ISSN 1019-1011

Ç.Ü.MÜH.MİM.FAK.DERGİSİ CİLT 17 SAYI 1-2 | Haziran / Aralık June / December 2002 | Ç.Ü.J.FAC.ENG.ARCH. VOL.17 NO.1-2

VİSKOELASTİK DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞI

Faruk Fırat ÇALIM ve Beytullah TEMEL
Ç.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana/Türkiye

ÖZET : *Bu çalışmada, düzlemi içinde yüklü, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış doğru eksenli çubukların zamanla keyfi olarak değişen yükler altında dinamik davranışı incelenmiştir. Çubuk malzemesi, homojen, izotrop, lineer elastik veya viskoelastik olarak kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda, Laplace uzayında malzeme sabitleri kompleks karşıtları ile yer değiştirilmektedir. Formülasyonda hem elastisite modülünün hem de Poisson oranının kompleks karşıtları kullanılmaktadır. Elde edilen çözümler Durbin'nin sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmektedir. Viskoelastik modellerin dinamik davranışı için sayısal sonuçlar grafik formda gösterilmiştir.*

DYNAMIC RESPONSE OF VISCOELASTIC STRAIGHT BEAMS

ABSTRACT : *In this study, dynamic response of in plane straight beams made of linear viscoelastic material under arbitrary time-dependent loads are investigated. The material of the beam is assumed to be homogeneous, isotropic, linear elastic or viscoelastic. In the viscoelastic material case, the material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. Viscoelastic counterparts of both elasticity modulus and Poisson's ratio are used in the formulation. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. Numerical results for dynamic response of viscoelastic models are presented in the form of graphics.*

1. GİRİŞ

Yapıların zamanla keyfi olarak değişen yükler altında davranışının incelenmesi ve yapı sistemlerinin mukavemet özelliklerinin tespit edilmesi önemli bir mühendislik problemidir. Düzlemsel elastik sistemlere ait zorlanmış titreşim analizi ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Mühendislik yapılarının hesabında, basitliği nedeniyle malzemeler için elastik kabulü yapılagelmektedir. Gerçekte, kullanılan bu malzemelerin hemen hepsi yapısındaki iç sürtünme nedeniyle az veya çok viskoelastik bünye özelliğine sahiptir. Malzeme davranışını yansıtması bakımından viskoelastik bünye bağıntısı, elastik bünye bağıntısından daha gerçekçidir.

Genelde, sistem denklemlerinin çözümü için adım adım integrasyon yöntemleri veya mod birleştirme yöntemleri (1,2) kullanılmaktadır. Bunlardan başka hareket denklemlerinin Laplace veya Fourier dönüşümleri (3,4) alınarak çözümler yapılabilmekte ve bu çözümlere ters dönüşümler uygulanarak gerçek uzayda çözümler elde edilebilmektedir.

Birçok araştırmacı, viskoelastik malzeme davranışının önemini vurgulayarak çeşitli sayıda matematik formülasyonlar vermiş olup viskoelastik malzemelerin sistem davranışına etkilerini araştırmışlardır. Flügge (5), viskoelastik çubukların Laplace dönüşüm uygulamalarını incelemiştir. Findley ve ark. (6), viskoelastik çubukların davranışını idare eden denklemlerin çözümü için süperpozisyon prensibini kullanmışlardır. Christensen (7), viskoelastik kirişlerin dinamik davranışını Fourier dönüşüm uzayında incelemiştir. Chen (8), lineer viskoelastik Timoshenko kirişini göz önüne alarak quasi-statik ve dinamik davranışları araştırmıştır. Hesaplamalarda Poisson oranını sabit alıp sadece elastisite modülünü viskoelastik olarak göz önüne almıştır. Aköz ve Kadıoğlu (9), viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişini göz önüne alarak quasi-statik ve dinamik davranışları incelemişlerdir.

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış düzlemsel çubuk sistemlerin zorlanmış titreşimi incelenmiştir. Dinamik rijitlik matrisi Laplace dönüşüm uzayında elde edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçiş için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Viskoelastik malzeme halinde, elastik-viskoelastik analojisi kullanılarak Laplace dönüşüm uzayında malzeme sabitleri kompleks karşıtları ile yer değiştirilmektedir.

2. HAREKET DENKLEMİ

Tek serbestlik dereceli bir sistem üzerinde D'Alembert prensibi uygulanarak dinamik davranışı idare eden hareket denklemi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \tag{1}$$

olarak yazılabilir.

