**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ**

# F/R FORMUNDAKİ SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADANA, 2011**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# F/R FORMUNDAKİ SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

**Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu Tez 23/05/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| ……..... | …… | ……..... |
| Prof. Dr. Naime EKİCİ | Pof. Dr. Hayrullah AYIK | Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK |
| DANIŞMAN | ÜYE | ÜYE |
| ..……..... | .....…….. | |
| Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL | Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL | |
| ÜYE | ÜYE | |

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
**Kod No:**

**Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL**
**Enstitü Müdürü**

**Bu Çalışma Tübitak-Bideb Tarafından Desteklenmiştir**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZ

## DOKTORA TEZİ

## F/R FORMUNDAKİ SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

**Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman :Prof. Dr. Naime EKİCİ
Yıl: 2011, Sayfa: 69
Jüri :Prof. Dr. Naime EKİCİ
:Prof. Dr. Hayrullah AYIK
:Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
:Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
:Yrd.Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada serbest Lie cebirleri için Magnus Gömmesini tanımladık ve Fox türevlerinin bazı özelliklerinden kısaca bahsettik. Daha sonra bazı serbest Lie cebirlerinin test rankını hesapladık. $F$ rankı $n \geq 2$ olan bir serbest Lie cebiri ve $R$, $F$ nin bir ideali olmak üzere $F/R'$ nün $R/R'$ üzerinde birim olan her IA-endomorfizminin, $R/R'$ cebirinin bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizm olduğunu gösterdik. Bu sonuçtan hareketle $F/\gamma_k(F)'$ Lie cebirinin test rankının $n-1$ olduğunu gösterdik. Daha sonra $R$, $F$ nin $F/R$ serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki bir ideali olmak üzere, $F/R'$ Lie cebirinin test rankının $n-1$ olduğunu ve ayrıca rankın 2 olması durumunda $F/[R', F]$ Lie cebirinin test elemanlarına sahip olduğunu gösterdik. Bunlara ek olarak serbest abelyen çarpımın test rankını hesapladık ve son olarak serbest nilpotent Lie cebirlerinin test rankının 1 ya da 2 olduğunu gösterdik.

**Anahtar Kelimeler :** Test eleman, test rank, serbest Lie cebirleri

**ABSTRACT**

**PhD THESIS**

**TEST RANK OF FREE LIE ALGEBRAS OF THE FORM F/R**

**Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ**

**ÇUKUROVA UNIVERSITY**
**INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**
**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor :Prof. Dr. Naime EKİCİ
Year: 2011, Page: 69
Jury :Prof. Dr. Naime EKİCİ
:Prof. Dr. Hayrullah AYIK
:Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
:Assoc. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
:Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this thesis we define Magnus Embedding for free Lie algebras and mention briefly some properties of Fox derivatives. Afterwards, we calculate the test rank of some free Lie algebras. Let $F$ be a free Lie algebra of rank $n \geq 2$ and $R$ be an ideal of $F$. We show that an endomorphism of the algebra $F/R'$, which acts identically on $R/R'$, is an inner automorphism induced by some element of $R/R'$. Based on this result, we show that the test rank of the Lie algebra $F/\gamma_k(F)'$ is $n-1$. After that we show the test rank of the Lie algebra $F/R'$ is $n-1$ while $R$ is an ideal of $F$ such that $F/R$ is free polynilpotent Lie algebra. Morever, we show the Lie algebra $F/[R', F]$ have test elements while rank is 2. In addition, we calculate the test rank of the abelyen product and finally, we show that the test tank of a free nilpotent Lie algebra is 1 or 2.



**Key Words:** Test element, test rank, free Lie algebras

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca değerli hocalarım Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK'e, Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL'a, değerli arkadaşlarım Demet SÖNMEZ'e, Orhan SÖNMEZ'e, Nazif ÇALIŞ'a, Şehmus FINDIK'a, Osman KELEKCİ'ye ve tüm Çukurova Üniversitesi Matematik bölümü öğretim elemanlarına yardım ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim süresince verdiği burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnasanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkür ederim.

**İÇİNDEKİLER** **SAYFA**

ÖZ ..... I
ABSTRACT ..... II
TEŞEKKÜR ..... III
İÇİNDEKİLER ..... …..IV
1. GİRİŞ ..... 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ..... 3
3. MAGNUS GÖMMESİ VE $F/[R',F]$ LIE CEBİRLERİ ..... 11
4. $F/R'$, LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI ..... 21
5. $F/[R',F]$ LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI ..... 47
6. ABELYEN ÇARPIMIN TEST RANKI ..... 51
7. SERBEST NİLPOTENT LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI ..... 55
KAYNAKLAR ..... 67
ÖZGEÇMİŞ ..... 69

# 1. GİRİŞ

Serbest gruplarda ve serbest Lie cebirlerinde test kümesi, test rankı ve test elemanı kavramları çok önemli bir yere sahiptir. Rankı 2 olan serbest Lie cebirlerinin bazı test elemanları Mikhalev ve Yu (2000) tarafından verilmiştir. Diğer test eleman örnekleri (Mikhalev, Umirbaev ve Yu, 2001), (Temizyürek ve Ekici, 2007) ve (Esmerligil, 2004) de ayrıca verilmiştir.

Test elemanları gruplarda ve Lie cebirlerinde otomorfizmleri test etmek için kullanılan elemanlardır. Fakat test elemanlarının bulunmadığı durumlarda otomorfizmleri diğer endomorfizmlerden ayırt edebilmek amacıyla test kümesi fikri ortaya çıkmıştır. Birbirlerinden bağımsız olarak Esmerligil ve Ekici (2003) ve Timoshenko (2002) serbest metabelyen Lie cebirlerinin test rankını hesaplamışlardır. Daha genel olarak $F/R'$ formundaki serbest Lie cebirlerinin test rankı Esmerligil, Kahyalar ve Ekici (2006) tarafından hesaplanmıştır. Bu çalışmada sonuç olarak bir serbest polinilpotent Lie cebirinin test rankının Lie cebirinin rankına eşit ya da onun rankından 1 eksik olduğu gösterilmiştir. Serbest çözülebilir Lie cebirlerinin test rankı Temizyürek ve Ekici (2007) ve Timoshenko ve Shevelin (2008) tarafından incelenmiştir. (Temizyürek ve Ekici, 2007) de rankı 2 ve çözülebilirlik sınıfı 3 olan bir serbest çözülebilir Lie cebirinin test rankının 1 olduğu ve dolayısıyla bir test elemanına sahip olduğu gösterilmiştir. Çözülebilirlik sınıfı 3 ten büyük ve rankı $n \geq 2$ olan serbest çözülebilir Lie cebirlerinin test rankının $n-1$ olduğu (Timoshenko ve Shevelin, 2008) de gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızda kullandığımız bazı temel tanımları ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde serbest Lie cebirleri için Magnus gömmesini tanımladık. Ayrıca Fox türevlerinin bazı özelliklerinden kısaca bahsettik.

Dördüncü bölümde $F/R'$ formundaki Lie cebirlerinin test rankını inceledik. $F$ rankı $n$ olan bir serbest Lie cebiri ve $R$, $F$ nin bir ideali olsun. $F/R'$ formundaki bazı Lie cebirlerinin test rankının $n-1$ olduğu bilinse de genelde bu cebirler için test

kümeleri bulmak kolay değildir. Bu açığı kapatmak amacıyla öncelikle $F/R'$ nün $R/R'$ üzerinde birim olan her IA-endomorfizminin, $R/R'$ cebirinin bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizm olduğunu gösterdik. Bu sonuçtan hareketle ilk olarak, $k \geq 2$ olmak üzere, Teorem 4.12 ile $F/\gamma_k(F)'$ Lie cebirinin bir test kümesini yazıp bu kümenin minimal elemanlı bir test kümesi olduğunu gösterdik. Daha sonra benzer düşünceyle $R$, $F$ nin $F/R$ serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki bir ideali olmak üzere, Teorem 4.15 ile $F/R'$ Lie cebiri için de bir test kümesi yazarak test rankının $n-1$ olduğunu gösterdik.

Beşinci bölümde rankı 2 olan $F/[R', F]$ formundaki Lie cebirlerinin bir test elemanına sahip olduğunu ve dolayısıyla test rankının 1 olduğunu gösterdik.

Altıncı bölümde abelyen çarpımın test rankını hesapladık. Daha önce Gupta ve Timoshenko(2004) serbest abelyen grupların metabelyen çarpımının test rankını hesapladılar. Yine Gupta ve Timoshenko(2008) serbest abelyen grupların çözülebilir çarpımının test rankının çarpanlarının sayısından 1 eksik olduğunu gösterdiler. $F$ rankı $n \geq 2$ olan serbest Lie cebiri ve $A$, karakteristiği sıfır olan bir $K$ cismi üzerinde rankı $m$ olan bir serbest abelyen Lie cebiri olsun. $D$, $F * A$ serbest çarpımının kartezyen alt cebiri olmak üzere $(F * A)/D$ bölüm cebirine $F$ ve $A$ nın abelyen çarpımı denir. Bu çarpımı $F \times_{ab} A$ gösterelim. Teorem 6.3 ile $F \times_{ab} A$ abelyen çarpımının test rankının $m$ olduğunu ispatladık.

Son olarak yedinci bölümde serbest nilpotent Lie cebirlerinin test rankını hesapladık. Serbest nilpotent grupların test rankının 1 ya da 2 olduğu Gupta, Romankov ve Timoshenko (2005) tarafından gösterilmiştir. Biz de bu bölümde onların kullandığı yöntem ve teknik ile serbest nilpotent Lie cebirlerinin test rankının 1 ya da 2 olduğunu gösterdik. Kullandığımız teknik serbest nilpotent gruplar için kullanılan teknik ile aynı olmakla birlikte, elde ettiğimiz sonuç serbest nilpotent Lie cebirleri için ilk olması bakımından önemlidir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez içinde geçen temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Bütün Lie cebirleri karakteristiği sıfır olan bir $K$ cismi üzerinde düşünülecektir.

**Tanım 2.1:** $X$ bir küme, $F$ , $K$ cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $i : X \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $B$ Lie cebiri ve her $\alpha : X \to F$ dönüşümü için $\alpha = \delta i$ olacak şekilde bir tek $\delta : F \to B$ Lie cebiri homomorfizmi varsa $F$ ye $X$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri, $X$ kümesine $F$ nin serbest üreteç kümesi ve $X$ in kardinelitesine de $F$ nin rankı denir.

**Tanım 2.2:** $X$ sayılabilir bir küme olsun. Uzunluğu 1 olan ve asosyatif olmayan bir monomial deyince $X$ in elemanlarını anlayalım. $n > 1$ verilen bir doğal sayı olmak üzere $X$ üzerinde uzunluğu $n$ olan ve asosyatif olmayan bir monomial $w = (u)(v)$ formundadır. Burada $(u)$ uzunluğu $i$ ve $(v)$ de uzunluğu $n-i$ olan ve asosyatif olmayan monomiallerdir. $w$ nun uzunluğunu $l(w)$ ile gösterelim.
Eğer $u$ ve $v$ uzunlukları 1 olan monomialler ise $w = (uv)$ yazacağız.

Serbest Lie cebirleri için ilk baz kümesi M. Hall tarafından bulunmuştur. Bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.3:** $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X$ olan bir $F$ serbest Lie cebirinin Hall kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. $X$ kümesine bir tam sıralama verelim ve

$$H_1 = X$$

diyelim.

2. $H_2 = \{(xy) / x, y \in H_1,\ x, y \in X,\ x > y\}$

olsun.

3. $m = 1, 2, ..., n-1$ için $H_m$ tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun. Yani, $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$, $X$ üzerinde asosyatif olmayan monomialler olmak üzere $u = (u_1 u_2)$, $v = (v_1 v_2)$ için $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ olsun. $l(u) = l(v)$ iken $u_1 < v_1$ veya $u_1 = v_1$ ve $u_2 < v_2$ ise $u < v$ olsun. $n \geq 3$ için

$$H_n = \{((xy)z) \ / \ x, y, z, (xy) \in H_1 \cup ... \cup H_{n-1},\ x > y,\ (xy) > z,\ y \leq z\}$$

olarak tanımlansın.

**Teorem 2.4:** $F$ boş olmayan bir $X$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $n \geq 1$ için $H_n$, $X$ üzerinde tanımlı Hall kümesi olsun. O zaman $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi $F$ nin bir bazı olup bu baza Hall bazı denir.

$A$ bir serbest birleşmeli cebir olsun. $u, v \in A$ için $[u, v] = u.v - v.u$ işlemiyle $A$ bir Lie cebiridir. Bu cebiri $[A]$ ile göstereceğiz.

**Tanım 2.5:** $F$ $K$ cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan birim elemanlı birleşmeli $U(F)$ cebirine $F$ nin evrensel enveloping cebiri denir.

1. $F$ den $[U(F)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\gamma : F \to [U(F)]$ homomorfizmi vardır.

2. $K$ cismi üzerindeki birim elemanlı her $B$ birleşmeli cebiri ve her $\varphi : F \to [B]$ homomorfizmi için $\psi\gamma = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\psi : [U(F)] \to [B]$ homomorfizmi vardır.

$F$ , $X$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. Serbest Lie cebirleri ve serbest birleşmeli cebirlerin evrensel özelliğinden dolayı $X$ tarafından üretilen serbest birleşmeli $A$ cebiri $F$ nin evrensel enveloping cebiridir. Evrensel enveloping cebirinin tanımındaki $\gamma$ bir gömme dönüşümü olup $F$ , $[U(F)]$ nin bir alt cebirine izomorftur. Bu nedenle $F$ yi $[U(F)]$ nin bir alt cebiri olarak düşüneceğiz.

Bir Lie cebirinin evrensel enveloping cebirinin bazı aşağıdaki teoremle belirlenmiştir.

**Teorem 2.6 (Poincare-Birkhoff-Witt):** $L$ , $K$ cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer $B = \{e_i / i \in I\}$ , $L$ nin iyi sıralı bir bazı ise o zaman $\gamma : L \to [U(L)]$ kanonik dönüşümü injektif olup $U(L)$ , 1 ve

$$e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_n} ,\ e_{i_1} \geq e_{i_2} \geq ... \geq e_{i_n} ,\ n \geq 1$$

formundaki monomialler tarafından üretilen serbest $K$ -modüldür.

$F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X = \{x_1, ..., x_n\}$ olan serbest Lie cebiri olsun. Bundan böyle $F$ deki çarpımı [ , ] (braket çarpım) ile gösterelim.

**Tanım 2.7:** $F$ nin $[F, F]$ alt cebirine türetilmiş alt cebir denir ve $F'$ ile gösterilir.

**Tanım 2.8:** $F$ nin $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(x_i) = x_i \bmod F'$ şeklinde tanımlı olan bir $\varphi$ endomorfizmine bir IA -endomorfizm denir.

**Tanım 2.9:** $\gamma_1(F)=F$ ve $i\geq 1$ için $\gamma_{i+1}(F)=\left[\gamma_i(F),F\right]$ olsun. $i\geq 1$ için $\gamma_i(F)$ $F$ nin idealidir ve $\gamma_{i+1}(F)\subset\gamma_i(F)$ dir. Böylece $F$ nin ideallerinin bir azalan

$$F=\gamma_1(F)\supseteq\gamma_2(F)\supseteq\ldots\supseteq\gamma_i(F)\supseteq\gamma_{i+1}(F)\supseteq\ldots$$

zinciri elde edilir. Bu şekilde elde edilen seriye $F$ nin alt merkezi serisi denir.

**Tanım 2.10:** $L$ , $X$ üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer bir $n$ doğal sayısı için $L\cong F\big/\gamma_n(F)$ olacak şekilde $X$ üzerinde bir $F$ serbest Lie cebiri varsa $L$ ye serbest nilpotent Lie cebiri denir.

$\gamma_m(F)$ , $F$ nin $m$ -yinci alt merkezi terimi olsun. $\gamma_m(F)$ nin $n$ -yinci alt merkezi terimini $\gamma_n\left(\gamma_m(F)\right)=F^{m,n}$ ile gösterelim.

**Tanım 2.11:** $F$ bir serbest Lie cebiri ve $\{n_1,\ldots,n_k,\ldots\}$ tamsayıların bir dizisi olsun. $n_i\geq 1$ olmak üzere

$$F\supseteq F^{n_1}\supseteq F^{n_1,n_2}\supseteq\ldots\supseteq F^{n_1,n_2,\ldots,n_i,n_{i+1}}\supseteq\ldots$$

polisentral serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$F^{n_1}$ , $F$ nin alt merkezi serisinin $n_1$ -inci terimidir.

$F^{n_1,n_2}$ , $F^{n_1}$ in alt merkezi serisinin $n_2$ -inci terimidir.

.

.

.

$F^{n_1,n_2,\ldots,n_i,n_{i+1}}$ , $F^{n_1,n_2,\ldots,n_i}$ nin alt merkezi serisinin $n_{i+1}$ -inci terimidir.

**Tanım 2.12:** $L$, $X$ üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer $L \cong F/F^{n_1,\ldots,n_k}$ olacak şekilde $X$ üzerinde bir $F$ serbest Lie cebiri varsa $L$ ye serbest polinilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong F/F^{2,2}$ olacak şekilde $X$ üzerinde bir $F$ serbest Lie cebiri varsa $L$ ye serbest metabelyen Lie cebiri denir.

**Tanım 2.13:** $\varepsilon : U(F) \to K,\ 1 \le i \le n$ için $\varepsilon(x_i) = 0$ olarak tanımlı homomorfizme genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği $\Delta$ olsun. $\Delta$ bazı $X$ olan bir serbest sol $U(F)$-modüldür.

O zaman her $u \in \Delta$ elemanı $u = \partial_1(u).x_1 + \ldots + \partial_n(u).x_n$ formunda tek türlü yazılabilir öyle ki $1 \le i \le n$ için $\partial_i(u) \in U(F)$ dır. $\partial_i(u)$ elemanlarına $u$ nun sol Fox türevleri denir ve $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ile de gösterilir (Fox, 1995). Benzer şekilde $\Delta$ yı bazı $X$ olan bir serbest sağ $U(F)$-modül olarak da düşünebiliriz.

