ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice Burçak ÇOKÇA

İKİ AŞAMALI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA-2019

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ AŞAMALI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Hatice Burçak ÇOKÇA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 08/07/2019 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ DANIŞMAN	Prof. Dr. Güzin YÜKSEL ÜYE	Prof. Dr. Nazif ÇALIŞ ÜYE

Bu Tez Enstitümüzün İstatistik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ AŞAMALI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Hatice Burçak ÇOKÇA

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DLAI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2019, Sayfa: 126
Jüri : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
Prof. Dr. Nazif ÇALIŞ

Eşanlı denklem sistemlerinde yapısal katsayı parametrelerinin tahminlerinin tek değer olarak elde edilmesi için ilk adım, sistemdeki her bir denklemin belirlenmesidir. Belirlenmiş bir denklemde, belirlenme durumuna göre farklı tahmin yöntemleri kullanılır. Bu yöntemlerinden biri de özellikle aşırı belirlenmiş denkemler için kullanılan iki aşamalı en küçük kareler yöntemidir. Bu çalışmada, iki aşamalı en küçük kareler yönteminin işleyişini açıklamak amacıyla iktisadi teorilere uygun para arzı-talebi modeli kuruldu. Modelin uygulanmasında Türkiye'nin 2004:4-2018:4 iktisadi dönemine ait veri seti kullanıldı. Uygulama sonunda 2AEKK yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar istatistiksel açıdan değerlendirildi.

Anahtar kelimeler: Eşanlı denklemler, Belirlenme, Para arzı-talebi, İki aşamalı en küçük kareler

ABSTRACT

MSc THESIS

THE ANALYSIS OF TWO STAGE LEAST SQUARES METHOD

Hatice Burçak ÇOKÇA

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2019, Pages: 126
Jury : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
Prof. Dr. Nazif ÇALIŞ

The first step to obtain the estimates of structural coefficient parameters as a single value in simultaneous equation systems is to identify each equation in the system. In a given equation, different estimation methods are used depending on the identified state. One of these methods is the two-stage least squares method, which is especially applied for overidentified equations. In this study, a money supply-demand model in line with economic theories was established in order to explain the operation of two-stage least squares method. The period of 2004:4-2018:4 Turkish economic data was utilized for the application of this model. At the end of the application, the results obtained by using two stage least square methods is evaluated statistically.

Keywords: Simultaneous equations, Identification, Money Supply-Demand, Two-stage least squares

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Tek denklemli regresyon modelleri bir bağımlı, bir veya birden fazla bağımsız değişkenlerden oluşmaktadır. Böyle modellerin en önemli varsayımlarından biri, bağımsız değişkenlerin stokastik olmamasıdır. Tek denklemli regresyon modelleri her zaman değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamak için yeterli değildir. Bundan dolayı, çok denklemli sistemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Çok denklemli sistemlerden biride eşanlı denklem sistemidir.

Eşanlı denklem sistemlerinde bir değişken sistemin herhangi bir denkleminde bağımsız iken, başka bir denkleminde de bağımlı değişken rolü üstelenebilir. Bundan dolayı, eş anlı denklemlerde değişkenler bağımlı ve bağımsız değişken yerine endojen, egzojen, gecikmeli endojen ve gecikmeli egzojen değişkenler olarak isimlendirilirler. Bu tür denklemlerde endojen değişkenler hata terimleri ile ilişkilidir. Bu yüzden, en küçük kareler (EKK) yöntemi ile yapılan parametre tahminleri yanlı ve tutarsız olacaktır.

Eşanlı denklem sistemlerinde parametre tahminlerinin yansız ve tutarlı olabilmeleri için tek denklem ve sistem tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Tek denklem tahmin yöntemleri, eşanlı denklem sisteminin her bir denklemi için ayrı ayrı uygulanır. Böylece eşanlı sistemin tamamı hakkında bilgiye ihtiyaç duyulmaz. Bu yöntemlerden biride tek denklem tahmin yöntemi olan iki aşamalı en küçük kareler (2AEKK) yöntemidir. Sistem tahmin yöntemlerinde denklemin tamamı hakkında bilgiye ihtiyaç duyulur.

Eşanlı denklem sistemlerine parametre tahminleri direkt olarak uygulanamaz. Her şeyden önce, eşanlı denklem sistemlerinin tüm denklemlerin belirlenmiş olması gerekmektedir. Belirlenme, katsayı parametrelerinin tek değer olarak tahmini için önemlidir. Ama bundan da önce, belirlenme model kurma içinde önemli bir kavramdır. Eşanlı denklem sistemlerinde denklemler tam belirlenmiş, aşırı belirlenmiş ve eksik belirlenmiş şeklinde üçe ayrılır. Aşırı belirlenmiş denklemlerin tahmini için 2AEKK yöntemi kullanılır.

Belirlenme sürecinden sonraki adım ise kullanılan çok denklemli sistemin eşanlı olup olmadığını araştırmaktır. Denklemin eşanlılığını test etmek için Hausman eşanlılık testi yapılır. Şayet denklem eşanlı değilse 2AEKK yöntemini kullanılamaz.

2AEKK yöntemi EKK yönteminin ard arda iki kez uygulanması prensibine dayanır. Amaç, tahmin edilecek denklemdeki hata terimi ile önceden belirlenmiş değişken rolünü üstlenmiş fakat eşanlı denklem sisteminin başka bir denkleminde endojen değişken olan y değişkeni arasındaki ilişkiyi ortadan kaldırmaktır. Bu bağlamda, 2AEKK yönteminde birinci aşamasında eşanlı denklem sistemi içindeki her bir denklemin indirgenmiş form denklemleri bulunur. Ardından indirgenmiş form denklemlerinin EKK tahminleri yardımıyla endojen değişkenlerin tahminleri elde edilir. İkinci aşamada, tahmini yapılacak denklem içerisinde eşitliliğin sağ tarafında yer alan ilgili y değeri yerine $\hat{y}$ değeri yazılır. Ardından, elde edilen yeni denkleme EKK yöntemi uygulanır.

2AEKK yöntemi hem tam belirlenmiş hem de aşırı belirlenmiş denklem sistemlerinin tahmininde kullanılabilen bir yöntemdir. 2AEKK yönteminde dikkat edilmesi gereken konulardan biri de yöntemin ikinci aşamasında elde edilen standart hataların düzeltme gerektirmesidir. Çünkü tahmin edilen denklemdeki standart hatalar ile ikinci aşamada tahmin edilen standart hatalar arasında fark vardır.

2AEKK yönetiminin işleyişinin açıklanması amacıyla Türkiye'nin 2000:4-2018:4 iktisadi dönemine ait verilerine dayanan değişkenler ile para arzı-talebi modeli oluşturuldu. Hausman eşanlılık testi ile para arzı-talebi modelinin eşanlı olduğu gösterildi. Bu modelde hem para talebi hem de para arzı fonksiyonlarının belirlenme durumları incelendi. Her iki fonksiyon da aşırı belirlenmiştir. Her bir fonksiyon için 2AEKK yöntemi kullanılarak istatistiki sonuçlar elde edildi. Elde edilen sonuçların yorumları yapıldı.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin tüm aşamalarında bilgisiyle bana yeni ufuklar açan, disiplinli, kararlı tavırlarıyla beni cesaretlendiren değerli danışmanım Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ailem, canım, herşeyim olan annem. Senin sevgin ve sabrın için sana ne kadar teşekkür etsem azdır.

Canım kız kardeşim, azmin ve bilime olan tutkun ile ilham kaynağım oldun. Umarım bilim yolunda yaptığın tüm çalışmalarında daima başarılı olursun. Hayatımın her anına destek olduğun için teşekkür ederim.

Sonsuzluğa uğurladığım canım babam ve erkek kardeşim hayatınız boyunca bana verdiğiniz sevgi ve emek için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR X
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3
3. EŞANLI DENKLEM SİSTEMLERİ 5
3.1. Giriş 5
3.2. Yapısal Model 8
3.2.1. t -İnci Gözleme Denk Gelen M Tane Yapısal Denklemin Matris Formunda Yazılması 15
3.2.2. Herhangi Bir Yapısal Denklemin Matris Formunda Yazılması 16
3.2.3. Yapısal Model Varsayımları 17
3.3. İndirgenmiş Form 20
3.3.1. Yapısal Modelden İndirgenmiş Form Denklemlerinin Bulunması 21
3.3.2. Yapısal Modelin Matris Formundan İndirgenmiş Form Denklemlerinin Bulunması 21
3.3.3. İndirgenmiş Form Varsayımları 26
3.3.4. İndirgenmiş Form İle Çok Değişkenli Regresyon Modeli Arasındaki İlişki 27
3.3.5. İndirgenmiş Formun En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 29
3.4. Eşanlı Bir Denklem Sisteminde Herhangi Bir Denklemi Parçalı Matrisler Yardımıyla Yazma 30

3.5. Eşanlı Bir Denklem Sisteminde Herhangi Bir Denklemin Yapısal Katsayı Parametrelerinin EKK Tahmin Edicilerinin Yanlılığı ve Tutarsızlığı 39
4. BELİRLENME 57
4.1. Giriş 57
4.2. Sıra Koşulu 58
4.3. Herhangi Bir Yapısal Denklemin Diğer Yapısal Denklemlerin Lineer Kombinasyonu Şeklinde Yazılmasıyla Belirlenme Durumunun İncelenmesi 67
4.4. Rank Koşulu İle Belirlenme 75
4.5. Rank Koşuluna Farklı Yaklaşım 83
4.6. Hausman Eşanlılık Testi 88
5. İKİ AŞAMALI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ 91
5.1. İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 91
5.2. İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Tutarlılığı 96
6. TÜRKİYE İÇİN PARA ARZI-TALEBİ EŞANLI DENKLEM MODELİNİN 2AEKK YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ 99
6.1. Veri Tanımlama ve Uygulama 99
6.2. Para Arzı-Talebi Modelinin Rank Koşuluna Farklı Yaklaşımla Belirlenme Durumunun İncelenmesi 101
6.3. Para Arzı-Talebi Modelinin Sıra Koşuluna Göre Belirlenme Durumunun İncelenmesi 103
6.4. Para Arzı-Talebi Modelinde Hausman Testi 104
6.5. Para Arzı-Talebi Modelinin İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemiyle İncelenmesi 107
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 109
KAYNAKLAR 111
ÖZGEÇMİŞ 113
EKLER 114

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 4.1. Para Arz-Talep Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar 85
Çizelge 4.2. Para Talebi Denkleminin Belirlenme Durumu 85
Çizelge 4.3. Para Arzı Denkleminin Belirlenme Durumu 85
Çizelge 4.4. Eşanlı Denklem Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar 87
Çizelge 4.5. 1-inci Denklemin Belirlenme Durumu 87
Çizelge 4.6. 2-nci Denklemin Belirlenme Durumu 87
Çizelge 4.7. 3-ünci Denklemin Belirlenme Durumu 88
Çizelge 6.1. Uygulamada Kullanılan Değişkenler 100
Çizelge 6.2. Para Arzı-Talebi Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar ... 101
Çizelge 6.3. Para Talebi Fonksiyonun Belirlenme Durumu 102
Çizelge 6.4. Para Arzı Fonksiyonun Belirlenme Durumu 102

SİMGELER VE KISALTMALAR

DK	: Nominal Döviz Kuru (Alış)
GF	: Gerçekleşen Basit Faiz Oranı AĞIRLIKLI ORTALAMA (Yüzde Değişim) (1 Gecelik İşlem)
$GSYH$	: Reel Gayri Safi Yurtiçi Hasıla
$GSYH_{-1}$	: Bir Önceki Döneme Ait Reel Gayri Safi Yurtiçi Hasıla
$M2$	: Reel Parasal Büyüklük
$M2^{A}$	: Reel Para Arzı
$M2^{T}$	: Reel Para Talebi
$M2_{-1}$	: Bir Önceki Döneme Ait Reel Para Arzı
$\hat{\delta}_{I^*}$	: İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi
2AEKK	: İki Aşamalı En Küçük Kareler
3AEKK	: Üç Aşamalı En Küçük Kareler
ABD	: Amerika Birleşik Devletleri
AD	: Araç Değişkenler
DEKK	: Dolaylı En Küçük Kareler
EKK	: En Küçük Kareler
EVDS	: Elekronik Veri Dağıtım Sistemi
TCMB	: Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası
TÜFE	: Tüketici Fiyat Endeksi

1. GİRİŞ

Eşanlı denklem sistemlerinde parametre tahmini için birçok tahmin yöntemi mevcuttur. Bu yöntemler aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

1. Tek Denklem Tahmin Yöntemleri
2. Sistem Tahmin Yöntemleri

Tek denklem yöntemlerinde, modelde yer alan denklemlerin her biri ayrı ayrı çözümlenir. Sistem yöntemlerinde ise modeldeki tüm denklemler aynı anda çözüme dahil edilmelidir.

Tek denklem yöntemlerinin başlıcaları; dolaylı en küçük kareler (DEKK) yöntemi, 2AEKK yöntemi, araç değişkenler yöntemi (AD), k-class. Sistem yöntemlerinden başlıcaları; üç aşamalı en küçük kareler yöntemi (3AEKK), sistem k-class tır.

2AEKK yöntemi bir tek denklem yöntemidir. 2AEKK yöntemi uygulanacak denklemin tam veya aşırı belirlenmiş olması gerekmektedir.

Bu tezin amacı, 2AEKK yönteminin incelenmesi, ardından Türkiye'nin iktisadi verilerine sahip değişkeler yardımıyla her biri aşırı belirlenmiş bir eşanlı model kurulması, kurulan modele 2AEKK yöntemini uygulayıp çıkan sonuçların istatistiksel açıdan değerlendirimesidir.

Tezin birinci bölümünde; eşanlı denklem sistemlerinde kullanılan tahmin yöntemlerinden kısaca bahsedildi

İkinci bölümde; 2AEKK yöntemi ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalara değinildi.

Üçüncü bölümde; eşanlı denklem sistemlerinin tanımı, yapısal model ile yapısal denklemler ve indirgenmiş form denklemleri hakkında açıklayıcı bilgiler verildi. Bu bilgiler örneklerle desteklendi. Ayrıca eşanlı bir modelde herhangi bir

yapısal denklem için EKK yönteminde katsayı parametre tahminlerinin yanlı ve tutarsız olduğu gösterildi.

Dördüncü bölümde; eşanlı denklem sisteminde parametre tahmini yapmadan önce sistem içindeki denklemlerin belirlenmiş olmasının önemi üzerinde duruldu. Belirlenme yöntemleri hakkında bilgi verildi.

Beşinci bölümde; 2AEKK yöntemi, bu yöntem yardımı ile parametre tahmini ve 2AEKK tahmin edicisinin yansız olmadığı ve tutarlı olduğu gösterildi.

Altıncı bölümde; Türkiye'nin 2000:4-2018:4 iktisadi dönemine ait değişkenler ile her biri aşırı belirlenmiş denklemlerden oluşan para arzı-talebi eşanlı modeli kuruldu. Modelde; kullanılan değişkenler, hakkında açıklayıcı bilgiler verildi. 2AEKK tahmin sonuçları IBM SPSS 21 istatistik paket programı ile yapıldı. Çıkan sonuçlar istatistiksel açıdan yorumlandı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Havelmo (1944), belirli bir parametre setini içeren ve stokastik denklemlerden oluşan sistem göz önüne alındığında, parametre tahminlerinin tek bir değer olarak elde edilebilmesi için gerekli matematiksel kuralları vermiştir.

Eşanlı bir denklem sisteminde en önemli konularından biri belirlenmedir. Koopmans (1949), belirlenme problemini anlattığı çalışmasında belirlenmede kullanılan temel kavramları, teoremleri açıklayıcı bir şekilde tartışmıştır.

Basmann (1957), eşanlı denklem sisteminde tam belirlenmiş denklemler için 2AEKK tahmin yöntemini incelemiştir.

Theil (1971), Basmann'dan bağımsız olarak 2AEKK üzerine çalışmalar yapmıştır.

Yüksek Öğretim Kurulu Başkanlığı Ulusal Tez Merkezi'nde, 2AEKK uygulama alanlarını içeren tez çalışmaları bulunmaktadır. Bu tezlerin bazıları hakkında kısa bilgiler verilecek olursa;

"**İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi Üzerine Bir Araştırma**" adlı yüksek lisans tezi çalışmasında 2AEKK yöntemi hakkında teorik bilgiler verilmiştir. Ülkemizde o yıllarda fazla kullanılmayan ekonometrik modelleri tanıtmak amaçlanmış, farklı ekonometrik modeller üzerinde FORTRAN programlama dilinde bir bilgisayar programı ve MINITAB hazır paket programı kullanılarak 2AEKK yöntemi ile EKK yöntemi karşılaştırılmıştır (Üçdoğruk, 1990).

"**İki ve Üç Aşamalı En Küçük Kareler Yönteminin Karşılaştırılması ve Türkiye Çimento Sanayinde Uygulanması**" adlı doktora tezi çalışmasında; EKK yöntemi, 2AEKK ve 3AEKK (üç aşamalı en küçük kareler) yöntemleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonunda en iyi sonuçların 3AEKK yöntemi ile elde edildiği gösterilmiştir (Aksakal, 1986).

3. EŞANLI DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1. Giriş

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon_t \tag{3.1.}$$

biçiminde yazılan eşitlik (3.1.) bir denklemli basit lineer regresyon denklemidir. (3.1.) denkleminde ε_t hata terimi olmak üzere, X bağımsız değişken (independent variable) ve Y bağımlı değişkendir (dependent variable).

Gerçek hayatta ekonomi ile ilgili olayları açıklamak için kullanılan modeller genellikle bir denklemli değil, birden çok denklemlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \gamma_{10} + \beta_{11} Y_{2t} + \gamma_{11} X_{1t} + \varepsilon_{1t} && \text{1-inci denklem} \\ Y_{2t} &= \gamma_{20} + \beta_{21} Y_{1t} + \gamma_{21} X_{1t} + \varepsilon_{2t} && \text{2-nci denklem} \end{aligned} \tag{3.2.}$$

biçiminde yazılan iki denklemli (3.2.) modelinde X_{1t} bağımsız değişken, ε_{1t} ve ε_{2t} hata terimleridir. (3.2.) modelinde Y_{2t}, 1-inci denklemde bağımsız değişken gibi dururken iken, 2-nci denklemde bağımlı değişkendir. Y_{1t}, 1-inci denklemde bağımlı değişken iken, 2-nci denklemde bağımsız değişken rolündedir. Y_{1t} ile Y_{2t} değişkenlerine (3.2.) modelinin ortak bağımlı değişkenleri (common dependent or jointly dependent variables) denir.

Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki karşılıklı ilişkileri inceleyen, çok denklemli modellere eşanlı denklem sistemleri denir.

Eşanlı denklem sistemlerinde değişkenler arasındaki karşılıklı ilişkiden dolayı, değişkenlerin yeniden sınıflandırılması gerekir. Bu sınıflandırmaya göre:

1. Endojen Değişkenler (Endogenous Variables): Değerleri eşanlı denklem sistemi içinde belirlenen bağımlı değişkenlerdir. Endojen değişkenlerin hata terimleri ile arasında korelasyon vardır. Yani, endojen değişkenler stokastiktir.

2. Önceden Belirlenmiş Değişkenler (Predetermineted Variables): Değerleri eşanlı denklem sistemi dışında belirlenen bağımsız değişkenlerdir. Önceden belirlenmiş değişkenler ile hata terimleri arasında bir korelasyon yoktur. Yani, önceden belirlenmiş değişkenler stokastik değildir. Üç tür önceden belirlenmiş değişken vardır:

a) Egzojen Değişkenler (Exogenous Variables): Egzojen değişkenlerin değerleri eşanlı denklem sisteminin tamamen dışında önceden belirlenir.
b) Gecikmeli Egzojen Değişkenler (Lagged Exogenous Variables): Egzojen değişkenlerin geçmiş dönemlerine ait değerlerine gecikmeli egzojen değişken denir.
c) Gecikmeli Endojen Değişkenler (Lagged Endogenous Variables): Endojen değişkenlerin geçmiş dönemlerine ait değerlerine gecikmeli endojen değişkenler denir. Endojen değişkenler stokastik olsalar da gecikmeli endojen değişkenler stokastik değildir.

Eşanlı denklem sistemlerinde üç tür denklem vardır. Buna göre:

1. Davranış Denklemleri: Davranış denklemleri, değişkenlere ait tahmin edilmesi gereken yapısal katsayı parametreleri ve hata terimleri içerir.
2. Denge Şartı Denklemleri: Denge şartı denklemlerinde, iki değişken birbirine eşittir.
3. Tanım Denklemleri: Tanım denklemleri, yapısal katsayı parametreleri ve hata terimleri içermeyen, bir değişkenin bileşenlerini gösteren denklemlerdir.

Eşanlı bir denklem sisteminde yer alan değişkenlerin ve denklem türlerinin sınıflandırılması örneklerle gösterilsin.

Örnek 3.1.1 İki denklemli basit Keynesian modeli (Toutenburg, 1982)

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t} \qquad 0 < \beta < 1 \qquad \text{Tüketim Fonksiyonu} \qquad (3.3.)$$

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (t = 1,\ldots,T) \qquad \text{Milli Gelir Özdeşliği} \qquad (3.4.)$$

dir. Burada; C_t ve Y_t endojen değişkenler, I_t egzojen değişkendir. α ve β yapısal katsayı parametreleridir. t -inci zamanda,

C_t = Tüketim harcamaları

Y_t = Gelir

I_t = Yatırım

ε_{1t} = Tüketim fonksiyonunun hata terimi

dir. (3.3.) denklemi, davranış denklemi olarak adlandırılır. Çünkü, (3.3.) denklemi, tahmin edilecek yapısal katsayı parametreleri α ve β ile hata terimi ε_{1t} yi içerir. (3.4.) denklemi tanım denklemidir. Çünkü (3.4.) denkleminde Y_t nin bileşenleri C_t ile I_t olmak üzere, bu denklemde tahmin edilecek yapısal katsayı parametreleri ve hata terimi yoktur.

Örnek 3.1.2 Piyasa denge modeli (Güriş ve Çağlayan, 2010).

$$Q_D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad \text{Talep Fonksiyonu} \qquad (3.5.)$$

$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t} \qquad \text{Arz Fonksiyonu} \qquad (3.6.)$$

$$Q_D = Q_S \qquad \text{Denge Şartı Denklemi} \qquad (3.7.)$$

dir. Burada; $Q_D = Q_S = Q_t$ olmak üzere Q_t ve P_t endojen değişkenler, Y_t egzojen değişken, P_{t-1} bir önceki döneme ait gecikmeli endojen değişkendir. α_0, α_1, α_2 (3.5.) talep fonksiyonunun yapısal katsayı parametreleri ve β_0, β_1, β_2 (3.6.) arz fonksiyonunun yapısal katsayı parametreleridir. t -inci zamanda,

Q_D = Talep miktarı

Q_S = Arz miktarı

P_t = Fiyat

P_{t-1} = Bir dönem önceki fiyat

Y_t = Gelir

ε_{1t}, ε_{2t} = Sırasıyla talep fonksiyonu ve arz fonksiyonu hata terimleri

dir. (3.5.) talep fonksiyonu ve (3.6.) arz fonksiyonu davranış denklemleridir. Çünkü, (3.5.) ve (3.6.) fonksiyonları tahmin edilmesi gereken yapısal katsayı parametreleri ile hata terimleri içerirler. (3.7.) denkleminde $Q_D = Q_S$ dir. Bu yüzden, (3.7.) denklemi denge şartı denklemidir.

3.2. Yapısal Model

Yapısal model, her biri T $(t = 1,2,...,T)$ gözleme sahip M tane denklemden oluşan eşanlı bir denklem sistemidir ve

$$y_{tm} = \sum_{j=1}^{M} y_{tj}\beta_{jm} + \sum_{i=1}^{K} x_{ti}\gamma_{im} + \varepsilon_{tm} \quad (m = 1,2,..,M) \qquad (3.8.)$$

biçiminde yazılır (Totuenburg, 1982). Yapısal model (3.8.) de $m = 1,2,...,M$ ve $t = 1,2,...,T$ için:

y_{tm} = m-inci denklemde m-inci endojen değişkeninin t-inci gözlem değeri

ε_{tm} = m-inci denklemde m -inci hata teriminin t -inci gözlem değeri

Ayrıca, $t = 1,2,\ldots,T$, $i = 1,2,\ldots,K$ ve $m, j = 1,2,...,M$ için:

y_{tj} = j-inci endojen değişkenin t -inci gözlem değeri

x_{ti} = i -inci önceden belirlenmiş değişkenin t -inci gözlem değeri

β_{jm} = m-inci denklemdeki j-inci endojen değişkenin tahmin edilmesi gereken j-inci yapısal katsayı parametresi

γ_{im} = m-inci denklemdeki i -inci önceden belirlenmiş değişkenin tahmin edilmesi gereken i -inci yapısal katsayı parametresi

Yapısal model (3.8.) de yapısal katsayı parametrelerin bazılarının sıfır olduğu varsayılabilir ve tüm β_{ii} ler sıfırdır.

Yapısal model (3.8.), daha açık bir şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned}
y_{t1} &= y_{t1}\beta_{11} + y_{t2}\beta_{21} + \cdots + y_{tM}\beta_{M1} + x_{t1}\gamma_{11} + x_{t2}\gamma_{21} + \cdots + x_{tK}\gamma_{K1} + \varepsilon_{t1} \\
y_{t2} &= y_{t1}\beta_{12} + y_{t2}\beta_{22} + \cdots + y_{tM}\beta_{M2} + x_{t1}\gamma_{12} + x_{t2}\gamma_{22} + \cdots + x_{tK}\gamma_{KM} + \varepsilon_{t2} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
y_{tM} &= y_{t1}\beta_{1M} + y_{t2}\beta_{2M} + \cdots + y_{tM}\beta_{MM} + x_{t1}\gamma_{1M} + x_{t2}\gamma_{2M} + \cdots + x_{tK}\gamma_{KM} + \varepsilon_{tM}
\end{aligned} \tag{3.9.}$$

olur.