Eğer sistemin serbestlik derecesi birden fazla ise (sistemin hareketi esnasında meydana gelen atalet kuvvetlerini belirlemek için gerekli olan deplasman sayısı birden fazla ise), çok serbestlik dereceli sistem olarak adlandırılır. Çok serbestlik dereceli sistemlerde hareketi idare eden diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi matris notasyonu ile ifade edilebilir.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \tag{2}$$

Burada, $[M]$ sistem kütle matrisi, $[C]$ sistem sönüm matrisi, $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $[X]$ sistem deplasman vektörü ve $\{F(t)\}$ ise sistem yük vektörünü göstermektedir. Sisteme dıştan etkiyen herhangi bir yük yok ise, $\{F(t)\}=\{0\}$, sistem serbest titreşim hareketi yapıyor demektir. Sisteme dıştan etkiyen ve zamanla değişen bir yük var ise, $\{F(t)\}\neq\{0\}$, sistem zorlanmış titreşim yapıyor demektir.

3. ELEMAN RİJİTLİK VE KÜTLE MATRİSLERİ

Düzlemi içinde yüklenmiş tipik bir kiriş için eleman koordinatlarında eleman rijitlik ve kütle matrisleri aşağıda verilmektedir (10).

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

burada α kayma deformasyon katkısı ve k kesit faktörü ile ilgili büyüklük olup (4) ifadesinde tanımlanmıştır. Eğer kayma deformasyon etkisi ihmal edilecek ise $\alpha = 0$ alınmalıdır.

$$\alpha = \frac{12EI\,k}{GA\,L^2} \quad (4)$$

Düzlemsel çubuk elemanı için, dönme ataleti terimini de içeren tutarlı kütle matrisi aşağıdaki gibi verilmektedir (11).

$$[m]=\frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{simetrik} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simetrik} & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Burada E Elastisite modülü, I atalet momenti, L eleman boyu, G kayma modülü, ρ kütlesel yoğunluk ve A kesit alanıdır.

Eleman koordinatlarında verilmiş olan bu matrisler tüm sistem için ortak bir takıma göre yeniden düzenlenmelidir. Bunun için aşağıdaki transformasyon işlemi uygulanmaktadır.

$$\underline{k}' = \underline{T}^T \underline{k} \underline{T}$$
$$\underline{m}' = \underline{T}^T \underline{m} \underline{T} \qquad (6)$$

Burada T, transformasyon matrisi olup düzlemsel çubuk sistemler için aşağıda verilmektedir.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{t} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{t} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Bu şekilde sistem koordinatlarında elde edilen eleman matrislerinin uygun bileşenleri kullanılarak, kodlama tekniği ile sistem rijitlik ve sistem kütle matrisleri oluşturulmaktadır.

4. SİSTEM HAREKET DENKLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Hareket denkleminin sağ tarafı çeşitli tiplerde zamanla değişen dinamik dış yüklerden oluşabilir. Zamana bağlı bir f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $\overline{F}(s)$,

$$L[f(t)] = \overline{F}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \qquad (8)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada s, Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. Zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak

$$L[\dot{f}(t)] = s\,\overline{F}(s) - f(0)$$
$$L[\ddot{f}(t)] = s^2\,\overline{F}(s) - s f(0) - \dot{f}(0) \qquad (9)$$

şeklinde yapılmaktadır.

Zamanla keyfi olarak değişen dış yükler altında elastik haldeki sistem hareket denkleminin Laplace dönüşümü (8) ve (9) tarifleri yardımıyla,

$$s^2 [M]\{\overline{X}\} - s[M]\{X(0)\} - [M]\{\dot{X}(0)\} + [K]\{\overline{X}\} = \{\overline{F}\} \qquad (10)$$

şeklinde yapılmaktadır. Burada, $\{\overline{X}\}$ ve $\{\overline{F}\}$ sırasıyla, sistem düğüm deplasman ve yük vektörlerinin Laplace dönüşümleridir. $\{X(0)\}$ ve $\{\dot{X}(0)\}$ ise başlangıç deplasman ve hızlarını göstermektedir. (10) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$[\bar{D}]\{\bar{X}\}=\{\bar{F}\}+\{\bar{F}_0\} \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir. $[\bar{D}]$ dönüşmüş uzayda dinamik rijitlik matrisi olarak tanımlanır.

$$[\bar{D}]=s^2[M]+[K] \tag{12}$$

başlangıç koşulları nedeniyle yük vektörüne gelen katkı

$$\{\bar{F}_o\}=s[M]\{X(0)\}+[M]\{\dot{X}(0)\} \tag{13}$$

olarak tarif edilir.