O zaman her $u \in \Delta$ elemanı $u = x_1.D_1(u) + \ldots + x_n.D_n(u)$ formunda tek türlü yazılabilir öyle ki $1 \le i \le n$ için $D_i(u) \in U(F)$ dır. $D_i(u)$ elemanlarına $u$ nun sağ Fox türevleri denir ve $\frac{u\partial}{\partial x_i}$ ile de gösterilir.

Fox türevleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.14:** Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : U(F) \to U(F),\ 1 \le i \le n$ dönüşümlerine sol Fox türevleri denir.

1. $1 \le i, j \le n$ için $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ öyle ki $\delta_{ij} = \begin{cases} o\ , & i \ne j \\ 1\ , & i = j \end{cases}$,

2. Her $u, v \in U(F),\ 1 \le i \le n$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\frac{\partial(\alpha.u + \beta.v)}{\partial x_i} = \alpha.\frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta.\frac{\partial v}{\partial x_i}$,

3. Her $u,v \in U(F)$ ve $1 \le i \le n$ için $\dfrac{\partial (u.v)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}.\varepsilon(v) + u.\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Sağ Fox türevleri de benzer şekilde tanımlanır. Sadece 3) teki eşitlik sağ türevler için $\dfrac{(u.v)\partial}{\partial x_i} = \varepsilon(u).\dfrac{v\partial}{\partial x_i} + \dfrac{u\partial}{\partial x_i}.v$ $(1 \le i \le n)$ şeklindedir.

Bu tanımın bir sonucu olarak $\dfrac{\partial(1)}{\partial x_i} = 0$ dır.

$U(F)$ de bir $w$ elemanının $y_1,...,y_n$ elemanlarına bağlı olarak yazıldığını göstermek için $w(y_1,...,y_n)$ notasyonunu kullanacağız.

Aşağıdaki önerme Fox türevleri için zincir kuralını verir (Fox, 1995).

**Önerme 2.15:** $F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X = \{x_1,...,x_n\}$ olan bir serbest Lie cebiri, $y_1,...,y_n, w \in U(F)$ ve $v = w(y_1,...,y_n)$ olsun. O zaman

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{\partial v}{\partial y_k}.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

dir.

**Önerme 2.16:** $J$ , $U(F)$ nin bir ideali ve $u \in \Delta$ olsun. O zaman

$u \in J\Delta$ olması için gerek ve yeter koşul her $i$, $1 \le i \le n$ için $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in J$

olmasıdır.

**İspat:** Bu önermenin ispatı Fox türevinin tanımının açık bir sonucudur.

Şimdi vereceğimiz önermenin ispatı (Yagzhev,1980) de bulunabilir.

$R$, $F$ nin bir ideali olsun. $U(F)$ de $R$ tarafından üretilen ideali $\Delta_R$, sağ ideali $I_R$, sol ideali de ${}_R I$ ile gösterelim.

**Önerme 2.17:** $R$, $F$ nin bir ideali ve $u \in F$ olsun. O zaman; $u \in \Delta_R \Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in R'$ olmasıdır.

$u \in F$ için $\bar{u}$ ve $\tilde{u}$ ile $u$ nun sırasıyla $F \to F/R$ ve $F \to F/R'$ doğal homomorfizmleri altındaki görüntüsünü gösterelim. O zaman
$F/R'$ nün $R/R'$ alt cebiri aşağıdaki işlemle bir sol $U\left(F/R\right)$-modüldür.

$$\bar{v}_1 ... \bar{v}_t \,.\, \tilde{u} = \left[\bar{v}_1, \left[ ..., \left[\bar{v}_t, \tilde{u}\right], ... \right]\right]$$

öyle ki $\bar{v}_1, ..., \bar{v}_t \in F/R$ ve $\tilde{u} \in F/R'$ dir.

**Tanım 2.18:** $\varphi$, $F$ nin $1 \le i \le n$ için $\varphi(x_i) = y_i$ olarak tanımlı bir endomorfizmi olsun. $J_\varphi = \left( \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i, j \le n}$ matrisine $\varphi$ nin jacobian matrisi denir.

## 3. MAGNUS GÖMMESİ VE $F/[R',F]$ LIE CEBİRLERİ

Serbest gruplar için Magnus gömmesi Remeslennikov ve Sokolov tarafından tanımlanmıştır (Remeslennikov ve Sokolov, 1970). Timoshenko Magnus gömmesini kullanarak serbest gruplarda bazı hesaplar yapmıştır (Timoshenko, 2005). Biz bu bölümde serbest Lie cebirleri için Magnus gömmesini tanımladık. Ayrıca Fox türevlerinin bazı özelliklerinden kısaca bahsettik.

$F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,...,x_n\}$ olan bir serbest Lie cebiri ve $R$ , $F$ nin bir ideali olsun. O zaman $U\left(F/R\right)\cong U(F)/\Delta_R$ olur.

Kharlampovic (1984) serbest çözülebilir Lie cebirleri için Magnus Gömmesini tanımlayarak bazı özelliklerini incelemiştir. Biz bu bölümde Magnus Gömmesine benzer bir homomorfizm tanımlayarak $F/R'$ tipindeki serbest Lie cebirlerinin özel tipteki bir matris cebiri içine gömülebileceğini göstereceğiz.

$I$ bir indis kümesi ve $T$ bazı $\{t_i : i\in I\}$ olan bir serbest sol $U\left(F/R\right)$-modül olsun. O zaman $M\left(U\left(F/R\right),T\right)=\left\{\begin{pmatrix} a+\Delta_R & t \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a\in U(F), t\in T\right\}$ matris uzayı $C,D\in M\left(U\left(F/R\right),T\right)$ için $[C,D]=C.D-D.C$ braket çarpımı ile bir Lie cebiridir.

$\beta : X\to M\left(U\left(F/R\right),T\right)$ , $1\le i\le n$ için $\beta(x_i)=\begin{pmatrix} x_i+\Delta_R & t_i \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ olarak tanımlı fonksiyonu düşünelim. $\beta$ nın, $F$ den $M\left(U\left(F/R\right),T\right)$ içine bir homomorfizme genişetilebileceğini ve dolayısıyla $F/R'$ nün $M\left(U\left(F/R\right),T\right)$ içine gömülebileceğini göstereceğiz.

**Önerme 3.1:** $h \in F$ ise $\beta(h) = \begin{pmatrix} h + \Delta_R & \sum_{i \in I} \partial_i(h).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $F/R'$, $M\left(U\left(F/R\right), T\right)$ içine gömülebilir.

**İspat :** Genelliği kaybetmeksizin $h$ nin bir monomial olduğunu varsayalım. İspatı $h$ nin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapalım.

$h$ iki uzunluklu ve $h = [x_1, x_2]$ olsun.

$h = [x_1, x_2] \in F$ ise $\beta(h) = [\beta(x_1), \beta(x_2)]$ olur. O zaman

$$\beta(h) = \beta(x_1).\beta(x_2) - \beta(x_2).\beta(x_1)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + \Delta_R & t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_2 + \Delta_R & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 + \Delta_R & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 + \Delta_R & t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1.x_2 - x_2.x_1 + \Delta_R & (-x_2 + \Delta_R).t_1 + (x_1 + \Delta_R).t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial(x_1.x_2 - x_2.x_1)}{\partial x_1} = -x_2 = \partial_1(h) \ , \ \frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1.x_2 - x_2.x_1)}{\partial x_2} = x_1 = \partial_2(h)$$

olup $U\left(F/R\right)$ de

$$(-x_2 + \Delta_R).t_1 + (x_1 + \Delta_R).t_2 = \partial_1(h).t_1 + \partial_2(h).t_2$$

olur.

O halde $h = [x_1, x_2] \in F$ için $\beta(h) = \begin{pmatrix} h + \Delta_R & \sum_{i \in I} \partial_i(h).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir.

Şimdi $u, v \in F$ için $h = [u, v]$ olsun. $h$ den daha az uzunluklu monomialler için iddianın doğru olduğunu varsayalım. İddianın $h$ için de doğru olduğunu gösterelim. O zaman tümevarım hipotezi gereği

$$\beta(u)=\begin{pmatrix} u+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(u).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta(v)=\begin{pmatrix} v+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(v).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $h=[u,v]$ ise $\beta(h)=\left[\beta(u),\beta(v)\right]$ olup

$$\beta(h)=\beta(u).\beta(v)-\beta(v).\beta(u)$$

$$=\begin{pmatrix} u+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(u).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(v).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} v+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(v).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(u).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u.v-v.u+\Delta_R & \sum_{i\in I}\left(u.\partial_i(v)-v.\partial_i(u)\right).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $\sum_{i\in I}\left(\partial_i[u,v]\right).t_i=\sum_{i\in I}\left(u.\partial_i(v)-v.\partial_i(u)\right).t_i$ ve $U(F)$ de $[u,v]=u.v-v.u$ olduğundan

$$\beta([u,v])=\begin{pmatrix} [u,v]+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i([u,v]).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. O halde tümevarım gereği $h\in F$ ise $\beta(h)=\begin{pmatrix} h+\Delta_R & \sum_{i\in I}\partial_i(h).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur.

Şimdi $\beta$ nın çekirdeğinin $R'$, yani $Ker\beta=R'$ olduğunu gösterelim.

$h \in Ker\beta$ ise $\beta(h) = \begin{pmatrix} h+\Delta_R & \sum_{i\in I} \partial_i(h).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Buradan her $i \in I$ için $\partial_i(h) \in \Delta_R$ olur. $h = \partial_1(h).x_1 + ... + \partial_n(h).x_n$ olduğundan $h \in \Delta_R\Delta$ olur. Önerme 2.17 gereği $h \in R'$ olur.

Tersine $h \in R' = [R,R]$ olsun. Özel olarak $h = [r,s]$ $(r,s \in R)$ olarak düşünelim. olur. O zaman

$$\beta(h) = \beta(r).\beta(s) - \beta(s).\beta(r)$$

$$= \begin{pmatrix} r.s - s.r + \Delta_R & \sum \left(r.\partial_i(s) + \Delta_R\right).t_i + \left(s.\partial_i(r) + \Delta_R\right).t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $\Delta_R$ , $U(F)$ nin $R$ yi içeren bir ideali olup $r,s \in R$ ve $\partial_i(r), \partial_i(s) \in U(F)$ olduğundan $r.\partial_i(s) \in \Delta_R$ ve $s.\partial_i(r) \in \Delta_R$ olur. Ayrıca $r.s - s.r \in R' \subset R \subset \Delta_R$ olduğundan $\beta(h) = \begin{pmatrix} \Delta_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Buradan $h \in Ker\beta$ olur. Böylece $Ker\beta = R'$ elde edilir. 1. izomorfizm teoremi gereğince $F/R' \cong \beta(F)$ dir. O halde $\beta$ dönüşümü $F/R' \to M\left(U\left(F/R\right), T\right)$ şeklinde bir gömme dönüşümü tanımlar. Bu gömmeye $F/R'$ Lie cebirleri için Magnus Gömmesi denir.

Magnus Gömmesi sağ Fox türevleri için aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$I$ bir indis kümesi $T'$ de bazı $\{t_i' : i \in I\}$ olan bir serbest sağ $U\left(F/R\right)$-modül olsun. $M\left(U\left(F/R\right), T'\right) = \left\{ \begin{pmatrix} a+\Delta_R & 0 \\ t' & 0 \end{pmatrix} : a \in U(F),\ t' \in T' \right\}$ matris uzayı braket çarpımı ile bir Lie cebiridir.

$\beta : X \to M\left(U\left(F/R\right), T'\right)$ , $1 \le i \le n$ için $\beta(x_i) = \begin{pmatrix} x_i + \Delta_R & 0 \\ t_i' & 0 \end{pmatrix}$ olarak tanımlı fonksiyon $h \in F$ için

$$\beta(h) = \begin{pmatrix} h + \Delta_R & 0 \\ \sum t_i' . D_i(h) & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $\beta : F \to M\left(U\left(F/R\right), T'\right)$ homomorfizmine genişletilebilir.

$\beta$ nın bu şekilde tanımlanabileceği ve $Ker\beta = R'$ olduğu sol Fox türevlerinin kullanılması durumundaki gibi gösterilir.

Şimdi $F/[R', F]$ formundaki serbest Lie cebirlerinde Fox türevlerinin nasıl kullanıldığını inceleyelim.

**Önerme 3.2:** $[R', F] \subset \Delta(I_R)\Delta$ ve $[R', F] \subset \Delta({}_R I)\Delta$ dır.

**İspat:** $R \subset I_R$, $R \subset \Delta$ ve $R' = [R, R]$ olduğundan $R' \subset I_R\Delta$ ve $R' \subset \Delta I_R$ dir.

Şimdi $[R', F] \subset \Delta(I_R)\Delta$ olduğunu gösterelim.

$[R', F] = [[R, R], F]$ olup $r, s \in R$ ve $f \in F$ için

$$[[r, s], f] = [r, s].f - f.[r, s]$$

eşitliğini düşünelim. $[r, s] \in R'$ olduğundan $[r, s] \in I_R\Delta$ ve $[r, s] \in \Delta I_R$ dir.

$[r, s] \in I_R\Delta$ olduğunu gözönüne alırsak

$$f.[r, s] \in \Delta I_R\Delta$$

ve $[r, s] \in \Delta I_R$ olduğunu göz önüne alırsak

$$[r,s].f \in \Delta I_R \Delta$$

olduğu görülür. O halde $\left[[r,s], f\right] = [r,s].f - f.[r,s] \in \Delta I_R \Delta$ olup

$\left[R', F\right] \subset \Delta(I_R)\Delta$ dir. Benzer şekilde $\left[R', F\right] \subset \Delta({}_R I)\Delta$ elde edilebilir.

**Önerme 3.3:** $g \in F$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) $g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}.x_i \left(\mathrm{mod}({}_R I)\Delta\right)$.

2) $g = \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{g\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\,\Delta I_R\right)$.

3) $B = I_R$ veya $B = {}_R I$ olmak üzere $g = \sum_{i,j=1}^{n} x_i.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{g\partial}{\partial x_i}\right).x_j \left(\mathrm{mod}\,\Delta B \Delta\right)$.

**İspat:** $g \in F$ ise $f \in F$ , $k \in \left[R', F\right]$ olmak üzere $g = f + k$ şeklinde yazılabilir. Önerme 3.2 den $k \in \Delta({}_R I)\Delta$ ve $k \in \Delta(I_R)\Delta$ olur.

1) $\Delta({}_R I) = J$ diyelim. $k \in \Delta({}_R I)\Delta$ ise $k \in J\Delta$ olur. Önerme 2.16 gereği $\frac{\partial k}{\partial x_i} \in J = \Delta({}_R I)$ olur.

$g = f + k$ ise $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial k}{\partial x_i}$ ve $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\,\Delta({}_R I)\right)$ olur.

${}_R I$ bir sol ideal olduğundan $\Delta({}_R I) \subset {}_R I$ olur. Dolayısıyla

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\ {}_R I\right)$$

olur. $1 \le i \le n$ için $x_i \in \Delta$ olduğundan $\frac{\partial g}{\partial x_i}.x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.x_i \left(\mathrm{mod}\ {}_R I\Delta\right)$ dır.

Buradan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}.x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.x_i \left(\mathrm{mod}\ {}_R I\Delta\right)$ olur. Böylece

$$g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}.x_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.x_i \left(\mathrm{mod}\ {}_R I\Delta\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}.x_i \left(\mathrm{mod}\ {}_R I\Delta\right)$$

elde edilir.

2) $\left(I_R\right)\Delta = J$ diyelim. $k \in \Delta\left(I_R\right)\Delta$ olduğundan $k \in \Delta J$ olur. Önerme 2.16 gereği $1 \le i \le n$ için $\frac{k\partial}{\partial x_i} \in J = \left(I_R\right)\Delta$ olur.

$g = f + k$ olduğundan $\frac{g\partial}{\partial x_i} = \frac{f\partial}{\partial x_i} + \frac{k\partial}{\partial x_i}$ ve $\frac{g\partial}{\partial x_i} = \frac{f\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\left(I_R\right)\Delta\right)$ olur. Buradan

$$\frac{g\partial}{\partial x_i} = \frac{f\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\, I_R\right)$$

olur ( Çünkü $I_R$ bir sağ ideal ).

$1 \le i \le n$ için $x_i \in \Delta$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{g\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{f\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\,\Delta I_R\right)$ dır.

Böylece

$$g = \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{g\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{f\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{g\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\,\Delta I_R\right)$$

elde edilir.

3) $f \in F$ , $k \in \Delta\left({}_R I\right)\Delta$ için $g = f + k$ olduğundan Önerme 2.16 gereği $1 \le i \le n$ için $\frac{k\partial}{\partial x_i} \in {}_R I\Delta$ olur. Buna göre

$$\frac{g\partial}{\partial x_i} = \frac{f\partial}{\partial x_i} + \frac{k\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{f\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{mod}\ {}_R I\Delta\right)$$

olur. Her iki tarafın sol Fox türevini alırsak

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{g\partial}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\partial}{\partial x_i}\right)\left(\mathrm{mod}\ {}_R I\right)$$

elde edilir. $1 \le i, j \le n$ için $x_i, x_j \in \Delta$ olduğundan

$$x_i.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{g\partial}{\partial x_i}\right).x_j = x_i.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\partial}{\partial x_i}\right).x_j \left(\mathrm{mod}\,\Delta\left({}_R I\right)\Delta\right)$$

dır. Buradan

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{g\partial}{\partial x_i}\right).x_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i.\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\partial}{\partial x_i}\right).x_j \left(\mathrm{mod}\,\Delta\left({}_R I\right)\Delta\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde $B = I_R$ olması durumunda da benzer hesaplarla sonuç elde edilir.