Her biri T gözleme sahip M denklemden oluşan yapısal model (3.8.) in tamamı matris formunda yazılırsa

$$Y = YB + X\Gamma + \varepsilon \tag{3.10.}$$

olur. Burada,

$$Y = \left[y_{tj} \right] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & y_{T2} & \cdots & y_{TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{bmatrix}$$

$$X = \left[x_{ti} \right] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_K \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\beta_{jm} \right] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{M1} & \beta_{M2} & \cdots & \beta_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_M \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \left[\gamma_{im} \right] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{K1} & \gamma_{K2} & \cdots & \gamma_{KM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_M \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_{tm} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1M} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{T1} & \varepsilon_{T2} & \cdots & \varepsilon_{TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_M \end{bmatrix}$$

olmak üzere, yapısal model (3.8.) in matris formu (3.10.) da

$Y=\left[y_{tj} \right]$ matrisi yapısal model (3.8.) deki tüm endojen değişkenleri gösterir ve $Y:TxM$ tipinde bir matristir.

$X=\left[x_{ti} \right]$ matrisi yapısal model (3.8.) deki tüm önceden belirlenmiş değişkenleri gösterir ve $X:TxK$ tipinde bir matristir.

$B=\left[\beta_{jm} \right]$ matrisi yapısal model (3.8.) deki endojen değişkenlerin yapısal katsayı parametreleridir ve $B:MxM$ tipinde bir kare matristir.

$\Gamma=\left[\gamma_{im} \right]$ yapısal model (3.8.) deki önceden belirlenmiş değişkenlerin yapısal katsayı parametreleridir ve $\Gamma:KxM$ tipinde bir matristir.

$\varepsilon=\left[\varepsilon_{tm} \right]$ yapısal model (3.8.) deki tüm hata terimleri olmak üzere, $\varepsilon:TxM$ tipinde bir matristir.

Örnek 3.2.1 Örnek 3.1.1 deki iki denklemli basit Keynesian modeli

$C_t=\alpha+\beta Y_t+\varepsilon_{1t}$	$0<\beta<1$	Tüketim Fonksiyonu
$Y_t=C_t+I_t$	$(t=1,\ldots,T)$	Milli Gelir Özdeşliği

için α ve β yapısal katsayı parametreleri olmak üzere,

$t=1,2,3$ ten $T=3$

$i=1,2$ den $K=2$

$m,j=1,2$ den $M=2$

olsun. İki denklemli basit Keynesian modelinin matris formunda yazılabilmesi için aşağıdaki düzenlemeler yapılır:

$$C_{1t} = 0C_{1t} + \beta Y_{2t} + \alpha 1 + 0I_{2t} + \varepsilon_{1t} \qquad \text{1-inci denklem} \qquad (3.11.)$$

$$Y_{2t} = 1C_{1t} + 0Y_{2t} + 0.1 + 1I_{2t} + 0 \qquad \text{2-nci denklem} \qquad (3.12.)$$

dır. (3.11.) ve (3.12.) denklemleri

$$C_{t1} = C_{t1}0 + Y_{t2}\beta + 1\alpha + I_{t2}0 + \varepsilon_{t1} \qquad \text{1-inci denklem} \qquad (3.13.)$$

$$Y_{t2} = C_{t1}1 + Y_{t2}0 + 1.0 + I_{t2}1 + 0 \qquad \text{2-nci denklem} \qquad (3.14.)$$

olur. (3.13.) ve (3.14.) denklemleriyle oluşan eşanlı denklem sisteminin $t = 1,2,3$ için matris formu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{\beta_{11}} & \underbrace{\beta_{12}} \\ \beta & 0 \\ \underbrace{\beta_{21}} & \underbrace{\beta_{22}} \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ 1 & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \qquad (3.15.)$$

$$Y = YB + X\Gamma + \varepsilon$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3.2.2 Örnek 3.1.2 deki piyasa denge modeli

$$Q_D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad \text{Talep Fonksiyonu}$$

$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t} \qquad \text{Arz Fonksiyonu}$$

$$Q_D = Q_S \qquad \text{Denge Şartı Denklemi}$$

için α_0, α_1, α_2, β_0, β_1 ve β_2 yapısal katsayı parametreleri olmak üzere,

$t = 1,2,3$ ten $T = 3$

$i = 1,2,3$ ten $K = 3$

$m, j = 1,2$ den $M = 2$

olsun. Piyasa denge modelinin matris formunda yazılabilmesi için aşağıdaki düzenlemeler yapılır:

$Q_D = Q_S = Q_t$ olduğundan piyasa denge modeli

$$Q_D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad \text{Talep Fonksiyonu} \quad (3.16.)$$

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t} \quad \text{Arz Fonksiyonu} \quad (3.17.)$$

biçiminde yazılır. (3.17.) denklemi, P_t değişkeni denklemin sol tarafında yalnız kalacak biçimde düzenlenirse

$$-\beta_1 P_t = -Q_t + \beta_0 + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

$$\left(-\frac{1}{\beta_1}\right)\left(-\beta_1 P_t\right) = \left(-\frac{1}{\beta_1}\right)\left(-Q_t + \beta_0 + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}\right)$$

$$P_t = \frac{1}{\beta} Q_t - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} Y_t - \frac{1}{\beta_1} \varepsilon_{2t} \quad (3.18.)$$

olur. (3.16.) ve (3.18.) denklemlerinden, piyasa denge modelinin yeni biçimi

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (3.19.)$$

$$P_t = \frac{1}{\beta} Q_t - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} Y_t - \frac{1}{\beta_1} \varepsilon_{2t} \quad (3.20.)$$

dir. (3.19.) ve (3.20.) denklemleri

$$Q_{1t} = 0Q_{1t} + \alpha_1 P_{2t} + \alpha_0 1 + \alpha_2 P_{2(t-1)} + 0Y_{3t} + \varepsilon_{1t} \quad \text{1-inci denklem} \quad (3.21.)$$

$$P_{2t} = \frac{1}{\beta_1} Q_{1t} + 0P_{2t} - \frac{\beta_0}{\beta_1} 1 + 0P_{2(t-1)} - \frac{\beta_2}{\beta_1} Y_{3t} - \frac{1}{\beta_1} \varepsilon_{2t} \quad \text{2-nci denklem} \quad (3.22.)$$

biçiminde yazılır. (3.21.) ve (3.22.) denklemlerinden

$$Q_{t1} = Q_{t1} 0 + P_{t2}\alpha_1 + 1\alpha_0 + P_{(t-1)2}\alpha_2 + Y_{t3} 0 + \varepsilon_{t1} \quad \text{1-inci denklem} \quad (3.23.)$$

$$P_{t2} = Q_{t1} \frac{1}{\beta_1} + P_{2t} 0 - 1\frac{\beta_0}{\beta_1} + P_{(t-1)2} 0 - Y_{t3} \frac{\beta_2}{\beta_1} - \varepsilon_{t2} \frac{1}{\beta_1} \quad \text{2-nci denklem} \quad (3.24.)$$

olur. (3.23.) ve (3.24.) denklemlerinden oluşan eşanlı denklem sisteminin $t = 1,2,3$ için matris formu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{P_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{P_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{P_{32}}_{y_{32}} \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{P_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{P_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{P_{32}}_{y_{32}} \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ 0 & \underbrace{\frac{1}{\beta_1}}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{\alpha_1}_{\beta_{21}} & \underbrace{0}_{\beta_{22}} \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{P_{(1-1)2}}_{x_{12}} & \underbrace{Y_{13}}_{x_{13}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{P_{(2-1)2}}_{x_{22}} & \underbrace{Y_{23}}_{x_{23}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{P_{(3-1)2}}_{x_{32}} & \underbrace{Y_{33}}_{x_{33}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha_0}_{\gamma_{11}} & \underbrace{-\frac{\beta_0}{\beta_1}}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{\alpha_2}_{\gamma_{21}} & \underbrace{0}_{\gamma_{22}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{31}} & \underbrace{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}_{\gamma_{32}} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{-1}{\beta_1}\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \frac{-1}{\beta_1}\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} & \frac{-1}{\beta_1}\varepsilon_{32} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \quad (3.25.)$$

$$Y = YB + X\Gamma + \varepsilon$$

biçiminde elde edilir.

3.2.1. t -İnci Gözleme Denk Gelen M Tane Yapısal Denklemin Matris Formunda Yazılması

Green (1993), yapısal model (3.8.) in matris formu (3.10.) için herhangi bir t -inci satırın t -inci gözlemine denk gelen M tane yapısal denklemin hepsi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{t1} & \cdots & y_{tM} \end{bmatrix}}_{y_t'} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t1} & \cdots & y_{tM} \end{bmatrix}}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{M1} & \cdots & \beta_{MM} \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t1} & \cdots & x_{tK} \end{bmatrix}}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{K1} & \cdots & \gamma_{KM} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} & \cdots & \varepsilon_{tM} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_t'}$$

$$y_t' = y_t' B + x_t' \Gamma + \varepsilon_t'$$

biçiminde yazılır.

Örnek 3.2.3 Örnek 3.2.1 de eşitlik (3.15.) için herhangi bir t -inci satırın t -inci gözlemine denk gelen $M=2$ tane yapısal denklemin matris formu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{t1}}_{y_{t1}} & \underbrace{Y_{t2}}_{y_{t2}} \end{bmatrix}}_{y_t'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{t1}}_{y_{t1}} & \underbrace{Y_{t2}}_{y_{t2}} \end{bmatrix}}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} & \underbrace{1}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{\beta}_{\beta_{21}} & \underbrace{0}_{\beta_{22}} \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{t1}} & \underbrace{I_{t2}}_{x_{t2}} \end{bmatrix}}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{t1}}_{\varepsilon_{t1}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{t2}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_t'}$$

$$y_t' = y_t' B + x_t' \Gamma + \varepsilon_t'$$

olur.

3.2.2. Herhangi Bir Yapısal Denklemin Matris Formunda Yazılması

Theil (1971), yapısal model (3.8.) in matris formu (3.10.) da β_{jm} ler ve γ_{im} lerin herhangi bir m-inci sütunları için, T tane gözleme sahip m-inci yapısal denklemin matris formu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1m} \\ \vdots \\ y_{Tm} \end{bmatrix}}_{y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & \cdots & y_{TM} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{1m} \\ \vdots \\ \beta_{Tm} \end{bmatrix}}_{B_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & \cdots & y_{TK} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{1m} \\ \vdots \\ \gamma_{Km} \end{bmatrix}}_{\Gamma_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{1m} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Tm} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_m}$$

$$y_m = YB_m + X\Gamma_m + \varepsilon_m$$

biçiminde yazılır.

Örnek 3.2.4 Örnek 3.2.2 de, eşitlik (3.25.) için β_{jm} ler ve γ_{im} lerin herhangi bir m-inci sütunları için $T=3$ tane gözleme sahip m-inci yapısal denklem matris formunda yazılsın.

$m=1$ için 1-inci yapısal denklem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{P_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{P_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{P_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} \\ \underbrace{\alpha_1}_{\beta_{21}} \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{P_{(1-1)2}}_{x_{12}} & \underbrace{Y_{13}}_{x_{13}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{P_{(2-1)2}}_{x_{22}} & \underbrace{Y_{23}}_{x_{23}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{P_{(3-1)2}}_{x_{32}} & \underbrace{Y_{33}}_{x_{33}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha_0}_{\gamma_{11}} \\ \underbrace{\alpha_2}_{\gamma_{21}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{31}} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$y_1 = YB_1 + X\Gamma_1 + \varepsilon_1$$

olur. $m=2$ için 2-nci yapısal denklem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{P_{12}}_{y_{11}} \\ \underbrace{P_{22}}_{y_{21}} \\ \underbrace{P_{32}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{P_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{P_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{P_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \underbrace{\beta_1}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{0}_{\beta_{22}} \end{bmatrix}}_{B_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{P_{(1-1)2}}_{x_{12}} & \underbrace{Y_{13}}_{x_{13}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{P_{(2-1)2}}_{x_{22}} & \underbrace{Y_{23}}_{x_{23}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{P_{(3-1)2}}_{x_{32}} & \underbrace{Y_{33}}_{x_{33}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{-\frac{\beta_0}{\beta_1}}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{22}} \\ \underbrace{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}_{\gamma_{32}} \end{bmatrix}}_{\Gamma_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\varepsilon_{12}\frac{1}{\beta_1} \\ -\varepsilon_{22}\frac{1}{\beta_1} \\ -\varepsilon_{32}\frac{1}{\beta_1} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_2}$$

$$y_2 = YB_2 + X\Gamma_2 + \varepsilon_2$$

olur.

3.2.3. Yapısal Model Varsayımları

Judge ve ark (1988); Toutenburg (1982), yapısal model (3.8.) için yapısal model varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. $E[\varepsilon_{tm}]=0,\ (m=1,2,...,M)$ ve $(t=1,2,..,T)$

ε_{tm} nin ortalaması yani beklenen değeri sıfırdır.

2. $E\left[\varepsilon_{tm}\ \varepsilon_{t'm'}\right]=\delta_{tt'}\sigma_{mm'}$, $\left(m,m'=1,2,...,M\right)$ ve $\left(t,t'=1,2,\ldots,T\right)$

$\delta_{tt'}$ Kronecker deltadır. Burada, $\delta_{tt'}=\begin{cases}0 & t\neq t'\\ 1 & t=t'\end{cases}$ dir.

3. $p\lim\dfrac{\varepsilon'\varepsilon}{T}=\Sigma$ (3.26.)

$\Sigma : MxM$ tipinde yarı pozitif tanımlı matristir. Örneklem hata terimlerinin kovaryans matrisi olasılıklı olarak sonlu bir kitle kovaryans matrisine yakınsar.

4. $p\lim \frac{X'X}{T} = \Sigma_{XX}$ (3.27.)

Σ_{XX} pozitif tanımlı matristir. X in örneklem çapraz moment matrisi olasılıklı olarak kitle moment matrisine yakınsar.

5. $E\left[X_{tm} \quad \varepsilon_{t'm'}\right] = 0$, $\left(m, m' = 1,2,...,M\right)$ ve $\left(t, t' = 1,2,...,T\right)$ (3.28.)

Önceden belirlenmiş değişkenler $\left[x_1, x_2, ..., x_K\right]$, hata terimleri $\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_M\right]$ ile korelasyonsuzdur.

6. $p\lim \frac{X'\varepsilon}{T} = 0$ (3.29.)

7. $I - B$ regülerdir.

8. $E\left[y_{tm} \ \varepsilon_{tm'}\right] \neq 0$, $\left(m, m' = 1,2,...,M\right)$

Endojen değişkenler $\left[y_1, y_2, ..., y_M\right]$, hata terimleri $\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_M\right]$ ile korelasyonludur. Bu yüzden, β_{jm} ve γ_{im} yapısal katsayı parametreleri için EKK yöntemiyle yansız tahmin ediciler bulunamaz.

9. rank $X = K$ (3.30.)

Ayrıca, yapısal model (3.8.) in her biri T gözleme sahip M denklemden oluşan yapısal modelinin matris formu (3.10.) için yapısal model varsayımları aşağıdaki gibidir:

10. $E[\varepsilon] = 0$

11. $E\left[\varepsilon_m \ \varepsilon_{m'}\right] = \sigma_{mm'} I$, $\left(m, m' = 1, 2, ..., M\right)$

12. $$E\left[\varepsilon\varepsilon'\right] = E\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1' & \varepsilon_2' & \cdots & \varepsilon_M'\end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{11}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\sigma_{1M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{1M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{1M}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\sigma_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{21}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{22}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\sigma_{2M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{2M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{2M}\end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix}\sigma_{M1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{M1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{M1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sigma_{M2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{M2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{M2}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\sigma_{MM} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{MM} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{MM}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \sigma_{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \cdots & \sigma_{1M}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma_{21}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \sigma_{22}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \cdots & \sigma_{2M}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \sigma_{M2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \cdots & \sigma_{MM}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots & \sigma_{1M}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \cdots & \sigma_{2M}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}I & \sigma_{M2}I & \cdots & \sigma_{MM}I \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I$$

$\Sigma : MxM$ tipinde simetrik ve yarı pozitif tanımlı matristir.

$I : TxT$ tipinde birim matristir.

$\Sigma \otimes I : MTxMT$ tipinde matristir.

3.3. İndirgenmiş Form

İndirgenmiş form, önceden belirlenmiş değişkenlerin endojen değişkenler üzerindeki etkisini bulmak için yazılan bir denklemdir. Yapısal modelin indirgeniş formu iki farklı yöntemle elde edilir:

1. Yapısal modelden indirgenmiş form denklemleri bulunur.
2. Yapısal modelin matris formu yardımıyla indirgenmiş form denklemleri bulunur.

3.3.1. Yapısal Modelden İndirgenmiş Form Denklemlerinin Bulunması

Yapısal modeldeki her bir endojen değişken, yapısal modeldeki önceden belirlenmiş değişkenlerin ve hata terimlerinin bir fonksiyonu olarak yazılır. Böylece yapısal denklem sayısı kadar indirgenmiş form denklemi elde edilir.

Örnek 3.3.1 Örnek 3.1.1 deki iki denklemli basit Keynesian modeli için indirgenmiş form denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

Önce, (3.4.) denklemindeki Y_t nin eşiti (3.3.) dekleminde yerine yazılır. Ardından (3.3.) denklemindeki C_t nin eşiti (3.4.) denkleminde yerine yazılır. Basit matematiksel işlemler sonucu iki denklemli basit Keynesian modelinin indirgenmiş form denklemleri

$$C_t = \underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\pi_{11}} + \underbrace{\frac{\beta}{1-\beta}}_{\pi_{21}} I_t + \underbrace{\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}}_{v_{1t}} \tag{3.31.}$$

$$Y_t = \underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\pi_{12}} + \underbrace{\frac{1}{1-\beta}}_{\pi_{22}} I_t + \underbrace{\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}}_{v_{2t}} \tag{3.32.}$$

elde edilir. Buradan, (3.31.) ve (3.32.) denklemleri

$$C_{t1} = \pi_{11} + I_{t2}\pi_{21} + v_{t1} \tag{3.33.}$$

$$Y_{t2} = \pi_{12} + I_{t2}\pi_{22} + v_{t2} \tag{3.34.}$$

biçiminde yazılır.

3.3.2. Yapısal Modelin Matris Formundan İndirgenmiş Form Denklemlerinin Bulunması

Yapısal model (3.8.) in matris formu (3.10.)

$$Y = YB + X\Gamma + \varepsilon$$

idi. Buradan,

$$Y - YB = X\Gamma + \varepsilon$$
$$Y(I - B) = X\Gamma + \varepsilon \qquad (3.35.)$$

olur. Yapısal model varsayımlarından (3.30.) a göre $I - B$ regülerdir. Bu yüzden, eşitlik (3.35.) sağdan $(I - B)^{-1}$ ile çarpılırsa indirgenmiş form matrisi

$$Y(I - B)(I - B)^{-1} = X\Gamma(I - B)^{-1} + \varepsilon(I - B)^{-1}$$
$$Y = X\Gamma(I - B)^{-1} + \varepsilon(I - B)^{-1}$$
$$= X\Pi + V \qquad (3.36.)$$

biçiminde elde edilir. İndirgenmiş form matrisi (3.36.) da

$$\Pi = \Gamma(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1M} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{K1} & \pi_{K2} & \cdots & \pi_{KM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_M \end{bmatrix}$$

$$V = \varepsilon(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1M} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{T1} & v_{T2} & \cdots & v_{TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_M \end{bmatrix}$$

olmak üzere

Π: KxM tipinde indirgenmiş form katsayılarını içeren bir matristir.

V: TxM tipinde indirgenmiş formun hata terimleri matrisidir.

Yapısal modelin matris formundan indirgenmiş form denklemlerini bulunması aşağıdaki örnekle gösterilsin.

Örnek 3.3.2 Örnek 3.2.1 de iki denklemli basit Keynesian modelinin matris formu, eşitlik (3.15.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} & \underbrace{1}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{\beta}_{\beta_{21}} & \underbrace{0}_{\beta_{22}} \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

idi. Buradan,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} & \underbrace{1}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{\beta}_{\beta_{21}} & \underbrace{0}_{\beta_{22}} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} & \underbrace{1}_{\beta_{12}} \\ \underbrace{\beta}_{\beta_{21}} & \underbrace{0}_{\beta_{22}} \end{bmatrix}}_{B} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}}_{I-B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \tag{3.37.}$$

dur.

$$\left(I-B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}$$

Eşitlik (3.37.) sağdan $\left(I-B\right)^{-1}$ matrisiyle çarpılsın. O halde, iki denklemli basit Keynesian modelinin indirgenmiş formu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{23}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{11}} & \underbrace{0}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{21}} & \underbrace{1}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{(I-B)^{-1}}}_{\Pi} + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}}_{\varepsilon_{11}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}}_{\varepsilon_{21}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}}_{\varepsilon_{31}} & \underbrace{0}_{\varepsilon_{32}} \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{(I-B)^{-1}}}_{V}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\pi_{11}} & \underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\pi_{12}} \\ \underbrace{\frac{\beta}{1-\beta}}_{\pi_{21}} & \underbrace{\frac{1}{1-\beta}}_{\pi_{22}} \end{bmatrix}}_{\Pi} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\varepsilon_{11}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{11}} & \underbrace{\varepsilon_{11}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{12}} \\ \underbrace{\varepsilon_{21}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{21}} & \underbrace{\varepsilon_{21}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{22}} \\ \underbrace{\varepsilon_{31}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{31}} & \underbrace{\varepsilon_{31}\frac{1}{1-\beta}}_{v_{32}} \end{bmatrix}}_{V} \quad (3.38.)$$

$$\pi_1 \quad \pi_2 \qquad v_1 \quad v_2$$

$$Y = X\Pi + V$$

biçiminde bulunur.

Dikkat edilirse (3.33.) denklemindeki yapısal katsayılar ile eşitlik (3.38.) deki Π matrisinin birinci kolonundaki yapısal katsayılar birbirine eşittir. Aynı şekilde, (3.34.) denklemindeki yapısal katsayılar ile eşitlik (3.38.) deki Π matrisinin ikinci kolonundaki yapısal katsayılar birbirine eşittir.

3.3.3. İndirgenmiş Form Varsayımları

Judge ve ark (1988); Toutenburg (1982), indirgenmiş form matrisi (3.36.) nın hata terimleri ile ilgili varsayımları:

$$1.\ p\lim\frac{V'V}{T}=p\lim\frac{\left[\left(I-B\right)^{-1}\right]'\varepsilon'\varepsilon\left(I-B\right)^{-1}}{T} \tag{3.39.}$$

Yapısal model varsayımı (3.26.) yardımıyla, indirgenmiş form varsayımı (3.39.)

$$p\lim\frac{V'V}{T}=\left[\left(I-B\right)^{-1}\right]'\Sigma\left(I-B\right)^{-1}=\Omega$$

olur.

$$2.\ p\lim\frac{X'V}{T}=p\lim\frac{X'\varepsilon\left(I-B\right)^{-1}}{T},\ V=\varepsilon\left(I-B\right)^{-1} \tag{3.40.}$$

Yapısal model varsayımı (3.29.) yardımıyla, indirgenmiş form varsayımı eşitlik (3.40.)

$$p\lim\frac{X'V}{T}=\left(p\lim\frac{X'\varepsilon}{T}\right)\left(I-B\right)^{-1}=0.\left(I-B\right)^{-1}=0$$

olur.

3.3.4. İndirgenmiş Form İle Çok Değişkenli Regresyon Modeli Arasındaki İlişki

İndirgenmiş form matrisi (3.36.) çok değişkenli regresyon modeli gibi düşünülürse,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix} \tag{3.41.}$$

biçiminde yazılır. İndirgenmiş form matrisi (3.36.) da

y_m , Y nin m-inci endojen değişkeni

π_m , Π nin m-inci sütun vektörü

v_m , V nin m-inci sütun vektörü

olmak üzere eşitlik (3.41.) in m-inci denklemi

$$y_m = X\pi_m + v_m \,,\ (m = 1,...,M) \tag{3.42.}$$

biçiminde yazılır. Burada, y_m lerin her biri $Tx1$ tipinde vektörlerdir.

Örnek 3.3.3 Örnek 3.3.2 de iki denklemli basit Keynesian modelinin indirgenmiş form matrisi olan eşitlik (3.38.) in, çok değişkenli regresyon modeli

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{bmatrix}}_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & I_{12} \\ 1 & I_{22} \\ 1 & I_{32} \end{bmatrix}}_{X} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{0} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{0} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & I_{12} \\ 1 & I_{22} \\ 1 & I_{32} \end{bmatrix}}_{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{1-\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{\pi_1} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{1-\beta} \\ \frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{\pi_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\frac{1}{1-\beta} \\ \varepsilon_{21}\frac{1}{1-\beta} \\ \varepsilon_{31}\frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{v_1} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\frac{1}{1-\beta} \\ \varepsilon_{21}\frac{1}{1-\beta} \\ \varepsilon_{31}\frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix}}_{v_2} \end{bmatrix} \tag{3.43.}$$

biçimde yazılır. (3.42.) denklemine göre eşitlik (3.43.)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{3.44.}$$

olur. Eşitlik (3.44.) ten,

$$y_1 = X\pi_1 + v_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & I_2 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{21} \end{bmatrix}}_{\pi_1} + v_1 = \pi_{11} + I_2\pi_{21} + v_1 \tag{3.45.}$$

$$y_2 = X\pi_2 + v_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & I_2 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \pi_{12} \\ \pi_{22} \end{bmatrix}}_{\pi_2} + v_2 = \pi_{12} + I_2\pi_{22} + v_2 \tag{3.46.}$$

denklemleri elde edilir. Dikkat edilirse, (3.45.) denklemindeki indirgenmiş form katsayıları ile eşitlik (3.38.) deki Π matrisinin birinci kolonundaki indirgenmiş form katsayılar birbirine eşittir. Aynı şekilde, (3.46.) denklemindeki indirgenmiş form katsayıları ile eşitlik (3.38.) deki Π matrisinin ikinci kolonundaki indirgenmiş form katsayıları birbirine eşittir.