5. SÖNÜM ETKİSİ

Kelvin tipi viskoelastik modelin bünye ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir (12).

$$s_{ij}=2G(e_{ij}+g\frac{de_{ij}}{dt}) \tag{14}$$

Burada, s_{ij} deviatorik gerilme tansörü ve e_{ij} deviatorik şekil değiştirme tansörü, G kayma modülü ve g viskoz sönüm oranıdır. Bünye ifadesi, gerilme ve şekil değiştirme tansörünün deviatorik bileşenleri cinsinden yazılabilir.

$$s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{kk}\ , \qquad e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \tag{15}$$

Burada, σ_{ij} gerilme tansörü, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü ve δ_{ij} birim matrisin bileşenlerini göstermektedir. Laplace dönüşüm uzayında elastik sabitler, E ve ν yerine elastik-viskoelastik analojisi (12) yardımıyla kompleks karşıtları kullanılmaktadır.

$$E_v=\frac{E(1+gs)}{1+\frac{(1-2\nu)}{3}gs}\ , \qquad \nu_v=\frac{3\nu-(1-2\nu)gs}{3+(1-2\nu)gs} \tag{16}$$

Burada E_v, ν_v viskoelastik malzeme sabitleri ve s Laplace dönüşüm parametresidir.

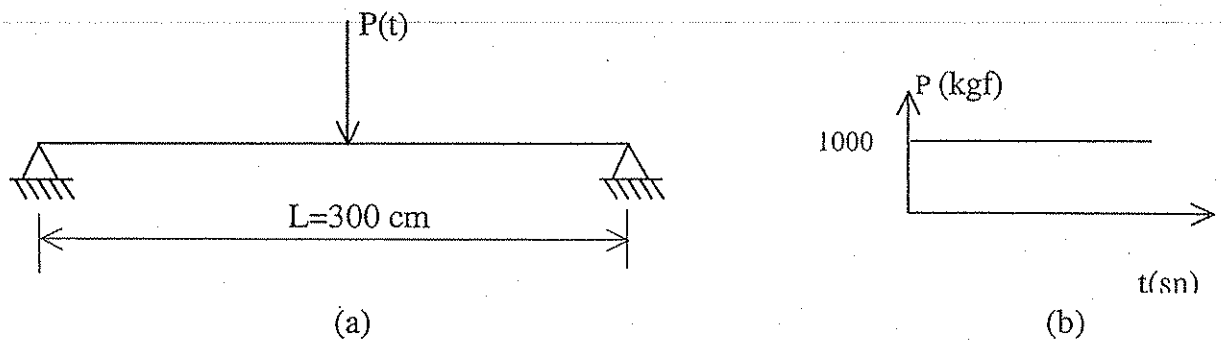
6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu çalışmada, zamanla keyfi olarak değişen yükler altında düzlemsel çerçevelerin viskoelastik analizini yapan FORTRAN dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan program ile çeşitli örnekler çözülmüş olup sayısal sonuçlar grafik formda gösterilmiştir.

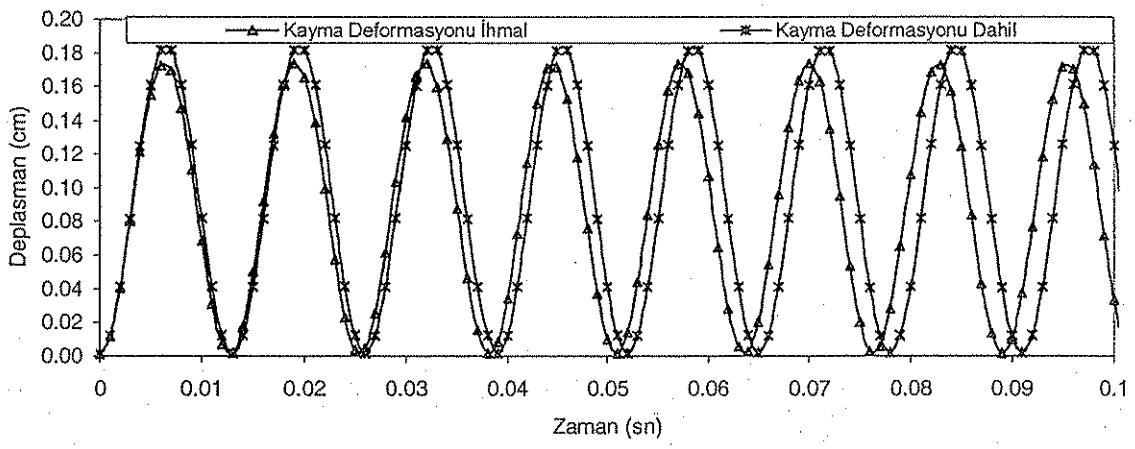
Ele alınan tüm örneklerde, taşıyıcı sistem malzemesi olarak, I220 kesitli çelik profil kullanılmıştır. Bu profile ait malzeme ve geometrik özellikleri şöyledir: elastisite modülü, $E=2.1\times10^6$ kgf/cm^2; Poisson oranı, $\nu=0.3$; kütlesel yoğunluğu, $\rho=8\times10^{-6}$ kgf s^2/cm^4; alanı, A=39.6 cm^2 ve atalet momenti, I=3060 cm^4. Kayma deformasyonu etkisi gözönüne alındığı durumlarda I profili için kesit faktörü k=2.2 olarak alınmıştır.