**Önerme 3.4:** $h_1,\ h_2,\ v \in F$ olsun.

$$h_1 \equiv \left[v, h_2\right]\left(\mathrm{mod}\, F \cap \Delta\left({}_R I\right)\Delta\right) \text{ ya da } h_1 \equiv h_2 + \left[v, h_2\right]\left(\mathrm{mod}\, F \cap \Delta\left({}_R I\right)\Delta\right)$$

ise

$$h_1 \equiv \left[v, h_2\right]\left(\mathrm{mod}\, R'\right) \text{ ya da } h_1 \equiv h_2 + \left[v, h_2\right]\left(\mathrm{mod}\, R'\right)$$

dır.

**İspat:** $F \cap \Delta\left({}_R I\right)\Delta \subseteq R'$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$t \in F \cap \Delta\left({}_R I\right)\Delta$ olsun. $t \in F$ ve $t \in \Delta\left({}_R I\right)\Delta$ olur. ${}_R I$ bir sol ideal olduğundan $t \in {}_R I\Delta$ olur. Ayrıca $t \in F$ olduğundan Önerme 2.17 gereği $t \in R'$ olur.

O halde $F \cap \Delta\left({}_R I\right)\Delta \subseteq R'$ dir.

**Önerme 3.5:** $F$ bir serbest Lie cebiri, $R$, $F$ nin bir ideali $u \in R/R'$, ve $\beta \in U\left(F/R\right)$ olsun. O zaman $1 \le i \le n$ için $\partial_i\left(\beta.u\right) = \beta.\partial_i\left(u\right)$ ve $D_i\left(u.\beta\right) = D_i\left(u\right).\beta$ dır.

**İspat:** $u = r + R'$ ve $\beta = a + \Delta_R \in U\left(F/R\right)$ olsun. $R/R'$ , $U\left(F/R\right)$-modül olduğundan $\beta.u \in R/R'$ olup $\beta.u = ar + R'$ formundadır. Buradan

$$\begin{aligned}\partial_i(\beta.u) &= \partial_i(ar) + \Delta_R = \partial_i(a).\varepsilon(r) + a.\partial_i(r) + \Delta_R = a.\partial_i(r) + \Delta_R \\ &= (a + \Delta_R)(\partial_i(r) + \Delta_R) = (a + \Delta_R)\partial_i(r + R') \\ &= \beta.\partial_i(u)\end{aligned}$$

elde edilir.

$u.\beta = ra + R'$ ise

$$\begin{aligned}D_i(u.\beta) &= D_i(ra) + \Delta_R = \varepsilon(r)D_i(a). + D_i(r).a + \Delta_R = D_i(r).a + \Delta_R \\ &= (D_i(r) + \Delta_R)(a + \Delta_R) = D_i(r + R')(a + \Delta_R) \\ &= D_i(u).\beta\end{aligned}$$

elde edilir

## 4. $F/R'$ LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

Bu bölümde $F/R'$ formundaki serbest Lie cebirlerinin iç otomorfizmlerinin yapısını inceleyeceğiz. Bundan yararlanarak $F/R'$ tipindeki serbest Lie cebirleri için test kümesi tanımlayıp test rankını belirleyeceğiz.

$F$ , $X=\{x_1,...,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

**Tanım 4.1:** $\{g_1,,...,g_m\}$ $(m\le n)$ $F$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer $F$ nin, $i=1,...,m$ için $\varphi(g_i)=g_i$ olacak şekildeki her $\varphi$ endomorfizmi bir otomorfizm oluyorsa $\{g_1,,...,g_m\}$ kümesine bir test kümesi denir.

**Tanım 4.2:** $F$ nin minimal elemanlı bir test kümesinin eleman sayısına $F$ nin test rankı denir.

**Tanım 4.3:** $u\in F$ olsun. $F$ nin $\varphi(u)=u$ olacak şekildeki her $\varphi$ endomorfizmi bir otomorfizm oluyorsa $u$ ya $F$ nin bir test elemanı denir.

$F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,...,x_n\}$ olan bir serbest Lie cebiri ve $R$ , $F$ nin bir ideali olsun. $u\in F$ için $\bar{u}$ ve $\tilde{u}$ ile $u$ nun sırasıyla $F\to F/R$ ve $F\to F/R'$ doğal homomorfizmleri altındaki görüntüsünü gösterelim. $U\left(F/R'\right)$ evrensel enveloping cebirinin $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ sol Fox türevleri görüntüleri $U\left(F/R\right)$ de olan fonksiyonlardır (Shpilrain, 1993).

$F/R'$ nün her $\tilde{u}$ elemanı için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} x_i = \bar{u}$$

eşitliği $U\left(F/R\right)$ de sağlanır. Bu yüzden, eğer bazı $\bar{c}_i \in U\left(F/R\right)$ elemanları için

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i . \bar{x}_i$$

ise o zaman $\bar{u} = \bar{v}$ ve $1 \le i \le n$ için $\bar{c}_i = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}$ olacak şekilde bir $\tilde{v} \in F/R'$ elemanı vardır.

**Önerme 4.4:** $R$ , $F$ nin bir ideali olsun. $\tilde{u}\left(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n}\right) \in F/R'$ ve $1 \le i \le n$ için $\widetilde{a_i} \in F/R'$, $\tilde{r}_i \in R/R'$ ise

$$\tilde{u}\left(\widetilde{a_1}+\tilde{r}_1,...,\widetilde{a_n}+\tilde{r}_n\right) = \tilde{u}\left(\widetilde{a_1},...,\widetilde{a_n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}\left(\widetilde{a_1},...,\widetilde{a_n}\right)}{\partial x_i} . \tilde{r}_i \qquad (4.1.)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Genelliği kaybetmeksizin $\tilde{u}\left(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n}\right)$ elemanının bir monomial olduğunu varsayalım. $\tilde{u}\left(\widetilde{x_1},...,\widetilde{x_n}\right)$ nun uzunluğu üzerinde tümevarımla (4.1.) eşitliği elde edilebilir.

Aşağıdaki önermenin ispatı (Umirbaev, 1990) da bulunabilir.

**Önerme 4.5:** $R$ , $F$ nin bir ideali olsun. O zaman $F \cap \Delta_R = R$ dir.

**Önerme 4.6:** $R$ , $F$ nin bir ideali ve $u \in F$ olsun. $R$ nin en küçük dereceli $r$ elemanı için $[u,r] \in R'$ ise $u \in R$ dir.

**İspat:** $[u,r] \in R'$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin $s,t \in R$ için $[u,r]=[s,t]$ kabul edebiliriz. Herhangi bir $a$ elemanın derecesini $d(a)$ ile gösterelim ve $d(r)=m$ olsun. $d(u)<d(r)=m$ olduğunu varsayalım. O zaman $d([s,t])=d([u,r])<2m$ olur. O halde $s$ ve $t$ nin en yüksek dereceli monomialleri aynı olmalıdır. Aksi halde $d([s,t])\geq 2m$ çelişkisi elde edilir. $s$ ve $t$ nin en yüksek dereceli monomialleri $b$ ve $s=a+b$ ve $t=c+b$ olsun. $s-t=a-c \in R$ olup en az bir $q \in R$ için $a=q+c$ olur. $[s,t]=[a+b,c+b]=[q+c+b,c+b]=[q,c]+[q,b]$ olur. $d(q)\geq m$ olduğundan $d([s,t])\geq 2m$ çelişkisi elde edilir. O halde $d(u)\geq d(r)=m$ olmalıdır. $[u,r]=[s,t]$ olduğundan $ur-ru=st-ts$ ve $ur=ru+st-ts$ olur.

$$ur = ru + st - ts \tag{4.2.}$$

elde edilir. Amacımız (4.2.) de art arda uygun türevler alarak $ur$ terimini $u$ ya indirgemektir.

$1 \leq i_1 \leq n$ olmak üzere (4.2.) eşitliğinde her iki tarafın $x_{i_1}$ e göre Fox türevi alınırsa

$$u\frac{\partial r}{\partial x_{i_1}} = r\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + s\frac{\partial t}{\partial x_{i_1}} - t\frac{\partial s}{\partial x_{i_1}} \tag{4.3.}$$

olur. $\dfrac{\partial r}{\partial x_{i_1}} \in K-\{0\}$ ise (4.3.) den $u \in I_R$ olur. Ayrıca $u \in F$ olduğundan Önerme 4.5 gereği $u \in R$ elde edilir.

Eğer $\frac{\partial r}{\partial x_{i_1}} \notin K$ ise $d(r) \leq d(u), d(s), d(t)$ olduğundan $\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial t}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial s}{\partial x_{i_1}}$ terimleri ya sıfırdır ya da $K$ ya ait değillerdir. $1 \leq i_2 \leq n$ olmak üzere (4.3.) de $x_{i_2}$ ye göre türev alınırsa

$$u\frac{\partial^2 r}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} = r\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} + s\frac{\partial^2 t}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} - t\frac{\partial^2 s}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}$$

olur. $\frac{\partial^2 r}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} \in K - \{0\}$ ise $u \in I_R$ olur ve Önerme 4.5 gereği $u \in R$ elde edilir.

$\frac{\partial^2 r}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} \notin K$ ise $d(r) \leq d(u), d(s), d(t)$ olduğundan $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}, \frac{\partial^2 t}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}, \frac{\partial^2 s}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}$ terimleri ya sıfırdır ya da $K$ ya ait değillerdir. Bu şekilde türev almaya devam edilirse bir $k \in \mathbb{Z}$ için $\frac{\partial^k r}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}} \in K - \{0\}$ olur öyle ki

$$u = r\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}} + s\frac{\partial^k t}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}} - t\frac{\partial^k s}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}$$

olur. Buradan $u \in I_R$ olur. Ayrıca $u \in F$ olduğundan Önerme 4.5 gereği $u \in R$ elde edilir.

Bu önermenin ispatını aşağıdaki şekilde de yapabiliriz.

**2.Yol:** $u \in F$ ve $r \in R - R'$ için $[u,r] \in R'$ olsun. Buradan $ur - ru \in \Delta_R\Delta$ ve $ur \in \Delta_R\Delta$ olur. Önerme 2.16 gereği her $1 \leq i \leq n$ için $\frac{\partial(ur)}{\partial x_i} = u\frac{\partial r}{\partial x_i} \in \Delta_R$ olur. $r \in R - R'$ olduğundan Önerme 2.16 ve Önerme 2.17 gereği en az bir $i$, $1 \leq i \leq n$ için $\frac{\partial r}{\partial x_i} \notin \Delta_R$ olur. $U\left(F/R\right)$ sıfır bölensiz ve $u\frac{\partial r}{\partial x_i} \in \Delta_R$ olup $\frac{\partial r}{\partial x_i} \notin \Delta_R$ olduğundan $u \in \Delta_R$ olur. Buradan $u \in F \cap \Delta_R$ olur. Önerme 4.5 gereği $u \in R$ elde edilir.

Serbest polinilpotent Lie cebirlerinin test rankının hesaplanmasında aşağıda ispatlayacağımız teorem önemli bir rol oynar. Gruplar için benzer sonuçlar ( Gupta ve Timoshenko, 2003 ) de elde edilmiştir.

**Teorem 4.7:** $R$, $F$ nin $F/R$ serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki ideali olsun. O zaman $F/R'$ nün $R/R'$ üzerinde birim olan her $IA$-endomorfizmi $R/R'$ nün elemanları tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

**İspat:** $\varphi : F/R' \to F/R'$ , $1 \le i \le n$ için $\varphi\left(x_i + R'\right) = x_i + u_i + R'$ ( $1 \le i \le n$ için $u_i \in F' - R'$ ) olarak tanımlı ve $R/R'$ üzerinde birim olan bir $IA$-endomorfizmi olsun.

$1 \le i \le n$ olmak üzere her $r \in R$ için $[x_i, r] \in R$ olduğundan

$$\begin{aligned}[x_i, r] + R' &= \varphi\left([x_i, r] + R'\right) \\ &= \left[\varphi\left(x_i + R'\right), \varphi\left(r + R'\right)\right] \\ &= [x_i, r] + [u_i, r] + R'\end{aligned}$$

olur. Buradan her $r \in R$ ve $1 \le i \le n$ için $[u_i, r] \in R'$ olur.

Önerme 4.6 den $1 \le i \le n$ için $u_i \in R$ olur. Şimdi $\varphi$ nin bir iç otomorfizm olduğunu gösterelim.

$2 \le j \le n$ olmak üzere sıfırdan farklı $\widetilde{r_j} = \widetilde{r_j}\left(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_j}\right) \in R/R'$ elemanlarını ele alalım.

Önerme 4.4 gereği

$$\begin{aligned}\widetilde{r_j} = \varphi\left(\widetilde{r_j}\right) &= \widetilde{r_j}\left(\varphi\left(\widetilde{x_1}\right), \varphi\left(\widetilde{x_j}\right)\right) \\ &= \widetilde{r_j}\left(\widetilde{x_1} + \widetilde{u_1}, \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}\right) \\ &= \widetilde{r_j}\left(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_j}\right) + \frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\widetilde{u_1} + \frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}\widetilde{u_j}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\widetilde{u_1}+\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}\widetilde{u_j}=0$$

olur. Şimdi bu eşitliğin sağ ve sol taraflarının Fox türevlerini hesaplayalım. O zaman $U\left(F/R\right)$ de

$$\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_i}+\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}\frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_i}=0,\ i=1,...,n \tag{4.4.}$$

eşitliği elde edilir.

$$\widetilde{r_j}\in R/R',\ \text{ve } \overline{r_j}=\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\overline{x_1}+\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}\overline{x_j}$$

olduğundan $U\left(F/R\right)$ de

$$\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\overline{x_1}+\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}\overline{x_j}=0$$

olur. $U\left(F/R\right)$ yi $Q\left(F/R\right)$ kesir cismine gömelim (Kharlampovich, 1984). O zaman $\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_j}=-\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_j}}^{-1}$ olur. Bunu (4.4.) de yerine yazalım. O zaman $i=1,...,n$ için

$$\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_i}+\left(-\frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_j}}^{-1}\right)\frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_i}=0\ \text{ ve }\ \frac{\partial \widetilde{r_j}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_i}-\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_j}}^{-1}\frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_i}\right)=0$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_i}=\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_j}}^{-1}\frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_i} \tag{4.5.}$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$\overline{x_1}^{-1}\overline{x_j}\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_i}\in U\left(F/R\right)$$

olur. O zaman $\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_i}=\overline{x_j}.\overline{\alpha_i}$ olacak şekilde $\overline{\alpha_i}\in U\left(F/R\right)$ vardır. Bunu (4.5.) da yerine yazarsak $i=1,...,n$ için $\frac{\partial\widetilde{u_1}}{\partial x_i}=\overline{x_1}.\overline{\alpha_i}$ olur. Buradan $\widetilde{u_1}\in R/R'$ olduğundan

$$0=\overline{u_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{u_1}}{\partial x_i}\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_1}.\overline{\alpha_i}.\overline{x_i}$$

ve sonuç olarak

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}.\overline{x_i}=0$$

elde edilir. Buradan bir $\tilde{v}\in R/R'$ vardır öyle ki $\overline{\tilde{v}}=\overline{u_1}$ ve $i=1,...,n$ için $\overline{\alpha_i}=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_i}$ dir.

$$\frac{\partial\widetilde{u_1}}{\partial x_i}=\overline{x_1}.\overline{\alpha_i}=\overline{x_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_i}=\frac{\partial\left[\widetilde{x_1},\tilde{v}\right]}{\partial x_i}$$

olduğundan $\widetilde{u_1}=\left[\widetilde{x_1},\tilde{v}\right]$ olur. Benzer şekilde $\widetilde{u_j}=\left[\widetilde{x_j},\tilde{v}\right]$ olur. $j=2,...,n$ için $\widetilde{r_j}$ elemanlarını ele alırsak her $i=1,...,n$ için $\widetilde{u_i}=\left[\widetilde{x_i},\tilde{v}\right]$ elde edilir. Bu yüzden;

$$\varphi\left(\widetilde{x_i}\right)=\widetilde{x_i}+\widetilde{u_i}=\widetilde{x_i}+\left[\widetilde{x_i},\tilde{v}\right],\ i=1,...,n$$

elde edilir. Böylece $\varphi$ , $R/R'$ nün bir $\tilde{v}$ elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

Şimdi Teorem 4.7 yi rankın 2 olması durumu için inceleyelim.

**Önerme 4.8:** $F$, $\{x_1, x_2\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri, $R = \gamma_3(F)$, $\widetilde{F} = F/R'$ ve $\varphi : \widetilde{F} \to \widetilde{F}$, $\varphi\left(\left[\left[x_1, x_2\right], x_2\right] + R'\right) = \left[\left[x_1, x_2\right], x_2\right] + R'$, $\varphi\left(\left[\left[x_2, x_1\right], x_1\right] + R'\right) = \left[\left[x_2, x_1\right], x_1\right] + R'$ olacak şekilde $\widetilde{F}$ nin $IA$ olmayan bir endomorfizmi olsun. O zaman $\varphi^3$, $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

**İspat:** $a, b, c, d \in K$ ve $u, v \in F'$ olmak üzere

$$\varphi\left(x_1 + R'\right) = ax_1 + bx_2 + u + R', \varphi\left(x_2 + R'\right) = cx_1 + dx_2 + v + R'$$

olarak tanımlayalım.

$$y_1 = ax_1 + bx_2 + u \text{ ve } y_2 = cx_1 + dx_2 + v$$

diyelim. $R = \gamma_3(F)$ olduğundan bir $r \in R$ için

$$\left[y_1, y_2\right] = \left[ax_1 + bx_2 + u, cx_1 + dx_2 + v\right] = (ad - bc)\left[x_1, x_2\right] + r$$

olur. $(ad - bc) = \alpha$ diyelim. O zaman $\left[y_1, y_2\right] = \alpha\left[x_1, x_2\right] + r$ olur.