3.3.5. İndirgenmiş Formun En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

(3.42.) denklemine göre indirgenmiş formun m-inci denklemi

$$y_m = X\pi_m + v_m\,,\ (m = 1,...,M)$$

idi. Buradan, π_m in EKK tahmin edicisi $\hat{\pi}_m$

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_m &= \left(X'X\right)^{-1}X'y_m \\ &= \left(X'X\right)^{-1}X'\left(X\pi_m + v_m\right) \\ &= \pi_m + \left(X'X\right)^{-1}X'v_m\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}E\left[\hat{\pi}_m\right] &= E\left[\pi_m + \left(X'X\right)^{-1}X'v_m\right] \\ &= \pi_m + E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'v_m\right] \\ &= \pi_m\end{aligned} \qquad (3.47.)$$

olur. Eşitlik (3.47.) de $E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'v_m\right]=0$ dır. Yapısal model varsayımı (3.28.) e göre önceden belirlenmiş değişkenler $\left(X\right)$ ile indirgenmiş form hata terimleri $\left(v_m\right)$ arasında bir korelasyon yoktur. O halde, π_m nin EKK tahmin edicisi $\hat{\pi}_m$ in yansız tahmin edicisidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} p\lim\hat{\pi}_m &= p\lim\left(\pi_m+\left(X'X\right)^{-1}X'v_m\right) \\ &= \pi_m+\left(p\lim\frac{X'X}{T}\right)^{-1}p\lim\frac{X'v_m}{T} \\ &= \pi_m+\Sigma_{XX}^{-1}.0 \\ &= \pi_m \end{aligned}$$

olduğundan π_m nin EKK tahmin edicisi $\hat{\pi}_m$, tutarlı bir tahmin edicidir.

3.4. Eşanlı Bir Denklem Sisteminde Herhangi Bir Denklemi Parçalı Matrisler Yardımıyla Yazma

Yapısal model (3.8.) in 1-inci denklemi (3.9.)

$$y_{t1} = y_{t1}\beta_{11} + y_{t2}\beta_{21} + \cdots + y_{tM}\beta_{M1} + x_{t1}\gamma_{11} + x_{t2}\gamma_{21} + \cdots + x_{tK}\gamma_{K1} + \varepsilon_{t1}$$

şeklinde idi. 1-inci denklem $t=1,2,...,T$ için daha açık bir şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{11} &= y_{11}\beta_{11} + y_{12}\beta_{21} + \cdots + y_{1M}\beta_{M1} + x_{11}\gamma_{11} + x_{12}\gamma_{21} + \cdots + x_{1K}\gamma_{K1} + \varepsilon_{11} \\ y_{21} &= y_{21}\beta_{11} + y_{22}\beta_{21} + \cdots + y_{2M}\beta_{M1} + x_{21}\gamma_{11} + x_{22}\gamma_{21} + \cdots + x_{2K}\gamma_{K1} + \varepsilon_{21} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_{T1} &= y_{T1}\beta_{11} + y_{T2}\beta_{21} + \cdots + y_{TM}\beta_{M1} + x_{T1}\gamma_{11} + x_{T2}\gamma_{21} + \cdots + x_{TK}\gamma_{K1} + \varepsilon_{T1} \end{aligned} \qquad (3.48.)$$

olur. Denklem sistemi (3.48.), $t=1,2,...,T$ için matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{T1} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & y_{T2} & \cdots & y_{TM} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{M1} \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{K1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{T1} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1} \quad (3.49.)$$

olur. O halde, eşitlik (3.49.)

$$y_1 = YB_1 + X\Gamma_1 + \varepsilon_1 \quad (3.50.)$$

$$= Y_1\beta_1 + Y_2\beta_2 + X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \varepsilon_1 \quad (3.51.)$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (3.51.), (3.50.) nin parçalı matris formunda yazılmış halidir. Y ve X matrislerinin yapısal model (3.8.) in 1-inci deklemine göre parçalanmış şekli

$$Y = \left[y_1 \ \vdots \ Y_1 \ \vdots \ Y_2 \right] = \left[y_1 \ \vdots \ y_{*2} \ \ldots \ y_{*m_1} \ \vdots \ y_{*m_1+1} \ \ y_{*m_2+1} \ \ldots \ y_{*M} \right]$$

$$X = \left[X_1 \ \vdots \ X_2 \right] = \left[x_{*1} \ \ x_{*2} \ \ \ldots \ \ x_{*k_1} \ \vdots \ x_{*k_1+1} \ \ x_{*k_2+1} \ \ \ldots \ \ x_{*K} \right]$$

dir. Eşitlik (3.51.) için,

$y : Tx1$ tipinde Y matrisinin 1-inci sütun vektörüdür.

$Y_1 = \left(y_{*2}, \ \ldots, \ y_{*m_1}, \ y_{*m_1+1} \right)$, 1-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olmayan m_1 tane endojen değişkenler içerir. $Y_1 : Txm_1$ tipinde matristir.

$Y_2 = \left(y_{*m_1+2}, \ \ldots, \ y_{*M} \right)$, 1-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olan m_2 tane endojen değişkenler içerir. $Y_2 = Txm_2$ tipinde matristir.

$X_1 = \left(x_{*1}, \ x_{*2}, \ \ldots, \ x_{*k_1} \right)$, 1-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olmayan k_1 tane önceden belirlenmiş değişkenler içerir. $X_1 : Txk_1$ tipinde matristir.

$X_2 = \left(x_{*k_1+1}, \ x_{*k_2+1}, \ \ldots, \ x_{*K} \right)$, 1-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olan k_2 tane önceden belirlenmiş değişkenler içerir. $X_2 : Txk_2$ tipinde matristir.

$\beta_1 = \left(\beta_{*11}, \ \beta_{*21}, \ \ldots, \ \beta_{*m1} \right)'$, 1-inci denklemde değeri sıfır olmayan m_1 tane endojen değişkenin yapısal katsayısıdır. $\beta_1 : m_1 x1$ tipinde vektördür.

$\beta_2 = \left(0, \ 0, \ \ldots, \ 0 \right)'$, 1-inci denklemde değeri sıfır olan m_2 tane endojen değişkenin yapısal katsayılarıdır. $\beta_2 : m_2 x1$ tipinde vektördür.

$\gamma_1 = \left(\gamma_{*11}, \ \gamma_{*21}, \ \ldots, \ \gamma_{*k1} \right)'$, 1-inci denklemde değeri sıfır olmayan k_1 tane önceden belirlenmiş değişkenin yapısal katsayısıdır. $\gamma_1 : k_1 x1$ tipinde vektördür.

$\gamma_2 = \left(0, \ 0, \ \ldots, \ 0 \right)'$, 1--inci denklemde değeri sıfır olan k_2 tane önceden belirlenmiş değişkenin yapısal katsayısıdır. $\gamma_2 : k_2 x1$ tipinde vektördür.

ε_1, 0 ortalamalı ve $\sigma_1^2 I$ varyanslı hata terimidir. $\varepsilon_1 : Tx1$ tipinde vektördür. Ayrıca, $1 + m_1 + m_2 = M$ ve $k_1 + k_2 = K$ dır.

Y_2 ve X_2, yapısal model (3.8.) in 1-inci denkleminde var olmayan değişkenleri temsil eder. Dolayısıyla, β_2 ve γ_2 sıfır vektörleridir. O halde, 1-inci yapısal denklem (3.51.)

$$y_1 = Y_1 \beta_1 + X_1 \gamma_1 + \varepsilon_1$$

$$= \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \,,\; Z_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \delta_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$= Z_1 \delta_1 + \varepsilon_1$$

biçiminde yazılır. Yapısal model (3.8.) in m-inci denklemi

$$y_{tm} = y_{t1}\beta_{1m} + y_{t2}\beta_{2m} + \cdots + y_{tM}\beta_{Mm} + x_{t1}\gamma_{1m} + x_{t2}\gamma_{2m} + \cdots + x_{tK}\gamma_{Km} + \varepsilon_{tm}$$

dir. m-inci denklem $t = 1,2,...,T$ için daha açık bir şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned}
y_{1m} &= y_{11}\beta_{1m} + y_{12}\beta_{2m} + \cdots + y_{1M}\beta_{Mm} + x_{11}\gamma_{1m} + x_{12}\gamma_{2m} + \cdots + x_{1K}\gamma_{Km} + \varepsilon_{1m} \\
y_{2m} &= y_{21}\beta_{1m} + y_{22}\beta_{2m} + \cdots + y_{2M}\beta_{Mm} + x_{21}\gamma_{1m} + x_{22}\gamma_{2m} + \cdots + x_{2K}\gamma_{Km} + \varepsilon_{2m} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
y_{Tm} &= y_{T1}\beta_{1m} + y_{T2}\beta_{2m} + \cdots + y_{TM}\beta_{Mm} + x_{T1}\gamma_{1m} + x_{T2}\gamma_{2m} + \cdots + x_{TK}\gamma_{Km} + \varepsilon_{Tm}
\end{aligned} \tag{3.52.}$$

olur. Denklem sistemi (3.52.), $t = 1,2,...,T$ için matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1m} \\ y_{2m} \\ \vdots \\ y_{Tm} \end{bmatrix}}_{y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & y_{T2} & \cdots & y_{TM} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{1m} \\ \beta_{2m} \\ \vdots \\ \beta_{Mm} \end{bmatrix}}_{B_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{1m} \\ \gamma_{2m} \\ \vdots \\ \gamma_{Km} \end{bmatrix}}_{\Gamma_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{2m} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Tm} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_m} \tag{3.53.}$$

olur. O halde, eşitlik (3.53.)

$$y_m = YB_m + X\Gamma_m + \varepsilon_m \tag{3.54.}$$

$$= Y_1\beta_1 + Y_2\beta_2 + X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \varepsilon_m \qquad (3.55.)$$

olur. Eşitlik (3.55.), (3.54.) ün parçalı matris formunda yazılmış halidir. Y ve X matrislerinin yapısal model (3.8.) in m-inci deklemine göre parçalanmış şekli

$$Y = \left[y_m \;\vdots\; Y_1 \;\vdots\; Y_2 \right] = \left[y_m \;\vdots\; y_{*2} \;\ldots\; y_{*m_1} \;\vdots\; y_{*m_1+1} \;\; y_{*m_2+1} \;\ldots\; y_{*M} \right]$$

$$X = \left[X_1 \;\vdots\; X_2 \right] = \left[x_{*1} \;\; x_{*2} \;\ldots\; x_{*k_1} \;\vdots\; x_{*k_1+1} \;\; x_{*k_2+1} \;\ldots\; x_{*K} \right]$$

$y_m : T \times 1$ tipinde Y matrisinin m-inci sütun vektörüdür.

$Y_1 = \left(y_{*2}, \ldots, y_{*m_1}, y_{*m_1+1} \right)$, m-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olmayan m_1 tane endojen değişkenler içerir. $Y_1 : Txm_1$ tipinde matristir.

$Y_2 = \left(y_{*m_1+2}, \ldots, y_{*M} \right)$, m-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olan m_2 tane endojen değişkenler içerir. $Y_2 = Txm_2$ tipinde matristir.

$X_1 = \left(x_{*1}, x_{*2}, \ldots, x_{*k_1} \right)$, m-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olmayan k_1 tane önceden belirlenmiş değişkenler içerir. $X_1 : Txk_1$ tipinde matristir.

$X_2 = \left(x_{*k_1+1}, x_{*k_2+1}, \ldots, x_{*K} \right)$, m-inci denklem yapısal katsayıları sıfır olan k_2 tane önceden belirlenmiş değişkenler içerir. $X_2 : Txk_2$ tipinde matristir.

$\beta_1 = \left(\beta_{*11}, \beta_{*21}, \ldots, \beta_{*m1} \right)'$, m-inci denklemde değeri sıfır olmayan m_1 tane endojen değişkenin yapısal katsayısıdır. $\beta_1 : m_1 x1$ tipinde vektördür.

$\beta_2 = \left(0, 0, \ldots, 0 \right)'$, m-inci denklemde değeri sıfır olan m_2 tane endojen değişkenin yapısal katsayısıdır. $\beta_2 : m_2 x1$ tipinde vektördür.

$\gamma_1 = (\gamma_{*11},\ \gamma_{*21},\ \ldots,\ \gamma_{*k1})'$, m-inci denklemde değeri sıfır olmayan k_1 tane önceden belirlenmiş değişkenin yapısal katsayısıdır. $\gamma_1 : k_1 x 1$ tipinde vektördür.

$\gamma_2 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)'$, m-inci denklemde değeri sıfır olan k_2 tane önceden belirlenmiş değişkenin yapısal katsayısıdır. $\gamma_2 : k_2 x 1$ tipinde vektördür.

ε_m , 0 ortalamalı ve $\sigma_m^2 I$ varyanslı hata terimidir. $\varepsilon_m : Tx1$ tipinde, ε matrisinin m-inci sütun vektördür.

Y_2 ve X_2, yapısal model (3.8.) in m-inci denkleminde var olmayan değişkenleri temsil eder. Dolayısıyla, β_2 ve γ_2 sıfır vektörleridir. O halde, m-inci yapısal denklem (3.55.)

$$
\begin{aligned}
y_m &= Y_1\beta_1 + X_1\gamma_1 + \varepsilon_m \\
&= \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 ,\ Z_m = \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \delta_m = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \\
&= Z_m\delta_m + \varepsilon_m
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılır.

Örnek 3.4.1. Örnek 3.2.1. de iki denklemli basit Keynesian modelinde eşitlik (3.15.) için β_{jm} ler ve γ_{im} lerin nin 1-inci sütunu alınırsa, $T = 3$ tane gözlemin hepsi için 1-inci yapısal denklem parçalı matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{Y_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{Y_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{Y_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} \\ \underbrace{\beta}_{\beta_{21}} \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{I_{12}}_{x_{12}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{I_{22}}_{x_{22}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{I_{32}}_{x_{32}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

Buradan,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{C_{11}}_{y_{11}} \\ \underbrace{C_{21}}_{y_{21}} \\ \underbrace{C_{31}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_1} = \begin{bmatrix} Y_{12} & \vdots & C_{11} \\ Y_{22} & \vdots & C_{21} \\ Y_{32} & \vdots & C_{31} \\ Y_1 & & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta_1 \\ \cdots \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \vdots & I_{21} \\ 1 & \vdots & I_{22} \\ 1 & \vdots & I_{32} \\ X_1 & & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \cdots \\ 0 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{bmatrix}}_{Y_1} \underbrace{[\beta]}_{\beta_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}_{Y_2} \underbrace{[0]}_{\beta_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_1} \underbrace{[\alpha]}_{\gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{22} \\ I_{32} \end{bmatrix}}_{X_2} \underbrace{[0]}_{\gamma_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{bmatrix}}_{Y_1} \underbrace{[\beta]}_{\beta_1} + + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_1} \underbrace{[\alpha]}_{\gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{12} & \vdots & 1 \\ Y_{22} & \vdots & 1 \\ Y_{32} & \vdots & 1 \\ Y_1 & & X_1 \end{bmatrix}}_{Z_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \alpha \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\delta_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$y_1 = Z_1\delta_1 + \varepsilon_1$$

dir.

Örnek 3.4.2. Örnek 3.2.2. de piyasa denge modelinde eşitlik (3.25.) için β_{jm} ler ve γ_{im} lerin nin 1-inci sütunu alınırsa, $T = 3$ tane gözlemin hepsi için 1-inci yapısal denklem parçalı matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} & \underbrace{P_{12}}_{y_{12}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} & \underbrace{P_{22}}_{y_{22}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} & \underbrace{P_{32}}_{y_{32}} \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\beta_{11}} \\ \underbrace{\alpha_1}_{\beta_{21}} \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{x_{11}} & \underbrace{P_{(1-1)2}}_{x_{12}} & \underbrace{Y_{13}}_{x_{13}} \\ \underbrace{1}_{x_{21}} & \underbrace{P_{(2-1)2}}_{x_{22}} & \underbrace{Y_{23}}_{x_{23}} \\ \underbrace{1}_{x_{31}} & \underbrace{P_{(3-1)2}}_{x_{32}} & \underbrace{Y_{33}}_{x_{33}} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha_0}_{\gamma_{11}} \\ \underbrace{\alpha_2}_{\gamma_{21}} \\ \underbrace{0}_{\gamma_{31}} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

Buradan,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{Q_{11}}_{y_{11}} \\ \underbrace{Q_{21}}_{y_{21}} \\ \underbrace{Q_{31}}_{y_{31}} \end{bmatrix}}_{y_1} = \begin{bmatrix} P_{12} & \vdots & Q_{11} \\ P_{22} & \vdots & Q_{21} \\ \underline{P_{32}} & \vdots & \underline{Q_{31}} \\ Y_1 & & Y_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\alpha_1} \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \underline{0} \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & P_{(1-1)2} & \vdots & Y_{13} \\ 1 & P_{(2-1)2} & \vdots & Y_{23} \\ 1 & P_{(3-1)2} & \vdots & Y_{33} \end{bmatrix}}_{X_1 \qquad X_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \underline{\alpha_2} \\ \gamma_1 \\ \cdots \\ \underline{0} \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}}_{Y_1} \underbrace{[\alpha_1]}_{\beta_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix}}_{Y_2} \underbrace{[0]}_{\beta_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & P_{(1-1)2} \\ 1 & P_{(2-1)2} \\ 1 & P_{(3-1)2} \end{bmatrix}}_{X_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{bmatrix}}_{X_2} \underbrace{[0]}_{\gamma_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}}_{Y_1} \underbrace{[\alpha_1]}_{\beta_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & P_{(1-1)2} \\ 1 & P_{(2-1)2} \\ 1 & P_{(3-1)2} \end{bmatrix}}_{X_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & \vdots & 1 & P_{(1-1)2} \\ P_{21} & \vdots & 1 & P_{(2-1)2} \\ P_{31} & \vdots & 1 & P_{(3-1)2} \end{bmatrix}}_{Z_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\alpha_1} \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \alpha_0 \\ \underline{\alpha_2} \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\delta_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1}$$

$$y_1 = Z_1 \delta_1 + \varepsilon_1$$

3.5. Eşanlı Bir Denklem Sisteminde Herhangi Bir Denklemin Yapısal Katsayı Parametrelerinin EKK Tahmin Edicilerinin Yanlılığı ve Tutarsızlığı

1930'larda ekonometristlerin istatistiksel bir modelin parametre tahmini için en küçük kareler veya maximum likelihood yöntemlerinden başka bir metodu kullanma alternatifleri yoktu. Bu durum ekonometristleri rahatsız ediyordu. Çünkü kullandıkları yöntemlerin birçok istatistiksel modelle uyumlu olmadığının farkında idiler (Judge, 1988). Uyumsuzluğun sebebi, eşanlı denklem sistemine ait herhangi bir denklemin sağ tarafında yer alan bir veya birden fazla endojen değişkenin hata terimi ile ilişkili olmasıdır. Bu yüzden, denklemin yapısal katsayı paremetreleri EKK yöntemi ile tahmin edilirse, tahmin ediciler yansız ve tutarlı olamaz.

Eşanlı denklem sistemlerinde herhangi bir denklemde EKK yöntemi kullanılarak elde edilen parametre tahminlerinin yansız ve tutarsız olması durumuna "en küçük kareler yanlılığı" denir.

En küçük kareler yanlılığının varlığı yapısal model (3.8.) in 1-inci denklemi ile aşağıdaki gibi açıklanabilir:

Yapısal model (3.8.) in 1-inci denkleminin parçalı matrislerle gösterimi

$$
\begin{aligned}
y_1 &= Y_1\beta_1 + Y_2\beta_2 + X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \varepsilon_1 \\
&= Y_1\beta_1 + X_1\gamma_1 + \varepsilon_1 \\
&= \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \\
&= Z_1\delta_1 + \varepsilon_1
\end{aligned}
$$

idi. Buradan, $Z_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & \vdots & X_1 \end{bmatrix}$ ve $\delta_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$ olmak üzere δ_1 in EKK tahmin edicisi

$$\hat{\delta}_1 = \left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 y_1 \tag{3.56.}$$

dir. $\hat{\delta}_1$ in beklenen değeri

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\delta}_1\right] = E\left[\left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 y_1\right] &= \left[\left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 \left(Z_1\delta_1 + \varepsilon_1\right)\right] \\ &= \delta_1 + E\left[\left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 \varepsilon_1\right] \\ &\neq \delta_1 \end{aligned} \tag{3.57.}$$

dir. Dikkat edilirse, eşitlik (3.57.) de $E\left[\left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 \varepsilon_1\right] \neq 0$. Çünkü, Z_1 endojen değişkenler $\left(Y_1\right)$ içerir ve endojen değişkenlerin hata terimleri $\left(\varepsilon_1\right)$ ile aralarında korelasyon vardır. O halde, δ_1 in EKK tahmin edicisi , $\hat{\delta}_1$ yansız tahmin edici değildir. İndirgenmiş form matrisi (3.36.)

$$Y = X\Pi + V$$

idi.

$$Y = \left[y_1 \;\vdots\; Y_1 \;\vdots\; Y_2\right]$$

$$X = \left[X_1 \;\vdots\; X_2\right]$$

$$V = \left[v_1 \;\vdots\; V_1 \;\vdots\; V_2\right]$$

$$\Pi = \left[\pi_1 \;\vdots\; \Pi_1 \;\vdots\; \Pi_2\right] = \begin{bmatrix} \pi_{*1} & \vdots & \Pi_{11} & \vdots & \Pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{*2} & \vdots & \Pi_{21} & \vdots & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

ve

$\pi_{*1} : k_1 x 1$, $\pi_{*2} = k_2 x 1$ tipinde vektörler

$\Pi_{11} : k_1 x m_1$, $\Pi_{21} : k_2 x m_1$, $\Pi_{12} : k_1 x m_2$, $\Pi_{22} : k_2 x m_2$ tipinde matrisler

$v_1 : Tx1$ tipinde vektör, $V_1 : Txm_1$ ve $V_2 : Txm_2$ tipinde matrisler

olmak üzere, indirgenmiş form (3.36.) nın 1-inci yapısal denkleme karşılık gelecek şekilde parçalı matris olarak gösterimi

$$\begin{bmatrix} y_1 & \vdots & Y_1 & \vdots & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{*1} & \vdots & \Pi_{11} & \vdots & \Pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{*2} & \vdots & \Pi_{21} & \vdots & \Pi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & \vdots & V_1 & \vdots & V_2 \end{bmatrix} \tag{3.58.}$$

biçimindedir (Toutenburg, 1982). Buradan,

$$\begin{aligned} y_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{*1} \\ \cdots \\ \pi_{*2} \end{bmatrix} + v_1 = X\pi_1 + v_1 \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \cdots \\ \Pi_{21} \end{bmatrix} + V_1 = X\Pi_1 + V_1 \\ Y_2 &= \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{12} \\ \cdots \\ \Pi_{22} \end{bmatrix} + V_2 = X\Pi_2 + V_2 \end{aligned} \tag{3.59.}$$

dir. Örneklem sayısı sonsuza doğru arttıkça, eşitlik (3.56.) daki δ_1 in EKK tahmin edicisi $\hat{\delta}_1$ nın tutarsızlığı aşağıdaki gibi gösterilir (Drhymes, 1970):

$$\hat{\delta}_1 = \left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 y_1$$
$$= \left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 \left(Z_1 \delta_1 + \varepsilon_1\right)$$
$$= \delta_1 + \left(Z'_1 Z_1\right)^{-1} Z'_1 \varepsilon_1$$

Buradan,

$$p\lim \hat{\delta}_1 = \delta_1 + \left(p\lim \left(\frac{Z'_1 Z_1}{T} \right) \right)^{-1} p\lim \frac{Z'_1 \varepsilon_1}{T}$$

$$= \delta_1 + \left(p\lim \begin{bmatrix} \frac{Y'_1 Y_1}{T} & \vdots & \frac{Y'_1 X_1}{T} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{X'_1 Y_1}{T} & \vdots & \frac{X'_1 X_1}{T} \end{bmatrix} \right)^{-1} p\lim \begin{bmatrix} \frac{Y'_1 \varepsilon_1}{T} \\ \cdots \\ \frac{X'_1 \varepsilon_1}{T} \end{bmatrix} \qquad (3.60.)$$

Eşitlik (3.59.) dan

$$Y_1 = X \Pi_1 + V_1$$

idi. Π_1 , Π matrisinin 2-nci, 3-inci,..., $\left(m_1 + 1\right)$-inci sütunlarını içerir. Benzer şekilde

$$V_1 = \varepsilon D_1$$

dir ve D_1 , $D = \left(I - B\right)^{-1}$ matrisinin 2-nci, 3-inci,..., , $\left(m_1 + 1\right)$-inci sütunlarını içerir (Dhrymes, 1970). Eşitlik (3.60) ta

$$p\lim\frac{Y_1'Y_1}{T} = p\lim\Pi_1'\frac{X'X}{T}\Pi_1 + p\lim\frac{V_1'X}{T}\Pi_1 + p\lim\Pi_1'\frac{X'V_1}{T} + p\lim D_1'\frac{\varepsilon'\varepsilon}{T}D_1 \quad (3.61.)$$

$$= \Pi_1'\Sigma_{XX}\Pi_1 + 0\Pi_1 + \Pi_1'0 + D_1'\Sigma D_1$$

$$= \Pi_1'\Sigma_{XX}\Pi_1 + D_1'\Sigma D_1 \quad (3.62.)$$

dir. Eşitlik (3.61.) de önceden belirlenmiş değişkenler ile indirgenmiş form hata terimleri arasında korelasyon yoktur. Ayrıca yapısal model varsayımı (3.26.) dan $p\lim\frac{\varepsilon'\varepsilon}{T} = \Sigma$ ve yapısal model varsayımı (3.27.) den $p\lim\frac{X'X}{T} = \Sigma_{XX}$ dir.

