ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Osman KELEKCİ

SONLU YARIGRUP SINIFLARININ RANK ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU YARIGRUP SINIFLARININ RANK ÖZELLİKLERİ

Osman KELEKCİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 23/12/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....	.....	.....
Doç. Dr. Gonca AYIK	Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

.....	.....
Doç. Dr. Fikret KUYUCU	Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SONLU YARIGRUP SINIFLARININ RANK ÖZELLİKLERİ

Osman KELEKCİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2011, Sayfa: 72
Jüri : Doç. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
: Doç. Dr. Fikret KUYUCU
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

$X_n = \{1, 2, ..., n\}$ kümesi üzerinde tanımlı tüm dönüşümler yarıgrubu T_n ve singüler dönüşümler yarıgrubu $Sing_n$ olsun.

T_n nin üst rankı için alt sınır teşkil eden bir formül verilmiştir. (i,j)-permütasyonlar tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. T_n nin indeksi 1 ve periyodu r olan elemanlarının özellikleri incelenmiş ve bu tipteki dönüşümlerin $Sing_n$ yi doğurduğu gösterilmiştir. Ayrıca noksanlığı 1 olan dönüşümlerin herhangi bir altkümesinin $Sing_n$ nin (minimal) doğuray kümesi olması için hangi gerekli ve yeterli koşulları sağlaması gerektiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, singüler dönüşüm, idempotent, rank.

ABSTRACT

PhD THESIS

RANK PROPERTIES OF FINITE SEMIGROUP CLASSES

Osman KELEKCİ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2011, Pages: 72
Jury : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
: Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

Let T_n and $Sing_n$ be the semigroup of all full transformations and of all singular transformations on $X_n = \{1, 2, ..., n\}$, respectively.

It is given a formula which is a lower bound for the upper rank of T_n. It is defined that (i,j)-permutations and it is examined that some properties of them. It is studied that properties of the elements of index 1 and period r in T_n and it is shown that the elements of this type generate the $Sing_n$. Also it is shown that necessary and sufficient conditions for any subset of transformations of defect 1 in $Sing_n$ to be a (minimal) generating set for $Sing_n$.

Key Words: Transformation semigroups, singular transformation, idempotent, rank.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Gonca AYIK'a sonsuz teşekkürler.

Doktora Tez Jüri üyesi Sayın Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a çalışmam esnasında göstermiş olduğu anlayış ve katkılarından dolayı şükranlarımı sunarım.

Doktora Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Bilal VATANSEVER, Sayın Doç. Dr. Fikret KUYUCU ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL'a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen Ç.Ü. Matematik bölümünün saygıdeğer öğretim üye ve elemanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ V
ŞEKİLLER DİZİNİ VI
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 4
2.1 Green Denklik Bağıntıları 14
2.2 Doğuray Kümeleri ve Ranklar 22
2.3 Dönüşüm Yarıgrupları 24
2.4 Grafik ve Orbitler 32
3. TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGUBUNUN ÜST RANKI 36
4. SİNGÜLER DÖNÜŞÜMLER 44
4.1 (i, j)-Permütasyonlar 44
4.2 İndeksi 1 Olan Dönüşümler 48
5. SİNGÜLER DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMESİ 58
KAYNAKLAR 70
ÖZGEÇMİŞ 72

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 2.1 Bir $\mathcal{D}$-Green Denklik Sınıfı Örneği.....18

Çizelge 3.1 T_3 ün Green $\mathcal{D}$ yapısı 42

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1 Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı 16
Şekil 2.2 Bir grafik örneği.....33
Şekil 4.1 $\alpha \in T_{14}$ nın orbit diyagramı 50
Şekil 5.1 Γ_A nın diyagramı 68

1. GİRİŞ

1950 li yılların sonunda cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelen yarıgrup teorisi günümüzde de popüler bir çalışma alanıdır. Her sonlu yarıgrup sonlu bir dönüşüm yarıgrubuna gömülebileceğinden dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Bu yöntemlerden biri doğuray ve ranktır.

Dönüşüm yarıgruplarının doğurayları ile ilgili ilk çalışmalardan biri, yarıgrup teorisine yön verenlerden biri olan J.M. Howie nin, singüler dönüşümler yarıgrubunun idempotentler tarafından doğurulduğunu gösteren (1966) yılında yayımlanan çalışması olmuştur. Daha sonra J.M. Howie, (1978) deki çalışmasıyla singüler dönüşümler yarıgrubunun idempotent rankının $\frac{n(n-1)}{2}$ ve (1987) de de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada singüler dönüşümler yarıgrubunun rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir.

Bu bağlamda Ayık ve ark. (2008) te yaptıkları çalışmada singüler dönüşümler yarıgrubunun (m,r) -patika devirler tarafından doğurulduğunu ve singüler dönüşümler yarıgrubunun (m,r)-patika devir rankının da yine $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu göstermişlerdir.

Yine J.M. Howie nin (1999) ve (2000) yıllarında yaptığı iki çalışmada bir yarıgrubun bir alt kümesinin bağımsızlığı tanımından hareketle küçük, düşük(=normal), orta, üst ve geniş rank tanımları yapılmış ve değişik yarıgruplar için bu beş rank incelenmiştir.

Üçüncü bölümde açık bir problem olan tüm dönüşümler yarıgrubunun üst rankı için $\mathcal{D}$-Green sınıfının kombinatorik yapısından hareketle bir alt sınır verilmiştir.

$\alpha \in D_{n-1}$ olmak üzere $Def(\alpha) = \{i\}$ ve bir tek $i \neq j \in X_n$ için $ker(\alpha) = \{(i,j)\}^e$ ise α ya bir (i,j) *-permütasyon* denir. Dikkat edilecek olursa $\alpha = [x_1, x_2, ..., x_m | x_2]$, $(m,2)$ -patika deviri bir (x_1, x_m) -permütasyon ve $\alpha \in H_{i,j}$ olması için gerek ve yeter koşul α nın bir (i,j)-permütasyon olmasıdır. Dördüncü bölümde σ $(m,2)$-patika devir ve β permütasyon olmak üzere bir α (i,j)-permütasyonunun $\alpha = \sigma\beta = \beta\sigma$ şeklinde yazılabileceği gösterilmiştir.

$\alpha \in T_n$ olsun. $\alpha^{m+r} = \alpha^m$ ve $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{m+r-1}$ ikili olarak farklı olacak şekilde $m, r \in \mathbb{Z}^+$ varsa α ya (m,r)*-potent eleman* denir. Burada $m \geq 1$ ye α nın *indeksi* ve $r \geq 1$ ye α nın *periyodu* denir. Dördüncü bölümde indeksi 1 ve periyodu r olan elemanların özellikleri incelenmiştir.

$\alpha \in T_n$ nın indeksi 1 ve periyodu r olan bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşulun $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ ve r nin $r_1, r_2, \ldots, r_t$ nin en küçük ortak katı olması gerektiği gösterilmiştir.

$\alpha \in T_n$ olsun. α yı içeren $\mathcal{H}$-Green sınıfını H_α ile gösterelim. H_α nın bir grup olması için gerek ve yeter koşulun α nın indeksi 1 olan bir dönüşüm olması gerektiği yine dördüncü bölümde gösterilmiştir.

Ayrıca indeksi 1 olan dönüşümlerin singüler dönüşümler yarıgrubunu doğurduğu gösterilmiştir

$A \subseteq D_{n-1}$ alalım ve Γ_A diyagramını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

- Köşe kümesi $V = V(\Delta_A) = A$
- Yönlendirilmiş kenar kümesi $\vec{E}(\Gamma_A) = \{(\alpha, \beta) \in V \times V : Def(\alpha) \subseteq Ker(\beta)\}$

Herhangi iki $\alpha, \beta \in V(\Gamma_A)$ köşesi için α dan β ya yönlendirilmiş bir patika varsa α ile β, Γ_A da bağlantılıdır denir ve $\alpha \sim \beta$ ile gösterilir.

Tanımlanan bu grafik kullanılarak son bölümde ise singüler dönüşümler yarıgrubunun noksanlığı 1 olan herhangi bir alt kümesinin singüler dönüşümler yarıgrubu için (minimal) bir doğuray kümesi olması için hangi koşulları sağlaması gerektiği gösterilmiştir. A nın $Sing_n$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşulun her $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ idempotenti için

i) $Ker(\alpha) = \{i, j\}$

ii) $Def(\beta) = \{i\}$

iii) Γ_A diyagramında $\alpha \sim \beta$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ var olması gerektiği son bölümde gösterilmiştir. Ayrıca yukarıdaki ifadenin (Howie, 1978) deki sonucu da içerdiği son bölümde gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

S boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\circ : S \times S \to S$$

şeklinde tanımlı dönüşüme S üzerinde *ikili işlem* ve $(S, \circ)$ ikilisine *grupoid* denir. Eğer S üzerindeki "$\circ$" ikili işlemi her $x, y, z \in S$ için

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

ise $(S, \circ)$ ikilisine *yarıgrup* denir. $|S|$ ile S nin eleman sayısı gösterilir.

$(S, \circ)$ bir yarıgrup olmak üzere işlemlerde kolaylık sağlamak adına $(S, \circ)$ ikilisi yerine S ve $\forall x, y \in S$ için $x \circ y$ yerine de xy ifadeleri kullanılacaktır. Bir S yarıgrubu her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa S yarıgrubuna *değişmeli yarıgrup* denir.

S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $zx = z$ oluyor ise z ye S nin bir *sol sıfır elemanı* ve eğer $\forall x \in S$ için $xz = z$ oluyor ise z ye S nin bir *sağ sıfır elemanı* denir. Eğer $z \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise z ye S nin bir *sıfır elemanı* denir. Sıfır eleman "0" ile gösterilir. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir. Aksi halde 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= 00' && (0, \textit{sıfır eleman olduğundan}) \\ &= 0' && (0', \textit{sıfır eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

dır.

S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir *sol birim elemanı* ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir *sağ birim elemanı* denir. Eğer $e \in S$ hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin bir *birim elemanı* denir ve genellikle 1_S veya kısaca 1 ile gösterilir. Bir S yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir. Aksi halde 1 ve $1'$, S nin iki birim elemanı ise

$$\begin{aligned} 1 &= 11' && (1', \textit{birim eleman olduğundan}) \\ &= 1' && (1, \textit{birim eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

dir.

Birim elemanlı bir yarıgruba *monoid* denir. S bir yarıgrup olsun. O zaman

$$S^1 = \begin{cases} S & ; S \textit{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\} & ; S \textit{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin, üzerinde

$$\forall x, y \in S^1 \text{ için } xy = \begin{cases} xy & ; x \neq 1,\ y \neq 1 \\ x & ; y = 1 \\ y & ; x = 1 \\ 1 & ; x = y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir monoid olduğu açıktır ve bu monoide S *ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.

S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = ee = e$$

oluyor ise e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Bir yarıgrupta varsa sol sıfır, sağ sıfır, sıfır, sol birim, sağ birim ve birim elemanlar idempotenttir.

Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları birer idempotent eleman yani $E(S) = S$ ise S ye bir *band* denir. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise S ye bir *yarılatis* denir.

Örneğin; Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$, üzerlerinde tanımlanan bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birer monoiddir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bilinen toplama işlemi ile bir yarıgrup ve bilinen çarpma işlemi ile birim elemanı 1 olan bir monoiddir.

S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer her $x, y \in T$ için $xy \in T$ $(T^2 \subseteq T)$ oluyor ise T ye S nin bir *altyarıgrubu* denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

$SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ dir. S de bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ ve S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ dir. Bu altyarıgruplara *aşikâr altyarıgruplar* ve bunların dışındaki altyarıgruplara *öz altyarıgruplar* denir.