Örnek 1

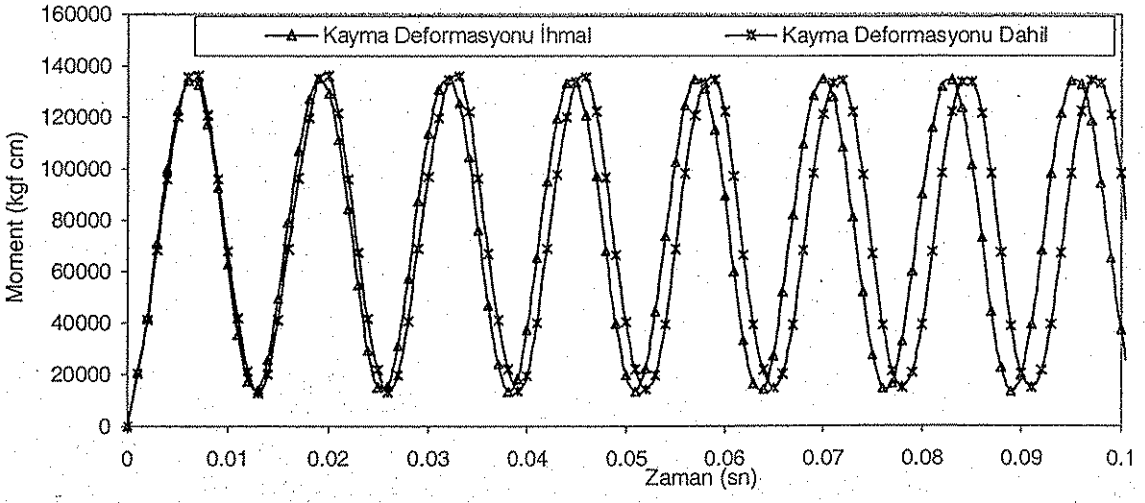
İlk olarak, ortasında adım tipi tekil yük bulunan basit kiriş çeşitli durumlar için çözülmüştür. Açıklık ortasındaki düşey deplasman ve momentin zamanla değişimleri incelenmiştir. Kayma deformasyonu etkisinin dahil edilip edilmemesi durumları Şekil 2 ve Şekil 3'de gösterilmiştir.



Şekil 1. (a) Basit kiriş , (b) Uygulanan dinamik yük



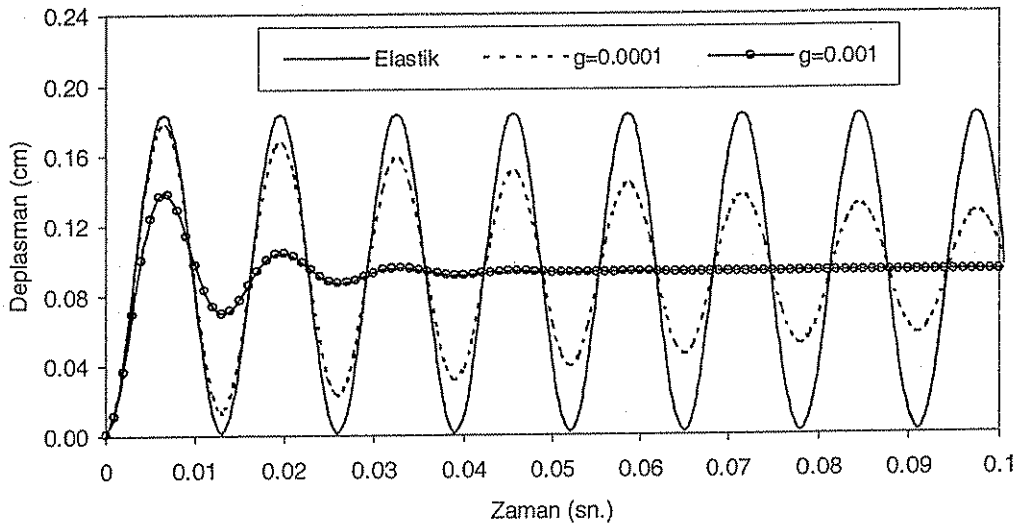
Şekil 2. Açıklık ortasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