$\varphi\left(\left[\left[x_1, x_2\right], x_2\right] + R'\right) = \left[\left[x_1, x_2\right], x_2\right] + R'$ olduğundan

$$\left[\left[y_1, y_2\right], y_2\right] + R' = \left[\left[x_1, x_2\right], x_2\right] + R'$$

olur. Bu eşitlikte her iki tarafın $x_1$ e göre Fox türevi alınırsa

$$\frac{\partial\left(\left[\left[y_1,y_2\right],y_2\right]\right)}{\partial x_1}=\frac{\partial\left(\left[\left[x_1,x_2\right],x_2\right]\right)}{\partial x_1}\bmod I_R$$

ve

$$\left[y_1,y_2\right].\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-y_2.\frac{\partial\left[y_1,y_2\right]}{\partial x_1}=x_2.x_2 \bmod I_R$$

olur. Buradan

$$\left(\alpha\left[x_1,x_2\right]+r\right).\left(c+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)-\left(cx_1+dx_2+v\right).\frac{\partial\left(\alpha\left[x_1,x_2\right]+r\right)}{\partial x_1}=x_2.x_2 \bmod I_R$$

ve

$$\left(\alpha\left(x_1x_2-x_2x_1\right)+r\right).\left(c+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)-\left(cx_1+dx_2+v\right).\frac{\partial\left(\alpha\left(x_1x_2-x_2x_1\right)+r\right)}{\partial x_1}=x_2.x_2 \bmod I_R$$

elde edilir. Bu son eşitlikte eşitliğin sağında ve solunda bulunan 2 uzunluklu kelimelerin toplamı birbirine eşit olmalıdır. O halde

$$\alpha c\left(x_1x_2-x_2x_1\right)-\left(cx_1+dx_2\right)\left(-\alpha x_2\right)=x_2x_2$$

olur. Bu ifade düzenlenirse $2\alpha cx_1x_2-\alpha cx_2x_1+\alpha dx_2x_2=x_2x_2$ ve buradan da $\alpha c=0,\ \alpha d=1$ elde edilir. Bu ise $c=0$ olduğunu gösterir. O halde $\alpha=ad$ ve $ad^2=1$ dir.

Diğer taraftan;

$R=\gamma_3\left(F\right)$ olduğundan bir s$\in R$ için $\left[y_2,y_1\right]=\left[dx_2+v,ax_1+bx_2+u\right]=ad\left[x_2,x_1\right]+s$ olur. $\varphi\left(\left[\left[x_2,x_1\right],x_1\right]+R'\right)=\left[\left[x_2,x_1\right],x_1\right]+R'$ olduğundan

$$\left[\left[y_2,y_1\right],y_1\right]+R'=\left[\left[x_2,x_1\right],x_1\right]+R'$$

olur. Bu eşitlikte her iki tarafın $x_2$ ye göre Fox türevi alınırsa

$$\frac{\partial\left(\left[\left[y_2,y_1\right],y_1\right]\right)}{\partial x_2}=\frac{\partial\left(\left[\left[x_2,x_1\right],x_1\right]\right)}{\partial x_2}\bmod I_R$$

ve

$$[y_2, y_1].\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - y_1.\frac{\partial [y_2, y_1]}{\partial x_2} = x_1.x_1 \bmod I_R$$

olur. Buradan

$$\left(ad[x_2, x_1] + s\right).\left(b + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \left(ax_1 + bx_2\right).\frac{\partial\left(ad[x_2, x_1] + s\right)}{\partial x_2} = x_1.x_1 \bmod I_R$$

ve

$$\left(ad\left(x_2x_1 - x_1x_2\right) + s\right).\left(b + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \left(ax_1 + bx_2\right).\frac{\partial\left(ad\left(x_2x_1 - x_1x_2\right) + s\right)}{\partial x_2} = x_1.x_1 \bmod I_R$$

elde edilir. Bu son eşitlikte eşitliğin sağında ve solunda bulunan 2 uzunluklu kelimelerin toplamı birbirine eşit olmalıdır. O halde

$$abd\left(x_2x_1 - x_1x_2\right) - \left(ax_1 + bx_2\right)\left(ad\left(-x_1\right)\right) = x_1.x_1$$

ve $2abdx_2x_1 - abdx_1x_2 + a^2dx_1x_1 = x_1x_1$ olur. Buradan $abd = 0$ ve $a^2d = 1$ olur ve $b = 0$ elde edilir.

Böylece $b = 0,\ c = 0,\ a^2d = 1 = ad^2$ elde edilir. $a^2d = ad^2$ ise $ad\left(d - a\right)$=0 olur ve $d = a$ elde edilir.

Böylece $y_1 = ax_1 + u,\ y_2 = ax_2 + v$ ve $a^3 = 1$ elde edilir. $\varphi$, $\widetilde{F}$ nin $IA$ olmayan bir endomorfizmi olduğundan $a \neq 1$ ve $a^2 + a + 1 = 0$ olur.

$$\varphi^3\left(x_1 + R'\right) = x_1 + a^2u + a\varphi\left(u + R'\right) + \varphi^2\left(u + R'\right) + R'$$

dir. $u \in R$ ise

$$a^2u + a\varphi\left(u + R'\right) + \varphi^2\left(u + R'\right) \in R$$

dir.

$u \notin R$ olsun. $u \in F'$ olup genelliği kaybetmeksizin $u = [x_1, x_2]$ alabiliriz. O zaman bir $r \in R$ için

$$\varphi\left(u + R'\right) = \varphi\left([x_1, x_2] + R'\right) = [y_1, y_2] + R' = a^2[x_1, x_2] + r + R'$$

ve

$\varphi^2\left(u+R'\right)=\varphi\left(a^2\left[x_1,x_2\right]+r+R'\right)=a^2\varphi\left(\left[x_1,x_2\right]\right)+\varphi\left(r\right)+R'=a\left[x_1,x_2\right]+a^2r+\varphi\left(r\right)+R'$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}a^2u+a\varphi\left(u+R'\right)+\varphi^2\left(u+R'\right)&=a^2\left[x_1,x_2\right]+a\left(a^2\left[x_1,x_2\right]+r\right)+a\left[x_1,x_2\right]+a^2r+\varphi\left(r\right)+R'\\&=\left(a^2+a+1\right)\left[x_1,x_2\right]+ar+a^2r+\varphi\left(r\right)+R'\\&=ar+a^2r+\varphi\left(r\right)+R'\in R/R'\end{aligned}$$

olur. O halde $u\in F'$ ise $a^2u+a\varphi\left(u+R'\right)+\varphi^2\left(u+R'\right)\in R/R'$ olur.

O zaman bir $p\in R$ için $\varphi^3\left(x_1+R'\right)=x_1+p+R'$ olur.

Benzer şekilde bir $q\in R$ için $\varphi^3\left(x_2+R'\right)=x_2+q+R'$ elde edilir.

Şimdi $\varphi^3$ ün $R/R'$ üzerinde birim dönüşüm olduğunu gösterelim.

$R'\neq w+R'\in R/R'$ olsun. $w\in R-R'$ olup $r\in\left\{\left[\left[x_1,x_2\right],x_2\right],\left[\left[x_2,x_1\right],x_1\right]\right\}\subset R$ olmak üzere $w$ nun her monomiali $\left[...\left[\left[r,a_1\right],a_2\right],...,a_l\right]$ şeklindedir öyle ki $1\le i\le l$ için $a_i\in\left\{x_1,x_2,\left[x_1,x_2\right]\right\}$ dir ve $\varphi^3\left(a_i+R'\right)=a_i+r_i+R'$ olacak şekilde $r_i\in R$ vardır. $\varphi^3\left(r+R'\right)=r+R'$ olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi^3\left(\left[...\left[\left[r,a_1\right],a_2\right],...,a_l\right]+R'\right)&=\left[...\left[\left[r,a_1+r_1\right],a_2+r_2\right],...,a_l+r_l\right]+R'\\&=\left[...\left[\left[r,a_1\right],a_2+r_2\right],...,a_l+r_l\right]+R'\\&=\left[...\left[\left[\left[r,a_1\right],a_2\right],a_3+r_3\right],...,a_l+r_l\right]+R'\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$\varphi^3\left(\left[...\left[\left[r,a_1\right],a_2\right],...,a_l\right]+R'\right)=\left[...\left[\left[r,a_1\right],a_2\right],...,a_l\right]+R'$$

olur. O halde $\varphi^3$ endomorfizmi $R/R'$ üzerinde birimdir.

Son olarak $\varphi^3$ endomorfizminin bir otomorfizm olduğunu gösterelim.

$a+R' \in {F}/{R'}$ olsun. $a \in F$ olup $R=\gamma_3(F)$ olduğundan $a \in R$ ya da $\alpha,\beta,\delta \in K$ olmak üzere $a=\alpha[x_1,x_2]+\beta x_1+\delta x_2$ şeklindedir.

$a+R' \neq R'$ olsun. $\varphi^3$ endomorfizmi ${R}/{R'}$ üzerinde birim olduğundan $a \in R$ ise $\varphi^3(a+R')=a+R' \neq R'$ olur.

$a=\alpha[x_1,x_2]+\beta x_1+\delta x_2$ ise

$$\varphi^3([x_1,x_2]+R')=[x_1,x_2]+[x_1,q]+[p,x_2]+R' \neq R',$$

$$\varphi^3(x_1+R')=x_1+p+R' \neq R',$$

$$\varphi^3(x_2+R')=x_2+q+R' \neq R'$$

olduğundan $\varphi^3(a+R') \neq R'$ dir. O halde $a+R' \neq R'$ ise $\varphi^3(a+R') \neq R'$ dir. O halde $\varphi^3$ birebirdir.

Şimdi $\varphi^3$ ün örten olduğunu gösterelim.

$a+R' \in {F}/{R'}$ olsun. $a \in R$ ya da $\alpha,\beta,\delta \in K$ olmak üzere $a=\alpha[x_1,x_2]+\beta x_1+\delta x_2$ şeklindedir.

$a \in R$ ise $\varphi^3$ endomorfizmi ${R}/{R'}$ üzerinde birim olduğundan $\varphi^3(a+R')=a+R'$ dir.

$a=\alpha[x_1,x_2]+\beta x_1+\delta x_2$ ise

$$\varphi^3(\alpha[x_1,x_2]-\beta[x_1,q]-\delta[p,x_2]+\beta x_1-\beta r+\delta x_2-\delta s+R')=a+R'$$

dir. O halde $\varphi^3$ örtendir.

Böylece $\varphi^3$, ${F}/{R'}$ nün ${R}/{R'}$ üzerinde birim olan bir $IA-$otomorfizmidir. Bir önceki teoremden $\varphi^3$, ${F}/{R'}$ nün ${R}/{R'}$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmidir.

Teorem 4.7, $R/\gamma_k(F)'$ tipindeki serbest Lie cebirlerinin test kümelerini belirlememizde önemli bir rol oynar. Bunun için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır.

**Önerme 4.9:** $F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olan bir serbest Lie cebiri ve $R$ , $F$ nin $F/R$ serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki bir ideali ve $s\in R$ olsun. Eğer bir $x_j\in X$ için $[s,x_j]\in R'$ ise $s\in R'$ olur.

**İspat:** $R$ , $F$ nin $F/R$ serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki ideali ise $U(F/R)$ bir tamlık bölgesidir. $[s,x_j]\in R'$ ise $sx_j-x_js\in\Delta_R\Delta$ olur. $s\in R$ olduğundan $x_js\in\Delta_R\Delta$ olur. Buradan Önerme 2.16 gereği $1\le i\le n$ için $x_j\dfrac{\partial s}{\partial x_i}\in\Delta_R$ olur. $U(F/R)$ bir tamlık bölgesi ve $x_j\notin\Delta_R$ olduğundan $1\le i\le n$ için $\dfrac{\partial s}{\partial x_i}\in\Delta_R$ olur. Önerme 2.16 gereği $s\in\Delta_R\Delta$ olur. Ayrıca $s\in F$ olduğundan Önerme 2.17 gereği $s\in R'$ olur.

**Teorem 4.10:** $R=\gamma_k(F)$ , $\widetilde{F}=F/R'$ ve $f\in F$ için $\widetilde{f}=f+R'$ olsun. Eğer bir $m>k$ için $\varphi:\widetilde{F}\to\widetilde{F}$ endomorfizmi, $\widetilde{H_m}=\{h+R':h\in H_m\}$ üzerinde birim dönüşüm ise $\varphi$ , $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

( Burada $H=\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$ kümesi $F$ nin Hall bazıdır.)

**İspat:** $1 \le j,t \le n,\ j \ne t$ için $w_{mtj} = \Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{x}_t , \underbrace{\widetilde{x}_j \Big], \widetilde{x}_j \Big], ... \widetilde{x}_j \Big]}_{(m-1)-kez}$ olarak tanımlayalım. $w_{mtj} \in \widetilde{H_m}$ olup $\varphi$ , $\widetilde{H_m}$ üzerinde birim olduğundan $\varphi\left( w_{mtj} \right) = w_{mtj}$ olur. $1 \le i \le n$ için $u_i \in F^{'}$ olmak üzere $\varphi\left( \widetilde{x}_i \right) = \widetilde{u}_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \widetilde{x}_i = \widetilde{y}_i$ olarak tanımlayalım ($1 \le i,k \le n$ için $a_{ik} \in K$ ).

$1 \le j,t \le n,\ j \ne t$ için $\varphi\left( w_{mtj} \right) = w_{mtj}$ olduğundan

$$\Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{x}_t , \underbrace{\widetilde{x}_j \Big], \widetilde{x}_j \Big], ... \widetilde{x}_j \Big]}_{(m-1)-kez} = \varphi \left( \Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{x}_t , \underbrace{\widetilde{x}_j \Big], \widetilde{x}_j \Big], ... \widetilde{x}_j \Big]}_{(m-1)-kez} \right) = \Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{y}_t , \underbrace{\widetilde{y}_j \Big], \widetilde{y}_j \Big], ... \widetilde{y}_j \Big]}_{(m-1)-kez}$$

ve dolayısıyla

$$\Big[ ... \Big[ \Big[ y_t , \underbrace{y_j \Big], y_j \Big], ... y_j \Big]}_{(m-1)-kez} = \Big[ ... \Big[ \Big[ x_t , \underbrace{x_j \Big], x_j \Big], ... x_j \Big]}_{(m-1)-kez} \bmod R^{'}$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x_t} \left( \Big[ ... \Big[ \Big[ y_t , \underbrace{y_j \Big], y_j \Big], ... y_j \Big]}_{(m-1)-kez} \right) = \frac{\partial}{\partial x_t} \left( \Big[ ... \Big[ \Big[ x_t , \underbrace{x_j \Big], x_j \Big], ... x_j \Big]}_{(m-1)-kez} \bmod R^{'} \right)$$

ve

$$\Big[ ... \Big[ \Big[ y_t , \underbrace{y_j \Big], y_j \Big], ... y_j \Big]}_{(m-2)-kez} \frac{\partial y_j}{\partial x_t} - y_j \frac{\partial}{\partial x_t} \left( \Big[ ... \Big[ \Big[ y_t , \underbrace{y_j \Big], y_j \Big], ... y_j \Big]}_{(m-2)-kez} \right) = (-1)^{m-1} \, {x_j}^{m-1} \bmod I_R$$

eşitliği elde edilir. $m > k$ olduğundan $\Big[ ... \Big[ \Big[ y_t , \underbrace{y_j \Big], y_j \Big], ... y_j \Big]}_{(m-2)-kez} \in R$ olup son eşitlikten

$$-y_j \frac{\partial}{\partial x_t}\left( \left[ ...\left[ \left[ y_t , \underbrace{y_j}_{(m-2)-kez} \right], y_j \right], ... y_j \right] \right) = (-1)^{m-1} x_j{}^{m-1} \bmod I_R$$

elde edilir. O halde en az bir $1 \le p \le n$ için $y_j = x_j^p \bmod I_R$ olur. Dolayısıyla $u_j + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jj}x_j + ... + a_{jn}x_n = x_j^p \bmod I_R$ olur. Her $1 \le t \le n$ için $a_{jt} = 0$ olsa $u_j \in F'$ için $u_j = x_j^p \bmod I_R$ çelişkisi elde edilir.

O halde $p = 1$, $a_{jj} = 1$, $t \ne j$ için $a_{jt}$=0 ve $u_j \in R$ elde edilir. O halde $1 \le j \le n$ için $u_j \in R$ olmak üzere $\varphi\left(\widetilde{x_j}\right) = \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}$ şeklindedir.

Şimdi $\varphi$ nin $R/R'$ üzerinde birim dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için $\varphi$ nin her $n \ge k$ için $\widetilde{H_n}$ kümesi üzerinde birim olduğunu göstermek yeterlidir.

$\tilde{r} \in \widetilde{H_{m-1}}$ olsun. $\varphi\left(\tilde{r}\right) = \tilde{r} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_i}.\widetilde{u_i}$ olup $s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_i}.u_i \in R$ dir. $\tilde{a} = \left[\tilde{r}, \widetilde{x_j}\right]$ olsun.

$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{l} c_i.\widetilde{h_{mi}}$ olacak şekilde $c_i \in K$ ve $1 \le i \le l$ için $\tilde{h}_i \in \widetilde{H_m}$ vardır. $\varphi$, $\widetilde{H_m}$ üzerinde birim olduğundan $\varphi\left(\tilde{a}\right) = \tilde{a}$ olur. O halde Önerme 4.4 gereği $\varphi\left(\tilde{a}\right) = \tilde{a}$ den

$$\tilde{a} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x_i}.\widetilde{u_i} = \tilde{a}$$

olur. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left[ r, x_j \right]}{\partial x_i}.u_i \in R'$$

ve dolayısıyla

$$ru_j - x_j.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_i}.u_i \in R'$$

olur. O halde $ru_j - x_j s \in R'$ ve $-x_j s \in \Delta_R \Delta$ olur.