S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için

i) $sa \in I$ yani $SI \subseteq I$ ise I ya S nin bir *sol ideali*

ii) $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$ yani $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir *sağ ideali* denir.

I, S nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya S nin bir *ideali* denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.

$SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \trianglelefteq S$ dir. S de bir sıfır eleman varsa $\{0\}S = \{0\} \subseteq \{0\}$ ve $S\{0\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ olup $\{0\} \trianglelefteq S$ dir. Bu ideallere *aşikâr idealler* denir.

S yarıgrubunun $I \neq S$ ve $I \neq \{0\}$ olacak şekilde bir ideali varsa bu ideale *öz ideal* denir.

X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ in her bir ρ altkümesine X ten Y ye bir *bağıntı* ve $X \times X$ in her bir ρ altkümesine X üzerinde bir bağıntı denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir. ρ, X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x, y) \in \rho$ yerine $x \rho y$ de yazılabilir.

$\varnothing$, $\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi, X üzerinde birer bağıntıdır. Bu bağıntılara sırasıyla *boş bağıntı*, *birim bağıntı* ve *evrensel bağıntı* denir.

Ayrıca, $\forall \rho \in B(X)$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\} \subseteq X \times X$$

bağıntısına ρ nun *ters bağıntısı (=tersi)* ve

$$dom(\rho) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}$$
$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\} \text{ ve}$$
$$im(\rho) = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}$$

kümelerine de sırasıyla ρ bağıntısının *tanım kümesi*, $x \in X$ in ρ *altındaki görüntü kümesi* ve ρ bağıntısının *görüntü kümesi* denir.

X boş olmayan bir küme ve ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $\Delta_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımalı bağıntı*
- $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik bağıntı*
- $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise ρ ya *ters-simetrik bağıntı* ve
- $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli bağıntı*

denir.

Eğer ρ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Eğer $\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise kolayca gösterilebilir ki, $\bigcap_{i\in I}\rho_i$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine bir *denklik sınıfı* ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine de X in ρ ile elde edilen *bölüm kümesi* denir.

Tanım 2.1 X, Y boş olmayan iki küme olsun. ϕ, X ten Y ye bir dönüşüm olmak üzere

$$\phi \circ \phi^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : x\phi = y\phi\}$$

şeklinde tanımlanan küme X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya ϕ *nin çekirdeği* denir ve $\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2 X boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $R \subseteq X \times X$ olup X üzerinde R yi içeren en az bir denklik bağıntısı vardır. X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının arakesiti de R yi içeren bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına R *tarafından doğurulan denklik bağıntısı* denir ve R^e ile gösterilir.

$$R^e = \bigcap\{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

Dikkat edilirse R^e, R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.3 X boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$$

olur.

İspat: $E = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ bağıntısı geçişmelidir ve R bağıntısını içerir.

$$1_X \subseteq R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq E$$

olduğundan E yansıyandır. $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ bağıntısı simetriktir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S^n = \left(S^{-1}\right)^n = \left(S^n\right)^{-1}$ dir. Böylece S^n simetrik olur.

$$\begin{aligned}(x,y) \in E &\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(x,y) \in S^n \\ &\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(y,x) \in S^n \\ &\Rightarrow (y,x) \in E\end{aligned}$$

olduğundan $E = S^\infty$ simetriktir. Böylece E nin R yi içeren bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi σ nın R yi içeren bir denklik bağıntısı olduğunu kabul edelim. $1_X \subseteq \sigma$ ve $R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$ dır. Böylece $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq \sigma$ olur. Üstelik $S \circ S \subseteq \sigma \circ \sigma = \sigma$ ve daha genel olarak her $n \geq 1$ için $S^n \subseteq \sigma$ dir. $E = S^\infty \subseteq \sigma$ olur. Yani $E = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$, X üzerinde R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. O halde $R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ dir. ■

Dikkat edilecek olursa;

i) $R = \varnothing \Rightarrow R^e = \Delta_X$

ii) R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$

iii) $R^e = \left(R^{-1}\right)^e$

dir.

Tanım 2.4 S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\forall a \in S$ ve $\forall (s,t),(s',t') \in R$ için

i) $(as,at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu*

ii) $(sa,ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu*

iii) $(ss',tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu*

bağıntı denir. Ayrıca, sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans,* sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans* ve uyumlu bir denklik bağıntısına *kongrüans* denir.

Önerme 2.5 S bir yarıgrup ve ρ , S üzerinde bir bağıntı olsun. ρ nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul ρ nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: ρ bir kongrüans olsun. Eğer $(s,t) \in \rho$ ve $a \in S$ ise yansımalılıktan $(a,a) \in \rho$ ve uyumluluktan $(as,at) \in \rho$ ve $(sa,ta) \in \rho$ olur. Böylece ρ hem sol hem de sağ uyumlu olur.

$(\Leftarrow)$: ρ hem sol hem de sağ kongrüans olsun. $(s,t),(s',t') \in \rho$ alalım. O zaman sağ uyumluluktan $(ss',ts') \in \rho$ ve sol uyumluluktan $(ts',tt') \in \rho$ olur. Böylece geçişmelilikten $(ss',tt') \in \rho$ dır. Yani ρ bir kongrüanstır. ■

Tanım 2.6 S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq S \times S$ olup S üzerinde R yi içeren en az bir kongrüans vardır. S üzerinde R yi

içeren tüm kongrüansların arakesiti de R yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa R *tarafından doğurulan kongrüans* denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir.

$$R^{\#} = \bigcap \{\ \rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, S \text{ üzerinde bir kongrüans } \}$$

Tanımdan kolayca görülüyor ki $R^{\#}$, R yi içeren en küçük kongrüanstır.

Önerme 2.7 S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a,b) \in R\}$$

şeklinde tanımlanan R^c kümesi, R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır.

İspat: R^c nin, R yi içerdiği açıktır. R^c nin sol uyumlu olduğunu göstermek için $(u,v) \in R^c$ ve $w \in S$ alalım. O zaman bazı $x, y \in S^1$ ve $(a,b) \in R$ için $u = xay$ ve $v = xby$ olur. Böylece $wu = (wx)ay$ ve $wv = (wx)by$ dir ve dolayısıyla $(wu, wv) \in R^c$ elde edilir. Yani R^c sol uyumludur. Sağ uyumluluk da benzer şekilde gösterilir. Şimdi R^c nin en küçük olduğunu gösterelim. S, R yi içeren sol ve sağ uyumlu bir başka bağıntı olsun. O zaman tüm $x, y \in S^1$ ve tüm $(a,b) \in R$ için $(xay, xby) \in S$ olur. Dolayısıyla $R^c \subseteq S$ dir. ■

Önerme 2.8 S yarıgrubu üzerindeki her R bağıntısı için $R^{\#} = \left(R^c\right)^e$ dir.

İspat: Önerme 2.3 ten $\left(R^c\right)^e$ nin R^c yi ve elbette R yi içeren bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. $\left(R^c\right)^e$ nin bir kongrüans olduğunu göstermek için hem sol hem de sağ uyumlu olduğunu göstermeliyiz. $(s,t) \in \left(R^c\right)^e$ ve $a \in S$ olsun. O zaman Önerme 2.3

ten $S = R^c \cup \left(R^c\right)^{-1} \cup 1_S^c$ olmak üzere bazı $n \in \mathbb{N}$ için $(s,t) \in S^n$ olur. $1_S^c = 1_S$ olduğundan

$$S = R^c \cup \left(R^{-1}\right)^c \cup 1_S^c = \left(R \cup R^{-1} \cup 1_S\right)^c$$

elde edilir. Böylece hem S hem de S^n sol ve sağ uyumludur. $(as,at) \in S^n \subseteq \left(R^c\right)^e$ ve $(sa,ta) \in S^n \subseteq \left(R^c\right)^e$ dir ve dolayısıyla $\left(R^c\right)^e$, S yarıgrubu üzerinde R yi içeren bir kongrüanstır.

$\left(R^c\right)^e$ nin S yarıgrubu üzerinde R yi içeren en küçük kongrüans olduğunu göstermek için S yarıgrubu üzerinde R yi içeren başka bir κ kongrüansını ele alalım. $\kappa^c = \kappa$ olduğundan $R^c \subseteq \kappa^c = \kappa$ olur. Yani κ, R^c yi içeren bir denklik bağıntısıdır ve Önerme 2.3 ten $\left(R^c\right)^e \subseteq \kappa$ dır. ■

Tanım 2.9 S ve T iki yarıgrup ve $\phi : S \to T$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$(xy)\phi = (x)\phi(y)\phi$$

oluyorsa ϕ ye S den T ye bir (*yarıgrup*) *homomorfizm* denir.

$\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun.

i) ϕ bire-bir ise ϕ ye bir *monomorfizm*;

ii) ϕ örten ise ϕ ye bir *epimorfizm*;

iii) ϕ hem bire-bir hem de örten ise ϕ ye bir *izomorfizm*;

iv) ϕ, S den S ye bir homomorfizm ise ϕ ye bir *endomorfizm*;

v) ϕ, S den S ye bir izomorfizm ise ϕ ye bir *otomorfizm* denir.

Eğer S den T ye bir izomorfizm varsa S ile T ye *izomorfik yarıgruplar* denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.10 S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ ile bölümünden elde edilen S/ρ bölüm kümesi, $\forall x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir.

Tanım 2.11 S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun.

$$\begin{aligned} \rho^* : S &\to S/\rho \\ a &\mapsto a\rho \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ρ^*, örten bir homomorfizm olup bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

Teorem 2.12 S, T iki yarıgrup ve $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a,b) \in S \times S : a\phi = b\phi\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: $\ker\phi$, S üzerinde bir denklik bağıntısı olup $\forall (a,b),(c,d) \in \ker\phi$ için $a\phi = b\phi$ ve $c\phi = d\phi$ olduğundan $(a\phi)(c\phi) = (b\phi)(d\phi)$ olur. ϕ bir homomorfizm olduğundan $(ac)\phi = (bd)\phi$ olup $(ac,bd) \in \ker\phi$ dir. Yani $\ker\phi$ bir kongrüanstır. ■

2.1 Green Denklik Bağıntıları

Herhangi bir S yarıgrubunda bir $a \in S$ elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki yanlı ideali aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.1 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

i) $S^1a = Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}$

ii) $aS^1 = aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\}$

iii) $S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\}$

kümelerine sırasıyla $a \in S$ nin *esas sol*, *esas sağ* ve *esas idealleri* denir. (esas ideal = $a \in S$ yi içeren en küçük ideal)

Herhangi bir S yarıgrubunda $a, b \in S$ elemanlarını içeren en küçük sol, sağ ve iki yanlı idealin eşit olması aşağıda tanımlanan Green denklik bağıntıları ile ifade edilir.

Tanım 2.1.2 S üzerinde tanımlanan

i) $\mathcal{L} = \{(a,b) \in S \times S : S^1a = S^1b\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(a,b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$

iii) $\mathcal{J} = \{(a,b) \in S \times S : S^1aS^1 = S^1bS^1\}$

bağıntılarına sırasıyla *sol-Green bağıntısı* ($\mathcal{L}$-Green), *sağ-Green bağıntısı* ($\mathcal{R}$–Green) ve *Green bağıntısı* ($\mathcal{J}$–Green) denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.1.3 S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

i) $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

ii) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

iii) $a \mathcal{J} b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: i) $(\Rightarrow)$ $a \mathcal{L} b \Rightarrow S^1a = S^1b \Rightarrow$ $a \in S^1b$ olup $a = xb$ olacak şekilde $\exists x \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $b = ya$ olacak şekilde $y \in S^1$ olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ var olsun. $S^1a = S^1xb \subseteq S^1b$ ve $S^1b = S^1ya \subseteq S^1a$ olup $S^1a = S^1b$ ve buradan $(a,b) \in \mathcal{L}$ dir.