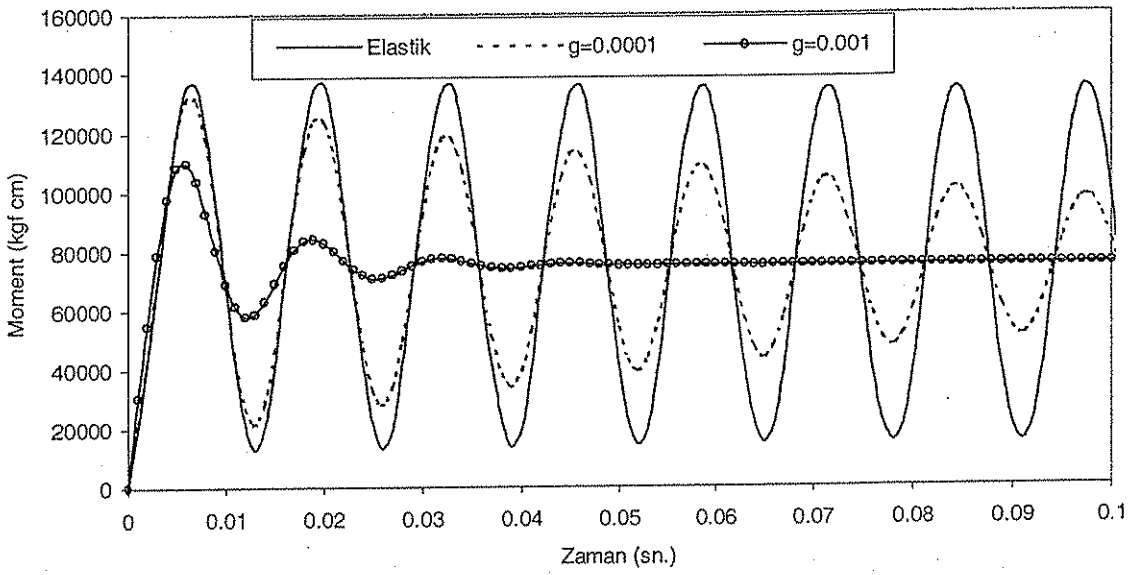
Şekil 3. Açıklık ortasındaki momentin zamanla değişimi

Kayma deformasyon etkisinin dahil edildiği durumda deplasman genliklerinde çok az farklılıklar gözlenmesine karşın moment genliklerinde önemli bir fark gözlenmemiştir. Bundan sonra ele alınan tüm çözümlerde, kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınmıştır.

Ayrıca basit kirişte, elastik ve viskoelastik malzeme durumlarında açıklık ortasındaki deplasman ve moment değerleri hesaplanarak Şekil 4 ve Şekil 5'de gösterilmiştir.



