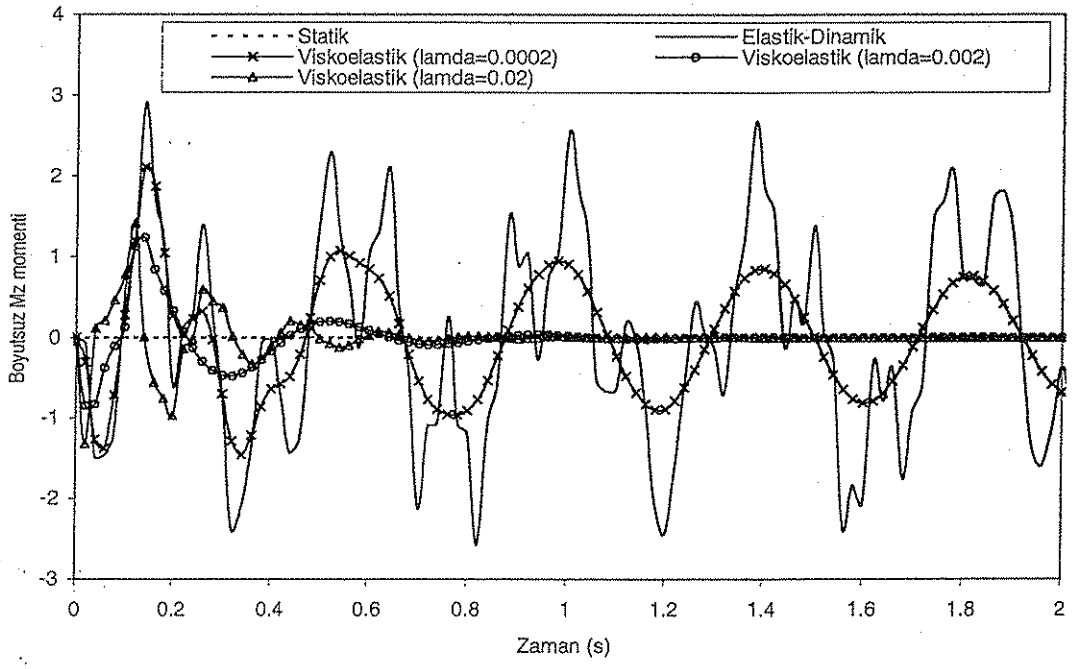
Şekil 5a. Dikdörtgen ani yük altında serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 5b. Dikdörtgen ani yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi



Şekil 5c. Dikdörtgen ani yük altında ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi



Şekil 5d. Dikdörtgen ani yük altında ankastre uçtaki Mz momentinin zamanla değişimi

Yarı-statik davranış zamanla statik duruma yaklaşmaktadır. Viskoelastik malzeme durumunda dinamik davranış belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine yaklaşmaktadır. Statik yükleme altında Mz momenti sıfırdır. Bununla birlikte Mz, dinamik yükleme halinde, atalet kuvvetlerinden dolayı sıfırdan farklı değerler almaktadır (Şekil 4d, 5d).

10. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların Laplace uzayında yarı-statik ve dinamik davranışları etkin bir yöntem kullanarak incelenmiştir.

Dinamik rijitlik matrisi, Laplace uzayında kanonik formdaki diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak hesaplanmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip fiziksel problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Tamamlayıcı fonksiyonlara dayalı çözüm yapmanın diğer bir avantajı da, değişken kesit ve geometriye sahip helisel çubukların çözümünün yapılabilmesidir. Uygun integrasyon adım aralığı seçilerek, tamamlayıcı fonksiyonlar yardımıyla diferansiyel denklemler istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir.

Viskoelastik malzeme bünyesi için Boltzmann-Volterra teorisi kullanılarak silindirik helisel çubukların yarı-statik ve dinamik davranışı araştırılmıştır. Viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine ulaşmaktadır. Statik davranışa ulaşma zamanı sönüm oranı ile orantılıdır. Viskoelastik malzeme halinde sönüm etkisi, dinamik davranışın maksimum genlik değerini azaltacaktır.