Diğerleri benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 2.1.4 S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki sol-Green bağıntısı $\mathcal{L}$ ve sağ–Green bağıntısı $\mathcal{R}$ değişmeli yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ dir.

İspat: $a,b \in S$ olmak üzere $(a,b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olsun. O zaman $a \mathcal{L} c$ ve $c \mathcal{R} b$ olacak şekilde bir $c \in S$ vardır. Yani $xa = c$, $cu = b$ ve $yc = a$, $bv = c$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır. $ycu = d$ dersek $au = ycu = d$, $dv = ycuv = ybv = yc = a$ olur. Böylece $a \mathcal{R} d$ dir. Ayrıca $yb = ycu = d$, $xd = xycu = xau = cu = b$ olup $d \mathcal{L} b$ dir. O halde $(a,b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ dir. $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olduğunu gösterdik. $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir. ■

Tanım 2.1.5 S bir yarıgrup olsun. $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$-Green ve $\mathcal{R}$-Green bağıntıları olmak üzere

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$$

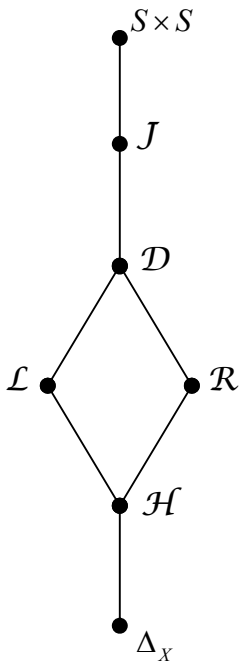
olarak tanımlanan denklik bağıntısına *$\mathcal{H}$-Green bağıntısı* ve S yarıgrubu üzerinde $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da *$\mathcal{D}$-Green bağıntısı* denir.

O halde

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e$$

olur.

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ Green denklik bağıntıları için $\Delta_x \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama *Hasse Diyagramı* denir.



Şekil 2.1 Green Denklik Bağıntılarının Hasse Diyagramı

Önerme 2.1.6 G bir grup ise $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = G \times G$ dır.

İspat: $\forall a, b \in G$ için

$$a = ae = a\left(b^{-1}b\right) = \left(ab^{-1}\right)b$$

$$b = be = b\left(a^{-1}a\right) = \left(ba^{-1}\right)a$$

olup $x = ab^{-1} \in G$ ve $y = ba^{-1} \in G$ alınırsa $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in G$ bulunmuş olur. O halde $\forall a, b \in G$ için $a \,\mathcal{L}\, b$ olup $\mathcal{L} = G \times G$ dir. Benzer şekilde $\mathcal{R} = G \times G$ olup $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = G \times G$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.1.7 S değişmeli bir yarıgrup ise $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$ dır.

İspat: $a \mathcal{L} b$ olsun. O halde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli olduğundan aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ay$ olup $a \mathcal{R} b$ olur. Böylece $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D}$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.1.8 S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ Green denklik bağıntılarına göre elde edilen denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla $S/\mathcal{J}$, $S/\mathcal{D}$, $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{H}$ ve $a \in S$ için a yı içeren $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ Green denklik sınıfları sırasıyla J_a, D_a, L_a, R_a, H_a ile gösterilir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a$$
$$H_a \subseteq R_a \subseteq D_a$$
$$H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve $\mathcal{D}$-Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$a \mathcal{D} b \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \varnothing \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \varnothing$$

olduğu açıktır. O halde bir $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfı D, ayrık $\mathcal{L}$-Green denklik ve $\mathcal{R}$-Green denklik sınıflarının birleşimidir. Bu yüzden bir $\mathcal{D}$ sınıfı, her satırı bir $\mathcal{R}$-sınıfını, her sütunu bir $\mathcal{L}$-sınıfını ve her hücresi de bir $\mathcal{H}$-sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu (=eggbox) olarak düşünülmüştür.

	D_a	L_a			
R_a		H_a			

Çizelge 2.1 Bir $\mathcal{D}$-Green Denklik Sınıfı Örneği

Teorem 2.1.9 (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olmak üzere

i) Eğer $(a,b) \in \mathcal{R}$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ var olup

$$\rho_s : L_a \to L_b,\ x \mapsto xs,$$
$$\rho_t : L_b \to L_a,\ y \mapsto yt$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca ρ_s, L_a daki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını L_b de bu $\mathcal{H}$-sınıfının bulunduğu $\mathcal{R}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler. Benzer şekilde ρ_t de L_b deki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını L_a da bu $\mathcal{H}$-sınıfının bulunduğu $\mathcal{R}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler.

ii) Eğer $(a,b) \in \mathcal{L}$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ var olup

$$\lambda_s : R_a \to R_b,\ x \mapsto sx$$
$$\lambda_t : R_b \to R_a,\ y \mapsto ty$$

şeklinde tanımlanan λ_s ve λ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümdür. Ayrıca λ_s, R_a daki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını R_b de bu $\mathcal{H}$-sınıfının bulunduğu $\mathcal{L}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler. Benzer şekilde λ_t de R_b deki her bir $\mathcal{H}$-sınıfını R_a da bu $\mathcal{H}$-sınıfının bulunduğu $\mathcal{L}$-sınıfındaki $\mathcal{H}$-sınıfına eşler. ■

Sonuç 2.1.10 H_a, H_b aynı $\mathcal{D}$-sınıfında iki $\mathcal{H}$-sınıfı ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: H_a ve H_b aynı $\mathcal{D}$-sınıfında olduğundan $(a,b) \in \mathcal{D}$ olup $R_a \cap L_b \neq \varnothing$ dır. $c \in R_a \cap L_b$ olsun. $(a,c) \in \mathcal{R}$ ve $(c,b) \in \mathcal{L}$ olduğundan $as = c,\ ct = a$ ve $uc = b,\ vb = c$ olacak şekilde $s,t,u,v \in S^1$ vardır. Green Teoreminden $\rho_s|H_a : H_a \to H_c$ ve $\lambda_t|H_c : H_c \to H_b$ dönüşümlerinin her ikisi de birebir ve örtendir. Yani $|H_a| = |H_c|$ ve $|H_c| = |H_b|$ dir. Dolayısıyla $|H_a| = |H_b|$ dir. ■

Sonuç 2.1.11 S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir $\mathcal{H}$-sınıfı ise $H^2 \cap H = \varnothing$ veya $H^2 = H$ olur. Ayrıca $H^2 = H$ olduğunda H, S nin bir altgrubudur.

İspat: $H^2 \cap H = \varnothing$ olsun. O zaman öyle $a,b \in H$ vardır ki $ab \in H$ dır. Dolayısıyla $(a,ab) \in \mathcal{R}$ dir. Green Teoreminden $\rho_b : H_a \to H_{ab}$, $x \mapsto xb$ dönüşümü birebir ve örtendir. Fakat $H = Ha$ ve $H = Hab$ olduğundan ρ_b, H ın bir permütasyonudur. Yani $H = Hb$ dir. Benzer şekilde $H = aH$ olduğu gösterilir. O halde H bir gruptur. ■

Sonuç 2.1.12 S bir yarıgrup ve H, S de bir $\mathcal{H}$-sınıfı olsun. Eğer H bir idempotent eleman içeriyor ise S nin bir altgrubudur. ■

Sonuç 2.1.13 S de bir $\mathcal{H}$-sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerir. ■

Tanım 2.1.14 S bir yarıgrup olsun. Eğer bir $a \in S$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa a elemanına S nin bir *regüler elemanı* denir. Eğer S nin her elemanı regüler ise S ye bir *regüler yarıgrup* denir.

Örneğin; S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman ise e bir regüler elemandır. Ayrıca, her grup bir regüler yarıgruptur.

Önerme 2.1.15 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise L_a ve R_a sınıflarının her elemanı regülerdir.

İspat: S bir yarıgrup, $a \in S$ bir regüler eleman olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Herhangi bir $b \in L_a$ yani $(a,b) \in \mathcal{L}$ alalım. O zaman $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ mevcut olup

$$b(xt)b = bx(tb) = bxa = saxa = s(axa) = sa = b$$

olduğundan $b \in L_a$ regülerdir.

Benzer şekilde $\forall c \in R_a$ elemanının da regüler olduğu gösterilebilir. ■

Sonuç 2.1.16 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise D_a nın her elemanı da regülerdir. ■

Sonuç 2.1.16 dan kolayca görülüyor ki bir $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfı D nin ya hiç regüler elemanı yoktur ya da tüm elemanları regülerdir. D nin tüm elemanları regüler ise D ye *regüler $\mathcal{D}$-sınıfı* denir.

Önerme 2.1.17 Regüler bir $\mathcal{D}$-sınıfında her $\mathcal{L}$-sınıfı ve her $\mathcal{R}$-sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir.

İspat: D bir regüler $\mathcal{D}$-sınıfı ve $a \in D$ olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Bu durumda

$$(xa)(xa) = x(axa) = xa$$
$$(ax)(ax) = (axa)x = ax$$

olup xa ve ax birer idempotent elemandır. Ayrıca

$$a(xa) = a \text{ ve } x(a) = xa$$
$$(ax)a = a \text{ ve } (a)x = ax$$

olup bu eşitliklerden sırasıyla $xa \mathcal{L} a$ ve $ax \mathcal{R} a$ yani $xa \in L_a$ ve $ax \in R_a$ olduğu görülür. ■

Sonuç 2.1.18 Regüler bir $\mathcal{D}$-sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir. ■

Önerme 2.1.19 S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman olsun. O halde e, R_e nin bir sol birim elemanı ve L_e nin bir sağ birim elemanıdır.

İspat: e bir idempotent eleman ve $a \in R_e$ olsun. O halde $a = ex$ olacak şekilde $x \in S^1$ mevcut olup

$$ea = e(ex) = e^2 x = ex = a$$

olur. Benzer şekilde, $b \in L_e$ için $be = b$ olduğu da gösterilebilir. ■

Tanım 2.1.20 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere eğer $axa = a$ ve $xax = x$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa x elemanına a nın bir *tersi* denir ve a nın tüm terslerinin kümesi $V(a)$ ile gösterilir.

$$V(a) = \{x \in S : axa = a, xax = x\}$$

Eğer $e \in S$ bir idempotent eleman ise $eee = e$ olup $e \in V(e)$ dir.

Önerme 2.1.21 S bir yarıgrup olmak üzere $a \in S$ nin bir tersinin var olması için gerek ve yeter koşul $a \in S$ nin regüler olmasıdır.

İspat: $a \in S$ nin bir tersi varsa aynı zamanda regüler olduğu tanımdan kolayca görülüyor. Tersine; $a \in S$ regüler iken a nın bir tersinin var olduğunu gösterelim. $a \in S$ regüler iken $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ var olup $y = xax$ olarak alırsak

$$aya = a(xax)a = (axa)xa = axa = a,$$
$$yay = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = y$$

olduğundan y, a nın bir tersi olur. ■

2.2 Doğuray Kümeleri ve Ranklar

Tanım 2.2.1 S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren tüm altyarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir altyarıgrup olup bu altyarıgruba S nin X *tarafından doğurulan altyarıgrubu* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T,\ T \leq S\}$$

Dikkat edilirse $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük altyarıgruptur ve X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \ldots x_n : n \in \mathbb{Z}^+;\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\}$$

S bir yarıgrup, $\varnothing \neq X \subseteq S$ ve $\varnothing \neq Y \subseteq S$ olmak üzere $X \subseteq Y$ ise $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.2 S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir $\varnothing \neq X \subseteq S$ kümesi var ise bu X kümesine S nin bir *yarıgrup doğuray kümesi*, X

in her bir elemanına S nin bir *doğurayı* ve S ye de X *tarafından doğurulan yarıgrup* denir.