Buradan $\left[s, x_j\right] \in R$ için $\left[s, x_j\right] = sx_j - x_j s \in \Delta_R \Delta$ olup Önerme 2.17 gereği $\left[s, x_j\right] \in R'$ olur. O halde Önerme 4.9 gereği $s \in R'$ olur. Buradan $\varphi\left(\tilde{r}\right) = \tilde{r}$ elde edilir. Yani $\varphi$, $\widetilde{H_{m-1}}$ üzerinde de birim olur. Bu şekilde devam edilirse $\varphi$, $\widetilde{H_{m-2}}, \widetilde{H_{m-3}}, ..., \widetilde{H_k}$ üzerinde birim olur. Şimdi $\varphi$ nin $\widetilde{H_{m+1}}$ üzerinde birim olduğunu gösterelim.

$\tilde{r} \in \widetilde{H_{m+1}}$ olsun. $\tilde{r}$ elemanını

$$\widetilde{\alpha_i} = \left[ ... \left[ \left[ \widetilde{x_{i1}}, \widetilde{x_{i2}} \right], \widetilde{x_{i3}} \right], ..., \widetilde{x_{im}} \right], \widetilde{x_{i(m+1)}} \Big]$$

şeklindeki monomiallerin bir lineer toplamı olarak düşünebiliriz.

$$\widetilde{a_i} = \left[ ... \left[ \left[ \widetilde{x_{i1}}, \widetilde{x_{i2}} \right], \widetilde{x_{i3}} \right], ..., \widetilde{x_{im}} \right]$$

olsun. $\widetilde{a_i} = \sum_{j=1}^{l} c_j . \widetilde{h_{mj}}$ olacak şekilde $c_j \in K$ ve $1 \le j \le l$ için $\widetilde{h_j} \in \widetilde{H_m}$ vardır.

$\varphi$, $\widetilde{H_m}$ üzerinde birim ve $\widetilde{a_i} \in \widetilde{H_m}$ olduğundan $\varphi\left(\widetilde{a_i}\right) = \widetilde{a_i}$ olur. O halde

$$\varphi\left(\widetilde{\alpha_i}\right) = \varphi\left(\left[\widetilde{a_i}, \widetilde{x_{i(m+1)}}\right]\right) = \left[\varphi\left(\widetilde{a_i}\right), \varphi\left(\widetilde{x_{i(m+1)}}\right)\right] = \left[\widetilde{a_i}, \widetilde{x_{i(m+1)}} + \widetilde{u_{i(m+1)}}\right] = \left[\widetilde{a_i}, \widetilde{x_{i(m+1)}}\right]$$

olup $\varphi\left(\widetilde{\alpha_i}\right) = \widetilde{\alpha_i}$ olur. O halde $\tilde{r} \in \widetilde{H_{m+1}}$ için $\varphi\left(\tilde{r}\right) = \tilde{r}$ olur. Yani $\varphi$, $\widetilde{H_{m+1}}$ üzerinde de birim olur. Benzer şekilde $\varphi$ , $\widetilde{H_{m+2}}, \widetilde{H_{m+3}}, \widetilde{H_{m+4}}, ...$ üzerinde de birim olur. Böylece her $n \ge k$ için $\varphi$ $\widetilde{H_n}$ kümesi üzerinde birimdir. O halde $\varphi$ , $R/R'$ üzerinde birim dönüşümdür. O halde Teorem 4.7 gereği $\varphi$, $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

**Tanım 4.11:** $S$ bir halka olsun. Her $a,b \in S$ ve $a,b \neq 0$ için $ax = by \neq 0 \left( xa = yb \neq 0 \right)$ olacak şekilde $x, y \in S$ varsa $S$ de sağ (sol) Ore koşulu sağlanır denir. Bu durumda $S$ ye bir Ore bölgesi denir.

**Not :** $U\left(F/R\right)$ birleşmeli cebiri bir Ore bölgesidir ve $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$ kesir cismine gömülebilir (Kharlampovich, 1984). Bu yüzden $V = R/R' \otimes_{U\left(F/R\right)} \mathbb{Q}\left(F/R\right)$ tensör çarpımı $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$ üzerinde bir vektör uzayıdır ve $V$ nin boyutu $n-1$ dir. $j = 2,...,n$ için $R/R'$ nün $\widetilde{g_j} = \widetilde{g_j}\left(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_j}\right)$ elemanlarını düşünelim öyle ki $\widetilde{g_j}$ , $\widetilde{x_1}$ ve $\widetilde{x_j}$ nin bir monomiali olsun. O zaman $V$ vektör uzayı $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$ -modül olarak $\{g_2,...,g_n\}$ tarafından üretilir. Daha detaylı bilgi için (Kharlampovich, 1984) e bakınız.

**Teorem 4.12:** $F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olan bir serbest Lie cebiri, $R = \gamma_k\left(F\right)$ , $\widetilde{F} = F/R'$ ve $f \in F$ için $\widetilde{f} = f + R'$ olsun. $m > k$ olmak üzere $2 \leq j \leq n$ için $\widetilde{w_{mj}} = \Big[ ...\Big[\Big[\widetilde{x_1}, \underbrace{\widetilde{x_j}\Big], \widetilde{x_j}\Big], ...\widetilde{x_j}}_{(m-1)-kez}\Big]$ olsun.

O zaman $\widetilde{F} = F/R'$ nün $2 \leq j \leq n$ için $\varphi\left(\widetilde{w_{mj}}\right) = \widetilde{w_{mj}}$ olacak şekildeki her $\varphi$ endomorfizmi $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir.

**İspat:** İspatı $k$ üzerinden tümevarımla yapalım.

$k = 2$ olsun. $R = \gamma_2\left(F\right) = F'$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$1 \leq i \leq n$ için $u_i \in F'$ olmak üzere $\varphi\left(\widetilde{x_i}\right) = \widetilde{u_i} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{x_k} = \widetilde{y_i}$ olarak tanımlayalım

( Burada $1 \leq i,k \leq n$ için $a_{ik} \in K$ dır ).

$2 \le j \le n$ için $\varphi\left(\widetilde{w_{mj}}\right) = \widetilde{w_{mj}}$ olduğundan

$$\Big[\ldots\Big[\Big[\widetilde{y_1}, \underbrace{\widetilde{y_j}\Big], \widetilde{y_j}\Big], \ldots \widetilde{y_j}}_{(m-1)-kez}\Big] = \Big[\ldots\Big[\Big[\widetilde{x_1}, \underbrace{\widetilde{x_j}\Big], \widetilde{x_j}\Big], \ldots \widetilde{x_j}}_{(m-1)-kez}\Big] \tag{4.6.}$$

olur ve

$$\Big[\ldots\Big[\Big[y_1, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-1)-kez}\Big] = \Big[\ldots\Big[\Big[x_1, \underbrace{x_j\Big], x_j\Big], \ldots x_j}_{(m-1)-kez}\Big] \bmod R'$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Big[\ldots\Big[\Big[y_1, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-1)-kez}\Big]\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Big[\ldots\Big[\Big[x_1, \underbrace{x_j\Big], x_j\Big], \ldots x_j}_{(m-1)-kez}\Big] \bmod R'\right)$$

ve dolayısıyla

$$\Big[\ldots\Big[\Big[y_1, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-2)-kez}\Big]\frac{\partial y_j}{\partial x_1} - y_j\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Big[\ldots\Big[\Big[y_1, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-2)-kez}\Big]\right) = (-1)^{m-1}\, {x_j}^{m-1} \bmod I_R$$

elde edilir. $m > k$ olduğundan $\Big[\ldots\Big[\Big[y_t, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-2)-kez}\Big] \in R$ olup son eşitlikten

$$-y_j\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\Big[\ldots\Big[\Big[y_1, \underbrace{y_j\Big], y_j\Big], \ldots y_j}_{(m-2)-kez}\Big]\right) = (-1)^{m-1}\, {x_j}^{m-1} \bmod I_R$$

olur. Buradan en az bir $1 \le p \le n$ için $y_j = x_j^p \bmod I_R$ olur. Dolayısıyla $u_j + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jj}x_j + \ldots + a_{jn}x_n = x_j^p \bmod I_R$ olur. $1 \le t \le n$ için $a_{jt} = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $u_j \in F' = R$ için $u_j = x_j^p \bmod I_R$ çelişkisi elde edilir. O halde $p = 1,\ a_{jj} = 1,\ t \ne j$ için $a_{jt} = 0$ olur.

Böylece $2 \le j \le n$ için $\widetilde{y_j} = \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}$ olur.

Şimdi $y_1 = x_1 \bmod R$ olduğunu gösterelim.

$$\tilde{a} = \Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{y_1}, \underbrace{\widetilde{y_j}}_{(m-2)-kez} \Big], \widetilde{y_j} \Big], ... \widetilde{y_j} \Big] \in R/R' \text{ ve } \tilde{b} = \Big[ ... \Big[ \Big[ \widetilde{x_1}, \underbrace{\widetilde{x_j}}_{(m-2)-kez} \Big], \widetilde{x_j} \Big], ... \widetilde{x_j} \Big] \in R/R'$$

olsun. (4.6.) gereği

$$\Big[ \widetilde{a}, \widetilde{y_j} \Big] = \Big[ \widetilde{b}, \widetilde{x_j} \Big]$$

dir. Her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{\partial}{\partial x_t} \Big[ \widetilde{a}, \widetilde{y_j} \Big] = \frac{\partial}{\partial x_t} \Big[ \widetilde{b}, \widetilde{x_j} \Big].$$

Buradan

$-y_j \dfrac{\partial a}{\partial x_t} = -x_j \dfrac{\partial b}{\partial x_t} \bmod \Delta_R$ elde edilir. $2 \le j \le n$ için $\widetilde{y_j} = \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}$ ve $u_j \in F' = R$

olduğundan $-x_j \dfrac{\partial a}{\partial x_t} = -x_j \dfrac{\partial b}{\partial x_t} \bmod \Delta_R$ ve buradan

$x_j \left( \dfrac{\partial a}{\partial x_t} - \dfrac{\partial b}{\partial x_t} \right) = 0 \bmod \Delta_R$ olur. $U\left(F/R\right)$ bir tamlık bölgesi olduğundan

$\dfrac{\partial a}{\partial x_t} = \dfrac{\partial b}{\partial x_t} \bmod \Delta_R$ dır. O halde $\sum_{t=1}^{n} \dfrac{\partial a}{\partial x_t} x_t = \sum_{t=1}^{n} \dfrac{\partial b}{\partial x_t} x_t \bmod \Delta_R \Delta$ olup $a = b \bmod \Delta_R \Delta$

olur. Önerme 2.17 den

$$a = b \bmod R'$$

olduğu görülür. Bu şekilde devam edilirse $2 \le j \le n$ için $\Big[ \widetilde{y_1}, \widetilde{y_j} \Big] = \Big[ \widetilde{x_1}, \widetilde{x_j} \Big]$ olur.

Buradan $\Big[ y_1, y_j \Big] = \Big[ x_1, x_j \Big] \bmod R'$ olup

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big[ y_1, y_j \Big] = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big[ x_1, x_j \Big] \bmod I_R$$

ve

$$x_1 = y_1 \frac{\partial y_j}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \bmod I_R$$

olur. $2 \le j \le n$ için $\widetilde{y_j} = \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}$ olduğundan

$$x_1 = y_1\left(1+\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)-\left(x_j+u_j\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_j} \bmod I_R$$

ve buradan

$$x_1 = y_1 + y_1\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial y_1}{\partial x_j} \bmod I_R$$

olur. $y_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n + u_1$ olup

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_j} = a_{1j} + \frac{\partial u_1}{\partial x_j}$$

dir. O halde

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n + y_1\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - a_{1j}x_j - x_j\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \bmod I_R$$

olur. Buradan $a_{11} = 1$ ve $1 \le t \le n, t \ne j$ için $a_{1t} = 0$ olur. Yine aynı yöntemle (4.6.) den önce $s \ne j$ için $\left[\widetilde{y_1}, \widetilde{y_s}\right] = \left[\widetilde{x_1}, \widetilde{x_s}\right]$ eşitliği elde edilip aynı hesaplar yapılırsa $2 \le j \le n$ için $a_{1j} = 0$ da elde edilir.

Böylece $1 \le j \le n$ için $\widetilde{y_j} = \widetilde{x_j} + \widetilde{u_j}$ olur. O halde $\varphi$ , $F/R$ üzerinde birimdir.

$U\left(F/R\right)$ yi $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$ kesir cismine gömelim. Not gereği $\left\{\widetilde{w_{m2}}, ..., \widetilde{w_{mn}}\right\}$ kümesi $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$-modül olarak $R/R'$ nün bir bazıdır. $\varphi$ , $F/R$ üzerinde birim olduğundan $\mathbb{Q}\left(F/R\right)$ -modül olarak $R/R'$ nün bir endomorfizmine genişletilebilir. $\varphi$ , $\left\{\widetilde{w_{m2}}, ..., \widetilde{w_{mn}}\right\}$ üzerinde birim olduğundan bu genişleme birimdir. Sonuç olarak $\varphi$,

$R/R'$ üzerinde de birim olur. Teorem 4.7 gereği $\varphi$, $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir. Böylece $k=2$ için iddia doğrudur.

Şimdi $k>2$ ve $T=\gamma_{k-1}(F)$ için iddia doğru olsun. $R=\gamma_k(F)$ için de doğru olduğunu gösterelim. $\widetilde{F}=F/R'$ , $\widehat{F}=F/T'$ ve $\varphi:\widetilde{F}\to\widetilde{F}$ , $2\le j\le n$ için $\varphi(\widetilde{w_{mj}})=\widetilde{w_{mj}}$ sağlayan bir endomorfizm olsun. $R=\gamma_k(F)\le T=\gamma_{k-1}(F)$ olduğundan $\widetilde{F}$ nın $\varphi$ endomorfizmi $\widehat{F}$ nın $\psi$ endomorfizmini belirler. $\varphi(\widetilde{w_{mj}})=\widetilde{w_{mj}}$ ise $\psi(\widehat{w_{mj}})=\widehat{w_{mj}}$ olur. Tümevarım hipotezi gereğince $\psi$ , $T/T'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir. Buradan bir $u\in T$ için $\psi = e^{ad\hat{u}}$ olur. Dolayısıyla

$$\psi(\widehat{x_i}) = e^{ad\hat{u}}(\widehat{x_i}) = x_i + [u, x_i] + T'$$

olur. $u\in T$ olduğundan $[u,x_i]\in R$ olur. O halde $\varphi(\widetilde{x_i})=x_i \bmod R$ olur. O halde $\varphi$, $F/R$ üzerinde birimdir.

$U(F/R)$ yi $\mathbb{Q}(F/R)$ kesir cismine gömelim. Not gereği $\{\widetilde{w_{m2}},...,\widetilde{w_{mn}}\}$ kümesi $\mathbb{Q}(F/R)$-modül olarak $R/R'$ nün bir bazıdır. $\varphi$ , $F/R$ üzerinde birim olduğundan $\mathbb{Q}(F/R)$ -modül olarak $R/R'$ nün bir endomorfizmine genişletilebilir. $\varphi$ , $\{\widetilde{w_{m2}},...,\widetilde{w_{mn}}\}$ üzerinde birim olduğundan bu genişleme birimdir. Sonuç olarak $\varphi$, $R/R'$ üzerinde de birim olur**.** Teorem 4.7 gereği $\varphi$, $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir. Böylece $k+1$ için de iddia doğrudur. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.13:** $R=\gamma_k(F)$, $k\ge 2$, $n\ge 3$ olsun. O zaman $F/R'$ Lie cebirinin test rankı $n-1$ dir.

**İspat :** (Esmerligil, Kahyalar, Ekici, 2006) de $F/R'$ Lie cebirinin minimal elemanlı test kümesinin eleman sayısının $n-1$ den küçük olamayacağı gösterilmiştir. O halde yukarıdaki teoremden $F/R'$ Lie cebirinin test rankının $n-1$ olduğu görülür.

$a,b \in F$ için $\left[...\left[\left[a,\underbrace{b\right],b\right],...\right],b\right]$ elemanını $\left[a,b^m\right]$ ile gösterelim.

**Önerme 4.14:** $R = F^{n_1,n_2,...,n_k}$ , $\widetilde{F} = F/R'$ ve $f \in F$ için $\widetilde{f} = f + R'$ olsun. $2 \le i \le n$ için $g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right)$ elemanları $R - R'$ nün $\widetilde{x}_1$ ve $\widetilde{x}_i$ üreteçlerine bağlı elemanları olsun. $\widetilde{F}$ nın $\varphi\left(\widetilde{x}_i\right) = \widetilde{y}_i$ , $1 \le i \le n$ olacak şekildeki endomorfizmini ele alalım. Eğer $2 \le i \le n$ için

$$\varphi\left(\left[\left[g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right), \widetilde{x}_1^m\right], \widetilde{x}_i^m\right]\right) = \left[\left[g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right), \widetilde{x}_1^m\right], \widetilde{x}_i^m\right]$$

ise o zaman her $1 \le j \le n$ için $y_j \notin F'$ dir.

**İspat :** $g_i = \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} x_i$ ve $g_i \in R - R'$ olduğundan $U\left(F/R\right)$ de

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \neq 0 \text{ ve } \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \neq 0$$

dır. Bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} \in \Delta^k$ olsun.

$\varphi\left(\left[\left[g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right), \widetilde{x}_1^m\right], \widetilde{x}_i^m\right]\right) = \left[\left[g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right), \widetilde{x}_1^m\right], \widetilde{x}_i^m\right]$ ise

$$\left[\left[g_i\left(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_i\right), \widetilde{y}_1^m\right], \widetilde{y}_i^m\right] = \left[\left[g_i\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_i\right), \widetilde{x}_1^m\right], \widetilde{x}_i^m\right]$$

ve

$$\left[\left[g_i\left(y_1,y_i\right),{y_1}^m\right],{y_i}^m\right]=\left[\left[g_i\left(x_1,x_i\right),{x_1}^m\right],{x_i}^m\right] \bmod R'$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının $x_1$ e göre Fox türevi hesaplanırsa $U\left(F/R\right)$ de

$${y_i}^m{y_1}^m\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}={x_i}^m{x_1}^m\frac{\partial g_i\left(x_1,x_i\right)}{\partial x_1} \bmod \Delta_R \qquad (4.7.)$$

eşitliği elde edilir. $U\left(F/R\right)$ de $\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\neq 0$ olduğundan $\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}\neq 0$ olur. Önerme 2.15 gereği

$$\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}=\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$$

olup $\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}\neq 0$ olduğundan $U\left(F/R\right)$ de $\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\neq 0$ veya $\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\neq 0$ olur.