11. KAYNAKLAR

1. Flügge, W., Viscoelasticity, 2nd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.
2. Kıral, E., tokdemir, T., and ural, S., "Transient Response of an Elastic or/and Viscoelastic Curved Rod under Arbitrary Time Dependent Loading", METU Journal of Pure and Applied Sciences 9, 63-86, 1976
3. Fındley, W. N., Lai, J. S., and Onaran, K., Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Material. North-Holland, New York, pp. 109, 1976.
4. Christensen, R. M., Theory of Viscoelasticity. 2nd Edition, Academic Press, New York, pp. 24, 1982
5. White, J. L., "Finite Element in Linear Viscoelasticity", Proceeding 2nd Conferance, On Matrix Method in Structural Mechanics AFFDL-TR-68-150, 489-516, 1986.
6. Adey, R. A., and Brebbia, C. A., "Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problem", Journal of Engineering Mechanics Division-ASCE 99, 1119-1127, 1973.
7. Chen, W. H., and Lin, T. C., "Dynamic Analysis of Viscoelastic Structure using Incremental Finite Element Method", Computers and Structures, 4, 271-276, 1982.
8. Yamada, Y., Takabatake, H., and Sato, T., "Effect of Time Dependent Material Properties or Dynamic Response", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8, 403-414, 1974.
9. Chen, T., "The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38, 509-522, 1995.
10. Aköz A. Y., and Kadıoğlu, F., "The Mixed Finite Element Solutions of Circular Beam on Elastic Foundation", Computers and Structures, 60/4, 643-657, 1996.
11. Aköz A. Y., and Kadıoğlu, F., "The Mixed Finite Element Method for the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44, 1909-1932, 1999.
12. Kadıoğlu, F., and Aköz, A. Y., "The Mixed Finite Element Method for the Dynamic Analysis of Viscoelastic Circular Beams", Fourt International Conference on Vibration Problems, Calcutta-India, November 27-30, pp. 40-52, 1999.
13. Ilyasov, M. H., and Aköz, A. Y., "The Vibration and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates", International Journal of Engineering Sciences, 38, 695-714, 2000.
14. Park, S. W., and Schapery, R. A., "Methods of Interconversion Between Linear Viscoelastic Material Function. Part I- A Numerical Method Based on Prony Series", International Journal of Solids and Structures, 36, 1653-1675, 1999.
15. Schapery, R. A., and Park, S. W., "Methods of Interconversion Between Linear Viscoelastic Material Function. Part II- An Approximate Analytical Method", International Journal of Solids and Structures, 36, 1667-1699, 1999.
16. Park, S. W., "Analytical Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural and Vibration Control", International Journal of Solids and Structures, 38, 8065-8092, 2001.
17. Kim, T. W., and Kim, J. H., "Parametric Instability of a Cross-Ply Laminated Beam with Viscoelastic Properties under a Periodic Force", Composite Structures, 51, 205-209, 2001.
18. Temel, B., and Çalım, F. F., "Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads", Journal of Applied Mechanics-ASME, 70/2, 281-291, 2003.
19. Temel B, Çalim F. F., Tütüncü N., "Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods", Journal of Sound and Vibration; 271(3-5): 921-935, 2004.

20. Temel B., "Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads", International Journal of Solids and Structures; 41(5-6): 1605-1624, 2004.
21. Durbın, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", Computational Journal, 17, 371-376, 1974.
22. Narayanan, G. V., Numerical Operational Methods in Structural Dynamics, Ph.D. thesis, University. of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1979.
23. Yerli, H. R., Temel, B., and Kıral, E., "Transient Infinite Elements for 2D Soil-Structure Interaction Analysis", Journal of Geotecnical Geoenviromental Engineering, 124/10, 976-988, 1998.
24. Sokolnıkoff, I. S., and Redheffer, R. M., Mathematics of Physics and Modern Engineering, Tokyo : McGraw-Hill, 1958.
25. Kıral, E., and Ertepınar, A., "Studies on Elastic Rods Subject to Diverse External Agencies-Part III Vibrational Analysis of Space Rods", METU Journal of Pure and Applied Science, 55-69, 1974.
26. Eringen, A. C., Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, New York, 1982.
27. Spıegel, M. R., Theory and Problems of Laplace Transforms, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
28. Chapra, S. C., and Canale, R. P., Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, Third edition, 1998.

Ek. Durbin'in Modifiye Edilmiş Ters Laplace Dönüşüm Yöntemi

Çözümleri zaman uzayında elde etmek için sayısal ters Laplace dönüşümüne ihtiyaç vardır. Bu amaç için, Fast Fourier Transformuna (FFT) dayalı Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [21] kullanılmıştır. Ters Laplace dönüşümü için Durbin'in formülasyonu aşağıda özetlenmektedir.

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{a\,j\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\overline{F}(a)\right\}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\overline{F}(z_k)L_k\right\}e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)jk}\right\}\right] \qquad (j=0,1,2,...,N-1) \qquad \text{(A1)}$$

Burada, $z_k = a + i\frac{2\pi k}{T}$ k ıncı Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. T, çözüm aralığı olmak üzere, N adet eşit zaman aralığı, $t_j = j\Delta t = jT/N$ için $f(t_j)$ hesaplanmaktadır. İlgili kaynakta [21], $5 \le aT \le 10$ aralığı için iyi sonuçlar elde edildiği belirtilmektedir. Böylece, bu çalışmada sunulan sayısal örneklerde "aT" genellikle 6 alınmıştır. Laplace uzayında bulunan sonuçlar, daha iyi çözümler elde etmek için, Narayanan [22]'ın önerdiği gibi herbir terimi Lanczos (L_k) faktörü ile çarparak modifiye edilmektedir. Bu faktör, k=0 için L_o=1 ve k>0 ise

$$L_k = \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\frac{k\pi}{N}} \qquad \text{(A2)}$$

alınmaktadır.