Eğer $S=\langle X\rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir X altkümesi varsa S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir. Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır.

S bir yarıgrup ve $S=\langle X\rangle$ olsun. Eğer $X=\{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise S ye *monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup* denir ve $S=\langle x\rangle$ şeklinde de yazılabilir.

Eğer $\langle a\rangle$ sonsuz elemanlı ise $\phi:\langle a\rangle\to(\mathbb{Z}^+,+)$, $a^k\mapsto k$ dönüşümünü düşünürsek $\langle a\rangle\cong(\mathbb{Z}^+,+)$ dır. O halde izomorfizm altında bir tek sonsuz monojenik yarıgrup vardır o da $(\mathbb{Z}^+,+)$ dır.

Eğer $\langle a\rangle$ sonlu ise o zaman $\langle a\rangle=\{a,a^2,\ldots,a^n,a^{n+1},\ldots\}$ şeklindeki bir dizide sonlu sayıda farklı eleman vardır. O halde $\{x\in\mathbb{Z}^+:a^x=a^y,(x\neq y)\}\neq\varnothing$ dir. Bu küme alttan sınırlı olduğundan en küçük elemanı m mevcuttur. m ye a nın *indeksi* denir. Ayrıca $\{z\in\mathbb{Z}^+:a^{m+z}=a^m\}\neq\varnothing$ olup benzer şekilde bu kümenin de bir minimum elemanı r vardır. r ye a nın *periyodu* denir. Bu sonlu yarıgrup $M_{m,r}(a)=\langle a\rangle=\{a,a^2,\ldots,a^m,a^{m+r-1}\}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $m+k\equiv 0(\mathrm{mod}\,r)$ ve $m+l\equiv 1(\mathrm{mod}\,r)$ olacak şekildeki $k,l\in\{0,1,\ldots,r-1\}$ elemanları için $K_a=\{a^m,a^{m+1},\ldots,a^{m+r-1}\}$ kümesi birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan devirli bir gruptur. K_a ya a nın (grup) *çekirdeği* denir.

Teorem 2.2.3 S bir yarıgrup ve $T\leq S$ olsun. S/T , S nin bir ideali ise S nin her X doğurayı için öyle bir $Y\subseteq X$ vardır ki Y de T nin doğurayıdır**.** ■

Tanım 2.2.4 S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

tam sayısına S nin *yarıgrup rankı* denir ve $rank(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 S bir yarıgrup olsun ve E de S deki idempotentlerin kümesi olsun. Eğer $X \subset E$ için $S = \langle X \rangle$ ise X e bir *idempotent doğuray* denir.

Tanım 2.2.6 S bir yarıgrup olsun. $A \subseteq S$ olmak üzere $\forall a \in A$ için $a \notin \langle A - \{a\} \rangle$ ise A ya S nin *bağımsız bir alt kümesi* denir.

Tanım 2.2.7 S bir yarıgrup olmak üzere küçük rank, normal (=düşük) rank, orta rank, üst rank ve geniş rank

$$r_1(S) = \max\{\ |A| : \forall A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız}\ \}$$
$$r_2(S) = \min\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ \langle A \rangle = S\ \}$$
$$r_3(S) = \max\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız ve } \langle A \rangle = S\ \}$$
$$r_4(S) = \max\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız}\ \}$$
$$r_5(S) = \min\{\ |A| : \forall A \subseteq S,\ \langle A \rangle = S\ \}$$

olarak tanımlanmıştır. (Howie 1999,2000)

2.3 Dönüşüm Yarıgrupları

Herhangi bir X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesi B_X ile gösterelim. Bu bölümde B_X ve B_X in bazı özel alt yarıgruplarının özellikleri verilecektir.

Her $\alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x,y) \in X \times X : z \in X \text{ için } (x,z) \in \alpha \text{ ve } (z,y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile B_X bir yarıgruptur. Ayrıca

$$1_X = \{(x,x) : x \in X\}$$

bağıntısı birim eleman olup B_X bir monoiddir.

Tanım 2.3.1 $\alpha \in B_X$ olsun. Her $x \in dom(\alpha)$ için $|x\alpha| = 1$ ise α ya *kısmi dönüşüm* denir.

X kümesi üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesi P_X ile gösterilir. P_X, B_X de tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup, bu yarıgruba *kısmi dönüşümler yarıgrubu* denir.

Önerme 2.3.2 Tüm kısmi dönüşümlerin kümesi P_X, tüm bağıntılar yarıgrubu B_X in bir altyarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in P_X$ ve $(x,y_1),(x,y_2) \in \alpha\beta$ olsun. Öyle bir $z_1, z_2 \in X$ için

$$(x,z_1) \in \alpha, (z_1,y_1) \in \beta \text{ ve } (x,z_2) \in \alpha, (z_2,y_2) \in \beta$$

dir. $\alpha \in P_X$ ise $z_1 = z_2$ ve $\beta \in P_X$ olduğundan $y_1 = y_2$ dir. O halde $\alpha\beta \in P_X$ olur. ■

Tanım 2.3.3 $\alpha \in P_X$ için $dom(\alpha) = X$ ise α ya bir *dönüşüm* denir. X kümesi üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir. T_X, B_X de tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup, bu yarıgruba *tüm dönüşümler yarıgrubu* denir.

Önerme 2.3.4 $\varphi,\psi \in P_X$ olsun. O zaman

i) $dom(\varphi\circ\psi)=[im\varphi\cap dom\psi]\varphi^{-1}$

ii) $im(\varphi\circ\psi)=[im\varphi\cap dom\psi]\psi$ dir.

İspat: i) $x\in dom(\varphi\circ\psi)$ olsun. O zaman $(x,y)\in\varphi\circ\psi$ olacak şekilde $\exists y\in X$ vardır. O halde $(x,z)\in\varphi$ ve $(z,y)\in\psi$ olacak şekilde $z\in X$ vardır. $z\in im\varphi$ ve $z\in dom\psi$ yani $z\in im\varphi\cap dom\psi$ dir. $(x,z)\in\varphi\Rightarrow(z,x)\in\varphi^{-1}$ olduğundan $x\in[im\varphi\cap dom\psi]\varphi^{-1}$ olur.

$x\in[im\varphi\cap dom\psi]\varphi^{-1}$ alalım. $(z,x)\in\varphi^{-1}$ olacak şekilde $z\in im\varphi\cap dom\psi$ vardır. $z\in dom\psi$ olup $(z,y)\in\psi$ olacak şekilde $y\in X$ vardır. $(z,x)\in\varphi^{-1}\Rightarrow(x,z)\in\varphi$ dir. $(x,z)\in\varphi$ ve $(z,y)\in\psi$ olup $(x,y)\in\varphi\circ\psi$ dir. Dolayısıyla $x\in dom(\varphi\circ\psi)$ dir. O halde $dom(\varphi\circ\psi)=[im\varphi\cap dom\psi]\varphi^{-1}$ dır.

ii) $x\in im(\varphi\circ\psi)$ olsun. O halde $(y,x)\in\varphi\circ\psi$ olacak şekilde $y\in X$ vardır. $\Leftrightarrow$ $(y,z)\in\varphi$ ve $(z,x)\in\psi$ olacak şekilde $z\in X$ vardır. $\Leftrightarrow$ Dolayısıyla $z\in[im\varphi\cap dom\psi]$ dır. $\Leftrightarrow$ $(z,x)\in\psi$ olduğundan $x\in[im\varphi\cap dom\psi]\psi$ olur. ■

Önerme 2.3.5 Tüm dönüşümler yarıgrubu T_X, kısmi dönüşümler yarıgrubu P_X in bir altyarıgrubudur.

İspat: $\alpha,\beta\in T_X$ alalım. $x\in X$ için $|x\alpha|=1$ olup $x\alpha=y$ olacak şekilde bir tek $y\in X$ vardır. $|x(\alpha\circ\beta)|=|y\beta|=1$ olup $(\alpha\circ\beta)\in T_X$ dir. O halde $T_X\le P_X$ dir. ■

T_X in herhangi bir altyarıgrubuna da *dönüşümler yarıgrubu* denir.

Tanım 2.3.6 $\alpha \in T_X$ için $\left|x\alpha^{-1}\right| = 1$ ise α ya bir *permütasyon* denir. X kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesini S_X ile gösterelim. Tüm permütasyonların kümesi S_X, tüm dönüşümler yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubudur, bu yarıgruba *simetrik grup* denir.

Tanım 2.3.7 $X \neq \varnothing$ ve S bir yarıgrup olmak üzere $\phi : S \to T_X$ homomorfizması varsa ϕ ye S nin bir *temsili* denir. Eğer ϕ temsili birebir ise ϕ ye S nin bir *sadık temsili* denir.

Teorem 2.3.8 S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olsun. Bu durumda $\phi : S \to T_X$ sadık temsili vardır.

İspat: $a \in S$ alalım. $\forall x \in X$ için $\rho_a : S^1 \to S^1$, $x\rho_a = xa$ dönüşümü tanımlansın. $\rho_a \in T_X$ dir. $\forall a \in S$ için $\phi : S \to T_X$, $a\phi \mapsto \rho_a$ olarak tanımlayalım. $a, b \in S$ için $a\phi = b\phi$ olsun. $a\phi = b\phi \Rightarrow \rho_a = \rho_b$ dir. $\forall x \in X = S^1$ olup $x\rho_a = x\rho_b \Rightarrow xa = xb$ dir. $1 \in S^1$ olduğundan $1a = 1b \Rightarrow a = b$ olup ϕ birebirdir. $\forall x \in S^1$ için $x\rho_a\rho_b = \left(x\rho_a\right)\rho_b = \left(xa\right)\rho_b = \left(xa\right)b = x\left(ab\right) = x\rho_{ab}$ olup ϕ homomorfizmadır. O halde ϕ bir sadık temsildir. ■

$\left|X\right| = n$ ise $X = X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere, B_X, P_X, T_X, S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, T_n, S_n ifadeleri kullanılır. Bu durumda

$$S_n \leq T_n \leq P_n \leq B_n$$

olur. B_n, P_n, T_n, S_n yarıgruplarının elemenları için tez boyunca $\alpha\left(x\right)$ yerine $x\alpha$ kullanılacaktır.

Tanım 2.3.9 Permütasyon olmayan tüm dönüşümler yarıgrubunun elemanlarına *singüler dönüşüm* denir.

$X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere tüm singüler dönüşümlerin kümesi ST_n veya $Sing_n$ ile gösterilir. Yani $ST_n = Sing_n = T_n - S_n$ dir.

Teorem 2.3.10 $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere tüm dönüşümler yarıgrubu T_n regülerdir.

İspat: $\alpha \in T_n$ ve $im(\alpha) = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ olsun. $\forall k\,(k = 1,2,...,m)$ için $j_k\alpha = i_k$ olacak şekilde bir tek j_k seçelim. $\beta \in T_n$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$i\beta = \begin{cases} j_k & , \ i = i_k \in im(\alpha) \\ i & , \ aksi\ halde \end{cases}$$

Bu durumda $\forall i \in X_n$ için $i\alpha \in im(\alpha)$ olduğundan bir $i_k \in \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ için $i\alpha = i_k$ olup

$$i\alpha\beta\alpha = i_k\beta\alpha = j_k\alpha = i_k = i\alpha$$

yani $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olup T_n regülerdir. ■

Teorem 2.3.11 $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere $Sing_n \trianglelefteq T_n$ dir.