Yapısal model varsayımı (3.27.) ye göre,

$$p\lim\frac{X'X}{T} = \Sigma_{XX}$$

idi. $X = \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$p\lim\frac{X'X}{T} = p\lim\begin{bmatrix} \frac{X'_1X_1}{T} & \vdots & \frac{X'_1X_2}{T} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{X'_2X_1}{T} & \vdots & \frac{X'_2X_2}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^*_{11} & \vdots & \sigma^*_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \sigma^*_{21} & \vdots & \sigma^*_{22} \end{bmatrix} = \Sigma_{XX}$$

dir.

$$p\lim\frac{Y'_1X_1}{T} = p\lim\left(\Pi_1'\frac{X'X_1}{T} + \frac{V'_1X_1}{T}\right) \quad (3.63.)$$

Eşitlik (3.63) te, V_1 indirgenmiş form hata terimlerini ve X_1 önceden belirlenmiş değişkenleri içerir. İndirgenmiş form varsayımı (3.40.) a göre indirgenmiş form hata terimleri ile önceden belirlenmiş değişkenler arasında korelasyon yoktur. Bu yüzden, eşitlik (3.63.)

$$p\lim\frac{Y_1'X_1}{T}=\Pi_1'\begin{bmatrix}\sigma^*_{11}\\ \cdots\\ \sigma^*_{21}\end{bmatrix}+0$$

$$=\Pi_1'\begin{bmatrix}\sigma^*_{11}\\ \cdots\\ \sigma^*_{21}\end{bmatrix} \qquad (3.64.)$$

dir. Aynı şekilde,

$$p\lim\frac{X_1'Y_1}{T}=p\lim\left(\frac{X_1'X}{T}\Pi_1+\frac{X_1'V_1}{T}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma^*_{11} & \vdots & \sigma^*_{12}\end{bmatrix}\Pi_1+0$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma^*_{11} & \vdots & \sigma^*_{12}\end{bmatrix}\Pi_1 \qquad (3.65.)$$

dir.

$$p\lim\frac{X_1'X_1}{T}=\sigma^*_{11} \qquad (3.66.)$$

ve

$$p\lim\frac{Y_1'\varepsilon_1}{T}=p\lim\left(\Pi_1'\frac{X'\varepsilon_1}{T}+\frac{V_1'\varepsilon_1}{T}\right)$$

$$= p\lim \Pi_1^{'} \frac{X^{'}\varepsilon_1}{T} + p\lim D_1^{'} \frac{\varepsilon^{'}\varepsilon_1}{T} \tag{3.67.}$$

dir. Yapısal model varsayımı (3.29.) a göre önceden belirlenmiş değişkenler ile hata terimleri arasında korelasyon yoktur. Ayrıca, σ_1, Σ nın 1-inci sütunudur. Buradan, eşitlik (3.67.)

$$\begin{aligned} p\lim \frac{Y^{'}_1\varepsilon_1}{T} &= 0 + D^{'}_1\sigma_1 \\ &= D_1^{'}\sigma_1 \end{aligned} \tag{3.68.}$$

olur. Ayrıca,

$$p\lim \frac{X^{'}_1\varepsilon_1}{T} = 0 \tag{3.69.}$$

dır. Eşitlik (3.60.) ta, eşitlik (3.62.), (3.64.), (3.65.), (3.66.), (3.68.), (3.69.) yerine yazılırsa

$$p\lim \hat{\delta}_1 = \delta_1 + \begin{bmatrix} \Pi^{'}_1\Sigma_{XX}\Pi_1 + D^{'}_1\Sigma D_1 & \vdots & \Pi^{'}_1\begin{pmatrix}\sigma^{*}_{11}\\ \sigma^{*}_{21}\end{pmatrix} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \begin{pmatrix}\sigma^{*}_{11} & \sigma^{*}_{12}\end{pmatrix}\Pi_1 & \vdots & \sigma^{*}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D^{'}_1\sigma_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.70.}$$

dır. Eşitlik (3.70.) te

$$\begin{bmatrix} \Pi_1'\Sigma_{XX}\Pi_1 + D_1'\Sigma D_1 & \vdots & \Pi_1'\begin{pmatrix}\sigma^*_{11}\\ \sigma^*_{21}\end{pmatrix} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \begin{pmatrix}\sigma^*_{11} & \sigma^*_{12}\end{pmatrix}\Pi_1 & \vdots & \sigma^*_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1'\sigma_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

olduğundan

$$p\lim\hat{\delta}_1 \neq \delta_1 \qquad (3.71.)$$

olur. Eşitlik (3.71.) den, δ_1 in EKK tahmin edicisi $\hat{\delta}_1$ tutarsızdır. Bu durum bir örnekle açıklanacaktır.

Örnek 3.5.1. Örnek 3.1.1. de iki denklemli basit Keynesian modeli

$C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t}$	$0 < \beta < 1$	Tüketim Fonksiyonu
$Y_t = C_t + I_t$	$(t = 1,\ldots,T)$	Milli Gelir Özdeşliği

idi. Burada β , ek bir dolar gelirden kaynaklanan ek tüketim harcaması miktarıdır. İktisat kuramına göre β nın 0 ile 1 arasında olması beklenir (Gujarati, 2012).

t zaman olmak üzere iki denklemli basit Keynesian modelinin 1-inci denklemini temsil eden tüketim fonksiyonu için doğrusal regresyon varsayımlarının geçerli olduğu düşünülsün. Buna göre:

1. $E[\varepsilon_{1t}] = 0$, ε_{1t} nin ortalaması yani beklenen değeri sıfırdır.

2. $E\left[\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1t}^{'}\right]=E\left\{\left[\varepsilon_{1t}-E\left[\varepsilon_{1t}\right]\right]^2\right\}=E\left[\varepsilon_{1t}^2\right]=\sigma^2$, ε_{1t} nin sabit varyansıdır. Pozitif değerlidir.

3. $E\left[\varepsilon_{1t}\ \varepsilon_{1t'}\right]=0$, $t\neq t^{'}$ ve $\left(t,t^{'}=1,...,T\right)$, t ile $t^{'}$ burada iki farklı gözlemi göstermektedir. Yani hata terimleri arasında ardışık korelasyon yoktur.

4. $E\left[I_t\ \varepsilon_{1t'}\right]=E\left\{\left[I_t\ -E\left[\varepsilon_{1t'}\right]\right]\left[\varepsilon_{1t'}-E\left[\varepsilon_{1t'}\right]\right]\right\}=0$, $\left(t,t^{'}=1,...,T\right)$, I_t ve $\varepsilon_{1t'}$ nün kovaryansı sıfırdır.

Y_t endojen değişkenler olduğu için Y_t ile ε_{1t} arasında bir korelasyon olması gerekir. Bu durumu kanıtlamak için aşağıdaki yol izlenir:

İki denklemli basit Keynesian modelinin indirgenmiş form denklemleri (3.31.) ve (3.32.) den

$$C_t=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta}{1-\beta}I_t+\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}$$

$$Y_t=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}I_t+\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}$$

idi. İndirgenmiş form denklemi (3.32.) de Y_t nin beklenen değeri

$$\begin{aligned}E\left[Y_t\right]&=E\left[\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}I_t+\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}\right]\\&=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}E\left[I_t\right]+\frac{1}{1-\beta}E\left[\varepsilon_{1t}\right]\\&=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}I_t\end{aligned}\qquad(3.72.)$$

dir. Gujarati (2012), I_t egzojen değişken olduğu için $E[I_t]=I_t$, $E[\varepsilon_{1t}]=0$ ve sabit katsayıların beklenen değerleri kendisidir. İndirgenmiş form denklemi (3.32.) deki Y_t nin değeri, eşitlik (3.72.) deki $E[Y_t]$ nin değerinden çıkarılırsa

$$Y_t - E[Y_{1t}] = \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t} \tag{3.73.}$$

$$\varepsilon_{1t} - E[\varepsilon_{1t}] = \varepsilon_{1t} \tag{3.74.}$$

olur. (3.73.) ve (3.74.) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} E[Y_t\varepsilon_t] &= E\left\{\left[Y_t - E[Y_t]\right]\left[\varepsilon_{1t} - E[\varepsilon_{1t}]\right]\right\} \\ &= E\left\{\left[\frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1t}\right]\left[\varepsilon_{1t}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{1-\beta}E\left[\varepsilon_{1t}^2\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\beta} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.75.}$$

bulunur. Linear regresyon varsayımlarına göre σ^2 pozitiftir ve $0<\beta<1$ olduğundan eşitlik (3.75.) sıfırdan farklı olur. Yani, Y_t ile hata terimi ε_{1t} arasında korelasyon vardır. Bu yüzden, β nın EKK tahmin edicisi $\hat{\beta}$ tutarsız olacaktır. Bu tutarsızlığı göstermek için öncelikle iki denklemli basit Kynesian modelinin ilk denkleminde yer alan α ve β nın en küçük kareler tahmin edicilerinin bulunması gerekir.

EKK yönteminde amaç, gözlem noktaları için temsili bir doğru çizmek ve bu noktaların çizilen doğruya olan uzaklıklarının kareleri toplamını minimum olacak şekilde parametre tahmini yapmaktır. Buradan,

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left(\varepsilon_{1t}\right)^2 = \sum_{t=1}^{T} \left(C_t - \alpha - \beta Y_t\right)^2 \tag{3.76.}$$

dir. Eşitlik (3.76.) nın α ve β ya göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} \left(C_t - \alpha - \beta Y_t\right)^2}{\partial \alpha} = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^{T} \left(C_t - \alpha - \beta Y_t\right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} C_t - T\alpha - \beta \sum_{t=1}^{T} Y_t = 0 \tag{3.77}$$

ve

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} \left(C_t - \alpha - \beta Y_t\right)^2}{\partial \beta} = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^{T} \left(C_t - \alpha - \beta Y_t\right) Y_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t - \alpha \sum_{t=1}^{T} Y_t - \beta \sum_{t=1}^{T} Y_t^2 = 0 \tag{3.78.}$$

dır. Eşitlik (3.77.) ve eşitlik (3.78.) den,

$$\sum_{t=1}^{T} C_t = T\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t$$

$$\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t = \hat{\alpha}\sum_{t=1}^{T} Y_t + \hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t^2 \qquad (3.79.)$$

olur. (3.79.) daki denklem sistemine normal denklemleri denir. Normal denklemlerinin birincisinden,

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t - \hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T} \qquad (3.80.)$$

dir. Eşitlik (3.80.) deki $\hat{\alpha}$ nın değeri, normal denklemlerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t = \left(\frac{\sum_{t=1}^{T} C_t - \hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T} \right) \sum_{t=1}^{T} Y_t + \hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t^2$$

$$T\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t = \sum_{t=1}^{T} C_t \sum_{t=1}^{T} Y_t - \hat{\beta}\left(\sum_{t=1}^{T} Y_t \right)^2 + T\hat{\beta}\sum_{t=1}^{T} Y_t^2$$

olur. $\hat{\beta}$ katsayılı ifadeler eşitliğin sağına diğer ifadeler eşitliğin soluna yazılırsa,

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{t=1}^{T} C_t \sum_{t=1}^{T} Y_t - T \sum_{t=1}^{T} C_t Y_t}{\left(\sum_{t=1}^{T} Y_t\right)^2 - T \sum_{t=1}^{T} Y_t^2}, \quad \sum_{t=1}^{T} Y_t = T\bar{Y}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t T\bar{Y} - T\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t}{\left(T\bar{Y}\right)^2 - T\sum_{t=1}^{T} Y_t^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t T\bar{Y} - T\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t}{T^2\bar{Y}^2 - T\sum_{t=1}^{T} Y_t^2} \qquad (3.81.)$$

dir. Eşitlik (3.81.) de pay ve payda T parantezine alınırsa,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t \bar{Y} - \sum_{t=1}^{T} C_t Y_t}{T\bar{Y}^2 - \sum_{t=1}^{T} Y_t^2}$$

olur. Pay ve payda –1 ile çarpılırsa

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t Y_t - \sum_{t=1}^{T} C_t \bar{Y}}{\sum_{t=1}^{T} Y_t^2 - T\bar{Y}^2} \qquad (3.82.)$$

biçiminde yazılır. $\sum_{t=1}^{T} Y_t = T\bar{Y}$ olmak üzere,

$$\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}Y_t^2-2\bar{Y}\sum_{t=1}^{T}Y_t+T\bar{Y}=\sum_{t=1}^{T}Y_t^2-2T\bar{Y}^2+T\bar{Y}^2=\sum_{t=1}^{T}Y_t^2-T\bar{Y}^2$$

olduğundan eşitlik (3.82.) den

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{t=1}^{T}C_t\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2} \tag{3.83.}$$

olur. (3.2.3) denklemindeki C_t nin değeri eşitlik (3.83.) te yerine yazılırsa

$$\hat{\beta}=\frac{\alpha\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)+\beta\sum_{t=1}^{T}Y_t\left(Y_t-\bar{Y}\right)+\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}$$

$$=\frac{\alpha\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}+\frac{\beta\sum_{t=1}^{T}Y_t\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}+\frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2} \tag{3.84.}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (3.84.) te

$$\frac{\alpha\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}=\frac{\alpha\sum_{t=1}^{T}Y_t-T\bar{Y}}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}=\frac{\alpha\left(T\bar{Y}-T\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}=0 \tag{3.85.}$$

ve

$$\frac{\beta\sum_{t=1}^{T} Y_t\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}=\frac{\beta\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-\bar{Y}\sum_{t=1}^{T} Y_t}{\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-2\bar{Y}\sum_{t=1}^{T} Y_t+T\bar{Y}}=\frac{\beta\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-T\bar{Y}^2}{\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-2T\bar{Y}^2+T\bar{Y}^2}$$

$$=\frac{\beta\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-T\bar{Y}^2}{\sum_{t=1}^{T} Y_t^2-T\bar{Y}^2}$$

$$=\beta \qquad (3.86.)$$

dır. O halde, eşitlik (3.84.), (3.85.) ve (3.86.) dan

$$\hat{\beta}=\beta+\frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2} \qquad (3.87.)$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (3.87.) deki β nın EKK tahmin edicisi $\hat{\beta}$ nın, zayıf varsayımlar altında olasılık limiti

$$p\lim\hat{\beta}=p\lim\left(\beta+\frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2}\right) \qquad (3.88.)$$

$$=\beta+\frac{p\lim\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)}{p\lim\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2} \qquad (3.89.)$$

dir. Eşitlik (3.89.) daki pay ve paydanın olasılık limitleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\underbrace{p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{1t}Y_t}_{E\left[\varepsilon_{1t}Y_t\right]}-\bar{Y}\underbrace{p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=}^{T}\varepsilon_{1t}}_{E\left[\varepsilon_{1t}\right]=0}$$

$$=E\left[\varepsilon_{1t}Y_t\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{1-\beta} \qquad (3.90.)$$

σ^2, pozitif değerlidir. Ayrıca,

$$E\left\{\left[Y_t-E\left[Y_t\right]\right]^2\right\}=E\left\{Y_t^2-2Y_tE\left[Y_t\right]+\left(E\left[Y_t\right]\right)^2\right\}$$

$$=E\left[Y_t^2\right]-2E\left[Y_t\right]E\left[Y_t\right]+\left(E\left[Y_t\right]\right)^2$$

$$=E\left[Y_t^2\right]-2\left(E\left[Y_t\right]\right)^2+\left(E\left[Y_t\right]\right)^2$$

$$=E\left[Y_t^2\right]-\left(E\left[Y_t\right]\right)^2=\sigma_y^2$$

için

$$p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)^2=p\lim \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}Y_t^2-2\bar{Y}\underbrace{\sum_{t=1}^{T}Y_t}_{T\bar{Y}}+T\bar{Y}^2\right)$$

$$=p\lim\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t^2-T\bar{Y}^2\right)$$

$$=p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=}^{1}Y_t^2-p\lim \frac{1}{T}T\bar{Y}^2\ ,\ \bar{Y}^2=\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t\right)^2$$

$$= \underbrace{p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{1} Y_t^2}_{E\left[Y_t^2\right]} - \underbrace{\left(p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right)}_{E[Y_t]}\underbrace{\left(p\lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right)}_{E[Y_t]}$$

$$= E\left[Y_t^2\right] - \left(E\left[Y_t\right]\right)^2 = \sigma_y^2 \qquad (3.91.)$$

olur. pozitif değerlidir. Eşitlik (3.90.) ve (3.91.) den, eşitlik (3.88.) için $\hat{\beta}$ nın olasılık limiti

$$p\lim\left(\hat{\beta}\right) = \beta + \frac{\sigma^2}{(1-\beta)\sigma_y^{\,2}} > \beta$$

dır. $p\lim\hat{\beta} \neq \beta$ bulunur. Çünkü σ^2 ile σ_y^2 pozitif değerli ve $0 < \beta < 1$ dir. Bu yüzden; $\hat{\beta}$, β nın tutarlı bir tahmin edicisi değildir. Bunun temel sebebi; Y_t nin, eşitlik (3.3.) te bağımsız değişken iken eşitlik (3.4.) te bağımlı değişken rolünü üstlenmesidir (Toutenburg, 1982).

4. BELİRLENME

4.1. Giriş

Eşanlı bir denklem sisteminde her bir yapısal denklemin yapısal katsayı parametrelerinin tahminlerinin tek değer olarak elde edilip edilemeyeceğinin incelenmesi durumuna belirlenme denir. Belirlenmede üç durum vardır:

1. Tam Belirlenme: Eşanlı bir denklem sisteminde belirlenme durumu incelenen yapısal denklemin yapısal katsayı parametre tahminleri tek değer olarak elde edilebiliyorsa, yapısal denklem tam belirlenmiştir.
2. Eksik Belirlenme: Eşanlı bir denklem sisteminde belirlenme durumu incelenen yapısal denklemin yapısal katsayı parametre tahminleri elde edilemiyorsa, yapısal denklem belirlenmemiştir.
3. Aşırı Belirlenme: Eşanlı bir denklem sisteminde belirlenme durumu incelenen yapısal denklemin yapısal katsayı parametre tahminleri birden fazla değere sahipse, yapısal denklem aşırı belirlenmiştir.

Eşanlı bir denklem sistemindeki her yapısal denklem ayrı ayrı belirlenir. Çünkü, belirlenme eşanlı denklem sistemlerinde model kurma için önemlidir. Eğer, eşanlı bir denklem sisteminde herhangi bir yapısal denklem veya denklemler belirlenmemiş ise bu sisteme ait model yeniden kurulmalıdır.

Eşanlı bir denklem sistemindeki herhangi bir yapısal denklemin belirlenme durumu incelenmesi; indirgenmiş form denklemleri, yapısal denklemler veya indirgenmiş form katsayıları ile yapısal katsayı parametreleri arasındaki ilişki kullanılarak yapılabilir. Dikkat edilmesi gereken husus, tanım denklemleri ile denge şartı denklemlerinin belirlenme durumu incelenmez. Sadece davranış denklemlerinin belirlenme durumu incelenir.

4.2. Sıra Koşulu

Yapısal modelin herhangi bir yapısal denklemini belirlemenin yollarından biri sıra koşuludur. Yapısal modelin herhangi bir yapısal denklemi için sıra koşulu aşağıdaki gibi açıklanabilir (Green, 1993; Intriligator ve ark, 1996; Toutenburg, 1982):

Yapısal model (3.8.) in m-inci denklemi

$$y_{tm} = y_{t1}\beta_{1m} + y_{t2}\beta_{2m} + \cdots + y_{tM}\beta_{Mm} + x_{t1}\gamma_{1m} + x_{t2}\gamma_{2m} + \cdots + x_{tK}\gamma_{Km} + \varepsilon_{tm} \tag{4.1.}$$

dir. O halde, m-inci yapısal denklem parçalı matris formunda yazılırsa

$$y_m = Y_1\beta_1 + Y_2\beta_2 + X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \varepsilon_m$$

olur. İndirgenmiş form matrisi (3.36.) da, m-inci denkleme karşılık gelecek şekilde parçalı matris formunda

$$\left(y_m \;\vdots\; Y_1 \;\vdots\; Y_2\right) = \left(X_1 \;\vdots\; X_2\right)\begin{pmatrix} \pi_{1*} & \vdots & \Pi_{11} & \vdots & \Pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{2*} & \vdots & \Pi_{21} & \vdots & \Pi_{22} \end{pmatrix} + \left(v_m \;\vdots\; V_1 \;\vdots\; V_2\right)$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$Y = \left(y_m \;\vdots\; Y_1 \;\vdots\; Y_2\right),\ X = \left(X_1 \;\vdots\; X_2\right),\ V = \left(v_m \;\vdots\; V_1 \;\vdots\; V_2\right),$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{1*} & \vdots & \Pi_{11} & \vdots & \Pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{2*} & \vdots & \Pi_{21} & \vdots & \Pi_{22} \end{pmatrix} \tag{4.2.}$$

olmak üzere, (4.2.) den Π nin parçalı matris formundaki indirgenmiş form katsayı tahminleri ve m-inci yapısal denkleme ait yapısal katsayı tahminleri arasındaki ilişki

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{1*} & \vdots & \hat{\Pi}_{11} & \vdots & \hat{\Pi}_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \hat{\pi}_{2*} & \vdots & \hat{\Pi}_{21} & \vdots & \hat{\Pi}_{22} \end{pmatrix} \left(I - \hat{B}_m \right) = \hat{\Gamma}_m$$

dir. Buradan,

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{1*} & \vdots & \hat{\Pi}_{11} & \vdots & \hat{\Pi}_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \hat{\pi}_{2*} & \vdots & \hat{\Pi}_{21} & \vdots & \hat{\Pi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ -\hat{\beta}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.}$$

$$\hat{\Pi}_{11}\hat{\beta}_1 + \hat{\gamma}_1 = \hat{\pi}_{1*} \tag{4.4.}$$

$$\hat{\Pi}_{21}\hat{\beta}_1 = \hat{\pi}_{2*} \tag{4.5.}$$

olur. Dikkat edilirse, (4.5.) denklemi m-inci denklemde var olan m_1 tane $\hat{\beta}$ yapısal katsayısı içermektedir. Eğer (4.5.) denkleminde $\hat{\beta}$ tahminleri elde edilirse (4.4.) denkleminde de k_1 tane $\hat{\gamma}_1$ yapısal katsayılarıda bulunabilir. (4.4.) denkleminin çözümünün var olabilmesi için $k_2 \geq m_1$ olması gerekir. Yani, k_2 tane denklem ve m_1 tane bilinmeyen bulunan (4.4.) denkleminin çözümünün var olabilmesi için, denklem sayısı k_2 nin bilinmeyen sayısı m_1 e eşit veya daha fazla olması gerekir. Buna sıra koşulu denir. Sıra koşuluna göre:

M = Yapısal modeldeki toplam denklem sayısı. Yani, toplam endojen değişken sayısı

K = Yapısal denklemdeki toplam önceden belirlenmiş değişken sayısı

$m_1 + 1 + m_2 = M$ ve $k_1 + k_2 = K$

olmak üzere

m_1 = Belirlenmesi incelenen yapısal denklemde var olan toplam endojen değişken sayısının 1 eksiği. Yani m_1 , belirlenmesi incelenen yapısal denklemin sağ tarafında yapısal katsayı parametresi sıfır olmayan endojen değişken sayısı

m_2 = Belirlenmesi incelenen yapısal denklemde var olmayan ama yapısal modelin diğer yapısal denklemlerinde var olan endojen değişkenlerin toplam sayısı

k_1 = Belirlenmesi incelenen yapısal denklemde var olan önceden belirlenmiş değişkenlerin toplam sayısı

k_2 = Belirlenmesi incelenen yapısal denklemde var olmayan ama yapısal modelin diğer yapısal denklemlerinde var olan önceden belirlenmiş değişkenlerin toplam sayısı

Belirlenmesi incelenen denklem için üç durum vardır:

1. $k_2 = m_1$ ise denklem tam belirlenmiştir
2. $k_2 > m_1$ ise denklem aşırı belirlenmiştir
3. $k_2 < m_1$ ise denklem belirlenmemiştir

Sıra koşulu herhangi bir yapısal denklemin belirlenme durumunun incelenmesi için gereklidir. Fakat bu koşul tek başına herhangi bir yapısal denklemin belirlenme durumunun incelenmesi için yeterli değildir. Çünkü bazı

yapısal modellerde herhangi bir yapısal denklem sıra koşuluna göre belirlenmiş olsa da gerçekte belirlenmemiş olabilir. Bu yüzden, ilerleyen bölümlerde belirlenmenin gerek ve yeter koşulu olan rank koşulu hakkında bilgi verilecektir.

Örnek 4.2.1 Gujarati (2004), sayfa 789 daki alıştırma 20.14 ün sıra koşulu ile belirlenme durumunun incelenmesi:

Özel tüketim fonksiyonu

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \varepsilon_{1t} \tag{4.6}$$

$\alpha_1 > 0\,,\ 0 < \alpha_2 < 1$

Özel gayri safi yatırım fonksiyonu

$$I_t = \theta_0 + \theta_1 Y_t + \theta_2 R_t + \theta_3 I_{t-1} + \varepsilon_{2t} \tag{4.7.}$$

$\theta_1 > 0\,,\ \theta_2 < 0\,,\ 0 < \theta_3 < 1$

Para talebi fonksiyonu

$$R_t = \lambda_0 + \lambda_1 Y_t + \lambda_2 M_{t-1} + \lambda_3 P_t + \lambda_4 R_{t-1} + \varepsilon_{3t} \tag{4.8.}$$

$\lambda_1 > 0\,, \lambda_2 < 0\,,\ \lambda_3 > 0\,,\ 0 < \lambda_4 < 1$

Gelir için tanım denklemi

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{4.9.}$$

Yukarıdaki makroiktisat modelinde, (4.7.) yapısal denkleminin yapısal katsayı parametreleri β_0, β_1, β_2 ve β_3 yerine sırasıyla θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 ve θ_4 yazılmıştır. Ayrıca, hata terimleri u_{t1}, u_{2t}, u_{3t} yerine sırasıyla ε_{1t}, ε_{2t} ve ε_{3t} yazılmıştır. (4.6.), (4.7.), (4.8.) ve (4.9.) yapısal denklemleri için:

C_t = t zamanda reel özel tüketim

I_t = t zamanda gayri safi özel yatırım

M_t = t zamanda cari fiyatlarla M_2 para arzı

Y_t = t zamanda reel gayri safi yurtiçi hasıla

G_t = t zamanda reel kamu harcaması

R_t = t zamanda uzun dönem faiz oranı

P_t = t zamanda tüketci fiyat endeski (TÜFE)

olmak üzere; C_t, I_t, R_t ile Y_t endojen değişkenler ve C_{t-1}, I_{t-1}, M_{t-1}, P_t, G_t, R_{t-1} ve sabit, önceden belirlenmiş değişkenlerdir. Makroiktisat modelinde,

M = 4 tane (C_t, I_t, R_t ve Y_t)

K = 7 tane (C_{t-1}, I_{t-1}, M_{t-1}, P_t, G_t, R_{t-1} ve 1)

(4.6.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane (Y_t)

m_2 = 2 tane (I_t ve R_t)

k_1 = 2 tane (C_{t-1} ve 1)

k_2 = 5 tane (I_{t-1}, M_{t-1}, P_t, G_t, R_{t-1})

Sıra koşuluna göre $k_2 = 5 > m_1 = 1$ olduğundan, (4.6.) yapısal denklemi aşırı belirlenmiştir.