Bir $s\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_1},\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\in\Delta^s$$

olsun. O zaman $k\leq s$ dir.

Bir $t\in\mathbb{Z}^+$ için $\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}\in\Delta^t$ olsun. $\frac{\partial g_i\left(y_1,y_i\right)}{\partial x_1}=\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$ olduğundan $s\leq t$ olur. Böylece $k\leq t$ olur. Şimdi $y_1$ veya $y_j$ nin $F'$ de olduğunu varsayalım. O zaman (4.7.) eşitliğinin sağ tarafı $\Delta^{2m+k}$ ya ve sol tarafı $\Delta^{2m+k+l}$ $\left(l\geq 1\right)$ ya ait olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde her $1\leq j\leq n$ için $y_j\notin F'$ dir.

**Teorem 4.15:** $R=F^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, $\widetilde{F}=F/R'$ ve $f\in F$ için $\widetilde{f}=f+R'$ olsun. O zaman $\widetilde{F}$ nın test rankı $n-1$ dir.

**İspat :** $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $\widetilde{g_2},...,\widetilde{g_n} \in {}^{R}\!/_{R'}$ olsun öyle ki $2 \le i \le n$ için $\widetilde{g_i}$ elemanları $\widetilde{x_1}$ ve $\widetilde{x_i}$ tarafından üretilen alt cebire ait olsun. $\widetilde{h_i} = \left[\left[\widetilde{g_i}, \widetilde{x_1}^m\right], \widetilde{x_i}^m\right]$ olarak seçelim. $\left\{\widetilde{h_2},...,\widetilde{h_n}\right\}$ kümesinin bir test kümesi olduğunu gösterelim. $\widetilde{F}$ nın $\varphi\left(\widetilde{x_i}\right) = \widetilde{y_i}$ , $1 \le i \le n$ olacak şekildeki endomorfizmini ele alalım ve $2 \le i \le n$ için $\varphi\left(\widetilde{h_i}\right) = \widetilde{h_i}$ olsun. Şimdi $\varphi$ nin bir otomorfizm olduğunu gösterelim.

$\varphi\left(\widetilde{h_i}\right) = \widetilde{h_i}$ ise

$$\left[\left[g_i\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_i}\right), \widetilde{y_1}^m\right], \widetilde{y_i}^m\right] = \left[\left[g_i\left(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_i}\right), \widetilde{x_1}^m\right], \widetilde{x_i}^m\right]$$

ve buradan

$$\left[\left[g_i\left(y_1, y_i\right), {y_1}^m\right], {y_i}^m\right] = \left[\left[g_i\left(x_1, x_i\right), {x_1}^m\right], {x_i}^m\right] \bmod R'$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının $x_1$ e göre Fox türevi hesaplanırsa $U\left({}^{F}\!/_{R}\right)$ de

$${y_i}^m {y_1}^m \frac{\partial g_i\left(y_1, y_i\right)}{\partial x_1} = {x_i}^m {x_1}^m \frac{\partial g_i\left(x_1, x_i\right)}{\partial x_1} \bmod \Delta_R$$

eşitliği elde edilir. Önerme 4.14 gereği $y_1,...,y_n \notin F'$ dir. Bu ispatın geri kalan kısmı (Timoshenko ve Shevelin, 2008) in esas teoremiyle özdeştir. (Timoshenko ve Shevelin, 2008) de ki lemma 2 nin sonuç kısmı gereği

$$y_i = \alpha_i x_i + u_i \ , \ \alpha_i \in K, \ u_i \in R$$

şeklindedir. $\widetilde{F}$ nın $\theta$ ve $\psi$ endomorfizlerini, $1 \le i \le n$ için $\theta\left(\widetilde{x_i}\right) = \alpha_i \widetilde{x_i}$ ve $\psi\left(\widetilde{x_i}\right) = \widetilde{x_i} + \widetilde{v_i}$ $\left(\widetilde{v_i} = \theta^{-1}\left(\widetilde{u_i}\right) \in {}^{R}\!/_{R'}\right)$ olarak tanımlayalım. O zaman $\varphi = \psi \circ \theta$ olur. Ayrıca Önerme 4.14 gereği $1 \le i \le n$ için $\alpha_i \neq 0$ dır. O halde $\theta$ bir otomorfizmdir. Önerme 4.4 gereği

$$\widetilde{h_j} = \varphi\left(\widetilde{h_j}\right) = \theta\left(\widetilde{h_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta\left(\widetilde{h_j}\right)}{\partial x_i} \widetilde{u_i}$$

olur. $u_i \in R$ olduğundan $\frac{\partial\theta(\widetilde{h_j})}{\partial x_i}\widetilde{u_i}$ terimleri $\theta(\widetilde{h_j})$ den daha büyük uzunluğa sahiptir. Bu yüzden $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(\widetilde{h_j})}{\partial x_i}\widetilde{u_i}=0$ olmalıdır. Buradan $\theta(\widetilde{h_j})=\widetilde{h_j}$ $(2\le j\le n)$ elde edilir. Böylece $\psi$ nin bir otomorfizm olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bir başka ifadeyle $\theta=1$ varsayabiliriz. O halde $\varphi$, $F/R$ üzerinde birim olur. Not gereği $\{\widetilde{h_2},...,\widetilde{h_n}\}$ kümesi $\mathbb{Q}(F/R)$ modül olarak $R/R'$ yü üretir. $\varphi$, $F/R$ üzerinde birim olduğundan $R/R'$ nün $\mathbb{Q}(F/R)$-modül endomorfizmine genişletilebilir. $2\le i\le n$ için $\varphi(\widetilde{h_i})=\widetilde{h_i}$ olduğundan bu genişleme birimdir. Sonuç olarak $\varphi$, $R/R'$ üzerinde birimdir. Teorem 4.7 gereği $\varphi$, $R/R'$ nün bir elemanı tarafından belirlenen bir iç otomorfizmdir. O halde $\{\widetilde{h_2},...,\widetilde{h_n}\}$ kümesi bir test kümesidir. (Esmerligil, Kahyalar ve Ekici, 2006) da $\widetilde{F}$ nın test rankının en az $n-1$ olduğu gösterilmişti. O halde $\widetilde{F}$ nın test rankı $n-1$ dir.

## 5. $F/[R',F]$ LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

Bu bölümde rankı 2 olan $F/[R',F]$ formundaki Lie cebirlerinin bir test elemanına sahip olduğunu ve dolayısıyla test rankının 1 olduğunu göstereceğiz.

$F$, serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,x_2\}$ olan serbest Lie cebiri ve $R$, $F$ nin tam invaryant, yani $F$ nin her otomorfizmi altında invaryant kalan bir ideali olsun.

**Önerme 5.1:** $F/R'$ nün bir otomorfizmi $F/R$ nin bir otomorfizmini belirler.

**İspat :** $\varphi: F/R' \to F/R'$ , $u,v\in F$ için $\varphi\left(u+R'\right)=v+R'$ olarak tanımlı bir otomorfizm olsun öyle ki $a\in F$ ve $r\in R$ için $v=a+r$ olsun.

$F/R$ nin $\overline{\varphi}$ endomorfizmini $u\in F$ için

$$\overline{\varphi}(u+R)=a+R$$

olarak tanımlayalım. Şimdi $\overline{\varphi}$ nın bir otomorfizm olduğunu gösterelim.

İlk olarak $\overline{\varphi}$ nın birebir olduğunu gösterelim. $\overline{\varphi}(u+R)=R$ olsun. $\overline{\varphi}$ nın tanımı gereği $a+R=R$ olup $a\in R$ olur. O halde $a+r=v\in R$ olur. Şimdi $\varphi\left(u+R'\right)=v+R'$ olduğunu gözönüne alırsak $u+R'=\varphi^{-1}(v)+R'$ elde edilir. $R$ tam invaryant ve $v\in R$ olduğundan $\varphi^{-1}(v)\in R$ ve $u-\varphi^{-1}(v)\in R'\subset R$ olup $u\in R$ olduğu görülür. Bu ise $u+R=R$ olduğunu yani $\overline{\varphi}$ nin birebir olduğunu gösterir.

Şimdi $\overline{\varphi}$ nin örten olduğunu gösterelim. $b+R\in F/R$ olsun. $b+R'\in F/R'$ olup $\varphi$ örten olduğundan $\varphi\left(u+R'\right)=b+R'$ olacak şekilde bir $u+R'\in F/R'$ vardır. $d\in F$ ve $q\in R$ için $u=d+q$ olsun. O zaman

$$\overline{\varphi}(u+R)=\overline{\varphi}(d+R)=b+R$$

olup $\overline{\varphi}$ örtendir. O halde $\overline{\varphi}$ bir otomorfizmdir.

**Önerme 5.2:** $F$ bir serbest Lie cebiri ve $R$, $F$ nin ideali olsun. O zaman her $m \geq 1$ için $R \cap \gamma_m(F) = \gamma_m(R)$ dir.

**İspat:** Bu önermenin ispatı (Bahturin, 1987) deki Proposition 4 ün bir sonucudur.

**Teorem 5.3:** $F$, $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X = \{x_1, x_2\}$ olan bir serbest Lie cebiri ve $L = F \Big/ \left[R', F\right]$ olsun. O zaman $L$ nin test rankı 1 dir.

**İspat :** $f \in F$ için $\widetilde{f} = f + \left[R', F\right]$ olsun. $\left[\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}\right]$ nin bir test elemanı olduğunu gösterelim. $\varphi : L \to L$, $i = 1,2$ için $\varphi\left(\widetilde{x_i}\right) = \widetilde{y_i}$ olarak tanımlı bir endomorfizm ve $\varphi\left(\left[\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}\right]\right) = \left[\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}\right]$ olsun. O zaman

$$[y_1, y_2] = [x_1, x_2]\left(\mathrm{mod}\left[R', F\right]\right)$$

olur. Önerme 3.2 gereği $\left[R', F\right] \subset \Delta(I_R)\Delta$ olduğundan

$$[y_1, y_2] = [x_1, x_2]\left(\mathrm{mod}\, \Delta(I_R)\Delta\right)$$

olur. Şimdi bu eşitlikte $x_1$ ve $x_2$ ye göre sol Fox türevleri alınırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - y_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -x_2 \left(\mathrm{mod}\, \Delta I_R\right),$$

$$y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = x_1 \left(\mathrm{mod}\, \Delta I_R\right).$$

Şimdi bu sistemde eşitliklerde sırasıyla $x_1$ ve $x_2$ ye göre sağ Fox türevleri alınırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{y_1\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{y_2\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0\left(\operatorname{mod} I_R\right),$$

$$\frac{y_1\partial}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{y_2\partial}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-1\left(\operatorname{mod} I_R\right),$$

$$\frac{y_1\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{y_2\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}=1\left(\operatorname{mod} I_R\right),$$

$$\frac{y_1\partial}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{y_2\partial}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}=0\left(\operatorname{mod} I_R\right).$$

Buradan

$$\begin{pmatrix} \dfrac{y_2\partial}{\partial x_2} & -\dfrac{y_1\partial}{\partial x_2} \\ -\dfrac{y_2\partial}{\partial x_1} & \dfrac{y_1\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup $\varphi$ nin Jacobian matrisi $J_\varphi$, $U\left(F/R\right)$ de sol tersinirdir. (Shpilrain, 1993) den $\varphi$, $F/R'$ nün bir otomorfizmini belirler. Yani $i=1,2$ için $y_i\in F$ nin $F/R'$ deki görüntüsünü $\overline{y_i}$ ile gösterelim. O zaman $\varphi$, $F/R'$ nün

$$\varphi_1\left(\overline{x_i}\right)=\overline{y_i}$$

olarak tanımlı $\varphi_1$ otomorfizmini belirler.

$I=\left[R',F\right]$ olsun. O zaman $\gamma_3(R)\subset I$ olup Önerme 5.2 gereği $\gamma_3(R)=\gamma_3(I)$ olur. (Umirbaev, 1993) deki Lemma 4 gereği $\varphi_1$, $F/\gamma_3(R)=F/\gamma_3(I)$ nın bir

otomorfizmini belirler. Yani $i=1,2$ için $y_i$ nin $F/\gamma_3(I)$ daki görüntüsünü $\overline{\overline{y_i}}$ ile gösterelim. O zaman $\varphi_1$, $F/\gamma_3(I)$ nın

$$\varphi_2\left(\overline{\overline{x_i}}\right)=\overline{\overline{y_i}}$$

olarak tanımlı $\varphi_2$ otomorfizmini belirler. Yine (Umirbaev, 1993) deki lemma 4 gereği $\varphi_2$, $F/I'$ nın bir otomorfizmini belirler. Yani $i=1,2$ için $y_i$ nin $F/I'$ daki görüntüsünü $\overline{\overline{\overline{y_i}}}$ gösterelim. O zaman $\varphi_2$, $F/I'$ nın

$$\varphi_3\left(\overline{\overline{\overline{y_i}}}\right)=\overline{\overline{\overline{y_i}}}$$

olarak tanımlı $\varphi_3$ otomorfizmini belirler. Önerme 5.1 gereği $\varphi_3$, $F/I$ nın bir otomorfizmini belirler. Yani $i=1,2$ için $y_i$ nin $F/I$ daki görüntüsünü $\widehat{y_i}$ gösterelim. O zaman $\varphi_3$, $F/I$ nın

$$\varphi_4\left(\widehat{x_i}\right)=\widehat{y_i}$$

olarak tanımlı $\varphi_4$ otomorfizmini belirler. $I=\left[R',F\right]$ olduğundan $\varphi=\varphi_4$ olur. Dolayısıyla $\varphi$ bir otomorfizmdir. Böylece $\left[\widetilde{x_1},\widetilde{x_2}\right]$ bir test elemanı olup $L$ nin test rankı 1 dir.

## 6. ABELYEN ÇARPIMIN TEST RANKI

$F$ serbest üreteç kümesi $\{x_1,...,x_n\}$, $n \geq 2$ olan serbest Lie cebiri ve $A$, karakteristiği sıfır olan $K$ cismi üzerinde rankı $m$ olan bir serbest abelyen Lie cebiri olsun. $F * A$ ile $F$ serbest Lie cebiri ile $A$ nın serbest çarpımını gösterelim.

**Tanım 6.1:** $L_1$ ve $L_2$, $K$ cismi üzerinde iki Lie cebiri ve $L = L_1 * L_2$ bunların serbest çarpımı olsun. $\varphi : L \to L_1 \times L_2$ doğal homomorfizm olsun öyleki $\varphi$, $L_1$ ve $L_2$ nin birim dönüşümlerinin genişlemesi olsun. $\varphi$ nin çekirdeği bir serbest Lie cebiri olup bu alt cebire $L_1 * L_2$ nin kartezyen alt cebiri denir.

**Tanım 6.2:** $D$, $F * A$ nın kartezyen alt cebiri ise o zaman $(F * A)/D$ bölüm cebirine $F$ ve $A$ nın abelyen çarpımı denir. Bu çarpımı $F \times_{ab} A$ gösterelim.

$F$ nin test rankının 1 olduğunu biliyoruz. $A$ serbest abelyen Lie cebirinin $B = \{b_1,...,b_k\}$, $k \leq m-1$ alt kümesini düşünelim. $B$ lineer bağımlı ise test kümesi olamayacağı açıktır. $B$ nin lineer bağımsız olduğunu varsayalım. O zaman vektör uzayı olarak $A$ nın bir $\{b_1,...,b_k,b_{k+1},...,b_m\}$ bazına tamamlanabilir. $A$ nın $\varphi(b_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$, $\varphi(b_j) = 0$, $k+1 \leq j \leq m$ olarak tanımlı $\varphi$ endomorfizmi $B$ yi sabit bırakır fakat bir otomorfizm değildir. Bu yüzden $m$ den daha az sayıda eleman içeren bir küme $A$ nın bir test kümesi olamaz. Diğer taraftan $A$ nın herhangi bir serbest üreteç kümesi bir test kümesidir. Bu yüzden $A$ nın test rankı $m$ dir.
Bu bölümde verilen her $l$ ve $k$ tamsayıları için rankı $l$ ve test rankı $k$ olan bir Lie cebiri olduğunu göstereceğiz. Gupta, Romankov ve Timoshenko bu sonucu gruplar için ispatladılar (Gupta, Romankov, Timoshenko, 2005). Biz (Gupta, Romankov ve Timoshenko, 2005) de kullanılan tekniği, $F \times_{ab} A$ abelyen çarpımın test rankını hesaplamak için kullanacağız. Bu ispatı yaparken $F$ nin özel iki test elemanını kullandık. Shpilrain $F$ nin bir $u$ elemanının rankını, $F$ nin otomorfizmleri altındaki

görüntüsünün bağlı olduğu üreteçlerin minumum sayısı olarak tanımlamıştır (Shpilrain, 1995). Daha sonra sonlu ranklı bir serbest Lie cebirinin maksimum ranklı homojen elemanlarının test elemanları olduğunu gösterdi. Aynı zamanda homojen bir elemanın rankını bulan bir algoritma yazdı. Shpilrain'in algoritmasını kullanarak

$$w_1 = \Big[\Big[...\Big[\big[x_1, x_2\big], x_3\Big],...\Big], x_n\Big],\ w_2 = \Big[\Big[...\Big[\big[\big[x_1, x_2\big], x_1\big], x_3\Big],...\Big], x_n\Big]$$

elemanlarının maksimum ranklı olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden $w_1$ ve $w_2$ $F$ nin test elemanlarıdır. $w_1$ in test elemanı olduğu Mikhalev, Umirbaev ve Yu tarafından da gösterilmişitir (Mikhalev ve ark., 2001).