Şekil 4. Basit kiriş için açıklık ortasındaki deplasmanın zamanla değişimi

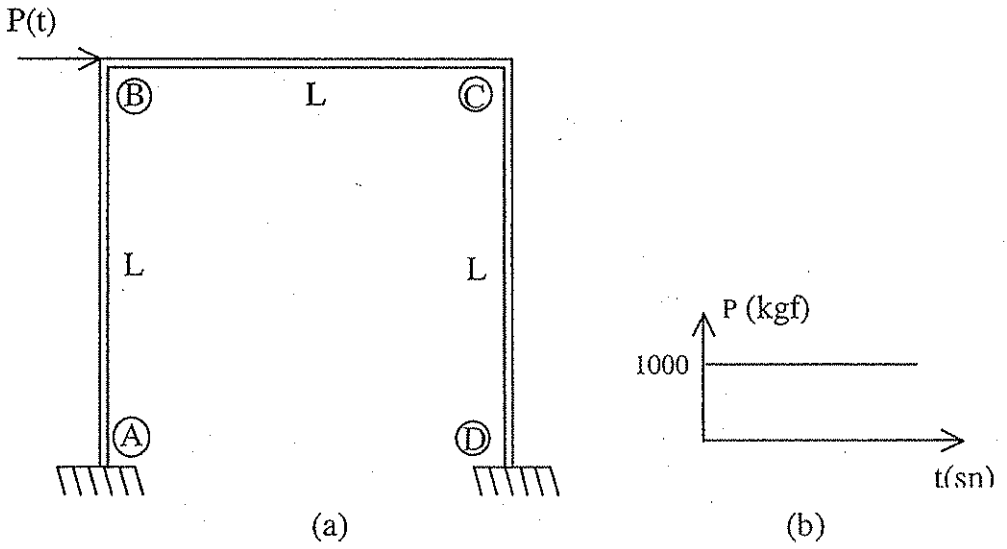


Şekil 5. Basit kiriş için açıklık ortasındaki momentin zamanla değişimi

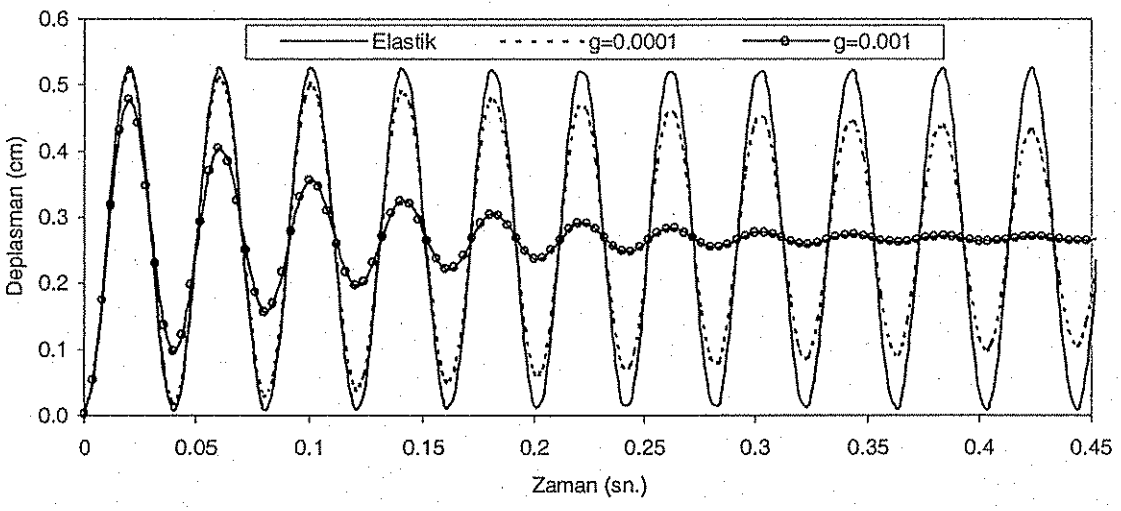
Şekil 4 ve Şekil 5 incelendiğinde, viskoelastik halde deplasman ve momentlerin genlikleri belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerlerine yaklaşmaktadır.

Örnek 2

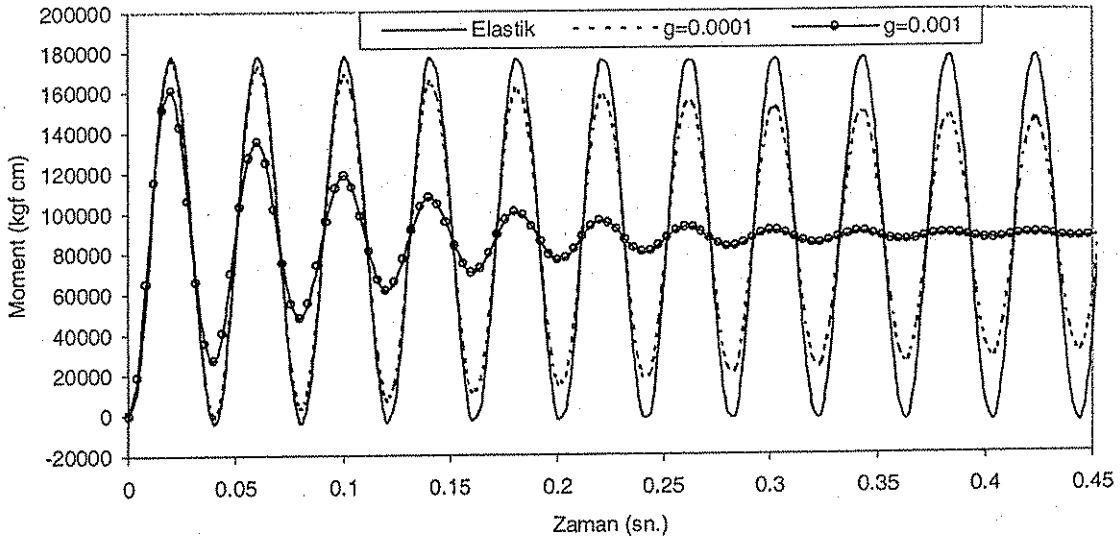
Şekil 6'da verilen çerçeve sistemi B noktasında adım tipi dinamik tekil yüke maruzdur. Her elemanın boyu eşit olup L=300 cm alınmıştır. Malzemenin elastik ve viskoelastik olması halleri için çözümler yapılmıştır. Viskoelastik malzeme halinde, sisteme farklı sönüm oranları uygulanarak tekil yükün uygulandığı noktadaki yatay deplasman ve A noktasındaki moment değerleri Şekil 7 ve Şekil 8'de grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 6. (a) Tek açıklıklı basit çerçeve , (b) Uygulanan dinamik yük