İspat: $\alpha \in T_n$ ve $\beta \in Sing_n$ olsun. $|Im(\alpha\beta)| \le |Im(\beta)| \le n-1$ olup $\alpha\beta \in Sing_n$ dir. Ayrıca $|Im(\beta)| \le n-1$ ve $\alpha \in T_n$ olduğundan $|Im(\beta\alpha)| \le n-1$ olup $\beta\alpha \in Sing_n$ dir. ■

Tanım 2.3.12 $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ olmak üzere bir $\alpha \in T_n$ dönüşümü için *çekirdek kümesi* $ker(\alpha)$, *noksanlık kümesi* $Def(\alpha)$, *sabit noktaların kümesi* $Fix(\alpha)$, *sabit olmayan noktaların kümesi* $Shift(\alpha)$ ve $def(\alpha)$ pozitif tamsayısı,

- $ker(\alpha) = \{(x,y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$
- $Def(\alpha) = X_n - im(\alpha)$
- $Fix(\alpha) = \{x \in X_n \ : \ x\alpha = x\}$
- $Shift(\alpha) = X_n - Fix(\alpha)$
- $def(\alpha) = |Def(\alpha)|$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.13 $\alpha, \beta \in T_n$ olsun.

i) $im(\alpha\beta) \subseteq im(\beta)$

ii) $ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha\beta)$

dır.

İspat: i) $x \in im(\alpha\beta)$ olsun. O zaman bir $y \in X_n$ için $y(\alpha\beta) = x$ olur. Dolayısıyla $(y\alpha)\beta = x$ olup $x \in im(\beta)$ dır.

ii) $(x,y) \in ker(\alpha)$ olsun. O zaman $x\alpha = y\alpha$ olup $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ dir. O halde $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olup $(x,y) \in ker(\alpha\beta)$ dır. ■

Önerme 2.3.14 $\alpha, \beta \in T_n$ iki dönüşüm olsun. O zaman

i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow im\alpha = im\beta$

ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker\alpha = \ker\beta$

iii) $\alpha\mathcal{H}\beta \Leftrightarrow im\alpha = im\beta$ ve $\ker\alpha = \ker\beta$

iv) $\alpha\mathcal{D}\beta \Leftrightarrow |im\alpha| = |im\beta|$

dır.

İspat: i) $(\Rightarrow)$: $\alpha\mathcal{L}\beta$ olsun. O zaman $\gamma\beta = \alpha$ ve $\delta\alpha = \beta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in T_n$ vardır. $im\alpha = im(\gamma\beta) \subseteq im\beta$ ve $im\beta = im(\delta\alpha) \subseteq im\alpha$ olduğundan $im\alpha = im\beta$ dır.

$(\Leftarrow)$: $im\alpha = im\beta = Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ olsun. O zaman $\forall i = 1,2,\ldots,m$ için $a_i\alpha = y_i$ ve $b_i\beta = y_i$ olacak şekilde $a_i, b_i \in X_n$ vardır. $\mu, \lambda : X_n \to X_n$ dönüşümlerini $x\mu = \{a_i : x\beta = y_i\}$ ve $x\lambda = \{b_i : x\alpha = y_i\}$ olacak şekilde tanımlayalım. $x \in X_n$ için $x\beta = y_i$ olsun. $x(\mu\alpha) = (x\mu)\alpha = a_i\alpha = y_i$ olduğundan $\beta = \mu\alpha$ dır. Eğer $x\alpha = y_i$ ise $x(\lambda\beta) = (x\lambda)\beta = b_i\beta = y_i$ olduğundan $\alpha = \lambda\beta$ dır. O halde $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$ dir.
Diğerleri de benzer şekilde gösterilir. ■

Tanım 2.3.15 $m \geq n$ olmak üzere $S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m$ şeklinde tanımlanan $S(m,n)$ ye *ikinci tip Stirling sayısı* denir. $S(1,1) = S(m,m) = 1$ ve $1 < n \leq m$ olmak üzere $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$ indirgeme bağıntısı sağlanır.

Önerme 2.3.16 Bir $\mathcal{D}_k$-sınıfında

i) $\binom{n}{k}$ tane farklı $\mathcal{L}$-sınıfı

ii) $S(n,k)$ tane farklı $\mathcal{R}$-sınıfı

iii) $S(n,k)\binom{n}{k}$ tane farklı $\mathcal{H}$-sınıfı

iv) Bir $\mathcal{H}$-sınıfında $k!$ tane eleman

v) Her bir $\mathcal{L}$-sınıfında $S(n,k)k!$ tane eleman

vi) Her bir $\mathcal{R}$-sınıfında $\binom{n}{k}k!$ tane eleman

vii) Her bir $\mathcal{L}$-sınıfında k^{n-k} tane grup olan $\mathcal{H}$-sınıfı

viii) Bir $\mathcal{D}_k$-sınıfında $\binom{n}{k}S(n,k)k!$ tane eleman vardır. ■

Örneğin, T_3 de 3 tane $\mathcal{D}$-sınıfı olup $\mathcal{D}_2$-sınıfında sırasıyla $\binom{3}{2}=3$ tane farklı $\mathcal{L}$-sınıfı, $S(3,2)=3$ tane farklı $\mathcal{R}$-sınıfı, $S(3,2)\binom{3}{2}=9$ tane farklı $\mathcal{H}$-sınıfı, bir $\mathcal{H}$-sınıfında $2!=2$ tane eleman, her bir $\mathcal{L}$-sınıfında $S(3,2)2!=6$ tane eleman, her bir $\mathcal{R}$-sınıfında $\binom{3}{2}2!=6$ tane eleman, her bir $\mathcal{L}$-sınıfında $2^{3-2}=2$ tane grup olan $\mathcal{H}$-sınıfı ve $\mathcal{D}_2$ de toplam $\binom{3}{2}S(3,2)2!=18$ tane eleman vardır.

$X_n=\{1,2,\ldots,n\}$ üzerinde $\alpha=(1,2,...,n)$, $\beta=(1,2)$, $\gamma=\|12\|$ ve $\theta=\begin{pmatrix}2 & 3 & ... & n\\ 2 & 3 & ... & n\end{pmatrix}$ olmak üzere

Teorem 2.3.17 $S_n=\langle\{\alpha,\beta\}\rangle$ olup $rank(S_n)=2$ dir.

İspat: α ve β elemanları S_n i grup olarak doğurur. Eğer bir grup devirli değilse grup rankı en az 2 dir. (grup rankı 1 olsa grup devirli olmak zorundadır.) $2\le rank_g(S_n)$ ve $S_n=\langle\{\alpha,\beta\}\rangle$ olup $rank_g(S_n)=2$ dir. S_n sonlu olup grup ve yarıgrup rankı eşittir. $rank(S_n)=2$ olur. ■

Teorem 2.3.18 $T_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olup $rank(T_n) = 3$ dir.

İspat: $n = 1 \Rightarrow rank(T_n) = 1$ ve $n = 2 \Rightarrow rank(T_n) = 2$ dir. $T_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olup $rank(T_n) \leq 3$ tür. $T_n = \langle X \rangle$ olsun. $S_n \leq T_n$ ve $T_n - S_n \lhd T_n$ olup $S_n \cap X = Y$ ise $S_n = \langle Y \rangle$ dir. $rank(S_n) = 2$ olduğundan $|Y| \geq 2$ dir. $X - Y = \varnothing$ olsa $X = Y$ olur. O zaman $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$ olur ki $T_n = S_n$ çelişkisi elde edilir. O halde $X - Y \neq \varnothing$ dır. $|X - Y| \geq 1$ olmalıdır. $|X| = |Y| + |X - Y| \geq 2 + 1 = 3$ ise $|X| \geq 3$ yani $rank(T_n) \geq 3$ olur. Dolayısıyla $rank(T_n) = 3$ tür. ■

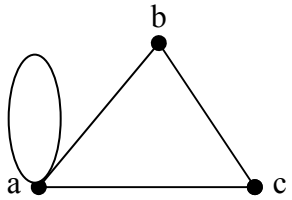
Teorem 2.3.19 $P_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma, \theta\} \rangle$ olup $rank(P_n) = 4$ dür.

İspat: $P_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma, \theta\} \rangle$ olup $rank(P_n) \leq 4$ tür. Benzer şekilde $T_n \leq P_n$ ve $P_n - T_n \lhd P_n$ olup P_n nin her doğurayı T_n nin bir doğurayını içerir. $rank(P_n) \geq 4$ olur. Dolayısıyla $rank(P_n) = 4$ tür. ■

2.4 Grafik ve Orbitler

Tanım 2.4.1 *Köşeler kümesi* olarak adlandırdığımız boş olmayan sonlu bir küme ve *kenarlar listesi* olarak adlandırdığımız köşeler kümesinin sırasız ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya *grafik* denir. Bir G *grafiği,* köşelerin kümesi $V(G)$ ile kenarların listesi $E(G)$ olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.2 $V(G) = \{a, b, c\}$ ve $E(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, a\}\}$ olan G grafiği şekildeki gibidir.



Şekil 2.2 Bir grafik örneği

Tanım 2.4.3 $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$ grafiğinde kenarların kümesi köşelerin sıralı $\left(a,b\right)$ ikililerinden oluşuyor ise G grafiğine *yönlü grafik(=diyagram)* denir. G grafiği yönlü grafik değil ise *yönsüz grafik* denir.

Tanım 2.4.4 $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$ bir grafik ve $i=1,2,...,k$ için $a_i \in V\left(G\right)$ olmak üzere $\left\{a_1,a_2\right\},\left\{a_2,a_3\right\},\ldots,\left\{a_{k-2},a_{k-1}\right\},\left\{a_{k-1},a_k\right\} \in E\left(G\right)$ olmak üzere $a_1a_2\ldots a_k$ şeklinde köşelerin bir dizisi varsa bu diziye a_1 ve a_k arasında bir *patika* denir. Eğer

$$\left\{a,a\right\}$$

şeklindeki a dan a ya olan bir patikaya bir *devir* denir.

Tanım 2.4.5 Herhangi iki köşesi arasında bir patika olan grafiğe *bağlantılı grafik* denir.

Tanım 2.4.6 Devir içermeyen bağlantılı grafiklere *ağaç* denir.

Önerme 2.4.7 Bir ağaçta iki köşe arasında bir ve yalnız bir tek kenar vardır. ■

Tanım 2.4.8 $\alpha \in T_n$ ve $x,y \in X_n$ olsun. $r,q \in \mathbb{Z}^+ \cup \left\{0\right\}$ olmak üzere

$$x \equiv y \;\Leftrightarrow\; x\alpha^r \equiv y\alpha^q$$

şeklinde X_n üzerinde tanımlanan ≡ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına α nın *orbitleri* denir ve Ω ile gösterilir.

Orbitler konvekstir. Yani $x<y<z$ ve $x,z\in\Omega$ ise $y\in\Omega$ dir. Bir orbit bir devir ve bu devire eklenmiş ağaçlardan oluşur. Eğer eklenmiş hiç ağaç yoksa bu orbite *devirli orbit* denir. Devir sadece bir elemandan oluşuyorsa yani $x\alpha=x$ ise $(x,x\alpha)$ ikilisine *halka*(=loop) denir. Genel olarak $x,x\alpha,x\alpha^2,...$ dizisi en sonunda bir devire ulaşır. Bir devirli orbitte devir üzerindeki köşelerin kümesi $Z(\Omega)$ ile gösterilir.

Örnek 2.7.9 $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13\\2&3&5&1&9&6&6&1&5&11&12&10&9\end{pmatrix}$ olmak üzere, α nın orbitleri $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,8,9,13\}$, $\Omega_2=\{6,7\}$, $\Omega_1=\{10,11,12\}$ dır ve $Z(\Omega_1)=\{5,9\}$, $Z(\Omega_2)=\{6,7\}$, $Z(\Omega_3)=\{10,11,12\}$ dir.

Not. α nın orbitleri α nın grafiğindeki bağlantılı bileşenlerdir.