**Teorem 6.3:** $A$, $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $m \geq 2$ olan bir serbest abelyen Lie cebiri olsun. O zaman $L = F \times_{ab} A$ abelyen çarpımının test rankı $m$ dir.

**İspat :** $F$ nın $w_1 = \Big[\Big[...\Big[\big[x_1, x_2\big], x_3\Big],...\Big], x_n\Big]$ ve $w_2 = \Big[\Big[...\Big[\big[\big[x_1, x_2\big], x_1\big], x_3\Big],...\Big], x_n\Big]$ test elemanlarını düşünelim.

$$h_1 = w_1 + a_1 \text{ ve } 2 \leq i \leq m \text{ için } h_i = w_2 + a_i$$

olsun. Şimdi $\{h_1, ..., h_m\}$ kümesinin $L$ için bir test kümesi olduğunu gösterelim. $\varphi$, $L$ nin bir endomorfizmi ve $1 \leq j \leq m$ için $\varphi(h_j) = h_j$ olsun. $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ için $u_i, v_j \in F$, $b_i, c_j \in A$ olmak üzere

$$\varphi : x_i \to u_i + b_i \ ,\ \varphi : a_j \to v_j + c_j$$

ile tanımlı olsun. İlk olarak $j = 1, ..., n$ için $v_j = 0$ olduğunu gösterelim.

Bazı $j$ ler için $v_j \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$L = F \times A$ abelyen çarpım cebirinde $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j,k \leq m$ için

$$\left[x_i, a_j\right] = 0 \text{ ve } \left[a_k, a_j\right] = 0$$

dır. O zaman

$$\left[\varphi(x_i), \varphi(a_j)\right] = 0 \text{ ve } \left[\varphi(a_k), \varphi(a_j)\right] = 0$$

olur. Buradan $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j,k \leq m$ için

$$\left[u_i, v_j\right] = 0 \text{ ve } \left[v_k, v_j\right] = 0$$

elde edilir. O halde

$$u_i = \alpha_i v_j \text{ ve } v_k = \beta_k v_j \tag{6.1.}$$

$(\alpha_i, \beta_k \in K)$ formundadır. Bu yüzden $\varphi(w_1) = 0$ ve $\varphi(w_2) = 0$ olur.

O halde $\varphi(h_1) = h_1$ den $v_1 + c_1 = w_1 + a_1$ olur. Buradan $v_1 = w_1,\ c_1 = a_1$ olur. Benzer şekilde $\varphi(h_2) = h_2$ den $v_2 = w_2,\ c_2 = a_2$ olur. O halde (6.1.) eşitliğinden $w_2 = v_2 = \beta_2 v_j = \beta_2 \beta_1^{-1} w_1$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $j = 1,...,n$ için $v_j = 0$ olur. O zaman $1 \leq j \leq m$ için $\varphi(a_j) = a_j$ ve

$$w_1 + a_1 = \varphi(w_1 + a_1) = \varphi(w_1) + a_1,$$
$$w_2 + a_2 = \varphi(w_2 + a_2) = \varphi(w_2) + a_2$$

olur. Bu eşitliklerden $\varphi(w_1) = w_1$ ve $\varphi(w_2) = w_2$ elde edilir. Buradan $w_1(u_1,...,u_n) = w_1$ ve $w_2(u_1,...,u_n) = w_2$ olur. $F$ nin

$$\psi : x_i \to u_i,\ 1 \le i \le n$$

ile tanımlı $\psi$ endomorfizmini ele alalım. $\psi(w_1) = w_1$ ve $\psi(w_2) = w_2$ olduğundan $\psi$, $F$ nin bir otomorfizmidir. Öte yandan $\varphi(L)$ cebiri $\{u_1 + b_1, ..., u_n + b_n, a_1, ..., a_m\}$ kümesi tarafından üretilir. $b_1, ..., b_n \in A$ olduğundan $\{u_1, ..., u_n, a_1, ..., a_m\}$ kümesi de $\varphi(L)$ yi üretir. O halde $\varphi(L)$, $\{\psi(x_1), ..., \psi(x_n), a_1, ..., a_m\}$ kümesi tarafından üretilir. Böylece $\varphi(L) = L$ olur. Ayrıca $L$ hopfian yani $L$ nin her epimorfizmi bir izomorfizm olduğundan $\varphi$ bir otomorfizm olur.

Şimdi $L$ nin $m$ den daha az sayıda eleman içeren bir test kümesine sahip olmadığını gösterelim.

Varsayalım ki $\{f_1, ..., f_k\}$ $(k \le m-1)$ kümesi $L$ nin bir test kümesi olsun öyle ki $1 \le i \le k$ için $f_i = y_i + d_i,\ y_i \in F, d_i \in A$ olsun. $A$ nın test rankı $m$ olduğundan

$$\psi : a_i \to z_i,\ 1 \le i \le m$$

olarak tanımlı $d_1, ..., d_k$ elemanlarını sabit bırakan bir $\psi$ endomorfizmi vardır öyle ki $\psi$ bir otomorfizm değildir. Şimdi $L$ nin

$$\gamma : x_1 \to x_1, ..., x_n \to x_n, a_1 \to z_1, ..., a_m \to z_m$$

olarak tanımlı $\gamma$ endomorfizmini düşünelim. O zaman

$$\gamma(f_i) = \gamma(y_i + d_i) = y_i + \gamma(d_i) = y_i + \psi(d_i) = y_i + d_i,\ 1 \le i \le k$$

olur. Buradan $\gamma$ $d_1, ..., d_k$ elemanlarını sabit bırakır. O halde $\gamma$ bir otomorfizmdir. Fakat $\gamma$ nın $A$ ya kısıtlanışı bir otomorfizm olmadığından bu bir çelişkidir. Bu da ispatı tamamlar.

## 7. SERBEST NİLPOTENT LIE CEBİRLERİNİN TEST RANKI

Serbest nilpotent grupların test rankının 1 ya da 2 olduğu Gupta, Romankov ve Timoshenko tarafından gösterilmiştir (Gupta, Romankov ve Timoshenko, 2005). Biz de bu bölümde onların kullandığı yöntem ve teknik ile serbest nilpotent Lie cebirlerinin test rankının 1 ya da 2 olduğunu gösterdik. Kullanılan teknik aynı olmakla birlikte elde ettiğimiz bazı sonuçların ispatı gruplardakinden farklılıklar göstermektedir.

$F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,...,x_n\}$ , $n\geq 2$ olan bir serbest Lie cebiri olsun.

**Önerme 7.1:** $R=\gamma_3(F)$ , $L=F/R$ ve $f\in F$ için $\overline{f}=f+R$ olsun. $n=2q+1$ ya da $n=2q$ olsun. O zaman $\overline{g}\in L'$ ise

$$\overline{g}=\left[\overline{g_1},\overline{h_1}\right]+...+\left[\overline{g_q},\overline{h_q}\right]$$

olacak şekilde $\overline{g_1},...,\overline{g_q},\overline{h_1},...,\overline{h_q}\in L$ vardır.

**İspat:** $\overline{g}=g+R\in L'=F'/R$ ise

$$\overline{g}=\sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_{ij}\left[x_i,x_j\right]+R$$

olacak şekilde $\alpha_{ij}\in K$ vardır. Şimdi $g=\sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_{ij}\left[x_i,x_j\right]$ elemanını düşünelim. $g=\left[g_1,h_1\right]+...+\left[g_q,h_q\right]$ olacak şekilde $g_1,...,g_q,h_1,...,h_q\in F$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

İspatı $n$ üzerinde tümevarımla yapalım.

$n=2$ ise $g=[\alpha_{12}x_1, x_2]$ olup iddia doğrudur.

$n=3$ olsun. $g=\alpha_{12}[x_1,x_2]+\alpha_{13}[x_1,x_3]+\alpha_{23}[x_2,x_3]$ olur. Şimdi $g=[g_1,h_1]$ olacak şekilde $g_1,h_1\in F$ olduğunu gösterelim. Eğer $\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$ ise $g=[\alpha_{23}x_2,x_3]$ olup iddia doğrudur. $\alpha_{12}$ ve $\alpha_{13}$ ten en az biri sıfırdan farklı olsun. Genelliği kaybetmeksizin $\alpha_{13}\neq 0$ olsun. O zaman $g=[x_1+\alpha_{23}\alpha_{13}^{-1}x_2, \alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3]$ şeklinde yazılabilir. $g_1=x_1+\alpha_{23}\alpha_{13}^{-1}x_2$, $h_1=\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3\in F$ için $g=[g_1,h_1]$ olup $n=3$ için iddia doğrudur.

$n=4$ ve $g=\sum_{1\le i<j\le 4}\alpha_{ij}[x_i,x_j]$ olsun. O zaman

$$g=\left[x_1,\sum_{i=2}^{4}\alpha_{1i}x_i\right]+\alpha_{23}[x_2,x_3]+\alpha_{24}[x_2,x_4]+\alpha_{34}[x_3,x_4]$$

olur. $u=\alpha_{23}[x_2,x_3]+\alpha_{24}[x_2,x_4]+\alpha_{34}[x_3,x_4]$ olsun. $g=\left[x_1,\sum_{i=2}^{4}\alpha_{1i}x_i\right]+u$ olur. $u$ elemanı $n=3$ durumundaki yöntemle iki elemanın çarpımı olarak yazılabilir. O halde $g$ elemanı iki elemanın çarpımı şeklindeki 2 elemanın bir toplamı olarak yazılabilir.

$n=5$ ve $g=\sum_{1\le i<j\le 5}\alpha_{ij}[x_i,x_j]$ olsun. En az bir $j$ için $\alpha_{1j}\neq 0$ olsun.

$h=\left[x_1+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{5}\beta_{ij}x_i,\sum_{i=2}^{5}\alpha_{1i}x_i\right]$ olarak seçelim öyle ki $\beta_{ij}=\begin{cases}\alpha_{ij}\alpha_{1j}^{-1} & i<j\\ -\alpha_{ji}\alpha_{1j}^{-1} & i>j\end{cases}$ olsun. İşlem kolaylığı açısından genelliği kaybetmeksizin $\alpha_{15}\neq 0$ olduğunu varsayalım.

$h$ nin açılımında $2\le i<j\le 4$ için $[x_i,x_j]$ teriminin katsayısını $\gamma_{ij}$ ile gösterelim.

O zaman

$$h=\left[x_1+\sum_{i=2}^{4}\alpha_{i5}{\alpha_{15}}^{-1}x_i,\sum_{i=2}^{5}\alpha_{1i}x_i\right]=\left[x_1,\sum_{i=2}^{5}\alpha_{1i}x_i\right]+\left[\sum_{i=2}^{4}\alpha_{i5}x_i,x_5\right]+\sum_{2\le i<j\le 4}\gamma_{ij}\left[x_i,x_j\right]$$

şeklindedir. Buradan $g=h+\sum_{2\le i<j\le 4}\left(\alpha_{ij}-\gamma_{ij}\right)\left[x_i,x_j\right]$ olur. $\sum_{2\le i<j\le 4}\left(\alpha_{ij}-\gamma_{ij}\right)\left[x_i,x_j\right]$ elemanı $n=3$ durumundaki yöntemle iki elemanın çarpımı olarak yazılabilir.

O halde $g$ elemanı iki elemanın çarpımı şeklindeki 2 elemanın bir toplamı olarak yazılabilir.

Eğer her $j$ için $\alpha_{1j}=0$ ise

$$g=\left[x_2,\sum_{i=3}^{5}\alpha_{2i}x_i\right]+\alpha_{34}\left[x_3,x_4\right]+\alpha_{35}\left[x_3,x_5\right]+\alpha_{45}\left[x_4,x_5\right]$$

olur. $u=\alpha_{34}\left[x_3,x_4\right]+\alpha_{35}\left[x_3,x_5\right]+\alpha_{45}\left[x_4,x_5\right]$ olsun. $g=\left[x_2,\sum_{i=3}^{5}\alpha_{2i}x_i\right]+u$ olur.

$u$ elemanı $n=3$ durumundaki yöntemle iki elemanın çarpımı olarak yazılabilir.

O halde $g$ elemanı iki elemanın çarpımı şeklindeki 2 elemanın bir toplamı olarak yazılabilir.

Şimdi $n$ den küçük tam sayılar için iddia doğru olsun ve $g=\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_{ij}\left[x_i,x_j\right]$ olsun.

En az bir $j$ için $\alpha_{1j}\neq 0$ olduğunu varsayalım. $h=\left[x_1+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}\beta_{ij}x_i,\sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i\right]$ olarak seçelim öyle ki $\beta_{ij}=\begin{cases}\alpha_{ij}{\alpha_{1j}}^{-1} & i<j\\ -\alpha_{ji}{\alpha_{1j}}^{-1} & i>j\end{cases}$ olsun. İşlem kolaylığı açısından genelliği kaybetmeksizin $\alpha_{1n}\neq 0$ olduğunu varsayalım. $h$ nin açılımında $2\le i<j\le n-1$ için $\left[x_i,x_j\right]$ teriminin katsayısını $\gamma_{ij}$ ile gösterelim. O zaman

$$h=\left[x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_{in}{\alpha_{1n}}^{-1}x_i,\sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i\right]=\left[x_1,\sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i\right]+\left[\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_{in}x_i,x_n\right]+\sum_{2\le i<j\le n-1}\gamma_{ij}\left[x_i,x_j\right]$$

şeklindedir. Buradan $g = h + \sum_{2\le i<j\le n-1} (\alpha_{ij} - \gamma_{ij})[x_i, x_j]$ olur. $\alpha_{ij} - \gamma_{ij} = \delta_{ij}$ ve $w = \sum_{2\le i<j\le n-1} \delta_{ij}[x_i, x_j]$ olsun. $g = h + w$ olur. $w$ da $2 \le i \le n-1$ için $x_i$ yerine $x_{i-1}$ yazalım.

$$w = \sum_{1\le i<j\le n-2} \delta_{(i+1)(j+1)}[x_i, x_j]$$

olarak düşünebiliriz. $n = 2q+1$ veya $n = 2q$ ise $n-2 = 2(q-1)+1$ veya $n-2 = 2(q-1)$ olup tümevarım hipotezi gereğince

$$w = [g_1, h_1] + \ldots + [g_{q-1}, h_{q-1}]$$

olacak şekilde $g_1, \ldots, g_q, h_1, \ldots, h_q \in F$ vardır. $g_q = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{1j}^{-1} x_i$, $h_q = \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1i} x_i$ için $h = [g_q, h_q]$ olup $g = h + w$ den

$$g = [g_1, h_1] + \ldots + [g_q, h_q]$$

olur. Eğer her $j$ için $\alpha_{1j} = 0$ ise

$$g = \sum_{2\le i<j\le n} \alpha_{ij}[x_i, x_j]$$

olur. $g$ de $2 \le i \le n$ için $x_i$ yerine $x_{i-1}$ yazalım.

$$g = \sum_{1\le i<j\le n-1} \alpha_{(i+1)(j+1)}[x_i, x_j]$$

olarak düşünebiliriz. $n = 2q+1$ ise $n-1 = 2q$ olup tümevarım hipotezi gereğince $g = [g_1, h_1] + \ldots + [g_q, h_q]$ olacak şekilde $g_1, \ldots, g_q, h_1, \ldots, h_q \in F$ vardır.

$n=2q$ ise $n-1=2(q-1)+1$ olup tümevarım hipotezi gereğince $g=[g_1,h_1]+...+[g_{q-1},h_{q-1}]$ olacak şekilde $g_1,...,g_{q-1},h_1,...,h_{q-1}\in F$ vardır. Bir $g_q\in F$ için $h_q=g_q$ seçersek $g=[g_1,h_1]+...+[g_q,h_q]$ olur.

Böylece tümevarım hipotezi gereğince her $n$ için iddia doğrudur.

**Teorem 7.2:** $F$ , $K$ cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X=\{x_1,...,x_r\}$, $r\geq 2$ olan bir serbest Lie cebiri, $N_c=F/\gamma_{c+1}(F)$ ve $f\in F$ için $\overline{f}=f+\gamma_{c+1}(F)$ olsun. O zaman

1. $r$ tek ve $c=2$ ise $N_c$ nin test rankı 2 dir.

2. Diğer tüm durumlarda $N_c$ nin test rankı 1 dir.

**İspat :** İlk olarak $N_2=F/\gamma_3(F)$ te bir $\overline{g}$ test elemanı varsa $\overline{g}\in N_2'$ olduğunu gösterelim. $\overline{g}\notin N_2'$ olduğunu varsayalım. O zaman $\overline{g}=\overline{u}+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\overline{x_i}$ olacak şekilde $u\in F'$ ve hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1,...,\alpha_r\in K$ vardır. Genelliği kaybetmeksizin $\alpha_1\neq 0$ olduğunu varsayalım. $N_2$ nin

$$\varphi:\overline{x_1}\to\overline{x_1}+\alpha_1^{-1}\left(\overline{u}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_r\overline{x_r}\right)$$
$$\overline{x_i}\to\overline{0},\ 2\leq i\leq r$$

olarak tanımlı $\varphi$ endomorfizmini düşünelim. $\varphi$ bir otomorfizm değildir fakat $\varphi(\overline{g})=\overline{g}$ dir. O halde $\overline{g}\notin N_2'$ ise $\overline{g}$ bir test elemanı olamaz.

1. $r$ tek ve $c=2$ olsun.