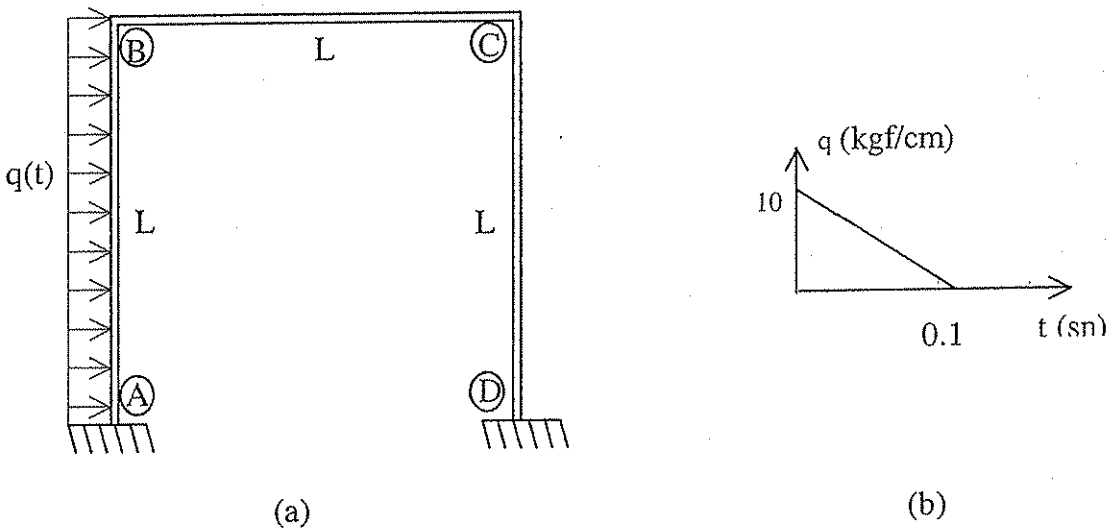


Şekil 7. B noktasındaki yatay deplasmanın zamanla değişimi



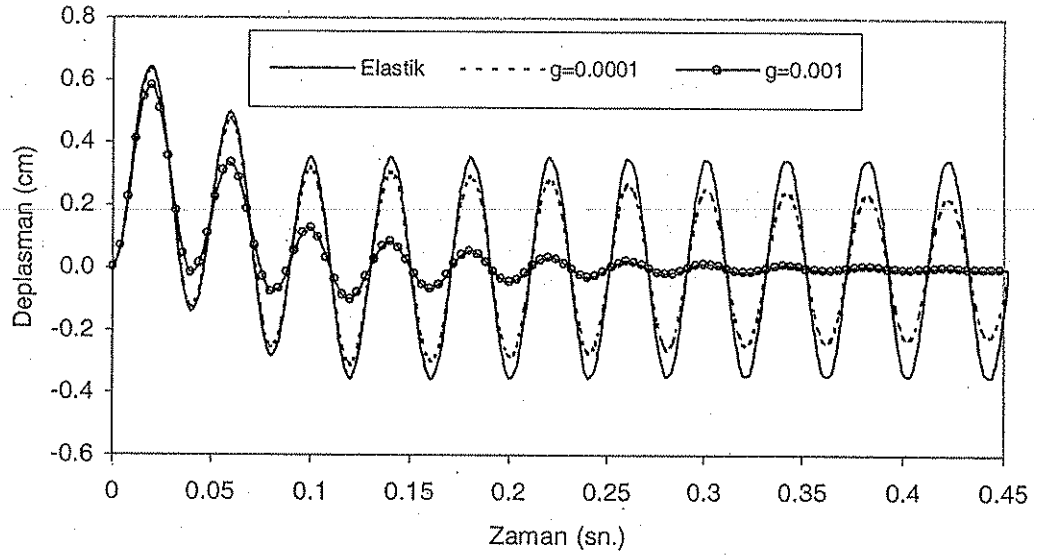
Şekil 8. A noktasındaki momentin zamanla değişimi

Şekil 6'da verilen çerçeve bir kez de üniform yayılı yük altında çözülmüştür (Şekil 9). Yayılı yükün maksimum şiddeti q=10 kgf/cm alınmıştır. Malzemenin elastik ve viskoelastik olması halleri incelenmiş ve viskoelastik malzeme durumunda farklı sönüm oranları uygulanmıştır. B noktasındaki yatay deplasman ve A noktasındaki momentin zamanla değişimi Şekil 10 ve Şekil 11'de grafik olarak gösterilmiştir.