Tanım 2.7.10 $\alpha\in T_n$ olsun. $\alpha^{m+r}=\alpha^m$ ve $\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m+r-1}$ ikili olarak farklı olacak şekilde $m,r\in\mathbb{Z}^+$ varsa α ya (m,r)*-potent eleman* denir. Burada $m\geq 1$ ye α nın *indeksi* ve $r\geq 1$ ye α nın *periyodu* denir. Özel olarak,

i) $r=1$ ise α ya bir m*-potent eleman*
ii) $m=r=1$ ise α ya bir *idempotent eleman*

denir.

Tanım 2.7.11 Bir $\alpha\in T_n$ için $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}\subseteq X_n$ olmak üzere

$$x_1\alpha=x_2,\ x_2\alpha=x_3,\ ...,\ x_{m-1}\alpha=x_m,\ x_m\alpha=x_r \qquad (x_r\in X)$$

ve her $x \in X_n - X$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir (m,r)-*patika devir* denir ve

$$\alpha = \left[x_1, x_2, ..., x_m \middle| x_r \right]$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak,

i) $r = m$ ise α ya bir m-*patika*
ii) $m \geq 2$ ve $r = 1$ ise α ya bir m-*devir*
iii) $m = r = 1$ ise α ya *birim patika*

denir.

Not. α nın indeksi olan m ; $Z(\Omega_i)$ ye ulaşan en uzun patikanın uzunluğu ve periyodu olan r ise orbitlerdeki devirlerin uzunluklarının en küçük ortak katıdır. Örnek 2.7.9 da $m = 4$ ve $r = 6$ olup $\alpha^{4+6} = \alpha^4$ dir.

Tanım 2.7.12 Γ yönlü grafiğinde eğer her $u, v \in V(\Gamma)$ ve $u \neq v$ için $(u,v) \in E(\Gamma)$ veya $(v,u) \in E(\Gamma)$ olacak şekilde sadece bir yönlendirilmiş kenar varsa Γ yönlü grafiğine *tam grafik* denir.

Tanım 2.7.13 Γ yönlü grafiğinde herhangi iki $u, v \in V(\Gamma)$ köşesi için u dan v ye yönlendirilmiş bir patika varsa Γ yönlü grafiğine *güçlü bağlantılı grafik* denir.

3. TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGUBUNUN ÜST RANKI

Bu bölümde $r_4(T_n)$ için, yani tüm dönüşümler yarıgrubunun maksimal bağımsız alt kümesinin kardinalitesi için bir alt sınır verilmiştir.

S bir yarıgrup olmak üzere küçük rank, normal (=düşük) rank, orta rank, üst rank, geniş rankın

$$r_1(S) = \max\{\ |A| : \forall A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız}\ \}$$
$$r_2(S) = \min\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ \langle A\rangle = S\ \}$$
$$r_3(S) = \max\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız ve } \langle A\rangle = S\ \}$$
$$r_4(S) = \max\{\ |A| : \exists A \subseteq S,\ A \text{ bağımsız}\ \}$$
$$r_5(S) = \min\{\ |A| : \forall A \subseteq S,\ \langle A\rangle = S\ \}$$

olarak tanımlandığını hatırlayalım.

Tanım 3.1 S bir yarıgrup olsun. $A \subseteq S$ olmak üzere $\forall a \in A$ için $a \notin \langle A - \{a\}\rangle$ ise A ya S nin *bağımsız bir alt kümesi* denir.

Howie ve Riberio nun (1999) ve (2000) de yaptıkları çalışmalardan aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 3.2 S bir yarıgrup olmak üzere $r_1(S) \le r_2(S) \le r_3(S) \le r_4(S) \le r_5(S)$ dir.

İspat: $r_2(S) = n$ ise $|U| = n$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır ve $\langle U\rangle = S$ dir. U bağımsız olmak zorundadır. Aksi halde $u \in \langle U - \{u\}\rangle$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. O zaman $\langle U - \{u\}\rangle = S$ ve $r_2(S) \le n-1$ olur ki bu da $r_2(S) = n$ olmasıyla çelişir. O halde U bağımsızdır. $r_1(S) = m$ ve $n < m$ olsun. O zaman $U \subsetneq V$ olacak

şekilde en az bir $V \subseteq S$ vardır ve $|V| = m$ olup V bağımsızdır. Bir $v \in (V - U)$ alalım. V bağımsız olup $v \notin \langle V - \{v\} \rangle$ dir. $U \subsetneq V$ olduğundan $v \notin \langle U \rangle$ olur ki bu da $\langle U \rangle = S$ olmasıyla çelişir. O halde $v \in \langle U \rangle$ ve dolayısıyla $m \leq n$ dir. O zaman $r_1(S) \leq r_2(S)$ olur.

Eğer $|A| = r_2(S)$ ise $A \subseteq S$ bağımsız olmak zorundadır. Aksi halde $a \in \langle A - \{a\} \rangle$ olacak şekilde bir $a \in A$ var olurdu. Bu durumda $\langle A - \{a\} \rangle = S$ olur ki bu ise $|A| = r_2(S)$ ile çelişir. O halde A bağımsızdır. Böylece A bağımsız bir doğuray kümesi olup $r_2(S) = |A| \leq r_3(S)$ olur. Benzer şekilde, $r_3(S) = |A|$ ise $A \subseteq S$ bağımsız ve $\langle A \rangle = S$ olur. A 'nın bağımsız olmasından dolayı $r_3(S) = |A| \leq r_4(S)$ olur.

Son olarak $r_4(S) \leq r_5(S)$ olduğunu gösterelim. $r_5(S) = m$ ve $r_4(S) = n$ olsun. $n \leq m$ olduğu gösterilmelidir. Aksine $n > m$ kabul edelim. $r_4(S) = n$ olup $|V| = n$ olacak şekilde bir $V \subseteq S$ vardır ve V bağımsızdır. O zaman $\forall v \in V$ için $v \notin \langle V - \{v\} \rangle$ 'dir. $r_5(S) = m < n$ olduğundan her $U \subseteq S$ için $U \subseteq (V - \{v\})$ ve $|U| = m$ için $\langle U \rangle = S$ olduğundan $v \in \langle U \rangle$ dur. $v \in \langle U \rangle$ ve $U \subseteq (V - \{v\})$ olduğundan $v \in \langle V - \{v\} \rangle$ olur. Bu ise V nin bağımsız olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $n \leq m$ dir. Yani $r_4(S) \leq r_5(S)$ olur. ■

Tanım 3.3 S bir yarıgrup olmak üzere, eğer

i) $r_2(S) = |S|$ ise S ye *royal yarıgrup*

ii) $r_2(S) = |S| - 1$ ise S ye *noble yarıgrup*

denir.

Lemma 3.4 Her royal yarıgrup bir banddır.

İspat: S royal olsun. O zaman $r_2(S)=|S|$ tir. $a\in S$ alalım. Eğer $a\neq a^2$ olsaydı $A=S-\{a^2\}$ kümesi için $\langle A\rangle = S$ ($|S|-1$ elemanlı) olurdu ki bu da S nin royal olmasıyla çelişir. O halde $a=a^2$ olup S nin tüm elemanları idempotent olmak zorundadır. ■

Teorem 3.5 $|S|\geq 2$ olmak üzere, S bir yarıgrup olsun. Eğer

i) S bir band değilse $r_1(S)=1$,

ii) S bir band fakat royal değilse $r_1(S)=2$,

iii) S royal ise $r_1(S)=|S|$

dir.

İspat: i) Eğer S bir band değilse $a\neq a^2$ olacak şekilde en az bir $a\in S$ vardır. O zaman $\{a,a^2\}$ kümesi bağımsız değildir. Çünkü $a^2\in\langle\{a,a^2\}-\{a^2\}\rangle=\langle a\rangle$ olup $r_1(S)=1$ dir.

ii) S bir band olsun. Eğer $a,b\in S$ ve $a\neq b$ ise $\{a,b\}$ kümesi bağımsızdır. Çünkü $b\in\langle a\rangle$ olsaydı $b=a^m, m\in IN$ olurdu. S bir band olduğundan $a^2=a$ ise $a^m=a$ ve $b=a$ olur ki bu da $a\neq b$ olmasıyla çelişir. O zaman $r_1(S)\geq 2$ olur. $r_1(S)\geq 2$ olduğundan S, E_α $(\alpha\in Y)$ dikdörtgensel bandlarının bir Y yarılatisidir. Eğer Y bir zincir değilse $\alpha\beta<\alpha$, $\alpha\beta<\beta$ olacak şekilde $\alpha,\beta\in Y$ vardır. Eğer $x\in E_\alpha$ ve $y\in E_\alpha$ ise $\{x,y,xy\}$ kümesinin kardinalitesi 3 olup bağımsız değildir. O halde $r_1(S)=2$ dir.

Y bir zincir olsun. Eğer E_α dikdörtgensel bandlarının arasında $|C_\alpha|,|D_\alpha|\geq 2$ olacak şekilde bir $E_\alpha=C_\alpha\times D_\alpha$ öz dikdörtgensel bandı varsa o zaman $c_1,c_2\in C_\alpha$ ve $d_1,d_2\in D_\alpha$ olmak üzere bağımsız olmayan bir $\{(c_1,d_1),(c_2,d_2),(c_1,d_2)\}$ kümesi

vardır. Buradan $r_1(S)=2$ olur. Yani bir S bandı için Y bir zincir ve R_α bir sol ya da sağ sıfır yarıgrup olmazsa $r_1(S)=2$ dir.

Son olarak, S , her biri sağ ya da sol sıfır olan yarıgrupların bir $Z_1 < Z_2 < ... < Z_m \ \ (m \geq 1)$ zincirinin birleşimi ve $Z_i Z_j \subseteq Z_{\min\{i,j\}}$ olsun. Eğer $i > j$, $x \in Z_i$ ve $y \in Z_j$ ise $xy \in Z_j$ olur. Eğer $xy \neq y$ ise $\{x, y, xy\}$ kümesi bağımsız değildir ve bu yüzden $r_1(S)=2$ dir. Benzer şekilde $yx \neq y$ ise $r_1(S)=2$ dir. Sonuç olarak S bir royal band değilse $r_1(S)=2$ dir.

iii) $|S|=m$ sonlu olsun. S bir royal yarıgrup olduğundan $r_2(S)=|S|$ dir. O halde $\langle S \rangle = S$ olup S bağımsızdır. Bu durumda $r_1(S)=|S|$ olur. ■

Teorem 3.6 S bir sonlu yarıgrup ve V de S nin en geniş öz alt yarıgrubu olsun. O zaman $r_5(S)=|V|+1$ dir.

İspat: V alt yarıgrup olduğundan S yi doğurmaz. O halde $r_5(S)>|V|$ dir. $Z \subseteq S$ ve $|Z|=|V|+1$ olsun. O zaman $|\langle Z \rangle| \geq |V|+1$ dir. Fakat V en geniş öz alt yarıgrup olduğundan $\langle Z \rangle = S$ olmak zorundadır. Bu durumda $r_5(S)=|V|+1$ olur. ■

Tanım 3.7 S bir yarıgrup olmak üzere, $a \in S$ için $a=bc$ olacak şekilde $b,c \in S-\{a\}$ elemanları yoksa a ya bir *indirgenemez eleman* denir.

Sonuç 3.8 S bir sonlu yarıgrup olsun. $r_5(S)=|S| \ \Leftrightarrow \ S$ nin bir indirgenemez eleman içermesidir. Başka bir deyişle $S-S^2 \neq \varnothing$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $r_5(S)=|S|$ olsun. O halde $|U|=|S|-1$ olacak şekilde en az bir $U \subseteq S$ vardır ve $\langle U \rangle \neq S$ dir. $|S-U|=1$ olup $(S-U)=\{a\}$ dır. $\langle U \rangle = U$ olduğundan a indirgenemezdir.