(4.7.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 3-1=2 tane (Y_t ve R_t)

m_2 = 1 tane (C_t)

k_1 = 2 tane (I_{t-1} ve 1)

k_2 = 5 tane (C_{t-1} , M_{t-1} , P_t, G_t , R_{t-1})

Sıra koşuluna göre $k_2 = 5 > m_1 = 2$ olduğundan, (4.7.) yapısal denklemi aşırı belirlenmiştir.

(4.8.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (Y_t)

m_2 = 2 tane. (I_t ve C_t)

k_1 = 4 tane. (M_{t-1} , P_t, R_{t-1} ve 1)

k_2 = 3 tane. (C_{t-1} , G_t , I_{t-1})

Sıra koşuluna göre $k_2 = 3 > m_1 = 1$ olduğundan, (4.8.) yapısal denklemi aşırı belirlenmiştir.

(4.9) yapısal denklemi tanım denklemi olduğu için belirlenme durumu incelenmez.

Örnek 4.2.2 Intriligatator ve ark. (1996), sayfa 43 teki basit talep-arz modelinin (sayfa 23 teki basit talep-arz modeline göre değişkenler isimlendirilmiştir) sıra koşulu ile belirlenme durumunun incelenmesi:

$$q^D = \alpha_1 p + \lambda_1 + \varepsilon^D \quad (4.10.)$$

$$q^S = \alpha_2 p + \lambda_2 + \varepsilon^S \quad (4.11.)$$

$$q^D = q^S \quad (4.12.)$$

Yukarıdaki talep-arz modelinde yapısal katsayı parametreleri γ_1, γ_2, δ_1 ve δ_2 yerine sırasıyla α_1 , α_2, λ_1, λ_2 yazılmıştır. ε^D ve ε^S hata terimleridir.

(4.10.), (4.11.) ve (4.12.) yapısal denklemleri için,

q^D = Talep miktarı

q^S =Arz miktarı

p = Fiyat

dir. Basit talep-arz modeli için:

M = 2 tane. ($q^D = q^S$ ve p)

K = 1 tane. (1)

(4.10.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (p)

m_2 = 0 tane.

k_1 = 1 tane. (Sabit)

k_2 = 0 tane

Sıra koşuluna göre $k_2 = 0 < m_1 = 1$ olduğundan, (4.10.) yapısal denklemi belirlenmemiştir.

(4.11.) yapısal dekleminin belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (p)

m_2 = 0 tane.

k_1 = 1 tane. (Sabit)

k_2 = 0 tane

Sıra koşuluna göre $k_2 = 0 < m_1 = 1$ olduğundan, (4.11.) yapısal denklemi belirlenmemiştir.

(4.12.) yapısal denklemini denge şartı denklemi olduğu için belirlenme durumu incelenmez.

Örnek 4.2.3 Maddala (1992), sayfa 398 deki alıştırma 23 ün sıra koşulu ile belirlenme durumunun incelenmesi:

$$y_1 = \beta_{13} y_3 + \gamma_{12} x_2 + \varepsilon_1 \quad (4.13.)$$

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{32} y_3 + \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \varepsilon_2 \quad (4.14.)$$

$$y_3 = \gamma_{33} x_3 + \varepsilon_3 \quad (4.15.)$$

Yukarıdaki yapısal modelde y_1, y_2 ve y_3 endojen değişkenlerdir. x_1, x_2 ve x_3 egzojen değişkenlerdir. Hata terimleri u_1, u_2 ve u_3 yerine sırasıyla ε_1, ε_2 ve ε_3 yazılmıştır. Yapısal modelde,

M = 3 tane. (y_1, y_2, y_3)

K = 3 tane. (x_1, x_2, x_3)

(4.13.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (y_3)

m_2 = 1 tane. (y_2)

k_1 = 1 tane. (x_2)

k_2 = 2 tane. (x_1, x_3)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 2 > m_1 = 1$ olduğundan, (4.13.) yapısal denklemi aşırı belirlenmiştir.

(4.14.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 3-1=2 tane. (y_1, y_3)

m_2 = 0 tane.

k_1 = 2 tane. (x_1, x_2)

k_2 = 1 tane. (x_3)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 1 < m_1 = 2$ olduğundan, (4.14.) yapısal denklemi tam belirlenmemiştir.

(4.15.) yapısal denkleminin belirlenme durumu:

m_1 = 1-1=0 tane.

m_2 = 2 tane. (y_1, y_2)

k_1 = 1 tane. (x_3)

k_2 = 2 tane. (x_1, x_2)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 2 > m_1 = 0$ dır fakat, (4.15.) yapısal denkleminin belirlenme durumunun incelenmesine gerek yoktur. Çünkü (4.15.) yapısal denkleminin sağında endojen değişken yoktur.

4.3. Herhangi Bir Yapısal Denklemin Diğer Yapısal Denklemlerin Lineer Kombinasyonu Şeklinde Yazılmasıyla Belirlenme Durumunun İncelenmesi

Belirlenme durumu araştırılan bir yapısal denklem diğer yapısal denklemlerin bir linear kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa, incelenen yapısal denklem belirlenmemiştir denir. Aksi halde, denklem belirlenmiştir. İki denklemli yapısal modellerde bu tarz bir belirlenme yöntemi kullanılabilir. Fakat, denklem sayısı arttıkça daha farklı belirlenme yöntemlerine ihtiyaç duyulur.

Örnek 4.3.4 Gujarati (2004), sayfa 788, alıştırma 20.8. deki modelde her bir yapısal denklemin belirlenme durumu:

$$R_t = \lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t} \tag{4.16.}$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + \varepsilon_{2t} \tag{4.17.}$$

(4.16.) denkleminde yapısal katsayı parametreler β_0, β_1 ve β_2 yerine sırasıyla λ_0, λ_1 ve λ_2 yazılmıştır. Ayrıca, (4.16.) ve (4.17.) denklemlerinde hata terimleri u_{1t} ve u_{2t} yerine sırasıyla ε_{1t} ve ε_{2t} yazılmıştır.

(4.16.) ve (4.17.) yapısal denklemleri için

$R_t = t$ zamanda faiz oranı

$Y_t = t$ zamanda gayri safi yurt içi hasıla

$M_t = t$ zamanda para arzı

olmak üzere, R_t ile Y_t endojen değişkenler ve M_t egzojen değişkendir. Modelin belirlenme durumunun incelenmesi için (4.16.) denklemi w $(0 \le w \le 1)$ ile, (4.17.) denklemi $(1-w)$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılarak taraf tarafa toplanırsa

$$wR_t = w\lambda_0 + w\lambda_1 M_t + w\lambda_2 Y_t + w\varepsilon_{1t}$$
$$(1-w)Y_t = (1-w)\alpha_0 + (1-w)\alpha_1 R_t + (-w)\varepsilon_{2t}$$

$$wR_t = w\lambda_0 + w\lambda_1 M_t + w\lambda_2 Y_t + w\varepsilon_{1t}$$
$$Y_t - wY_t = (1-w)\alpha_0 + (1-w)\alpha_1 R_t + (-w)\varepsilon_{2t}$$
$$wR_t + Y_t - wY_t = w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0 + w\lambda_1 M_t + w\lambda_2 Y_t + \alpha_1 R_t - w\alpha_1 R_t$$
$$+w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t} \qquad (4.18.)$$

olur. (4.16.) denkleminin belirlenme durumunun incelenmesi için (4.18.) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$wR_t - \alpha_1 R_t + w\alpha_1 R_t = w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0 + w\alpha_1 M_t + w\lambda_2 Y_t - Y_t + wY_t$$
$$+w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}$$
$$R_t = \frac{w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0}{w - \alpha_1 + w\alpha_1} + \frac{w\alpha_1}{w - \alpha_1 + w\alpha_1} M_t + \frac{w\lambda_2 - 1 + w}{w - \alpha_1 + w\alpha_1} Y_t + \frac{w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}}{w - \alpha_1 + w\alpha_1} \qquad (4.19.)$$

Burada,

$$\lambda_0^* = \frac{w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0}{w - \alpha_1 + w\alpha_1},\ \lambda_1^* = \frac{w\alpha_1}{w - \alpha_1 + w\alpha_1},\ \lambda_2^* = \frac{w\lambda_2 - 1 + w}{w - \alpha_1 + w\alpha_1}$$
$$\varepsilon_{1t}^* = \frac{w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}}{w - \alpha_1 + w\alpha_1}$$

olmak üzere (4.19.) denklemi

$$R_t = \lambda_0^* + \lambda_1^* M_t + \lambda_2^* Y_t + \varepsilon_{1t}^* \qquad (4.20.)$$

biçiminde yazılır. (4.20.) denklemi (4.16.) denklemine benzemektedir. Yani, (4.20.) ve (4.17.) denklemleri farklı yapısal katsayı parametrelerine sahip olmalarına rağmen aynı parametrelere dolayısıyla aynı datalara sahip aynı regresyon formunda denklemlerdir. (4.20.) denklemi, (4.16.) ve (4.17.) denklemlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilmiştir. O halde, (4.16.) denklemi belirlenmemiştir.

(4.17.) denkleminin belirlenme durumunun incelenmesi için (4.18.) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$Y_t - wY_t - w\lambda_2 Y_t = w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0 + w\lambda_1 M_t + \alpha_1 R_t - w\alpha_1 R_t - wR_t + w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \frac{w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0}{1 - w - w\lambda_2} + \frac{\alpha_1 - w\alpha_1 - w}{1 - w - w\lambda_2} R_t + \frac{w\lambda_1}{1 - w - w\lambda_2} M_t + \frac{w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}}{1 - w - w\lambda_2} \quad (4.21.)$$

Burada,

$$\alpha_0^* = \frac{w\lambda_0 + \alpha_0 - w\alpha_0}{1 - w - w\lambda_2},\ \alpha_1^* = \frac{\alpha_1 - w\alpha_1 - w}{1 - w - w\lambda_2},\ \alpha_2^* = \frac{w\lambda_1}{1 - w - w\lambda_2}$$

$$\varepsilon_{2t}^* = \frac{w\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} - w\varepsilon_{2t}}{1 - w - w\lambda_2}$$

olmak üzere (4.21.) denklemi

$$Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* R_t + \alpha_2^* M_t + \varepsilon_{2t}^* \quad (4.22.)$$

biçiminde yazılır. (4.22.) denklemi (4.17.) denklemine benzememektedir. (4.22.) denkleminin (4.16.) denklemine bezemesi için $\alpha_2^* = 0$ olmalıdır. α_2^* da, $\lambda_1 \neq 0$ ve

$\lambda_2 \neq 0$ dır. O halde, $\alpha_2^* = 0$ olması için $w = 0$ olmalıdır. Bu yüzden, ağırlıklı ortalama (4.16.) denklemine 0 ağırlık verir. O halde, (4.17) denklemi belirlenmiştir.

Örnek 4.3.5 Maddala (1992), sayfa 399, alıştırma 9 daki modelde her bir yapısal denklemin belirlenme durumu:

$$Q = \lambda_0 + \lambda_1 P_W + \lambda_2 Y + \varepsilon_{1t} \quad (4.23.)$$

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 P_W + \alpha_2 S + \varepsilon_{2t} \quad (4.24.)$$

Yukarıdaki Avusturalya'nın şarap endüstrisine ait değişkenleri içeren modelde, (4.23.) denkleminde yapısal katsayı parametreleri β_0, β_1 ve β_2 yerine sırasıyla λ_0, λ_1 ve λ_2 yazılmıştır. Ayrıca, (4.23.) ve (4.24.) denklemlerinde hata terimleri u lar yerine sırasıyla ε_{1t} ve ε_{2t} yazılmıştır.

(4.23.) ve (4.24.) denklemleri için,

Q = Kişi başına düşen şarap tüketimi

P_W = TÜFE'ye göre şarap fiyatı

Y = Kişi başına reel harcanabilir gelir

S = Depo maliyetleri endeksi

olmak üzere, Q ile P_W endojen değişkenler ve Y ile S egzojen değişkenlerdir. Modelin belirlenme durumunun incelenmesi için (4.23.) denklemi w$(0 \leq w \leq 1)$ ile, (4.24.) denklemi $(1-w)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$wQ = w\lambda_0 + w\lambda_1 P_W + w\lambda_2 Y + w\varepsilon_{1t}$$

$$(1-w)Q=(1-w)\alpha_0+(1-w)\alpha_1 P_W+(1-w)\alpha_2 S+(1-w)\varepsilon_{2t}$$

$$\begin{aligned}Q &= w\lambda_0+(1-w)\alpha_0+w\lambda_1 P_W+(1-w)\alpha_1 P_W+w\lambda_2 Y+(1-w)\alpha_2 S\\ &\quad +w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t}\\ &= w\lambda_0+(1-w)\alpha_0+\left(w\lambda_1+(1-w)\alpha_1\right)P_W+w\lambda_2 Y+(1-w)\alpha_2 S\\ &\quad +w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t}\end{aligned} \qquad (4.25.)$$

olur. Burada,

$$a^*=w\lambda_0+(1-w)\alpha_0,\quad b^*=w\lambda_1+(1-w)\alpha_1,\quad c^*=w\lambda_2,\quad d^*=(1-w)\alpha_2,$$
$$\varepsilon^*=w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t}$$

olmak üzere (4.25.) denklemi

$$Q=a^*+b^*P_W+c^*Y+d^*S+\varepsilon^* \qquad (4.26.)$$

biçiminde yazılır.

(4.26.) denklemi (4.23.) denklemine benzememektedir. (4.26.) denkleminin (4.23.) denklemine bezemesi için $d^*=0$ olmalıdır. d^* da, $\alpha_2\neq 0$ dır. O halde, $d^*=0$ olması için $w=1$ olmalıdır. Burada, ağırlıklı ortalama (4.24.) denklemine 0 ağırlık verdiği için (4.23.) denklemi belirlenmiştir.

(4.26.) denklemi (4.24.) denklemine benzememektedir. (4.26.) denkleminin (4.24.) denklemine bezemesi için $c^*=0$ olmalıdır. c^* da, $\lambda_2\neq 0$ dır.

O halde, $c^* = 0$ olması için $w = 0$ olmalıdır. Burada, ağırlıklı ortalama (4.23.) denklemine 0 ağırlık verdiği için (4.24.) denklemi belirlenmiştir.

Örnek 4.3.6 Gujarati (2004), sayfa 760, alıştırma 19.16. deki modelde her bir yapısal denklemin belirlenme durumu:

$$M_t^d = \lambda_0 + \lambda_1 Y_t + \lambda_2 R_t + \lambda_3 P_t + \varepsilon_{1t} \qquad \text{Para Talebi} \qquad (4.27.)$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_{2t} \qquad \text{Para Arzı} \qquad (4.28.)$$

Yukarıda Amerika Birleşik Devletleri'nin para, GSYH, faiz oranı, tüketici fiyat endeksini içeren modeli için, (4.27.) denkleminde yapısal katsayı parametreleri β_0, β_1, β_2 ve β_3 yerine sırasıyla λ_0, λ_1, λ_2 ve λ_3 yazılmıştır. Ayrıca, (4.27.) ve (4.28.) denklemlerinde hata terimleri u_{1t} ve u_{2t} yerine sırasıyla ε_{1t} ve ε_{2t} yazılmıştır.

(4.27.) ve (4.28.) denklemleri için

M = Para (M_2)

Y = Gelir ($GSYH$)

R = Faiz oranı (3 aylık hazine bonosu oranı)

P = Fiyat (TÜFE)

olmak üzere, M ile Y endojen değişkenler ve R ile P egzojen değişkenlerdir. Ayrıca, $M = M_t^d = M_t^s$ dir. Para talebi-arzı modelinde belirlenme durumunun incelenmesi için (4.27.) denklemi w $(0 \le w \le 1)$ ile, (4.28.) denklemi $1-w$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$wM = w\lambda_0 + w\lambda_1 Y_t + w\lambda_2 R_t + w\lambda_3 P_t + w\varepsilon_{1t}$$

$$(1-w)M=(1-w)\alpha_0+(1-w)\alpha_1 Y_t+(1-w)\varepsilon_{2t}$$

$$M=w\lambda_0+(1-w)\alpha_0+w\lambda_1 Y_t+(1-w)\alpha_1 Y_t+w\lambda_2 R_t+w\lambda_3 P_t+w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t}$$

$$=w\lambda_0+(1-w)\alpha_0+\left(w\lambda_1+(1-w)\alpha_1\right)Y_t+w\lambda_2 R_t+w\lambda_3 P_t+w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t} \quad (4.29.)$$

olur. Burada,

$$a^* = w\lambda_0+(1-w)\alpha_0 \ , \ b^* = w\lambda_1+(1-w)\alpha_1 \ , \ c^* = w\lambda_2 \ , \ d^* = w\lambda_3$$

$$\varepsilon^* = w\varepsilon_{1t}+(1-w)\varepsilon_{2t}$$

olmak üzere (4.29.) denklemi

$$M = a^* + b^* Y_t + c^* R_t + d^* P_t + \varepsilon^* \quad (4.30.)$$

biçiminde yazılır.

(4.30.) denklemi (4.27.) denklemine benzemektedir. Yani, (4.30.) ve (4.27.) denklemleri farklı yapısal katsayı parametrelerine sahip olmalarına rağmen aynı parametrelere sahip, aynı regresyon formunda denklemlerdir. (4.30.) denklemi, (4.27.) ve (4.28.) denklemlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiği için (4.27.) denklemi belirlenmemiştir.

(4.30.) denklemi (4.28.) denklemine benzememektedir. (4.30.) denkleminin (4.28.) denklemine bezemesi için $c^* = 0$ ve $d^* = 0$ olmalıdır. c^* da, $\lambda_2 \neq 0$ ve d^* da, $\lambda_3 \neq 0$ dır. O halde, $c^* = 0$ ve $d^* = 0$ olması için $w = 0$ olmalıdır. Burada, ağırlıklı ortalama (4.27.) denklemine 0 ağırlık verdiği için (4.28.) denklemi belirlenmiştir.

Örnek 4.3.7 Theil (1971), sayfa 429 daki basit Keynesian modelinde her bir denklemin belirlenme durumu:

$C_t = \beta Y_t + \varepsilon_t$ Tüketim fonksiyonu (4.31.)

$C_t + I_t = Y_t$ Tanım Denklemi (4.32.)

Yukarıdaki basit Keynesian modelinde, (4.31.) ve (4.32.) denklemlerinde yıllık gözlem indisi olarak α $(\alpha = 1,2,...,n)$ yerine t $(t = 1,2,...,T)$ yazılmıştır. ε_t , hata terimidir.

(4.31.) ve (4.32.) denklemleri için

C_t = t -inci yılda kazanılan toplam gelir ile orantılı toplam tüketim

Y_t = t -inci yılda kazanılan toplam gelir

I_t = t -inci yılda yatırım

olmak üzere, C_t ile Y_t endojen değişkenler ve I_t egzojen değişkendir. Basit Keynesian modelinde belirlenme durumunun incelenmesi için (4.31.) denklemi w $(0 \le w \le 1)$ ile, (4.32.) denklemi $(1-w)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$wC_t = w\beta Y_t + w\varepsilon_t$$
$$(1-w)C_t + (1-w)I_t = (1-w)Y_t$$

$$wC_t + (1-w)C_t + (1-w)I_t = w\beta Y_t + (1-w)Y_t + w\varepsilon_t$$
$$C_t = w\beta Y_t + (1-w)Y_t - (1-w)I_t + w\varepsilon_t$$
$$= (w\beta + 1 - w)Y_t - (1-w)I_t + w\varepsilon_t \quad (4.33.)$$

olur. Burada,

$$a^* = w\beta + 1 - w,\ b^* = -(1-w) \text{ ve } \varepsilon_t^* = w\varepsilon_t$$

olmak üzere (4.33.) denklemi

$$C_t = a^* Y + b^* I_t + \varepsilon_t^* \qquad (4.34.)$$

biçiminde yazılır. (4.34.) denklemi (4.31.) denklemine benzememektedir. (4.34.) denkleminin (4.31.) denklemine bezemesi için $b^* = 0$ olmalıdır. b^* da $w=1$ olmalıdır. Burada, ağırlıklı ortalama (4.32.) denklemine 0 ağırlık verdiği için (4.31.) denklemi belirlenmiştir.

(4.32.) denklemi tanım denklemi olduğu için belirlenmez.

4.4. Rank Koşulu İle Belirlenme

Rank koşulu yapısal bir denklemin belirlenip belirlenmediğini bulmaya yardımcı olur. Eğer bir yapısal denklem rank koşuluna göre belirlenmiş ise sıra koşuluyla da yapısal denklemin tam mı, yoksa aşırı mı belirlendiği incelenebilir.

Genellikle belirlenme durumunun incelenmesinde sıra koşulu ile yetinilir. Fakat sıra koşuluna göre belirlenmiş sayılan bir yapısal denklem rank koşuluna göre belirlenmememiş olabilmektedir. Bu yüzden, belirlenmesi incelenen bir denklemin sıra koşuluna göre belirlenmesi incelendikten sonra rank koşuluna göre de belirlenip belirlenmediği incelenmelidir.

(4.2.) den Π nin parçalı matris formunun yapısal katsayı tahminleri ve m -inci yapısal denkleme ait yapısal katsayı tahminleri arasındaki ilişkiden (4.4.) ve (4.5.) eşitlikleri

$$\hat{\Pi}_{11} = \hat{\beta}_1 + \hat{\gamma}_1 = \hat{\pi}_{1*}$$

$$\hat{\Pi}_{21}\hat{\beta}_1 = \hat{\pi}_{2*}$$

bulunmuştu. m -inci yapısal denklemin belirlenebilmesi için gerek ve yeter koşul (4.5.) denkleminde $\hat{\beta}_1$ nın tek bir çözümü var olmasıdır. Yani,

$$\text{rank}\,\hat{\Pi}_{21} = m_1$$

olmalıdır.

Örnek 4.4.8 Gujarati (2004), sayfa 788, alıştırma 20.11. deki yapısal modelde her bir yapısal denklemin rank koşuluna ve sıra koşuluna göre belirlenme durumu:

$$R_t = \lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t} \quad (4.35.)$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + \alpha_2 I_t + \varepsilon_{2t} \quad (4.36.)$$

$$I_t = \theta_0 + \theta_1 R_t + \varepsilon_{3t} \quad (4.37.)$$

(4.35.) denkleminde yapısal katsayı parametreleri β_0, β_1 ve β_2 yerine sırasıyla λ_0, λ_1 ve λ_2 yazılmıştır. (4.36.) denkleminde yapısal katsayı parametreleri γ_0 ve γ_1 yerine sırasıyla θ_0 ve θ_1 yazılmıştır. Ayrıca, (4.35.), (4.36.) ve (4.37.) denklemlerinde hata terimleri u_{1t}, u_{2t} ve u_{3t} yerine sırasıyla ε_{1t}, ε_{2t} ve ε_{3t} yazılmıştır. Burada,

R_t = t zamanda faiz oranı

Y_t = t zamanda gayri safi yurtiçi hasıla

M_t = t zamanda para arzı

I_t = t zamanda yurtiçi yatırım

olmak üzere R_t, Y_t ve I_t endojen değişkenler ve M_t egzojen değişkendir. Yukarıdaki yapısal modelde

M = 3 tane. (R_t, Y_t, I_t)

K = 2 tane. (1 ve M_t)

dir.

(4.35.) yapısal denkleminin sıra koşuluna göre belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (Y_t)

m_2 = 1 tane. (I_t)

k_1 = 2 tane. (M_t ve 1)

k_2 = 0 tane.

Sıra koşuluna göre $k_2 = 0 < m_1 = 1$ olduğundan, (4.35.) yapısal denklemi belirlenmemiştir.

(4.36.) yapısal denkleminin sıra koşuluna göre belirlenme durumu:

m_1 = 3-1=2 tane. (R_t ve I_t)

m_2 = 0 tane.

k_1 = 1 tane. (Sabit)

k_2 = 1 tane. (M_t)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 1 < m_1 = 2$ olduğundan, (4.36.) yapısal denklemi belirlenmemiştir.

(4.37.) yapısal denkleminin sıra koşuluna göre belirlenme durumu:

m_1 = 2-1=1 tane. (R_t)

m_2 = 1 tane. (Y_t)

k_1 = 1 tane. (1)

k_2 = 1 tane. (M_t)

Sıra koşuluna göre $k_2 = m_1 = 1$ olduğundan, (4.37.) yapısal denklemi tam belirlenmiştir.

(4.37.) yapısal denklemlerinin rank koşuluna göre belirlenme durumunu incelemek için önce indirgenmiş form denklemleri bulunur. Bunun için aşağıdaki işlemler yapılır:

(4.35.) denkleminin indirgenmiş form denklemini yazmak için önce, (4.36.) denkleminde (4.37.) denklemindeki I_t nin değeri yerine yazılır.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + \alpha_2 \left(\theta_0 + \theta_1 R_t + \varepsilon_{3t} \right) + \varepsilon_{2t} \qquad (4.38.)$$

Ardından (4.35.) denkleminde (4.38.) teki Y_t nin değeri yerine yazılırsa

$$R_t = \lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 \left(\alpha_0 + \alpha_1 R_t + \alpha_2 \left(\theta_0 + \theta_1 R_t + \varepsilon_{3t} \right) + \varepsilon_{2t} \right) + \varepsilon_{1t}$$

elde edilir. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılarak (4.35.) denkleminin indirgenmiş form denklemi

$$R_t = \underbrace{\frac{\lambda_0 + \lambda_2\alpha_0 + \lambda_2\alpha_2\theta_0}{1-\lambda_2\alpha_1-\lambda_2\alpha_2\theta_1}}_{\pi_{11}} + \underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2\alpha_1-\lambda_2\alpha_2\theta_1}}_{\pi_{12}} M_t + \underbrace{\frac{\lambda_2\alpha_2\varepsilon_{3t} + \lambda_2\varepsilon_t + \varepsilon_{1t}}{1-\lambda_2\alpha_1-\lambda_2\alpha_2\theta_1}}_{v_1}$$

$$R_t = \pi_{11} + \pi_{21}M_t + v_1 \qquad (4.39)$$

biçiminde bulunur.