$\overline{g} \in N_2'$ nün bir test elemanı olduğunu varsayalım ve $r = 2q+1$ olsun. Önerme 7.1 gereği $\overline{g} = \left[\overline{g_1}, \overline{h_1}\right] + ... + \left[\overline{g_q}, \overline{h_q}\right]$ olacak şekilde $\overline{g_1}, ..., \overline{g_q}, \overline{h_1}, ..., \overline{h_q} \in N_2$ vardır. $r = 2q+1$ olduğundan $2q < r$ dir. $N_2$ nin $\overline{g_1}, ..., \overline{g_q}, \overline{h_1}, ..., \overline{h_q}$ elemanları tarafından üretilen $B = \left\langle \overline{g_1}, ..., \overline{g_q}, \overline{h_1}, ..., \overline{h_q} \right\rangle$ alt cebirinin $N_2 / N_2'$ bölüm cebirindeki görüntüsünü $\widehat{B}$ ile gösterelim. $N_2 / N_2'$ cebirinin rankı $r$ ve $2q < r$ olduğundan $\widehat{B}$ nin rankı $r$ den daha küçüktür. Dolayısıyla $N_2 / N_2'$ nün bir $\left\{\widehat{x_1}, ..., \widehat{x_r}\right\}$ serbest üreteç kümesi vardır öyle ki $\widehat{B}$, $\left\langle \widehat{x_1}, ..., \widehat{x_{r-1}} \right\rangle$ cebirinin bir alt cebiridir. $\overline{g}$ elemanı $N_2 / N_2'$ de sadece $\overline{g_1}, ..., \overline{g_q}, \overline{h_1}, ..., \overline{h_q}$ elemanlarının görüntü elemanlarına bağlı olduğundan, $N_2$ nin $\left\{\widehat{x_1}, ..., \widehat{x_r}\right\}$ kümesi $N_2 / N_2'$ nün serbest üreteç kümesi olacak şekildeki bir $\left\{\overline{x_1}, ..., \overline{x_r}\right\}$ serbest üreteç kümesi için $\overline{g}$ nin $\overline{x_1}, ..., \overline{x_{r-1}}$ tarafından üretilen alt cebire ait olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla $N_2$ nin $1 \le i \le r-1$ için $\delta$: $\overline{x_i} \to \overline{x_i}$, $\overline{x_r} \to \overline{0}$ olarak tanımlı bir $\delta$ endomorfizmi için $\delta\left(\overline{g}\right) = \overline{g}$ ve $\delta$ bir otomorfizm değildir. Böylece $\overline{g}$ bir test elemanı olamaz.

Şimdi $\left\{\overline{x_1}, \left[\overline{x_2}, \overline{x_3}\right] + ... + \left[\overline{x_{r-1}}, \overline{x_r}\right]\right\}$ kümesinin bir test kümesi olduğunu gösterelim.

$i = 1, ..., r$ için $u_i \in F'$, $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ir} \in K$ olmak üzere $y_i = \alpha_{i1} x_1 + ... + \alpha_{ir} x_r + u_i$ olsun. $N_2$ nin

$$\varphi : \overline{x_1} \to \overline{y_1}, \ ... \ , \overline{x_r} \to \overline{y_r} \qquad (7.1.)$$

olarak tanımlı $\varphi$ endomorfizmini ve $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ $r \times r$ matrisini düşünelim.

Eğer $A$ matrisi $K$ cismi üzerinde tersinir ise $\varphi$ endomorfizmi bir otomorfizmdir.

$$\overline{x_1} = \overline{y_1},\ \left[\overline{x_2}, \overline{x_3}\right] + \ldots + \left[\overline{x_{r-1}}, \overline{x_r}\right] = \left[\overline{y_2}, \overline{y_3}\right] + \ldots + \left[\overline{y_{r-1}}, \overline{y_r}\right] \qquad (7.2.)$$

olduğunu varsayalım.

$$S_{ij} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{2i} & \alpha_{2j} \\ \alpha_{3i} & \alpha_{3j} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha_{4i} & \alpha_{4j} \\ \alpha_{5i} & \alpha_{5j} \end{pmatrix} + \ldots + \det\begin{pmatrix} \alpha_{r-1,\,i} & \alpha_{r-1,\,j} \\ \alpha_{ri} & \alpha_{rj} \end{pmatrix},\ 1 \le i < j \le r$$

olsun. (7.2.) den

$$S_{23} = S_{45} = \ldots = S_{r-1,\,r} = 1,\ S_{ij} = 0 \qquad (7.3.)$$

olur.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rr} \end{pmatrix}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(r-1)\times(r-1)$ matrisler olsun. $\overline{A}^t$ ile $\overline{A}$ matrsinin transpozunu gösterelim. O zaman (7.3.) gereği

$$\overline{A}^{t}B\overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & -S_{23} & -S_{24} & -S_{25} & \dots & -S_{2,\,r-1} & -S_{2r} \\ S_{23} & 0 & -S_{34} & -S_{35} & \dots & -S_{3,\,r-1} & -S_{3r} \\ S_{24} & S_{34} & 0 & -S_{45} & \dots & -S_{4,\,r-1} & -S_{4r} \\ S_{25} & S_{35} & S_{45} & 0 & \dots & -S_{5,\,r-1} & -S_{5r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{2,\,r-1} & S_{3,\,r-1} & S_{4,\,r-1} & S_{5,\,r-1} & \dots & 0 & -S_{r-1,\,r} \\ S_{2r} & S_{3r} & S_{4r} & S_{5r} & \dots & S_{r-1,\,r} & 0 \end{pmatrix}=B$$

olur. Buradan $\left|\det\overline{A}\right|=1$ olur. Dolayısıyla $\overline{A}$ matrisi $K$ cismi üzerinde tersinirdir. (7.2.) gereği $\overline{x_1}=\overline{y_1}$ olduğundan $A$ matrisinin ilk satırı $(1,0,...,0)$ olur. O halde $\left|\det A\right|=1$ olur. Buradan $A$ matrisi $K$ cismi üzerinde tersinirdir. Böylece $\varphi$ bir otomorfizmdir. O halde $\left\{\overline{x_1},\ \left[\overline{x_2},\overline{x_3}\right]+...+\left[\overline{x_{r-1}},\overline{x_r}\right]\right\}$ bir test kümesi olup $r$ tek ise $N_2$ nin test rankı 2 dir.

2. I. Durum: $r$ çift ve $c=2$ olsun. $r=2q$ olsun.

$K$ nın sıfırdan farklı $t_1,...,t_q$ elemanları için

$$\overline{g}=t_1\left[\overline{x_1},\overline{x_2}\right]+...+t_q\left[\overline{x_{2q-1}},\overline{x_{2q}}\right]$$

elemanının bir test elemanı olduğunu gösterelim.

$\varphi$ $N_2$ nin (7.1.) deki gibi tanımlanan bir endomorfizmi $\varphi\left(\overline{g}\right)=\overline{g}$ ve yine $A=\left(\alpha_{ij}\right)$ olsun. $P=\left(p_{ij}\right)$ $r\times r$ matrisini $i=1,3,...,r-1$ için $p_{i,\,i+1}=t_i$, $p_{i+1,\,i}=-t_i$ ve diğer bileşenler için $p_{ij}=0$ olarak tanımlayalım. $\varphi\left(\overline{g}\right)=\overline{g}$ olduğundan

$$A^{t}PA=P$$

olur. Buradan $\left|\det A\right|=1$ olup $A$ matrisi tersinirdir. Dolayısıyla $\varphi$ bir otomorfizmdir ve $\overline{g}$ bir test elemanıdır.

II. Durum: $r$ çift ve $c\geq 3$ olsun. $r=2q$ olsun.

$K$ nın sıfırdan farklı $t_1,...,t_q$ elemanları için

$$\overline{g} = t_1\left[\overline{x_1}, \overline{x_2}\right] + \ldots + t_q\left[\overline{x_{2q-1}}, \overline{x_{2q}}\right]$$

elemanının bir test elemanı olduğunu gösterelim. İspatı $c$ üzerinde tümevarımla yapalım. $\widehat{N}$ ile $N_c$ nin merkezi ile olan bölüm cebirini düşünelim. O zaman $\widehat{N} \cong N_{c-1} = F/\gamma_c(F)$ olur. $\overline{g}$ nin $\widehat{N}$ daki görüntüsünü $\widehat{g}$ ile gösterelim. Tümevarım hipotezi gereğince $\widehat{g}$ $\widehat{N}$ nın bir test elemanıdır.

$\varphi$ $N_c$ nin $1 \le i \le r$ için $\varphi\left(\overline{x_i}\right) = \overline{y_i}$ olarak tanımlı $\varphi\left(\overline{g}\right) = \overline{g}$ sağlayan bir endomorfizmi olsun. O zaman $1 \le i \le r$ için $\widehat{\varphi}\left(\widehat{x_i}\right) = \widehat{y_i}$ olarak tanımlı $\widehat{\varphi}$ dönüşümü $\widehat{N}$ nın $\widehat{\varphi}\left(\widehat{g}\right) = \widehat{g}$ sağlayan bir $\widehat{\varphi}$ endomorfizmidir. O halde $\widehat{\varphi}$ bir otomorfizm olur. Tanım gereği $1 \le i \le r$ için $\varphi\left(\overline{x_i}\right)$ ile $\widehat{\varphi}\left(\widehat{x_i}\right)$ nın lineer kısımları aynı olduğundan $\varphi$ de bir otomorfizm olur. O halde $\overline{g} = t_1\left[\overline{x_1}, \overline{x_2}\right] + \ldots + t_q\left[\overline{x_{2q-1}}, \overline{x_{2q}}\right]$ bir test elemanıdır.

III. Durum: $r$ tek ve $c \ge 3$ olsun.

$N_c$ nin bir test elemanı içerdiğini gösterelim. II. Durum da olduğu gibi $N_3$ ün bir test elemanı içerdiğini göstermek yeterlidir. Şimdi

$$\overline{g} = \left[\left[\overline{x_2}, \overline{x_3}\right] + \ldots + \left[\overline{x_{r-1}}, \overline{x_r}\right], \overline{x_1}\right]$$

elemanının $N_3$ ün bir test elemanı olduğunu gösterelim.

$\varphi$ $N_3$ ün (7.1.) deki gibi tanımlanan bir endomorfizmi $\varphi\left(\overline{g}\right) = \overline{g}$ ve yine $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ olsun. O zaman

$$\left[\left[\overline{x_2}, \overline{x_3}\right] + \ldots + \left[\overline{x_{r-1}}, \overline{x_r}\right], \overline{x_1}\right] = \left[\left[\overline{y_2}, \overline{y_3}\right] + \ldots + \left[\overline{y_{r-1}}, \overline{y_r}\right], \overline{y_1}\right] \qquad (7.4.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında $\left[\left[\overline{x_i},\overline{x_j}\right],\overline{x_i}\right]$ ve $\left[\left[\overline{x_i},\overline{x_j}\right],\overline{x_j}\right]$ terimlerinin katsayısı sırayla $S_{ij}\alpha_{1i}$ ve $S_{ij}\alpha_{1j}$ dir. O halde (7.4.) gereği $1\le i<j\le r$ için

$$S_{ij}\alpha_{1i}=S_{ij}\alpha_{1j}=0 \tag{7.5.}$$

olur. Ayrıca (7.4.) eşitliğinin sağ tarafında $i=2,4,...,r-1$ için $\left[\left[\overline{x_i},\overline{x_{i+1}}\right],\overline{x_1}\right]$ terimlerinin katsayısı $S_{i,\,i+1}\alpha_{11}-S_{1,\,i}\alpha_{1,\,i+1}$ dir. O halde (7.4.) gereği $i=2,4,...,r-1$ için

$$S_{i,\,i+1}\alpha_{11}-S_{1,\,i}\alpha_{1,\,i+1}=1 \tag{7.6.}$$

elde edilir. (7.5.) gereği $S_{12}\alpha_{12}=0$ ve $S_{23}\alpha_{12}=0$ olur. $\alpha_{12}\neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $S_{12}=S_{23}=0$ olur. Bu ise (7.6.) eşitliği ile çelişir. O halde $\alpha_{12}=0$ olur. Benzer şekilde (7.5.) ve (7.6.) kullanılarak

$$\alpha_{12}=\alpha_{14}=...=\alpha_{1,\,r-1}=0 \tag{7.7.}$$

elde edilir. Şimdi

$$\left[\left[\overline{x_1},\overline{x_3}\right],\overline{x_2}\right],\ \left[\left[\overline{x_1},\overline{x_5}\right],\overline{x_4}\right],\ ...\ ,\ \left[\left[\overline{x_1},\overline{x_r}\right],\overline{x_{r-1}}\right]$$

terimlerini düşünelim ve bu terimlerin (7.4.) teki katsayıları hesaplanırsa

$$S_{13}\alpha_{12}+S_{12}\alpha_{13}=0,\ S_{15}\alpha_{14}+S_{14}\alpha_{15}=0,\ ...,\ S_{1r}\alpha_{1,\,r-1}-S_{1,\,r-1}\alpha_{1r}=0 \tag{7.8.}$$

elde edilir. O halde (7.7.) ve (7.8.) gereği

$$S_{12}\alpha_{13}=S_{14}\alpha_{15}=...=S_{1,\,r-1}\alpha_{1r}=0 \tag{7.9.}$$

elde edilir. Ayrıca (7.5.) gereği

$$S_{23}\alpha_{13} = S_{25}\alpha_{15} = ... = S_{2r}\alpha_{1r} = 0 \qquad (7.10.)$$

olur. O halde (7.9.), (7.10.) ve (7.6.) eşitlikleri gereği $\alpha_{13} = \alpha_{15} = ... = \alpha_{1r} = 0$ ve $\alpha_{11} = \pm 1$ olur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2r} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \alpha_{r3} & ... & \alpha_{rr} \end{pmatrix}$$

olur. $S_{23} = S_{45} = ... = S_{r-1,\,r} = \pm 1$ ve $S_{ij} = 0$ olup teoremin 1. kısmında kullanılan yöntemle $A$ matrisinin tersinir olduğu görülebilir.

O halde $\overline{g} = \left[\left[\overline{x_2}, \overline{x_3}\right] + ... + \left[\overline{x_{r-1}}, \overline{x_r}\right], \overline{x_1}\right]$ elemanı $N_3$ ün bir test elemanıdır. Dolayısıyla $N_3$ ün test rankı 1 dir.

**KAYNAKLAR**


BAHTURIN, Y. A., 1987. Identical Relations in Lie Algebras. VNU Sciences Pres, Utrecht, 309s.

ESMERLİGİL, Z., EKİCİ, N., 2003. Test sets and test rank of a free metabelian Lie algebra. Comm. Algebra, 31, No.11, 5581-5589.

ESMERLİGİL, Z., 2004. Test elements of a free color metabelian Lie superalgebra of rank two. J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser., 17, No.1, 25-29.

ESMERLİGİL, Z., KAHYALAR, D., EKİCİ, E., 2006. Test rank of $F/R'$ Lie algebras. Internat. J. Algebra Comput., 16, No.4, 817-825.

FOX, R. H., 1995. Free differential calculus. I. Derivations in free group rings. Ann. Math. 2, No.57, 547-560.

GUPTA, C. K., TIMOSHENKO, E. I., 2003. Test rank for some free polynilpotent groups. Algebra and Logic, 42, No.1, 20-27.

GUPTA, C. K., TIMOSHENKO, E. I., 2004. A criterion for invertibility of endomorphisms and the test rank of metabelian products of abelian groups. Algebra Logika, 43, No.5, 565-581; English Transl. Algebra Logic, 43, No.5, 2004, 316-326.

GUPTA, C. K., ROMANKOV, V. A., TIMOSHENKO, E. I., 2005. Test ranks of free nilpotent groups. Comm. Algebra, 33, 1627-1634.

GUPTA, C. K., TIMOSHENKO, E. I., 2008. The test rank of a soluble product of free abelian groups. Sbornik. Math., 199, No.4, 495-510.

KHARLAMPOVICH, O. G., 1984. The Lyndon condition for Solvable Lie Algebras. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math., No.9, 50-59.

MIKHALEV, A. A., Yu, J. T., 2000. Primitive, almost primitive, test and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property. J. Algebra, 228, 603-623.

MIKHALEV, A. A., UMIRBAEV, U. U., Yu, J. T., 2001. Generic, almost primitive and test elements of free Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 130, No.5, 1303-1310.

REMESLENNIKOV, V. N., SOKOLOV, V. G., 1970. Some properties of a Magnus embedding. Algebra Logika, 9, No.5, 566-578.

SHPILRAİN, V., 1993. On generators of $L/R^2$ Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 119, No.4, 1039-1043.

SHPILRAİN, V., 1995. On the rank of an element of a free Lie algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 123, No.5, 1303-1307.

TEMİZYÜREK, A., EKİCİ, E., 2007. A particular test element of a free solvable Lie algebra of rank two. Rocky Mountain J. Math., 37, No.4, 1315-1326.

TIMOSHENKO, E. I., 2002. Test sets in free metabelian Lie algebras. Siberian Math. J., 43, No.6, 1135-1140.

TIMOSHENKO, E. I., 2005. Using Fox derivatives in treating groups of the form $F/\left[R',F\right]$. Algebra and Logic, 45, No.1, 67-74.

TIMOSHENKO, E. I., SHEVELIN, M. A., 2008. Computing the test rank of a free solvable Lie algebra. Siberian Math. J., 49, No.6, 1131-1135.

UMIRBAEV, U. U., 1990. Approximation of free Lie algebras relative to inclusion, Monoids, Rings and Algebras. Uchen. Zap. Tartu Univ., 878, 142-145.

UMIRBAEV, U. U., 2001. Partial derivatives and endomorphisms of some relatively free Lie algebras. Sibirsk. Mat. Zh., 42, No. 3, 720-723.

YAGZHEV, A. V., 1980. Endomorphisms of free algebras. Sibirsk. Math. Zh.21, 181-192; English Transl. Siberian Math. J., 21, 1980, 133-141.

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimimi tamamladıktan sonra 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümüne girdi. 2002 yılında mezun olup aynı yıl bu bölümde yüksek lisans öğrenimime başladı. İlk yılı YADEM de ingilizce öğrenimi olmak üzere 2005 yılında yüksek lisans programından mezun oldu. Aynı yıl Ç.Ü. Matematik bölümünde doktora öğrenimine başladı. Daha sonra yine 2005 yılında araştırma görevlisi olarak göreve atandı. Halen aynı görevde bulunmaktadır.