$(\Leftarrow)$: Bir $a \in S$ indirgenemez olsun. O zaman $S-\{a\}$ kümesi S yi doğurmaz. Bu durumda $r_5(S) > |S|-1$ olur. O halde $r_5(S) = |S|$ dir. ■

Teorem 3.9 T_n tüm dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

i) $r_1(T_n) = 1$,

ii) $r_2(T_n) = r_3(T_n) = 3$,

iii) $r_5(T_n) = n^n - \frac{1}{2}n! + 1$

dir.

İspat: Howie ve Riberio (2000) deki çalışmaya bakınız. ■

T_n için $r_4(T_n) = \max\{\ |A| : \exists A \subseteq T_n,\ A$ bağımsız $\}$ olup $r_4(T_n)$ rankı için bir alt sınır aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.10 $X = X_n = \{1, 2, ..., n\}$ ve T_n tüm dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

$$\left[S(n, n-1) - (n-1)\right](n-1)! + n + 1 \leq r_4(T_n)$$

dir.

İspat: Öncelikle T_n nin bağımsız bir A alt kümesini oluşturalım. A kümesi, $Y = X - \{i\}$, $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $\mathcal{D}_Y$ sınıfında yer alan $\mathcal{L}_Y$ sınıfındaki grup olan $\mathcal{H}$-sınıflarındaki idempotentler ile grup olmayan $\mathcal{H}$-sınıflarındaki tüm elemanlar ve $\forall x \in X$ için $x\alpha = i$ olan α sabit dönüşümü ile T_n nin birim dönüşümünden (β) oluşsun. $\mathcal{D}_{n-1}$ de bir $\mathcal{L}$-sınıfında $n-1$ tane grup olan H sınıfı vardır ve $S(n, n-1)$ tane $\mathcal{R}$-sınıfı olup bunların $\left[S(n, n-1) - (n-1)\right]$ tanesi grup

olmayan $\mathcal{H}$-sınıflarıdır. Ayrıca her bir $\mathcal{H}$-sınıfında $(n-1)!$ tane eleman bulunur. Böylece

$$|A| = (n-1) + \left[S(n,n-1) - (n-1)\right](n-1)! + 1 + 1$$

dır. İspatı tamamlamak için A kümesinin T_n nin bağımsız bir alt kümesini göstermek yeterli olacaktır. A daki sabit dönüşüm ve birim dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i & i & \cdots & i \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

olarak alalım. $im(\alpha\beta) \subseteq im\beta$ olduğundan $\alpha \notin \langle A - \{\alpha\} \rangle$ ve $\beta \notin \langle A - \{\beta\} \rangle$ olduğu açıktır. Dolayısıyla genelliği kaybetmeksizin $A = A - \{\alpha, \beta\}$ kabul edebiliriz. Herhangi bir $\gamma \in A$ dönüşümünü için $\gamma \notin \langle A - \{\gamma\} \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki $\gamma \in \langle A - \{\gamma\} \rangle$ olsun. O zaman $\rho_1\rho_2...\rho_k = \gamma$ olacak şekilde $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k \in A - \{\gamma\}$ vardır. $im(\alpha\beta) \subseteq im\beta$ ve $\ker\alpha \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğundan

$$\ker\rho_1 = \ker\gamma \text{ ve } im\gamma = im\rho_k \tag{3.1}$$

elde edilir. Ayrıca $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k, \gamma \in L_Y$ olduğundan

$$im\gamma = im\rho_j,\ j = 1, 2, \ldots, k \tag{3.2}$$

olur. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden $\ker\gamma = \ker\rho_1$ ve $im\gamma = im\rho_1$ elde edilir. Yani γ ve ρ_1 aynı $\mathcal{H}$-sınıfında demektir. O halde

i) γ idempotent ise A kümesinin tanımından ρ_1 aynı $\mathcal{H}$-sınıfında olamaz. Çünkü $\ker\gamma = \ker\rho_1$ olacak şekilde bir $\rho_1 \in A-\{\gamma\}$ yoktur. O halde $\gamma \notin \langle A-\{\gamma\}\rangle$ dir.

ii) γ idempotent değilse grup olmayan $\mathcal{H}$-sınıfları kapalı olmadığından (aslında bağımsız alt küme olduğundan) ve grup olan $\mathcal{H}$-sınıflarının idempotentleri bulunduğu $\mathcal{L}$-sınıfının sağ birimi olduğundan $|im\gamma| = |im\rho_1\rho_2...\rho_k| \le n-2$ olur. Bu ise $\gamma \in \mathcal{D}_{n-1}$ olduğundan $|im\gamma| = n-1$ ile çelişir. O halde $\gamma \notin \langle A-\{\gamma\}\rangle$ dir.

O halde

$$\left[S(n,n-1)-(n-1)\right](n-1)!+n+1 \le r_4(T_n)$$

olduğu ispatlanmış olur. ■

Örnek 3.11 $n=3$ için $r_4(T_3) \ge 6$ dır. T_3 ün Green denklik sınıfları aşağıdadır.

D_3

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

D_2

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$

D_1

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

Çizelge 3.1 T_3 ün Green $\mathcal{D}$ yapısı

Yukarıdaki tanımlamalardan A kümesi

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\right\}$$

olup kardinalitesi

$$|A|=\left[S(3,2)-(3-1)\right](3-1)!+2+1+1=6$$

dır.

$\mathcal{D}_{n-1}$ in $\mathcal{L}$-sınıflarının sayısı n olup aşağıdaki sonuca sahibiz.

Sonuç 3.12 T_n nin n tane bağımsız alt kümesi A vardır. ■

Örnek 3.13 T_3 de 3 tane farklı bağımsız alt küme vardır. Bunlar

i) $A_1=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\right\}$

ii) $A_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}\right\}$

iii) $A_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}\right\}$

dır.

4. SİNGÜLER DÖNÜŞÜMLER

Bir $\alpha \in T_n$ için $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\} \subseteq X_n$ olmak üzere

$$x_1\alpha = x_2,\ x_2\alpha = x_3,\ ...,\ x_{m-1}\alpha = x_m,\ x_m\alpha = x_r \qquad (x_r \in X)$$

ve her $x \in X_n - X$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir (m,r)-*patika devir* denir ve

$$\alpha = \left[x_1, x_2, ..., x_m \middle| x_r \right]$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak,

i) $r = m$ ise α ya bir m-*patika*
ii) $m \geq 2$ ve $r = 1$ ise α ya bir m-*devir*
iii) $m = r = 1$ ise α ya *birim patika*

denir.

4.1 (i,j)-Permütasyonlar

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}$ dönüşümünü kısaca $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ olarak yazacağız. α nın idempotent olması için gerek ve yeter koşulun α nın $im(\alpha)$ ya kısıtlanmasının birim dönüşüm olması gerektiği açıktır. Başka bir deyişle; α nın noksanlığı (defect) 1 olan bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ olmasıdır.

Burada (i,j)-permütasyonlar tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Lemma 4.1.1 Eğer α bir $(m,2)$-patika devir ise α^{m-1}, noksanlığı 1 olan bir idempotenttir.

İspat: α bir $(m,2)$-patika devir olsun. Bu durumda

$$x_i\alpha = x_{i+1},\ 1 \le i \le m-1$$

$$x_m\alpha = x_2$$

$$x\alpha = x,\ x \in X_n - \{x_1, x_2, ..., x_m\}$$

olmak üzere $\alpha = [x_1, x_2, ..., x_m | x_2]$ şeklindedir. O zaman $i \in \{2,3,\ldots,m\}$ olmak üzere

$$x_1\alpha^{m-1} = (x_1\alpha)\alpha^{m-2} = x_2\alpha^{m-2} = \cdots = x_{m-1}\alpha = x_m,$$

$$x_i\alpha^{m-1} = (x_i\alpha)\alpha^{m-2} = x_{i+1}\alpha^{m-2} = \cdots = x_{i+m-i}\alpha^{i-1} = x_2\alpha^{i-2} = \cdots = x_{i-1}\alpha = x_i$$

$$x\alpha = x,\ x \in X_n - \{x_1, x_2, ..., x_m\}$$

olur. Böylece $\alpha^{m-1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_m \end{pmatrix}$ olup α^{m-1} noksanlığı 1 olan idempotenttir. ■

Tanım 4.1.2 $\alpha \in T_n$ olsun. $\forall i \in X_n$ için $[i]$ ve $[i]^*$ kümelerini

$$[i] = \{i\alpha^k : k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \subseteq X_n$$

$$[i]^* = X_n - [i]$$

şeklinde tanımlayalım. $i \in [i]$ olduğundan $[i] \neq \varnothing$ olduğu açıktır. Eğer α bir devirse $[i]^* = \varnothing$ dir. Üstelik $[i] \cap [i]^* = \varnothing$ ve $[i] \cup [i]^* = X_n$ dir.

Tanım 4.1.3 $\alpha \in D_{n-1}$ olsun. Eğer $Def(\alpha) = \{i\}$ ve bir tek $i \neq j \in X_n$ için $ker(\alpha) = \{(i,j)\}^e$ ise α ya bir (i,j)*-permütasyon* denir.

Dikkat edilecek olursa $\alpha = \begin{bmatrix} x_1, x_2, ..., x_m \\ x_2 \end{bmatrix}$, $(m,2)$ -patika deviri bir (x_1, x_m)-permütasyondur.

Lemma 4.1.4 $\alpha \in H_{i,j}$ olması için gerek ve yeter koşul α nın bir (i,j) -permütasyon olmasıdır. ■

Teorem 4.1.5 α bir (i,j)-permütasyon olsun. O zaman $[i] = \{i, i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1}\}$ ve $i\alpha^m = i\alpha$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $ker(\alpha) = \{(i, i\alpha^{m-1})\}^e$ dir.

İspat: α bir (i,j)-permütasyon olduğundan $Def(\alpha) = \{i\}$ ve $ker(\alpha) = \{(i,j)\}^e$ dir. Tanımdan $[i] = \{i, i\alpha, i\alpha^2, ...\} \subseteq X_n$ dir. X_n sonlu olduğundan $[i]$ sonsuz sayıda eleman içeremez ve $i\alpha^t \in \{i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{t-1}\}$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tamsayının m olduğunu (Yani $i\alpha^m \in \{i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1}\}$ ve $i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1}$ birbirlerinden farklı) ve herhangi bir $2 \leq \lambda \leq m-1$ için $i\alpha^m = i\alpha^\lambda$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$(i\alpha^{\lambda-1})\alpha = i\alpha^\lambda = i\alpha^m = (i\alpha^{m-1})\alpha$$

olur. m nin seçiminden dolayı $i\alpha^{\lambda-1} \neq i\alpha^{m-1}$ olur ki bu ise α nın bir (i,j) -permütasyon oluşuyla çelişir. O halde $\lambda = 1$ yani $i\alpha^m = i\alpha$ olmalıdır ve bu ise $ker(\alpha) = \{(i, i\alpha^{m-1})\}^e$ demektir. ■

Lemma 4.1.6 α bir (i,j)-permütasyon olsun. O zaman

i) $\forall x \in [i]$ için $x\alpha \in [i]$

ii) $\forall x \in [i]^*$ için $x\alpha \in [i]^*$

dir.