(4.36.) denkleminin indirgenmiş fom denklemini yazmak için önce, (4.35.) denklemindeki R_t nin değeri ve (4.37.) denkleminde yerine yazılır.

$$I_t = \theta_0 + \theta_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t}\right) + \varepsilon_{3t} \qquad (4.40.)$$

Ardından (4.36.) denkleminde (4.40.) deki I_t nin değeri ve (4.35.) daki R_t nin değeri yerine yazılırsa

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t}\right) + \alpha_2\left(\theta_0 + \theta_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t}\right) + \varepsilon_{3t}\right) + \varepsilon_{2t}$$

elde edilir. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılarak (4.36.) denkleminin indirgenmiş formu denklemi

$$Y_t = \underbrace{\frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda_0 + \alpha_2\theta_0 + \alpha_2\theta_1\lambda_0}{1-\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\theta_1\lambda_2}}_{\pi_{21}} + \underbrace{\frac{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\theta_1\lambda_1}{1-\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\theta_1\lambda_2}}_{\pi 22} M_t + \underbrace{\frac{\alpha_1\varepsilon_{1t} + \alpha_2\theta_1\varepsilon_{1t} + \alpha_2\varepsilon_{3t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\theta_1\lambda_2}}_{v_2}$$

$$Y_t = \pi_{12} + \pi_{22}M_t + v_2 \qquad (4.41.)$$

biçiminde bulunur.

(4.37.) denkleminin indirgenmiş form denklemini yazmak için önce, (4.36.) denklemindeki Y_t nin değeri ve (4.35.) denkleminde yerine yazılır.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t}\right) + \alpha_2 I_t + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda_0}{1-\alpha_1\lambda_2} + \frac{\alpha_1\lambda_1}{1-\alpha_1\lambda_2} M_t + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\lambda_2} I_t + \frac{\alpha_1\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1\lambda_2} \qquad (4.42.)$$

Ardından (4.37.) denkleminde (4.35.) denklemindeki R_t nin değeri ve

$$I_t = \theta_0 + \theta_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2 Y_t + \varepsilon_{1t}\right) + \varepsilon_{3t} \qquad (4.43.)$$

(4.42.) denklemindeki Y_t nin değeri de (4.43.) denkleminde yerine yazılırsa

$$I_t = \theta_0 + \theta_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 M_t + \lambda_2\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda_0}{1-\alpha_1\lambda_2} + \frac{\alpha_1\lambda_1}{1-\alpha_1\lambda_2} M_t + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\lambda_2} I_t + \frac{\alpha_1\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1\lambda_2}\right) + \varepsilon_{1t}\right) + \varepsilon_{3t}$$

$$= \underbrace{\frac{\theta_0 - \theta_0\alpha_1\lambda_2 + \theta_1\lambda_0 + \theta_1\lambda_2\alpha_0}{1-\alpha_1\lambda_2-\theta_1\lambda_2\alpha_2}}_{\pi_{31}} + \underbrace{\frac{\theta_1\lambda_1}{1-\alpha_1\lambda_2-\theta_1\lambda_2\alpha_2}}_{\pi_{32}} M_t + \underbrace{\frac{\theta_1\lambda_2\alpha_1\varepsilon_{1t} + \theta_1\lambda_2\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t}\alpha_1\lambda_2 + \varepsilon_{3t} - \varepsilon_{3t}\alpha_1\lambda_2}{1-\alpha_1\lambda_2-\theta_1\lambda_2\alpha_2}}_{v_3}$$

$$= \pi_{31} + \pi_{32} M_t + v_3 \qquad (4.44.)$$

bulunur. (4.35.), (4.36.) ve (4.37.) yapısal denklemlerinden oluşan modelin indirgenmiş formu (4.39.), (4.41.) ve (4.44.) denklemlerinden

$$\begin{aligned} R_t &= \pi_{11} + \pi_{12} M_t + v_1 \\ Y_t &= \pi_{21} + \pi_{22} M_t + v_2 \\ I_t &= \pi_{31} + \pi_{32} M_t + v_3 \end{aligned} \qquad (4.45)$$

(4.45) indirgenmiş form denklemi yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
R_{t1} &= \pi_{11} + M_{t2}\pi_{21} + v_{t1} \\
Y_{t2} &= \pi_{12} + M_{t2}\pi_{22} + v_{t2} \\
I_{t3} &= \pi_{13} + M_{t2}\pi_{23} + v_{t3}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

(4.46) indirgenömiş form denklemi (4.37) denklemine karşılık gelecek şekilde parçalı matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} I_{t3} & \vdots & R_{t1} & \vdots & Y_{t2} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \vdots & M_{t2} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \pi_{13} & \vdots & \pi_{11} & \vdots & \pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{23} & \vdots & \pi_{21} & \vdots & \pi_{22} \end{bmatrix}}_{\Pi} + V \tag{4.47}
$$

Ayrıca, (4.37) denkleminde yapısal katsayı matrislerinin bulunması için aşağıdaki düzenlemeler yapılır:

$$
\begin{aligned}
I_{3t} &= \theta_1 R_{1t} + 0Y_{2t} + 0I_t + \theta_0 1 + 0M_{2t} + \varepsilon_{3t} \\
I_{t3} &= R_{t1}\theta_1 + Y_{t2}0 + I_{t3}0 + 1\theta_0 + M_{t2}0 + \varepsilon_{t3} \\
\underbrace{I_{t3}}_{y} &= \underbrace{R_{t1}}_{Y_1}\underbrace{\theta_1}_{\beta_1} + \underbrace{Y_{t2}}_{Y_2}\underbrace{0}_{\beta_2} + \underbrace{1}_{X_1}\underbrace{\theta_0}_{\gamma_1} + \underbrace{M_{t2}}_{X_2}\underbrace{0}_{\gamma_2} + \varepsilon_{t3} \\
I_{t3} - R_{t1}\theta_1 - Y_{t2}0 &= 1\theta_0 + M_{t2}0 + \varepsilon_{t3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} I_{t3} & \vdots & R_{t1} & \vdots & Y_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ -\theta_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & M_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{t3} \tag{4.48.}
$$

olur. (4.37) yapısal denklemi için, (4.47) deki Π nin parçalı matris formunun tahmini ve (4.48) deki yapısal katsayıların tahmini arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \underbrace{\hat{\pi}_{13}}_{1x1} & \vdots & \underbrace{\hat{\pi}_{11}}_{1x1} & \vdots & \underbrace{\hat{\pi}_{12}}_{1x1} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \underbrace{\hat{\pi}_{23}}_{1x1} & \vdots & \underbrace{\hat{\pi}_{21}}_{1x1} & \vdots & \underbrace{\hat{\pi}_{22}}_{1x1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ -\hat{\theta}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.49.}$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (4.49.) dan

$$\hat{\pi}_{13}.1 - \hat{\pi}_{11}\hat{\theta}_1 + \hat{\pi}_{12}.0 = \hat{\theta}_0$$

$$\hat{\pi}_{23}.1 - \hat{\pi}_{21}\hat{\theta}_1 + \hat{\pi}_{22}.0 = 0$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$\hat{\pi}_{13} = \hat{\theta}_0 + \hat{\pi}_{11}\hat{\theta}_1 \tag{4.50.}$$

$$\hat{\pi}_{21}\hat{\theta}_1 = \hat{\pi}_{23} \tag{4.51.}$$

Eşitlik (4.51.) de $\hat{\pi}_{21} : k_2 x m_1 = 1x1$ tipinde matristir.

$$\text{rank}\,\hat{\pi}_{21} = m_1 = 1$$

olduğundan (4.37) denklemi rank koşuluna göre belirlenmiştir. Üstelik, sıra koşuluna göre $k_2 = m_1 = 1$ olduğundan (4.37) denklemi tam belirlenmiş bir deklemdir.

4.5. Rank Koşuluna Farklı Yaklaşım

İki denklemli bir yapısal modelde rank koşulununa göre belirlenme durumu kolaylıkla incelenebilir. Fakat denklem sayısısı arttıkça bu yöntem yerine daha sistematik bir belirlenme koşulu kullanılmalıdır. Rank koşuluna farklı yaklaşım yöntemi iki veya daha fazla denklemli yapısal modelin belirlenip belirlemediğini inceleme konusunda daha kestirme bir yol sunar.

Eşanlı bir modelde herhangi bir yapısal denklemin belirlenme durumu incelenmeden önce model üzerinde bazı düzenlemeler yapılır. Öncelikle eşanlı denklem modelindeki her bir denklemin sağ tarafındaki tüm değişkenler hata terimleri hariç eşitliğin sol tarafına atılır. Ardından, sol taraftaki her bir denklem için modelde var olan olmayan tüm değişkenler yapısal katsayıları ile yazılır. Yapılan düzenleme ile yapısal katsayı parametreleri için bir çizelge hazırlanır. Hazırlanan çizelgede herhangi bir m-inci denklemin belirlenip belirlenmediğini bulmak incelenen denkleme ait satırın tamamı silinir. Son olarak, silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenlerin (kendileri hariç) bulunduğu sütundaki tüm değerler yazılır. Yazılan değerlerden $M-1$ tane sıfır olmayan satır ve sütun varsa incelenen denklem belirlenmiştir.

Aşağıdaki eşanlı modellerin belirlenip belirlenmedikleri rank koşuluna farklı yaklaşımla incelenecektir.

Örnek 4.5.10 Gujarati (2004), sayfa 787, alıştırma 20.6. daki para talebi–arzı modelinde her bir yapısal denklemin rank koşuluna farklı yaklaşımla belirlenme durumu:

$$M_t^d = \lambda_0 + \lambda_1 Y_t + \lambda_2 R_t + \lambda_3 P_t + \varepsilon_{1t}$$

$$M_t^s = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

Yukarıdaki para talebi–arzı modelinde yapısal katsayı parametreleri β_0 , β_1, β_2 ve β_3 yerine sırasıyla λ_0, λ_1, λ_2 ve λ_3 yazılmıştır. $M_t = M_t^d = M_t^s$ dir.

Ayrıca, para talebi–arzı modelinde hata terimleri u_{1t} ve u_{2t} yerine sırasıyla ε_{1t} ve ε_{2t} yazılmıştır. Para talebi–arzı modelinde için

R_t = t zamanda faiz oranı

Y_t = t zamanda gelir

M_t = t zamanda para arzı

P_t = t zamanda fiyat

olmak üzere M_t ve Y_t endojen değişkenler ve R_t ve P_t önceden belirlenmiş değişkenlerdir. Para talebi-arzı modelinin belirlenip belirlenmediğini bulmak için model üzerinde

$M_t - \lambda_0 - \lambda_1 Y_t - \lambda_2 R_t - \lambda_3 P_t = \varepsilon_{1t}$	Para Talebi	1-inci Denklem
$M_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_t = \varepsilon_{2t}$	Para Arzı	2-inci Denklem

olacak şekilde

$$1M_t - \lambda_1 Y_t - \lambda_0 1 - \lambda_2 R_t - \lambda_3 P_t = \varepsilon_{1t} \quad (4.52.)$$

$$1M_t - \alpha_1 Y_t - \alpha_0 1 + 0R_t + 0P_t = \varepsilon_{2t} \quad (4.53.)$$

düzenlemesi yapılır. (4.52.) ve (4.53.) denklemleri yardımıyla para arz-talep modelinde endojen ve önceden belirlenmiş değişkenlere ait yapısal katsayı çizelgesi:

Çizelge 4.1. Para Arz-Talep Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar

	M_t	Y_t	1	R_t	P_t
1-inci Denklem	1	$-\lambda_1$	$-\lambda_0$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$
2-nci Denklem	1	$-\alpha_1$	$-\alpha_0$	0	0

1-inci denklemin belirlenme Durumu:

Çizelge 4.2. Para Talebi Denkleminin Belirlenme Durumu

	M_t	Y_t	1	R_t	P_t
1-inci Denklem	~~1~~	~~$-\lambda_1$~~	~~$-\lambda_0$~~	~~$-\lambda_2$~~	~~$-\lambda_3$~~
2-nci Denklem	1	$-\alpha_1$	$-\alpha_0$	0	0

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütunda değer yoktur. O halde, 1-inci denklem belirlenmemiştir.

2-nci Denklemin Belirlenme Durumu:

Çizelge 4.3. Para Arzı Denkleminin Belirlenme Durumu

	M_t	Y_t	1	R_t	P_t
1-inci Denklem	1	$-\lambda_1$	$-\lambda_0$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$
2-nci Denklem	~~1~~	~~$-\alpha_1$~~	~~$-\alpha_0$~~	~~0~~	~~0~~

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütundaki değerlerin oluşturduğu matris

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

tür. $M=2$ olmak üzere $M-1=2-1=1$ tane tamamı sıfır olmayan satır var olduğu için 2-nci denklem belirlenmiştir.

Örnek 4.5.11 Maddala (1993), sayfa 398, alıştırma 3. teki üç denklemli modelde her bir yapısal denklemin rank koşuluna farklı yaklaşımla belirlenme durumu:

$$y_1 = \beta_{13} y_3 + \gamma_{12} x_2 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{23} y_3 + \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \varepsilon_2$$

$$y_3 = \gamma_{33} x_3 + \varepsilon_3$$

Yukarıdaki üç denklemli model için y_1, y_2, y_3 endojen değişkenler ve x_1, x_2, x_3 egzojen değişkenlerdir. β ve γ lardan oluşan değişkenler yapısal katsayı parametreleridir. Ayrıca, hata terimleri u_1, u_2 ve u_3 yerine sırasıyla ε_1, ε_2 ve ε_3 yazılmıştır.

Üç denklemli modelinin belirlenip belirlenmediğini bulmak için model üzerinde

$$y_1 - \beta_{13} y_3 - \gamma_{12} x_2 = \varepsilon_1 \qquad \text{1-inci Denklem}$$

$$y_2 - \beta_{21} y_1 - \beta_{23} y_3 - \gamma_{21} x_1 - \gamma_{22} x_2 = \varepsilon_2 \qquad \text{2-nci Denklem}$$

$$y_3 - \gamma_{33} x_3 = \varepsilon_3 \qquad \text{3-üncü Denklem}$$

olacak şekilde

$$1y_1 + 0y_2 - \beta_{13} y_3 + 0x_1 - \gamma_{12} x_2 + 0x_3 = \varepsilon_1 \qquad (4.54.)$$

$$-\beta_{21} y_1 + 1y_2 - \beta_{23} y_3 - \gamma_{21} x_1 - \gamma_{22} x_2 + 0x_3 = \varepsilon_2 \qquad (4.55.)$$

$$0y_1 + 0y_2 + 1y_3 + 0x_1 + 0x_2 - \gamma_{33} x_3 = \varepsilon_3 \qquad (4.56.)$$

düzenlemesi yapılır. (4.54.), (4.55.) ve (4.56.) denklemleri yardımıyla para telebi-arzı modelinde endojen ve önceden belirlenmiş değişkenlere ait yapısal katsayı çizelgesi

Çizelge 4.4. Eşanlı Denklem Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1-inci Denklem	1	0	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{12}$	0
2-inci Denklem	$-\beta_{21}$	1	$-\beta_{23}$	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3-ünci Denklem	0	0	1	0	0	$-\gamma_{33}$

olur. 1-inci Denklemin Belirlenme Durumu:

Çizelge 4.5. 1-inci Denklemin Belirlenme Durumu

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1-inci Denklem	~~1~~	~~0~~	~~$-\beta_{13}$~~	~~0~~	~~$-\gamma_{12}$~~	~~0~~
2-inci Denklem	$-\beta_{21}$	1	$-\beta_{23}$	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3-ünci Denklem	0	0	1	0	0	$-\gamma_{33}$

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütundaki değerlerden oluşan matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{31} \end{bmatrix}$$

dir. $M=3$ olmak üzere $M-1=3-1=2$ tane tamamı sıfır olmayan satır var olduğu için 1-inci belirlenmiştir.

2-nci Denklemin Belirlenme Durumu:

Çizelge 4.6. 2-nci Denklemin Belirlenme Durumu

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1-inci Denklem	1	0	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{12}$	0
2-inci Denklem	~~$-\beta_{21}$~~	~~1~~	~~$-\beta_{23}$~~	~~$-\gamma_{21}$~~	~~$-\gamma_{22}$~~	~~0~~
3-ünci Denklem	0	0	1	0	0	$-\gamma_{33}$

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütundaki değerlerden oluşan matris

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_{33} \end{bmatrix}$$

dir. $M=3$ olmak üzere $M-1=3-1=2$ tane tamamı sıfır olan satır var olduğu için 2-nci denklem belirlenmemiştir.

3-üncü Denklemin Belirlenme Durumu:

Çizelge 4.7. 3-ünci Denklemin Belirlenme Durumu

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1-inci Denklem	1	0	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{12}$	0
2-inci Denklem	$-\beta_{21}$	1	$-\beta_{23}$	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3-ünci Denklem	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~$-\gamma_{33}$~~

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütundaki değerlerden oluşan matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\gamma_{11} \\ -\beta_{21} & 1 & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} \end{bmatrix}$$

dir. $M=3$ olmak üzere $M-1=3-1=2$ tane tamamı sıfır olmayan satır var olduğu için 3-üncü denklem belirlenmiştir. Aslında, 3-üncü denklemin sağ tarafında endojen değişken olmadığı için belirlenme durumunun incelenmesine gerek yoktur.

4.6. Hausman Eşanlılık Testi

Hausman eşanlılık testi, eşanlı bir denklem sisteminde yer alan bir yada birden fazla değişkenin hata terimi ile aralarındaki ilişkinin varlığını araştırır. Şayet eşanlı bir denklem sisteminde Hausman testine göre herhangi bir değişken yada değişkenler hata terimi ile ilişkili ise eşanlılık sorunu vardır denir.

Eşanlılık sorunu olan denklemlerin katsayı parametre tahminlerinde EKK yöntemi kullanılamaz. Çünkü, tahmin sonuçları tutarlı olmaz. Bu duruma bölüm 3.5. da değinilmişti. Eğer, herhangi bir değişken yada değişkenler hata terimi ile ilişkili değil ise, eş anlılık yoktur. Eşanlılığın olmadığı durumlarda tutarlı ve etkin EKK tahmin edicileri elde edilebilir. Fakat, eşanlı denklem sistemlerine ait tahmin yöntemleri kullanılırsa, elde edilen tahmin ediciler tutarlı ama etkin değildirler.

Hausman eşanlılık testi aşağıdaki adımlar takip edilir:

1. Eşanlı denklem sisteminin indirgenmiş formu yazılır.
2. Eşanlılığı araştırılacak değişkene ait indirgenmiş form denklemi EKK yöntemi ile tahmin edilir. Bu sayade eşanlılığı araştırılacak değişkenin ve bu değişkenin bulunduğu yapısal denkleme ait hata terimini tahmini elde edilir.
3. Tahmni elde edilen değişken ve hata terimi uygun bir denklemde yerine yazılır.

Burada iki hipotez söz konusudur:

H_0 : Eşanlılık yoktur

H_1 : Eşanlılık vardır.

Bu yeni yapısal denklemin EKK tahmin yapılır Eğer, hata terimine ait yapısal katsayının hesaplanan t değeri t nin tablo değerinden büyükse H_0 reddedilir. Katsayı istatistiksel olarak anlamlıdır denir. O halde, endojen değişken ile hata terimi ilişkilidir. Eşanlılık vardır. Eğer endojen değişken sayısı birden fazla ise t testi yerine F testi uygulanır.

5. İKİ AŞAMALI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Eşanlı denklem sistemlerinde herhangi bir m -inci denklemin tahmini için farklı tahmin yöntemleri kullanılır. Sayma koşuluna göre $k_2 \geq m_1$ şartını sağlayan aşırı belirlenmiş bir yapısal denklemin yapısal katsayı parametrelerinin tutarlı tahmin edicilerini elde etmek için 2AEKK yöntemi kullanılır. 2AEKK yöntemi isminden de anlaşılacağı üzere iki aşamadan oluşur:

1. Aşama: Her bir m-inci yapısal denklem için indirgenmiş form denklemleri yazılır. İndirgemiş form denklemlerinin indirgenmiş form katsayıları EKK ile tahmin edilir. İndirgenmiş form denklemlerinin EKK tahminlerinden hareketle, eşanlı denklem sistemindeki endojen değişkenlerin tahmin değerleri ile gerçek değerleri arasındaki ilişki bulunur.

2. Aşama: Tahmini yapılacak herhangi bir m -inci deklemin sağ tarafında yer alan endojen değişkenler yerine, indirgenmiş form denklemlerin EKK tahmini ile elde edilen endojen değişkenlerin tahmin değerleri yazılır. Ardından m-inci denklem EKK ile tahmin edilir.

5.1. İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Bu çalışmada, yapısal model (3.8.) in 1-inci yapısal denkleminin aşırı belirlenmiş olduğu farzedilmiş, bu bağlamda 1-inci yapısal denklemin 2AEKK tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur:

(3.51.) e göre

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_1\beta_1 + Y_2\beta_2 + X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + \varepsilon_1 \\ &= Y_1\beta_1 + X_1\gamma_1 + \varepsilon_1 \end{aligned} \qquad (5.1.)$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (5.1.) e EKK uygulanırsa Y_1 ile ε_1 arasındaki ilişkiden dolayı tutarlı tahmin edicilerin elde edilemiyeceği bölüm 3.5. da gösterilmişti. m-inci denklem aşırı belirlenmiş $\left(k_2 \geq m_1\right)$ ise, EKK yöntemi yerine 2AEKK kullanılmalıdır. 2AEKK yöntemine göre önce $\hat{Y}_1$ bulunur. Ardından, (5.1.) denkleminde Y_1 yerine $\hat{Y}_1$ yazılır ve EKK yöntemi uygulanarak $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\gamma}_1$ tahminleri elde edilir. (5.1.) denklemindeki yapısal katsayılar β_1 ve γ_1 katsayılarının 2AEKK tahmin edicileri $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\gamma}_1$ in bulunması için aşağıdaki adımlar takip edilir:

1. Adım: M tane yapısal denklemden oluşan yapısal model (3.8.) in indirgenmiş form matrisi (3.36.) dan

$$Y = X\Pi + V \tag{5.2.}$$

idi. (5.2.) eşitliğinde Π nin EKK tahmin edicisi

$$\hat{\Pi} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= X\hat{\Pi} \\ &= X\left(X'X\right)^{-1} X'Y \end{aligned} \tag{5.3.}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, eşitlik (3.58.) yardımıyla (5.2.) eşitliği 1-inci denkleme karşılık gelecek şekilde parçalı matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} y_1 & \vdots & Y_1 & \vdots & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{*1} & \vdots & \Pi_{11} & \vdots & \Pi_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_{*2} & \vdots & \Pi_{21} & \vdots & \Pi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & \vdots & V_1 & \vdots & V_2 \end{bmatrix} \tag{5.4.}$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (5.4.) e göre

$$Y_1 = X_1\Pi_{11} + X_2\Pi_{21} + V_1$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \cdots \\ \Pi_{21} \end{bmatrix} + V_1$$

dir. $X = \begin{bmatrix} X_1 & \vdots & X_2 \end{bmatrix}$ ve $\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \cdots \\ \Pi_{21} \end{bmatrix}$ olmak üzere (5.4.) eşitliği

$$Y_1 = X\Pi_1 + V_1 \tag{5.5.}$$

olarak yazılır. (5.5.) eşitliğinden Π_1 in EKK tahmin edicisi $\hat{\Pi}_1$

$$\hat{\Pi}_1 = \left(X'X\right)^{-1} X'Y_1 \tag{5.6.}$$

O halde,

$$\hat{Y}_1 = X\hat{\Pi}_1$$

$$\hat{V}_1 = Y_1 - X\hat{\Pi}_1$$

dir.

2. Adım: (5.1.) den

$$y_1 = \left(Y_1 - \hat{V}_1\right)\beta_1 + X_1\gamma_1 + \varepsilon_1 + \hat{V}_1\beta_1$$

$$= \hat{Y}_1\beta_1 + X_1\gamma_1 + \varepsilon_1 + \hat{V}_1\beta_1$$

$$= \hat{Y}_1\beta_1 + X_1\gamma_1 + \tilde{\varepsilon}_1 \qquad (5.7.)$$

olur ve

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \hat{V}_1\beta_1$$

dir. (5.7.) eşitliği

$$y_1 = \left[\hat{Y}_1 \;\vdots\; X_1\right]\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1\end{bmatrix} + \tilde{\varepsilon}_1 \qquad (5.8.)$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$Z_{1*} = \left[\hat{Y}_1 \;\vdots\; X_1\right],\ \delta_1 = \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_1\end{bmatrix} \text{ ve}$$

olmak üzere (5.8.) eşitliği

$$Y_1 = Z_{1*}\delta_1 + \tilde{\varepsilon}_1$$

biçiminde yazılır. δ_1 in EKK tahmin edicisi $\hat{\delta}_{1*}$

$$\hat{\delta}_{1*} = \left(Z_{1*}^{'} Z_{1*} \right)^{-1} Z_{1*}^{'} y_1 \tag{5.9.}$$

dir. $\hat{\delta}_{1*}$ a 2AEKK tahmin edicisi denir. $Z_{1*} = \left[\hat{Y}_1 \ \vdots \ X_1 \right]$ eşitliği (5.9.) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{1*} &= \left(\left[\hat{Y}_1 \ \vdots \ X_1 \right]^{'} \left[\hat{Y}_1 \ \vdots \ X_1 \right] \right)^{-1} \left[\hat{Y}_1 \ \vdots \ X_1 \right]^{'} y_1 \\
&= \left(\begin{bmatrix} \hat{Y}_1^{'} \\ \cdots \\ X_1^{'} \end{bmatrix} \left[\hat{Y}_1 \ \vdots \ X_1 \right] \right)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^{'} \\ \cdots \\ X_1^{'} \end{bmatrix} y_1 \\
&= \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^{'}\hat{Y}_1 & \vdots & \hat{Y}_1^{'}X_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ X_1^{'}\hat{Y}_1 & \vdots & X_1^{'}X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^{'} y_1 \\ \cdots \\ X_1^{'} y_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.10.}$$

olur.

$$\hat{V}_1 = Y_1 - X\hat{\Pi}_1$$

$$X^{'}\hat{V}_1 = X^{'}Y_1 - X^{'}X\left(X^{'}X \right)^{-1} X^{'}Y_1 = 0 \tag{5.11.}$$

$$\hat{V}_1^{'}\hat{V}_1 = \left(Y_1^{'} - \hat{\Pi}_1 X^{'} \right)\hat{V}_1 = \hat{Y}_1^{'}\hat{V}_1 \tag{5.12.}$$

dir. $\hat{Y}_1 = Y_1 - \hat{V}_1$ olmak üzere, (5.11.) ve (5.12.) eşitliklerinden yaralanarak (5.10.) eşitliğinde

$$\hat{Y}_1^{'}\hat{Y}_1 = \left(Y_1 - \hat{V}_1 \right)^{'} \left(Y_1 - \hat{V}_1 \right) = Y_1^{'}Y_1 - \hat{V}_1^{'}\hat{V}_1 \tag{5.13.}$$

$$X_1^{'}\hat{Y}_1 = X_1^{'}(Y_1 - \hat{V}_1) = X_1^{'}Y_1 - X_1^{'}\hat{V}_1 = X_1^{'}Y_1 - 0 = X_1^{'}X\left(X^{'}X \right)^{-1} X^{'}Y_1 \tag{5.14.}$$

$$X_1^{'}X_1 = X_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}X_1 \tag{5.15.}$$

dir. (5.13.), (5.14.) ve (5.15.) eşitlikleri (5.10.) yerine yazılırsa

$$\hat{\delta}_{1*} = \begin{bmatrix} Y_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}Y_1 & \vdots & Y_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}X_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ X_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}Y_1 & \vdots & X_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}y_1 \\ \cdots \\ X_1^{'}X\left(X^{'}X\right)^{-1}X^{'}y_1 \end{bmatrix}$$

dir.