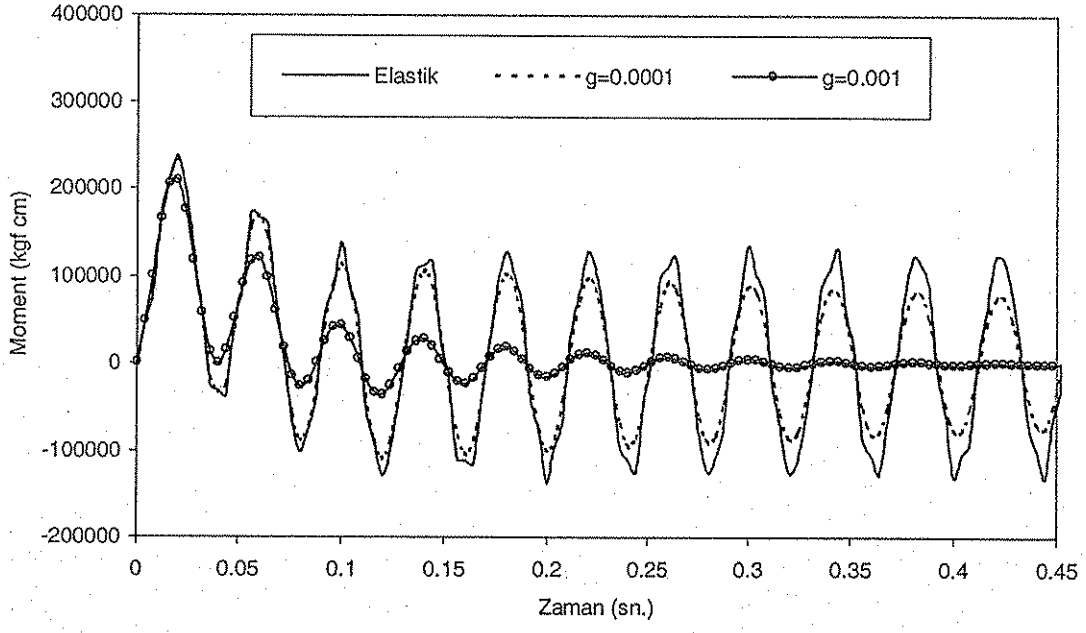


(a) (b)

Şekil 9. (a) Üniform yüklü tek açıklıklı basit çerçeve , (b) Uygulanan dinamik yük



Şekil 10. B noktasında yatay deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 11. A noktasındaki momentin zamanla değişimi

Örnek 1'de olduğu gibi viskoelastik halde deplasman ve momentlerin genlikleri belli bir süre sonra sönüm oranına bağlı olarak küçülmekte ve statik değerlerine yaklaşmaktadır.

7. SONUÇ

Düzlemi içinde yüklü, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış çubukların dinamik yükler altındaki davranışı incelenmiştir. Kayma deformasyonu etkisinin gözönüne alındığı durumda deplasman genliklerinde farklılıklar gözlenmektedir (Şekil 2). Bu

durum göstermektedir ki, kayma deformasyonu etkisinin dikkate alınması daha gerçekçidir.

İncelenen bütün örneklerde görüldüğü gibi malzemenin viskoelastik olduğu durumda, dinamik büyüklükler (deplasman ve kesit tesirleri) belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerlerine yaklaşmaktadır. Statik değerlere erişme zamanı viskoz sönüm oranı ile orantılıdır. Viskoelastik malzeme durumunda sönüm etkisi, dinamik davranışın pik değerlerini azaltacaktır.

8. KAYNAKLAR

1. *Bathe,K.J., Wilson,E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey,1976.*

2. *Craig,R.R., "Structural Dynamics", John Wiley&Sons, Singapore, 1981.*

3. *Narayanan,G.V., Beskos,D.E., "Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the Aid of Fast Fourier Transform", Computer & Structures, Vol. 9, pp. 145-150, 1978.*

4. *Beskos,D.E., Narayanan, G.V., "Dynamic Response of Frameworks by Numerical Laplace Transforms", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 37, pp. 289-307,1983.*

5. *Flügge,W., "Viscoelasticity" , 2nd edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.*

6. *Findley,W.N., Lai,J.S. ve Onaran,K., "Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic material", North-Holland, New York, pp. 109, 1976.*

7. *Christensen,R. M., "Theory of viscoelasticity", 2nd edition, Academic Press, New York, pp. 24, 1982.*

8. *Chen,T., "The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams", International J. Num. Methods Engineering 38, 509-522, 1995.*

9. *Aköz,A.Y., Kadıoğlu,F., "The Mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams", International Journal for Num. Methods in Engineering 44, 1909-1932, 1999.*

10. *Dündar,C., Kıral,E., "Perdeli Yapı Sistemlerinin Bilgisayar İle Hesabı", TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası, Adana, 1986.*

11. *Weaver.Jr.W., Johnston,P.R., "Finite Elements For Structural Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1984.*

12. *Boley,B.A., Weiner,J.H., "Theory of Thermal Stresses", John Wiley & Sons, New York, 1960.*