5.2. İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Tutarlılığı

2AEKK tahmin edicisi $\hat{\delta}_{1*}$ yansız tahmin edici değildir ama tutarlı bir tahmin edicidir. $\hat{\delta}_{1*}$ in yanlılığı ve tutarlılığı eşitlik (5.9.) yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{1*} &= \left(Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{-1}Z_{1*}^{'}y_1 \\ &= \left(Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{-1}Z_{1*}^{'}\left(Z_{1*}\delta_1 + \tilde{\varepsilon}_1\right) \\ &= \delta_1 + \left(Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{-1}Z_{1*}^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \end{aligned} \tag{5.16.}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\delta}_{1*}\right] &= \delta_1 + E\left[\left(Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{1}Z_{1*}^{'}\tilde{\varepsilon}_1\right] \\ &\neq \delta_1 \end{aligned}$$

olur. Çünkü, $E\left[\left(Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{1} Z_{1*}^{'}\tilde{\varepsilon}_1\right]\neq 0$ dır. O halde, $\hat{\delta}_{1*}$ yansız tahmin edici değildir.

(5.16.) eşitliğinden

$$p\lim\hat{\delta}_{1*}=\delta_1+p\lim\left(\frac{1}{T}Z_{1*}^{'}Z_{1*}\right)^{-1}p\lim\left(\frac{1}{T}Z_{1*}^{'}\tilde{\varepsilon}_1\right) \tag{5.17.}$$

dir. (5.17.) eşitliğinde

$$p\lim\left(\frac{1}{T}Z_{1*}^{'}\tilde{\varepsilon}_1\right)=\begin{bmatrix} p\lim\frac{1}{T}\hat{Y}_1^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \\ \cdots \\ p\lim\frac{1}{T}X_1^{'}\varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p\lim\frac{1}{T}\hat{\Pi}_1^{'}X^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \\ \cdots \\ p\lim\frac{1}{T}X_1^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \end{bmatrix},\quad \hat{Y}=X\hat{\Pi}_1$$

$$=\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_1^{'}p\lim X^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \\ \cdots \\ p\lim\frac{1}{T}X_1^{'}\tilde{\varepsilon}_1 \end{bmatrix}$$

$$=0 \tag{5.18}$$

olur. (5.18.) eşitliğine göre (5.17.) eşitliği

$$p\lim\hat{\delta}_{1*} = \delta_1 + p\lim\left(\frac{1}{T}Z_{1*}'Z_{1*}\right)^{-1}.0$$

$$= \delta_1 \qquad (5.19.)$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (5.19.) dan $\hat{\delta}_{1*}$, δ_1 in tutarlı bir tahmin edicisidir.

6. TÜRKİYE İÇİN PARA ARZI-TALEBİ EŞANLI DENKLEM MODELİNİN 2AEKK YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

6.1. Veri Tanımlama ve Uygulama

Türkiye için para arzı-talebi modelinde kullanılan veriler 2000:4 (2000 yılının son çeğreği) ile 2018:4'ü (2018 yılının son çeğreğini) kapsamaktadır. Modelde kullanılan para arzı, gayri safi yurtiçi hasıla , nominal faiz yüzde değişim ve nominal döviz kuruna ait üçer aylık veriler Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası (TCMB) Elektronik Veri Dağıtım Sistemi (EVDS) den alınmıştır. Verilere 26 Haziran 2019 tarihinde ulaşıldı. Ayrıca bir önceki döneme ait değişkenler EVDS'de var olduğundan eksik veri sorunu yaşanmamıştır. Türkiye için para arzı-talebi modeli

$$M2_t^T = \alpha_0 + \alpha_1 GSYH_t + \alpha_2 GF_t + \alpha_3 DK_t + \varepsilon_{1t} \quad \text{Para Talebi Fonksiyonu}$$

$$M2_t^A = \lambda_0 + \lambda_1 GSYH_t + \lambda_2 M2_{t-1} + \lambda_3 GSYH_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad \text{Para Arzı Fonksiyonu}$$

$$M2_t = M2_t^T = M2_t^A \quad \text{Denge Şartı}$$

biçiminde oluşturuldu. Nominal faiz hariç tüm değişkenlerin doğal logaritması alındı. Böylece parametre katsayıları değişkenlerin ölçü birimlerinden bağımsız olarak esneklik şeklinde tahmin edilir. Buna göre, model

$$\ln M2_t^T = \alpha_0 + \alpha_1 \ln GSYH_t + \alpha_2 GF_t + \alpha_3 \ln DK_t + \varepsilon_{1t} \quad \text{Para Talebi Fonksiyonu}$$

$$\ln M2_t^A = \lambda_0 + \lambda_1 \ln GSYH_t + \lambda_2 \ln M2_{t-1} + \lambda_3 \ln GSYH_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad \text{Para Arzı Fonksiyonu}$$

$$\ln M2_t = \ln M2_t^T = \ln M2_t^A \quad \text{Denge Şartı}$$

(6.1.)

biçiminde yazılır. (6.1.) para arzı-talebi modelinde t zamanda

$M2$ = Reel parasal büyüklük

$M2^T$ = Reel para talebi

$M2^A$ = Reel para arzı

olmak üzere (6.1.) para arzı-talebi modelinde kullanılan değişkenlerin tablosu aşağıdaki gibidir:

Çizelge 6.1. Uygulamada Kullanılan Değişkenler

$M2$	Reel parasal büyüklük (TL) $GSYH$ 2009=100 deflatörü ile deflate edilerek bulunmuştur. $Defalatör_t$ =(Nominal $GSYH_t$ / Reel $GSYH_t$) $x100$
$M2_{-1}$	Bir önceki döneme ait reel para arzı (TL)
$GSYH$	Reel Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (TL) Harcamalar yöntemiyle zincirlenmiş hacim verileri kullanılmıştır.
$GSYH_{-1}$	Bir önceki döneme ait reel Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (TL)
DK	Nominal döviz kuru (TL) Bir ABD dolarının TL cinsinden alış değeridir.
GF	(ON) Gerçekleşen Basit Faiz Oranı AĞIRLIKLI ORTALAMA (% Değişim) (1 Gecelik İşlem)

Uygulamada kullanılan $M2$ ve reel $GSYH$ değişkenlerinin düzey değer birimleri EVDS'de 1000 TL dir. Bu değişkenler modelde TL cinsinde kullanıldı.

Nominal $M2$ parasal büyüklükten reel $M2$ parasal büyüklük

Reel $M2_t$ = (Nominal $M2_t$ / $Deflatör_t$) x 100

formülü ile elde edilmiştir.

6.2. Para Arzı-Talebi Modelinin Rank Koşuluna Farklı Yaklaşımla Belirlenme Durumunun İncelenmesi

Para arzı-talebi modelinin rank koşuluna farklı yaklaşımla belirlenip belirlenmediğini bulmak için (6.1.) modeli üzerinde aşağıdaki düzenlemeler yapılır:

$$\ln M2_t^T = \alpha_0.1 + \alpha_1 \ln GSYH_t + \alpha_2 GF_t + \alpha_3 \ln DK_t + 0.M2_{t-1} + 0.GSYH_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$\ln M2_t^A = \lambda_0.1 + \lambda_1 \ln GSYH_t + 0.GF_t + 0.\ln DK_t + \lambda_2 \ln M2_{t-1} + \lambda_3 \ln GSYH_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (6.2.)$$

$$\ln M2_t^T - \alpha_0.1 - \alpha_1 \ln GSYH_t - \alpha_2 GF_t - \alpha_3 \ln DK_t - 0.M2_{t-1} - 0.GSYH_{t-1} = \varepsilon_{1t}$$
$$\ln M2_t^A - \lambda_0.1 - \lambda_1 \ln GSYH_t - 0.GF_t - 0.\ln DK_t - \lambda_2 \ln M2_{t-1} - \lambda_3 \ln GSYH_{t-1} = \varepsilon_{2t} \quad (6.3.)$$

(6.2.) ve (6.3.) eşitlikleri yardımıyla para arzı-talebi modelinde endojen ve önceden belirlenmiş değişkenlere ait yapısal katsayı çizelgesi aşağıdaki gibi oluşturulur:

Çizelge 6.2. Para Arzı-Talebi Modelinde Değişkenlere Ait Yapısal Katsayılar

	$\ln M2_t$	$\ln GSYH_t$	1	GF_t	$\ln DK_t$	$\ln M2_{t-1}$	$\ln GSYH_{t-1}$
Para Talebi	1	$-\alpha_1$	$-\alpha_0$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	0	0
Para Arzı	1	$-\lambda_1$	$-\lambda_0$	0	0	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$

Çizelge 6.2. yardımıyla para talebi fonksiyonunun belirlenme durumu incelemek için çizelgedeki para talebi fonksiyonun üzeri çizilir. Silinen denklemde

katsayı parametresi sıfır olan değişkenlerin bulunduğu sütundaki değerlerin oluşturduğu matris bulunur. Buna göre;

Çizelge 6.3. Para Talebi Fonksiyonun Belirlenme Durumu

	$\ln M2_t$	$\ln GSYH_t$	1	GF_t	$\ln DK_t$	$\ln M2_{t-1}$	$\ln GSYH_{t-1}$
Para Talebi	~~1~~	~~α_1~~	~~α_0~~	~~α_2~~	~~α_3~~	~~0~~	~~0~~
Para Arzı	1	$-\lambda_1$	$-\lambda_0$	0	0	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

olur. $M=2$ olmak üzere $M-1=2-1=1$ tane tamamı sıfır olmayan satır var olduğu için para talebi fonksiyonu belirlenmiştir.

Para arzı fonksiyonu için belirlenme durumu:.

Çizelge 6.4. Para Arzı Fonksiyonun Belirlenme Durumu

	$\ln M2_t$	$\ln GSYH_t$	1	GF_t	$\ln DK_t$	$\ln M2_{t-1}$	$\ln GSYH_{t-1}$
Para Talebi	1	$-\alpha_1$	$-\alpha_0$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	0	0
Para Arzı	~~1~~	~~$-\lambda_1$~~	~~$-\lambda_0$~~	~~0~~	~~0~~	~~$-\lambda_2$~~	~~$-\lambda_3$~~

Silinen denklemde katsayı parametresi sıfır olan değişkenin bulunduğu sütundaki değerlerin oluşturduğu matris

$$\begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

tür. $M=2$ olmak üzere $M-1=2-1=1$ tane tamamı sıfır olmayan satır var olduğu için para talebi fonksiyonu belirlenmiştir.

6.3. Para Arzı-Talebi Modelinin Sıra Koşuluna Göre Belirlenme Durumunun İncelenmesi

M yapısal modeldeki toplam denklem sayısı veya toplam endojen değişken sayısı ve K , önceden belirlenmiş değişkenlerin sayısıdır. Buna göre,

$M = 2$

$K = 5$

Para talebi fonksiyonun belirlenme durumu:

m_1 = Belirlenmesi incelenen para talebi fonksiyonundaki toplam endojen değişken sayısının 1 eksiğidir. $m_1 = 2 - 1 = 1$ ($\ln GSYH_t$)

m_2 = Belirlenmesi incelenen para talebi fonksiyonunda var olmayan ama modelde diğer fonksiyonda yer alan endojen değişkenlerin toplam sayısıdır. m_2 = 0

k_1 = Belirlenmesi incelenen para talebi fonksiyonunda var olan önceden belirlenmiş değişkenlerin toplam sayısı. $k_1 = 3$ (GF_t , $\ln DK_t$, 1)

k_2 = Belirlenmesi incelenen para talebi fonksiyonunda var olmayan ama modelde diğer fonksiyonda yer alan önceden belirlenmiş değişkenlerin toplam sayısı. $k_2 = 2$ ($\ln M2_{t-1}$, $\ln GSYH_{t-1}$)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 2 > m_1 = 1$ olduğundan, para talebi fonksiyonu aşırı belirlenmiştir.

Para arzı fonksiyonun belirlenme durumu:

m_1 = Belirlenmesi incelenen para arzı fonksiyonundaki toplam endojen değişken sayısının 1 eksiğidir. $m_1 = 2 - 1 = 1$ ($\ln GSYH_t$)

m_2 = Belirlenmesi incelenen para arzı fonksiyonunda var olmayan ama modelde diğer fonksiyonda yer alan endojen değişkenlerin toplam sayısıdır. $m_2 = 0$

k_1 = Belirlenmesi incelenen para arzı fonksiyonunda var olan önceden belirlenmiş değişken sayısının toplamıdır. $k_1 = 3$ ($\ln M2_{t-1}$, $\ln GSYH_{t-1}$ ve 1)

k_2 = Belirlenmesi incelenen para arzı fonksiyonunda var olmayan ama modelde diğer fonksiyonda yer alan önceden belirlenmiş değişken sayısının toplamıdır. $k_2 = 2$ (GF_t, $\ln DK_t$)

Sıra koşuluna göre $k_2 = 2 > m_1 = 1$ olduğundan, para arzı fonksiyonu aşırı belirlenmiştir.

Denge şartı denklemleri için belirlenme durumu incelenmez.

6.4. Para Arzı-Talebi Modelinde Hausman Testi

(6.1.) para arzı-talebi modeli için

$$\ln GSYH_t = \pi_{11} + \pi_{12} GF + \pi_{13} \ln DK_t + \pi_{14} \ln M2_{t-1} + \pi_{15} \ln GSYH_{t-1} + v_{1t} \quad (6.4.)$$

indirgenmiş form denklemlerinden biridir. (6.4.) indirgenmiş form denklemi EKK ile tahmin edilirse

$$\ln \hat{GSYH}_t = \hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{12} GF + \hat{\pi}_{13} \ln DK_t + \hat{\pi}_{14} \ln M2_{t-1} + \hat{\pi}_{15} \ln GSYH_{t-1}$$

$$\ln \hat{GSYH}_t = 12,479 + 0,000 GF + 0,173 \ln DK_t + 0,174 \ln M2_{t-1} + 0,374 \ln GSYH_{t-1}$$

t	(5,586)	(1,374)	(3,840)	(4,582)	(3,010)
$Sig.$	(0,000)	(0,174)	(0,000)	(0,000)	(0,004)

$R^2 = 0,911377$

bulunur. $\ln GSYH_t = \ln G\hat{SYH}_t + \hat{v}_{1t}$ olduğundan (6.1.) para talebi fonksiyonunda $\ln GSYH_t$ yerine $\ln G\hat{SYH}_t + \hat{v}_{1t}$ yazılır. Para talebi fonksiyonuna tekrar EKK uygulanır.

$$\ln M2_t^T = \alpha_0 + \alpha_1 \ln G\hat{SYH}_t + \alpha_2 GF_t + \alpha_3 \ln DK_t + \alpha_1 \hat{v}_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$\ln \hat{M}2_t^T = -65,937 + 3,534 \ln G\hat{SYH}_t - 0,002 GF_t - 0,870 \ln DK_t + 0,232 \hat{v}_{1t}$$

t	(-26,470)	(36,891)	(-5,453)	(-13,325)	(1,495)
$Sig.$	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,139)

$R^2 = 0,975$

(6.5.)

olur.

H_0 = Eşanlılık yoktur. $E\left[\ln G\hat{SYH}_t, \varepsilon_{1t}\right] = 0$

H_1 = Eşanlılık vardır. $E\left[\ln G\hat{SYH}_t, \varepsilon_{1t}\right] \neq 0$

$\hat{v}_{1t}$ nın parametre katsayısı $\hat{\alpha}_1 = 0,232$ için % 5 hata payına göre anlamsızdır. H_0 reddedilmez. Eşanlılık yoktur .

Pindyck ile Rubinfeld etkin tahmin için (6.5.) denkleminde $\ln G\hat{SYH}_t$ yerine $\ln GSYH_t$ değişkeninin kullanılmasını önermiştir (Gujarati, 2004). Bu bilgiden yola çıkarak, (6.1.) para talebi modelinde $\ln GSYH_t$ yerine $\ln GSYH_t + \hat{v}_{1t}$ yazılır ve EKK uygulanır.

$$\ln M2_t^T = \alpha_0 + \alpha_1 \ln GSYH_t + \alpha_2 GF_t + \alpha_3 \ln DK_t + \alpha_1 \hat{v}_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$\ln \hat{M}2_t^T = -65,945 + 3,534 \ln GSYH_t - 0,002 GF_t - 0,870 \ln DK_t - 3,302 \hat{v}_{1t}$$

t	(-26,470)	(36,892)	(-5,453)	(-13,325)	(-18,099)
$Sig.$	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)

R^2 =0,975

bulunur.

H_0 = Eşanlılık yoktur. $E\left[\ln GSYH_t, \varepsilon_{1t}\right] = 0$

H_1 = Eşanlılık vardır. $E\left[\ln GSYH_t, \varepsilon_{1t}\right] \neq 0$

$\hat{v}_{1t}$ nin parametre katsayısı $\hat{\alpha}_1 = -3,302$ için %5 anlamlılık düzeyinde $\hat{v}_{1t}$ nin katsayısı istatistisel olarak anlamlıdır. H_0 reddedilir. Eşanlılık vardır.

(6.1.) para arzı fonksiyonunda $\ln GSYH_t$ yerine $\ln G\hat{SYH}_t + \hat{v}_{1t}$ yazılır. O halde, para arzı fonksiyonu

$$\ln M2_t^A = \lambda_0 + \lambda_1 \ln G\hat{SYH}_t + \lambda_2 \ln M2_{t-1} + \lambda_3 \ln GSYH_{t-1} + \lambda_1 \hat{v}_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

$$\ln M2_t^A = 1,007 - 0,465 \ln G\hat{SYH}_t + 0,999 \ln M2_{t-1} + 0,429 \ln GSYH_{t-1} + 0,232 \hat{v}_{1t}$$

t	(0,599)	(-2,404)	(25,434)	(3,115)	(2,545)
$Sig.$	(0,551)	(0,019)	(0,000)	(0,003)	(0,013)

$R^2 = 0,991$

H_0 = Eşanlılık yoktur. $E\left[\ln G\hat{SYH}_t, \varepsilon_{2t}\right] = 0$

H_1 = Eşanlılık vardır. $E\left[\ln G\hat{SYH}_t, \varepsilon_{2t}\right] \neq 0$

$\hat{v}_{2t}$ nin parametre katsayısı $\hat{\lambda}_1 = 0,232$ için %5 anlamlılık düzeyinde $\hat{v}_{1t}$ nin katsayısı istatistiksel olarak anlamlıdır. H_0 reddedilir. Eşanlılık vardır.

(6.1.) para-arzı talebi modelinde her bir davranış deklemi için eşanlılık var olduğuna göre parametre katsayı tahminleri için 2EKK yöntemi kullanılabilir.

6.5. Para Arzı-Talebi Modelinin İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemiyle İncelenmesi

Para arzı-talebi modelinin parametre tahminleri IBM SPSS Statistics 21 paket programı ile elde edildi. Para talebi ve arzı denklemlerinin 2AEKK ile tahmini sonuçları

$$\ln \hat{M}2_t^T = -65,935 + 3,534 \ln GSYH_t - 0,002 GF_t - 0,870 \ln DK_t$$

t	(-9,640)	(13,435)	(-1,986)	(-4,853)
$Sig.$	(0,000)	(0,000)	(0,051)	(0,000)

$R^2 = 0,837$

$\bar{R}^2 = 0,830$

$F = 118,452 \quad Sig.(0,000)$

$$\ln M2_t^A = 1,007 - 0,465 \ln GSYH_t + 0,999 \ln M2_{t-1} + 0,429 \ln GSYH_{t-1}$$

t	(0,443)	(-1,776)	(18,791)	(2,301)
$Sig.$	(0,659)	(0,080)	(0,000)	(0,024)

$R^2 = 0,984$

$\bar{R}^2 = 0,984$

$F = 1437,746 \quad Sig.(0,000)$

biçimindedir.

Para talebi, gelir ve fiyat düzeyi gibi iki faktöre bağlı olarak değişmektedir. Gelir düzeyinin artması para talebini artırır (Öztürk ve Durgut, 2011). Para talebi fonksiyonunda $GSYH$ değişkenindeki %1 arttığında $M2^T$ değişkeninde % 3,534 artış olmuştur. GF %5 anlamlılık düzeyinde anlamsız çıkmıştır. DK değişkeni %1 arttığında $M2^A$ değişkeni %0,870 azalır.

Para arzı fonksiyonunda $GSYH$ değişkeni %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı değildir. $M2_{-1}$ değişkeni %1 arttığında $M2^A$ değişkeni % 0,999 artar. $GSYH_{-1}$ değişkeni %1 arttığında $M2^A$ değişkeni % 0,429 artar.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Eşanlı denklem sistemlerinde endojen değişkenler hata terimleri ile ilişkilidir. Bu yüzden, en küçük kareler (EKK) yöntemi ile yapılan parametre tahminleri yanlı ve tutarsız olacaktır. Eşanlı denklem sistemlerinde parametre tahminlerinin yansız ve tutarlı olabilmeleri için tek denklem ve sistem tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çalışmanın konusu olan 2AEKK yönteminde bir tek denklem tahmin yöntemidir. 2AEKK yönteminde amaç, eşanlı modelde tam ve aşırı belirlenmiş değişkenlerin tutarlı tahminlerini elde etmektir.

Türkiye'nin 2000:4-2018:4 dönemine ait iktisadi verilerden oluşturulan para arzı-talebi modelinin eşanlılığı Hausman testi ile araştırıldı. Her iki fonksiyonun eşanlı olduğu gösterildi. Ardından para talebi ve para arzı fonksiyonlarının her biri için ayrı ayrı belirlene durumları incelendi. İnceleme sonucunda her iki fonksiyonun da aşırı belirlenmiş olduğu sonucuna varıldı.

Para talebi ve para arzı denklemlerine 2AEKK yöntemleri uygulandı. Değişkenlerin genel olarak, %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı oldukları tespit edildi. Para talebi fonksiyonunda $GSYH$ değişkenindeki %1 arttığında $M2^T$ değişkeninde % 3,534 artış olur. GF %5 anlamlılık düzeyinde anlamsızdır. DK değişkeni %1 arttığında $M2^A$ değişkeni %0,870 azalır. Para arzı fonksiyonunda $GSYH$ değişkeni %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı değildir. $M2_{-1}$ değişkeni %1 arttığında $\hat{M}2^A$ değişkeni % 0,999 artar. $GSYH_{-1}$ değişkeni %1 arttığında $\hat{M}2^A$ değişkeni % 0,429 artar.

R^2, bağımlı değişkendeki değişimin yüzde kaçının bağımsız değişkenler tarafından açıklandığını gösterir. Para talebi fonksiyonun belirlilik katsayısı, 0,837 bulundu. Para arzı fonksiyonunun belirlilik katsayısı 0,984 olarak elde edildi. Ayrıca, para talebi fonksiyonunda $\bar{R}^2$ değeri, $M2^T$ nin % 83 kadarının

denklemdeki diğer değişkenler tarafından açıklandığını gösterir. Para arzı fonksiyonunda $\bar{R}^2$ değeri $M2^A$ nın yaklaşık % 98 inin denklemdeki diğer değişkenler tarafından açıklandığını gösterir.

Sonraki çalışmalarda eşanlı modellerde değişkenler zaman serisi açısından analiz edilerek, değişkenler durağan hale getirilip 2AEKK yöntemi kullanıldığında anlamlı tahminler elde etmek için önerilen eşanlı model yeniden kurulabilir.

KAYNAKLAR

Akın, F., 2002. Ekonometri. Ekin Kitabevi, Bursa, 742.

Aksakal, S., 1986. İki Aşamalı En Küçük Kareler Üzerine Bir Araştırma. Ulusal Tez Merkezi, 72.

Basmann, R. L., 1957. A Generalized Classical Method of Lineer Estimation of Coefficient in a Structural Equation. Econometrica, Vol 25(1):77-83

Dhrymes, P. J., 1970. Econometrics: Statistical Foundations and Applications. Harper & Row, New York, 592.

Ertek, T., 1996. Ekonometriye Giriş. Beta Yayınları, Genişletilmiş 2. Baskı, İstanbul, 446.

Green, W. H., 1993. Econometric Analysis. Macmillan, 2nd ed., New York, 791.

Griffiths, E. W., Hill, R. C., Judge, G. G., 1993. Learning and Practicing Econometrics. Wiley, New York, 866.

Gujarati, D. N., 2004. Basic Econometrics, Fourth Edition. McGraw-Hill Companies, Boston, 1002.

Gujarati, D. N., Porter, D. C., 2012. Temel Ekonometri. Literatür Yayıncılık, 5. Basımdan Çeviri, İstanbul, 951.

Güriş, S., Çağlayan, E., 2010. Ekonometri: Temel Kavramlar. Der Yayınları, Genişletilmiş 3. Basım, İstanbul, 807.

Havelmo, T., 1944. The Probability Approach In Econometrics. Econometrica, Vol. 12:1-115.

Intriligator, M. D., Bodkin R. G., Hsiao C., 1996. Econometric Models, Techeniques, And Applications. Printece-Hall, 2nd ed., Upper Saddle River, 654.

Judge, G. G., Hill, R. C., Griffiths, W.E., Lütkepohl, H., Lee, T. C., 1988. Introduction to The Theory and Practice of Econometrics. Wiley, 2nd ed., New York, 1024 .

Kılıçbay, A., 1980. Ekonometrinin Temelleri. Has Kurtulmuş, İstanbul, 677.

Koopmans, T. C., 1949. Identifications Problems In Economic Model Construction. Econometrica, Vol. 17(2):125-144.

Maddala, G. S., 1992. Introduction to Econometrics. Macmillan Publishing Company, 2nd ed., New York, 631.

Öztürk N., Durgur. D., 2011. Faiz Oranlarının Belirleyicileri: Türkiye İçin Apirik Bir Analiz. Uluslararası Alanya İşletme Fakültesi Dergisi, 3(1):117-144

Seddighi H. R., Lawler K. A., Katos A.V., 2000. Econometrics: a practical approach. Routledge, London, 396.

Theil, H., 1971. Principles of Econometrics. Wiley, New York, 736.

Toutenburg, H., 1982. Prior Information in Linear Models. Wiley, Chichester, 215.

Üçdoğruk, Ş., 1990. İki ve Üç Aşamalı En Küçük Kareler Yönteminin Karşılaştırılması ve Türkiye Çimento Sanayiinde Uygulanması. Ulusal Tez Merkezi, 200.

İNTERNET, 2019

https://www.tcmb.gov.tr

(Erişim tarihi: 26 Haziran 2019)

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Adana'da doğdu. İlkokulu Mimar Kemal İlkokulu'nda, ortaokulu 24 Kasım Ortaokulu'nda, liseyi Sabancı Anadolu Tekstil ve Teknik Meslek Lisesi'nde okudu. 1995 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi matematik bölümünü kazandı. 1999 yılında üniversiteden mezun oldu. 2000 yılında Hayat'ın Hassa ilçesinin Hacılar Köyü'nün Hacılar İlköğretim Okulu'na matematik öğretmeni olarak atandı. 2002-2004 yıllarında Adana Mustafalar Köyü Mustafalar İlköğretim Okulu'nda, 2004-2009 yılında Niğde Ulukışla Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde, 2009-2016 Adana Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'de matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2016 yılından bu yana Adana Seyhan Şehit Bora Süelkan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'de matematik öğretmeni olarak çalışmakta.

EKLER

Ek 1. Harcamalar Yöntemiyle Cari Fiyatlarla *GSYH* (TL), Hacamalar Yöntemiyle Zincirlenmiş Hacim *GSYH*(TL) (2009=100), (TCMB, 2019)

ZAMAN	Cari Fiyatlarla (Nominal) *GSYH*	Zincirlenmiş Hacim (Reel) *GSYH*
2000:4	49008568850,00	195495867890,00
2001:1	44785578600,00	158010736840,00
2001:2	57482257280,00	166907420360,00
2001:3	70199342750,00	187146657720,00
2001:4	72961580930,00	175893043670,00
2002:1	69108200110,00	156240818400,00
2002:2	83561899670,00	180027495730,00
2002:3	101675779720,00	200396240850,00
2002:4	105012991920,00	195530910820,00
2003:1	96288944700,00	166572641380,00
2003:2	111329662390,00	186234248980,00
2003:3	129995984400,00	211935971760,00
2003:4	130400554890,00	208515993190,00
2004:1	118274223960,00	184483563700,00
2004:2	137567375750,00	207779565290,00
2004:3	159874958760,00	229426088130,00
2004:4	161306938830,00	226145216610,00
2005:1	141042563350,00	202110358840,00
2005:2	161871869540,00	224193084240,00
2005:3	185021847570,00	248041068000,00
2005:4	185766662290,00	249878561430,00
2006:1	161135992520,00	215560378130,00
2006:2	193081372660,00	245630972400,00
2006:3	217039426460,00	263200767400,00
2006:4	217970763480,00	265540474030,00
2007:1	189593408030,00	233397018570,00
2007:2	212565694630,00	253514797520,00
2007:3	237359324520,00	272630928320,00
2007:4	240942451970,00	280187986750,00
2008:1	217948233820,00	250227081610,00
2008:2	249483189180,00	259265265210,00
2008:3	268726652430,00	275484496920,00
2008:4	258624782990,00	263542226540,00
2009:1	211255559340,00	214254085070,00
2009:2	241220604550,00	241921346800,00
2009:3	271840902500,00	271425750420,00
2009:4	274874781660,00	271590665770,00
2010:1	240272871660,00	229308819240,00
2010:2	278647853110,00	261564081940,00
2010:3	318732806050,00	295100313710,00

ZAMAN	Cari Fiyatlarla (Nominal) *GSYH*	Zincirlenmiş Hacim (Reel) *GSYH*
2010:4	322360447430,00	298023763690,00
2011:1	290610290520,00	256086479790,00
2011:2	336234139950,00	291548041440,00
2011:3	381898595370,00	329213217800,00
2011:4	385734139690,00	327619195770,00
2012:1	333164005460,00	273419987740,00
2012:2	382070001700,00	306215476290,00
2012:3	424705390320,00	341190118410,00
2012:4	429732717440,00	341334599250,00
2013:1	385824643400,00	296635923560,00
2013:2	441539542870,00	336244981930,00
2013:3	491263793920,00	371633382830,00
2013:4	491085106510,00	364819818240,00
2014:1	451269184240,00	322382481180,00
2014:2	487151068270,00	345987827920,00
2014:3	548625834710,00	385258426630,00
2014:4	557419788610,00	386454629020,00
2015:1	497687043160,00	333993552100,00
2015:2	562947770730,00	370760649570,00
2015:3	631512354710,00	407545859140,00
2015:4	646500325080,00	415425144700,00
2016:1	563890602000,00	350054756940,00
2016:2	631232693230,00	389037940590,00
2016:3	666176429470,00	404236509150,00
2016:4	747226024630,00	433036195870,00
2017:1	649272436410,00	368485418230,00
2017:2	734425574350,00	409659748410,00
2017:3	831878536650,00	450698377000,00
2017:4	890960204030,00	464822255500,00
2018:1	788833422680,00	395604465060,00
2018:2	885235862500,00	431564561490,00
2018:3	1016805837690,00	459005269180,00
2018:4	1010114366400,00	450961519990,00

Ek 2. Nominal Para Arzı *M*2 (TL), (TCMB, 2019)

ZAMAN	Nominal $M2$	ZAMAN	Nominal $M2$
2000:4	31912095000,00	2010:1	508028108000,00
2001:1	38487237000,00	2010:2	532117275000,00
2001:2	40377691000,00	2010:3	546109347000,00
2001:3	42112694000,00	2010:4	587261177000,00
2001.4	47241075000,00	2011:1	612916566000,00
2002:1	49514926000,00	2011:2	640200126000,00
2002:2	53112804000,00	2011:3	663929433100,00
2002.3	56180930000,00	2011:4	674409578800,00
2002:4	61879759000,00	2012:1	672025170200,00
2003:1	63775968000,00	2012:2	694307422800,00
2003:2	67813827000,00	2012:3	717634902500,00
2003:3	74970925000,00	2012:4	743043392500,00
2003:4	82712966000,00	2013:1	763323809340,00
2004:1	92551907000,00	2013:2	807047862000,00
2004:2	97409577000,00	2013:3	863518454810,00
2004:3	102914186000,00	2013:4	908004749130,00
2004:4	108539246000,00	2014:1	923284512780,00
2005:1	113719133000,00	2014:2	942329275060,00
2005:2	126567918000,00	2014:3	994181863500,00
2005:3	138520405000,00	2014:4	1015896401000,00
2005:4	238801377500,00	2015:1	1070387597790,00
2006:1	247906895600,00	2015:2	1119496259930,00
2006:2	278518255400,00	2015:3	1204691516480,00
2006:3	281859755100,00	2015:4	1189494063310,00
2006:4	297734742600,00	2016:1	1220420385480,00
2007:1	305514500600,00	2016.2	1261520713200,00
2007:2	320006674700,00	2016:3	1301517509980,00
2007:3	327465954200,00	2016:4	1406871437370,00
2007:4	344376752000,00	2017:1	1448942355500,00
2008:1	372435011600,00	2017:2	1516339665620,00
2008.2	379097979300,00	2017:3	1563132171180,00
2008:3	399314553900,00	2017:4	1628019067270,00
2008.4	436380325500,00	2018:1	1678038897260,00
2009:1	447061458200,00	2018:2	1807876856730,00
2009:2	450220461400,00	2018:3	2020814258000,00
2009:3	468103547000,00	2018:4	1939048094000,00
2009:4	493060975000,00		

Ek 3. (ON) Gerçekleşen Basit Faiz Oranı AĞIRLIKLI ORTALAMA (%) (1 Gecelik İşlem) (Yüzde Değişim), (TCMB, 2019)

ZAMAN	*GF*	ZAMAN	*GF*
2000:4	172,11	2010:1	-3,36
2001:1	86,13	2010:2	0,00
2001:2	-61,44	2010:3	-0,61
2001:3	-12,85	2010:4	-42,90
2001.4	-5,30	2011:1	-59,33
2002:1	-2,39	2011:2	0,00
2002:2	-14,59	2011:3	140,74
2002.3	-4,85	2011:4	51,48
2002:4	-4,04	2012:1	-7,83
2003:1	-1,99	2012:2	-0,83
2003:2	-7,03	2012:3	0,00
2003:3	-18,66	2012:4	0,00
2003:4	-20,40	2013:1	-5,44
2004:1	-8,14	2013:2	-16,99
2004:2	-9,57	2013:3	1,24
2004:3	-2,38	2013:4	22,73
2004:4	-8,35	2014:1	77,87
2005:1	-16,05	2014:2	5,18
2005:2	-11,07	2014:3	-16,66
2005:3	-3,03	2014:4	0,63
2005:4	-3,09	2015:1	-0,99
2006:1	-2,24	2015:2	17,34
2006:2	3,44	2015:3	11,42
2006:3	24,92	2015:4	8,30
2006:4	0,31	2016:1	-0,15
2007:1	0,00	2016.2	-8,17
2007:2	0,00	2016:3	-11,88
2007:3	-0,25	2016:4	-3,66
2007:4	-5,44	2017:1	8,28
2008:1	-6,58	2017:2	2,13
2008.2	1,00	2017:3	-0,02
2008:3	6,89	2017:4	-9,24
2008.4	-1,87	2018:1	-13,46
2009:1	-23,35	2018:2	42,95
2009:2	-23,69	2018:3	78,39
2009:3	-15,63	2018:4	22,32
2009:4	-16,57		

Ek 4. Nominal Döviz Kuru Alış (1 ABD Doları) (TL), (TCMB, 2019)

ZAMAN	*DK*	ZAMAN	*DK*
2000:4	0,68	2010:1	1,50
2001:1	0,78	2010:2	1,53
2001:2	1,18	2010:3	1,51
2001:3	1,39	2010:4	1,46
2001.4	1,52	2011:1	1,57
2002:1	1,36	2011:2	1,56
2002:2	1,40	2011:3	1,73
2002.3	1,64	2011:4	1,83
2002:4	1,61	2012:1	1,79
2003:1	1,65	2012:2	1,80
2003:2	1,51	2012:3	1,80
2003:3	1,39	2012:4	1,79
2003:4	1,44	2013:1	1,78
2004:1	1,33	2013:2	1,84
2004:2	1,45	2013:3	1,97
2004:3	1,47	2013:4	2,03
2004:4	1,44	2014:1	2,22
2005:1	1,32	2014:2	2,11
2005:2	1,36	2014:3	2,16
2005:3	1,33	2014:4	2,26
2005:4	1,35	2015:1	2,46
2006:1	1,33	2015:2	2,67
2006:2	1,45	2015:3	2,84
2006:3	1,49	2015:4	2,91
2006:4	1,45	2016:1	2,94
2007:1	1,40	2016.2	2,89
2007:2	1,33	2016:3	2,96
2007:3	1,28	2016:4	3,28
2007:4	1,19	2017:1	3,69
2008:1	1,20	2017:2	3,58
2008.2	1,26	2017:3	3,51
2008:3	1,20	2017:4	3,80
2008.4	1,53	2018:1	3,81
2009:1	1,65	2018:2	4,37
2009:2	1,57	2018:3	5,58
2009:3	1,49	2018:4	5,52
2009:4	1,48		

Ek 5. *GSYH* Deflatörü (2009=100)

ZAMAN	*Deflatör*	ZAMAN	*Deflatör*
2000:4	25,07	2010:1	104,78
2001:1	28,34	2010:2	106,53
2001:2	34,44	2010:3	108,01
2001:3	37,51	2010:4	108,17
2001.4	41,48	2011:1	113,48
2002:1	44,23	2011:2	115,33
2002:2	46,42	2011:3	116,00
2002.3	50,74	2011:4	117,74
2002:4	53,71	2012:1	121,85
2003:1	57,81	2012:2	124,77
2003:2	59,78	2012:3	124,48
2003:3	61,34	2012:4	125,90
2003:4	62,54	2013:1	130,07
2004:1	64,11	2013:2	131,31
2004:2	66,21	2013:3	132,19
2004:3	69,68	2013:4	134,61
2004:4	71,33	2014:1	139,98
2005:1	69,78	2014:2	140,80
2005:2	72,20	2014:3	142,40
2005:3	74,59	2014:4	144,24
2005:4	74,34	2015:1	149,01
2006:1	74,75	2015:2	151,84
2006:2	78,61	2015:3	154,95
2006:3	82,46	2015:4	155,62
2006:4	82,09	2016:1	161,09
2007:1	81,23	2016.2	162,25
2007:2	83,85	2016:3	164,80
2007:3	87,06	2016:4	172,56
2007:4	85,99	2017:1	176,20
2008:1	87,10	2017:2	179,28
2008.2	96,23	2017:3	184,58
2008:3	97,55	2017:4	191,68
2008.4	98,13	2018:1	199,40
2009:1	98,60	2018:2	205,12
2009:2	99,71	2018:3	221,52
2009:3	100,15	2018:4	223,99
2009:4	101,21		

Ek 6. Para Arzı-Talebi Modelinde Kullanılan Değişkelerin (*GF* Hariç) Doğal Logaritmaları

ZAMAN	$\ln M2_t$	$\ln M2_{t-1}$	$\ln GSYH_t$	$\ln GSYH_{t-1}$	$\ln DK_t$
2000:4	25,57	25,44	26,00	26,03	-0,39
2001:1	25,63	25,57	25,79	26,00	-0,25
2001:2	25,49	25,63	25,84	25,79	0,17
2001:3	25,44	25,49	25,96	25,84	0,33
2001:4	25,46	25,44	25,89	25,96	0,42
2002:1	25,44	25,46	25,77	25,89	0,30
2002:2	25,46	25,44	25,92	25,77	0,34
2002:3	25,43	25,46	26,02	25,92	0,50
2002:4	25,47	25,43	26,00	26,02	0,48
2003:1	25,43	25,47	25,84	26,00	0,50
2003:2	25,45	25,43	25,95	25,84	0,41
2003:3	25,53	25,45	26,08	25,95	0,33
2003:4	25,61	25,53	26,06	26,08	0,36
2004:1	25,70	25,61	25,94	26,06	0,28
2004:2	25,71	25,70	26,06	25,94	0,37
2004:3	25,72	25,71	26,16	26,06	0,39
2004:4	25,75	25,72	26,14	26,16	0,36
2005:1	25,82	25,75	26,03	26,14	0,28
2005:2	25,89	25,82	26,14	26,03	0,31
2005:3	25,95	25,89	26,24	26,14	0,29
2005:4	26,50	25,95	26,24	26,24	0,30
2006:1	26,53	26,50	26,10	26,24	0,28
2006:2	26,59	26,53	26,23	26,10	0,37
2006:3	26,56	26,59	26,30	26,23	0,40
2006:4	26,62	26,56	26,31	26,30	0,37
2007:1	26,65	26,62	26,18	26,31	0,34
2007:2	26,67	26,65	26,26	26,18	0,29
2007:3	26,65	26,67	26,33	26,26	0,25
2007:4	26,72	26,65	26,36	26,33	0,17
2008:1	26,78	26,72	26,25	26,36	0,18
2008:2	26,70	26,78	26,28	26,25	0,23
2008:3	26,74	26,70	26,34	26,28	0,19
2008:4	26,82	26,74	26,30	26,34	0,43
2009:1	26,84	26,82	26,09	26,30	0,50
2009:2	26,84	26,84	26,21	26,09	0,45
2009:3	26,87	26,84	26,33	26,21	0,40
2009:4	26,91	26,87	26,33	26,33	0,39
2010:1	26,91	26,91	26,16	26,33	0,41
2010:2	26,94	26,91	26,29	26,16	0,43
2010:3	26,95	26,94	26,41	26,29	0,41

ZAMAN	$\ln M2_t$	$\ln M2_{t-1}$	$\ln GSYH_t$	$\ln GSYH_{t-1}$	$\ln DK_t$
2010:4	27,02	26,95	26,42	26,41	0,38
2011:1	27,02	27,02	26,27	26,42	0,45
2011:2	27,04	27,02	26,40	26,27	0,44
2011:3	27,07	27,04	26,52	26,40	0,55
2011:4	27,07	27,07	26,52	26,52	0,60
2012:1	27,04	27,07	26,33	26,52	0,58
2012:2	27,04	27,04	26,45	26,33	0,59
2012:3	27,08	27,04	26,56	26,45	0,59
2012:4	27,10	27,08	26,56	26,56	0,58
2013:1	27,10	27,10	26,42	26,56	0,58
2013:2	27,14	27,10	26,54	26,42	0,61
2013:3	27,21	27,14	26,64	26,54	0,68
2013:4	27,24	27,21	26,62	26,64	0,71
2014:1	27,21	27,24	26,50	26,62	0,80
2014:2	27,23	27,21	26,57	26,50	0,75
2014:3	27,27	27,23	26,68	26,57	0,77
2014:4	27,28	27,27	26,68	26,68	0,82
2015:1	27,30	27,28	26,53	26,68	0,90
2015:2	27,33	27,30	26,64	26,53	0,98
2015:3	27,38	27,33	26,73	26,64	1,04
2015:4	27,36	27,38	26,75	26,73	1,07
2016:1	27,35	27,36	26,58	26,75	1,08
2016:2	27,38	27,35	26,69	26,58	1,06
2016:3	27,39	27,38	26,73	26,69	1,09
2016:4	27,43	27,39	26,79	26,73	1,19
2017:1	27,44	27,43	26,63	26,79	1,31
2017:2	27,46	27,44	26,74	26,63	1,27
2017:3	27,46	27,46	26,83	26,74	1,26
2017:4	27,47	27,46	26,86	26,83	1,33
2018:1	27,46	27,47	26,70	26,86	1,34
2018:2	27,50	27,46	26,79	26,70	1,47
2018:3	27,54	27,50	26,85	26,79	1,72
2018:4	27,49	27,54	26,83	26,85	1,71

EK 7. Reel *M*2 (TL)

ZAMAN	Reel *M*2	ZAMAN	Reel *M*2
2000:4	127297794132,86	2010:1	484845936960,62
2001:1	135789172930,45	2010:2	499493410648,48
2001:2	117242024996,96	2010:3	505617986478,56
2001:3	112269568644,72	2010:4	542925745493,53
2001.4	113887012343,73	2011:1	540103536977,52
2002:1	111944060892,07	2011:2	555116422421,28
2002:2	114427330315,36	2011:3	572336080082,24
2002.3	110728899355,00	2011:4	572802614784,39
2002:4	115218178411,77	2012:1	551515502232,48
2003:1	110327633971,11	2012:2	556462630456,19
2003:2	113440181804,94	2012:3	576517140916,53
2003:3	122227128145,21	2012:4	590195738679,73
2003:4	132261525035,15	2013:1	586870919295,22
2004:1	144362017850,70	2013:2	614590013865,94
2004:2	147125867988,67	2013:3	653238216349,06
2004:3	147685411712,96	2013:4	674543216944,25
2004:4	152167237661,27	2014:1	659585813656,59
2005:1	162956587229,41	2014:2	669267667258,27
2005:2	175296992509,52	2014:3	698138724580,03
2005:3	185701038267,89	2014:4	704312754576,23
2005:4	321216648572,01	2015:1	718328035304,58
2006:1	331638532899,08	2015:2	737306695405,51
2006:2	354320610852,10	2015:3	777446451238,43
2006:3	341807500376,75	2015:4	764339512604,58
2006:4	362712060200,03	2016:1	757618516585,64
2007:1	376100489520,50	2016.2	777493665234,05
2007:2	381653434166,93	2016:3	789762098383,59
2007:3	376127406274,36	2016:4	815317233655,68
2007:4	400470021108,60	2017:1	822326807541,27
2008:1	427593857535,09	2017:2	845808408117,83
2008.2	393962168219,99	2017:3	846879804621,91
2008:3	409356377565,23	2017:4	849352744850,51
2008.4	444677579893,67	2018:1	841546087189,20
2009:1	453406973032,80	2018:2	881364635069,34
2009:2	451528345109,63	2018:3	912233543587,17
2009:3	467388665025,27	2018:4	865680268384,26
2009:4	487170040324,37		

EK 8. Bir Önceki Döneme Ait Reel $M2_{-1}$ (TL)

ZAMAN	Reel $M2_{-1}$	ZAMAN	Reel $M2_{-1}$
2000:3	111305551630,65	2009:4	487170040324,37
2000:4	127297794132,86	2010:1	484845936960,62
2001:1	135789172930,45	2010:2	499493410648,48
2001:2	117242024996,96	2010:3	505617986478,56
2001:3	112269568644,72	2010:4	542925745493,53
2001.4	113887012343,73	2011:1	540103536977,52
2002:1	111944060892,07	2011:2	555116422421,28
2002:2	114427330315,36	2011:3	572336080082,24
2002.3	110728899355,00	2011:4	572802614784,39
2002:4	115218178411,77	2012:1	551515502232,48
2003:1	110327633971,11	2012:2	556462630456,19
2003:2	113440181804,94	2012:3	576517140916,53
2003:3	122227128145,21	2012:4	590195738679,73
2003:4	132261525035,15	2013:1	586870919295,22
2004:1	144362017850,70	2013:2	614590013865,94
2004:2	147125867988,67	2013:3	653238216349,06
2004:3	147685411712,96	2013:4	674543216944,25
2004:4	152167237661,27	2014:1	659585813656,59
2005:1	162956587229,41	2014:2	669267667258,27
2005:2	175296992509,52	2014:3	698138724580,03
2005:3	185701038267,89	2014:4	704312754576,23
2005:4	321216648572,01	2015:1	718328035304,58
2006:1	331638532899,08	2015:2	737306695405,51
2006:2	354320610852,10	2015:3	777446451238,43
2006:3	341807500376,75	2015:4	764339512604,58
2006:4	362712060200,03	2016:1	757618516585,64
2007:1	376100489520,50	2016.2	777493665234,05
2007:2	381653434166,93	2016:3	789762098383,59
2007:3	376127406274,36	2016:4	815317233655,68
2007:4	400470021108,60	2017:1	822326807541,27
2008:1	427593857535,09	2017:2	845808408117,83
2008.2	393962168219,99	2017:3	846879804621,91
2008:3	409356377565,23	2017:4	849352744850,51
2008.4	444677579893,67	2018:1	841546087189,20
2009:1	453406973032,80	2018:2	881364635069,34
2009:2	451528345109,63	2018:3	912233543587,17
2009:3	467388665025,27		

EK 9. Bir Önceki Döneme Ait Reel $GSYH_{-1}$ (TL), (TCMB, 2019)

ZAMAN	Reel $GSYH_{-1}$	ZAMAN	Reel $GSYH_{-1}$
2000:3	201889974350,00	2009:4	271590665770,00
2000:4	195495867890,00	2010:1	229308819240,00
2001:1	158010736840,00	2010:2	261564081940,00
2001:2	166907420360,00	2010:3	295100313710,00
2001:3	187146657720,00	2010:4	298023763690,00
2001.4	175893043670,00	2011:1	256086479790,00
2002:1	156240818400,00	2011:2	291548041440,00
2002:2	180027495730,00	2011:3	329213217800,00
2002.3	200396240850,00	2011:4	327619195770,00
2002:4	195530910820,00	2012:1	273419987740,00
2003:1	166572641380,00	2012:2	306215476290,00
2003:2	186234248980,00	2012:3	341190118410,00
2003:3	211935971760,00	2012:4	341334599250,00
2003:4	208515993190,00	2013:1	296635923560,00
2004:1	184483563700,00	2013:2	336244981930,00
2004:2	207779565290,00	2013:3	371633382830,00
2004:3	229426088130,00	2013:4	364819818240,00
2004:4	226145216610,00	2014:1	322382481180,00
2005:1	202110358840,00	2014:2	345987827920,00
2005:2	224193084240,00	2014:3	385258426630,00
2005:3	248041068000,00	2014:4	386454629020,00
2005:4	249878561430,00	2015:1	333993552100,00
2006:1	215560378130,00	2015:2	370760649570,00
2006:2	245630972400,00	2015:3	407545859140,00
2006:3	263200767400,00	2015:4	415425144700,00
2006:4	265540474030,00	2016:1	350054756940,00
2007:1	233397018570,00	2016.2	389037940590,00
2007:2	253514797520,00	2016:3	404236509150,00
2007:3	272630928320,00	2016:4	433036195870,00
2007:4	280187986750,00	2017:1	368485418230,00
2008:1	250227081610,00	2017:2	409659748410,00
2008.2	259265265210,00	2017:3	450698377000,00
2008:3	275484496920,00	2017:4	464822255500,00
2008.4	263542226540,00	2018:1	395604465060,00
2009:1	214254085070,00	2018:2	431564561490,00
2009:2	241921346800,00	2018:3	459005269180,00
2009:3	271425750420,00		