İspat: i) $[i]$ nin tanımından açıktır.

ii) $x \in [i]^*$ olsun. Teorem 4.1.5 ten $[i] = \{i, i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1}\}$, $i\alpha^m = i\alpha$ ve $ker(\alpha) = \{(i, i\alpha^{m-1})\}^e$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $x\alpha \in [i]$ olduğunu varsayalım. $Def(\alpha) = \{i\}$ olduğundan $x\alpha \neq i$ dir. Üstelik $x \neq i$ ve $x \neq i\alpha^{m-1}$ dir. Bu yüzden $x\alpha \neq i\alpha$ ve $x\alpha \in \{i\alpha^2, i\alpha^3, ..., i\alpha^{m-1}\}$ dir. Yani $x\alpha = i\alpha^k$ olacak şekilde bir $2 \leq k \leq m-1$ tamsayısı vardır. Böylece $x\alpha = i\alpha^k = (i\alpha^{k-1})\alpha$ olur. $x \in [i]^*$ olduğundan $x \neq i\alpha^{k-1}$ dir. O halde $x\alpha = (i\alpha^{k-1})\alpha$ olur bu ise $ker(\alpha) = \{(i, i\alpha^{m-1})\}^e$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $x\alpha \in [i]^*$ dır. ■

Teorem 4.1.7 α bir (i,j)-permütasyon olsun. O zaman $\alpha = \sigma\beta = \beta\sigma$ olacak şekilde uygun σ $(m,2)$-patika deviri ve β permütasyonu vardır.

İspat: α bir (i,j)-permütasyon olduğundan Teorem 4.1.5 ten $[i] = \{i, i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1}\}$, $i\alpha^m = i\alpha$ ve $ker(\alpha) = \{(i, i\alpha^{m-1})\}^e$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer $[i]^* = \varnothing$ ise $[i] = X_n$ dir. Böylece $[i, i\alpha, i\alpha^2, ..., i\alpha^{m-1} \mid i\alpha]$ bir $(m,2)$-patika devirdir. Eğer $[i]^* \neq \varnothing$ ise tüm $x \in X_n$ için σ ve β dönüşümlerini

$$x\sigma = \begin{cases} x\alpha \ , \ x \in [i] \\ x \quad , \ x \in [i]^* \end{cases}$$

$$x\beta = \begin{cases} x & , x \in [i] \\ x\alpha & , x \in [i]^* \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman σ $(m,2)$-patika devir ve β permütasyon olup $\alpha = \sigma\beta = \beta\sigma$ dır. ■

Örnek 4.1.8 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. $Def(\alpha) = \{2\}$ ve $ker(\alpha) = \{(2,3)\}^e$ olduğundan α bir $(2,3)$-permütasyondur. Teorem 4.1.7 den

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

olup $\alpha = \sigma\beta = \beta\sigma$ olacak şekilde $\sigma = [2,3|3]$ $(2,2)$-patika deviri ve $\beta \in S_n$ vardır.

4.2 İndeksi 1 Olan Dönüşümler

$\alpha \in T_n$ olsun. $\alpha^{m+r} = \alpha^m$ ve $\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{m+r-1}$ ikili olarak farklı olacak şekilde $m, r \in \mathbb{Z}^+$ varsa α ya (m,r)-*potent eleman* denir. Burada $m \geq 1$ ye α nın *indeksi* ve $r \geq 1$ ye α nın *periyodu* denir. Özel olarak,

i) $r = 1$ ise α ya bir m-*potent eleman*
ii) $m = r = 1$ ise α ya bir *idempotent eleman*

denir.

Burada indeksi 1 ve periyodu r olan elemanların özellikleri incelenmiştir.

Lemma 4.2.1 $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_t$, $\alpha \in T_n$ nin orbitleri olsun. $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X_n$ için $x\alpha \in Z(\Omega_i)$ olacak şekilde bir tek $1 \le i \le t$ var olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in T_n$ ve $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ olsun. Eğer $Def(\alpha) = \varnothing$ ise $\alpha \in S_n$ olur. S_n nin orbitleri ayrık devirler olduğundan $x \in X_n$ için $x\alpha \in Z(\Omega_i)$ olacak şekilde bir tek $1 \le i \le t$ vardır.

$Def(\alpha) \neq \varnothing$ olsun. Herhangi bir $x \in Def(\alpha)$ alalım. $Z(\Omega_i) \subseteq im(\alpha)$ olduğundan $x \in \Omega_i - Z(\Omega_i)$ olacak şekilde bir tek $1 \le i \le t$ vardır. Üstelik, $x\alpha^p \in Z(\Omega_i)$ fakat $x\alpha^{p-1} \notin Z(\Omega_i)$ olacak şekilde bir $p \ge 1$ tamsayısı vardır Herhangi bir $y \in \Omega_i - Z(\Omega_i)$ için $y\alpha^q \in Z(\Omega_i)$ fakat $y\alpha^{q-1} \notin Z(\Omega_i)$ oluyorsa $q \le p$ olduğunu varsayalım.

$im(\alpha^k) = im(\alpha)$ olduğundan $z\alpha^2 = x\alpha$ olacak şekilde $z \in \Omega_i$ vardır. x in seçiminden kaynaklı ya $z \in Z(\Omega_i)$ ya da $z\alpha \in Z(\Omega_i)$ dır. Aksi takdirde, eğer $z \notin Z(\Omega_i)$ ve $z\alpha \notin Z(\Omega_i)$ ise o zaman $z\alpha^{p+1} \in Z(\Omega_i)$ fakat $z\alpha^p \notin Z(\Omega_i)$ olur ki bu ise x in seçimiyle çelişir. Aslında

$$z \to z\alpha \to z\alpha^2 = x\alpha \to \cdots \to z\alpha^p = x\alpha^{p-1} \notin Z(\Omega_i)$$
$$z \to z\alpha \to z\alpha^2 = x\alpha \to \cdots \to z\alpha^{p+1} = x\alpha^p \in Z(\Omega_i)$$

dır. Böylece $z\alpha^2 = x\alpha$ ve $z\alpha \in Z(\Omega_i)$ veya $z \in Z(\Omega_i)$ olduğundan $x\alpha \in Z(\Omega_i)$ dir. Yani $p = 1$ dir. Üstelik tüm $y \in \Omega_i$ için x in seçiminden $y\alpha \in Z(\Omega_i)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\forall x \in X_n$ için $x\alpha \in Z(\Omega_i)$ olacak şekilde bir tek $1 \le i \le t$ var olsun. Herhangi bir $\alpha \in T_n$ için $im(\alpha^k) \subseteq im(\alpha)$ ($\forall k \in \mathbb{Z}^+$) olduğundan $im(\alpha) \subseteq im(\alpha^k)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

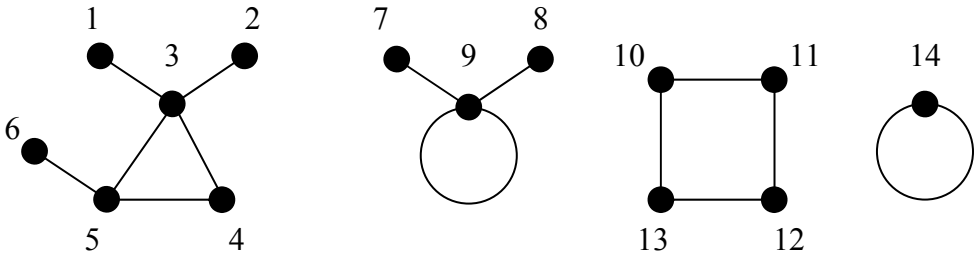
$y \in im(\alpha)$ alalım. O zaman $x\alpha = y$ olacak şekilde bir $x \in \Omega_i, (1 \le i \le t)$ vardır ve böylece $y \in Z(\Omega_i)$ olur. α nın $Z(\Omega_i)$ ye kısıtlanması olan $\alpha|Z(\Omega_i)$, $Z(\Omega_i)$ nin bir permütasyonu olduğundan $y \in im(\alpha^k)$ ve böylece $im(\alpha) \subseteq im(\alpha^k)$ olur. Böylece $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ dır. ■

Sonuç 4.2.2 $\alpha \in T_n$ nin orbitleri $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_t$ olsun. O zaman $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$Def(\alpha) = \bigcup_{1 \le i \le t} (\Omega_i - Z(\Omega_i)) = X_n - Z(\alpha)$$

olmasıdır. ■

Örnek 4.2.3 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 5 & 9 & 9 & 9 & 11 & 12 & 13 & 10 & 14 \end{pmatrix} \in T_{14}$ olsun. O zaman $im(\alpha) = im(\alpha^k)$ dır. Yani orbitleri devirler ve devirlere eklenmiş tek saplı ağaçlardan oluşur.



Şekil 4.1 $\alpha \in T_{14}$ nın orbit diyagramı

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\},\ Z(\Omega_1) = \{3,4,5\},\ \Omega_1 - Z(\Omega_1) = \{1,2,6\}$$

$$\Omega_2 = \{7,8,9\},\ Z(\Omega_2) = \{9\},\ \Omega_2 - Z(\Omega_2) = \{7,8\}$$

$$\Omega_3=\{10,11,12,13\},\ Z(\Omega_3)=\{10,11,12,13\},\ \Omega_3-Z(\Omega_3)=\varnothing$$
$$\Omega_4=\{14\},\ Z(\Omega_4)=\{14\},\ \Omega_4-Z(\Omega_4)=\varnothing$$
$$Z(\alpha)=\cup Z(\Omega_i)=\{3,4,5,9,10,11,12,13,14\}$$

olup Sonuç 4.2.2 ten $Def(\alpha)=\{1,2,6,7,8\}$ olur.

Teorem 4.2.4 $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_t$ $\alpha\in T_n$ nın orbitleri ve $1\le i\le t$ için r_i ler de $Z(\Omega_i)$ lerin kardinaliteleri olsun. O zaman α nın indeksi 1 ve periyodu r olan bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha)=im(\alpha^k)$ ve r nin $r_1,r_2,\ldots,r_t$ nin en küçük ortak katı olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ için $im(\alpha)=im(\alpha^k)$ ve $r=ekok(r_1,r_2,...,r_t)$ olsun. Herhangi bir $x\in X_n$ için $x\in\Omega_i$ olacak şekilde $1\le i\le t$ vardır. Eğer $x\in Z(\Omega_i)$ ise $x\alpha^{r_i}=x$ ve $x\alpha^{1+r_i}=x\alpha$ dir. Eğer $x\notin Z(\Omega_i)$ ise Lemma 4.2.1 den $x\alpha\in Z(\Omega_i)$ ve $x\alpha^{1+r_i}=x\alpha$ dir. Üstelik $r=q_ir_i$ olacak şekilde $q_i\in\mathbb{Z}^+$ var olduğundan

$$\begin{aligned}x\alpha^{1+r}&=x\alpha^{1+q_ir_i}=\left(x\alpha^{1+r_i}\right)\alpha^{(q_i-1)r_i}=(x\alpha)\alpha^{(q_i-1)r_i}\\&=\cdots=(x\alpha)\alpha^{r_i}=x\alpha^{1+r_i}=x\alpha\end{aligned}\qquad(4.1)$$

dır. Böylece $\alpha^{1+r}=\alpha$ olup α indeksi 1 olan bir dönüşümdür.

Şimdi α nın periyodunun r olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\alpha^{1+p}=\alpha$ olacak şekilde $p\in\mathbb{Z}^+$ var olsun. $1\le i\le t$ için $x\in\Omega_i$ alalım. Bölme algoritmasından $p=u_ir_i+v_i$ ve $0\le v_i\le r_i-1$ olacak şekilde $u_i,v_i\in\mathbb{Z}$ vardır. $p\ge r_i$ dir. $\alpha\big|Z(\Omega_i)$ $Z(\Omega_i)$ nin bir permütasyonu ve $|Z(\Omega_i)|=r_i$ olduğundan $u_i\ge1$ olur. $v_i\neq0$ olsun. (4.1) eşitliğindeki gibi $x\alpha^{1+u_ir_i}=x\alpha$ olduğundan

$$x\alpha = x\alpha^{1+p} = x\alpha^{1+u_i r_i + v_i} = \left(x\alpha^{1+u_i r_i}\right)\alpha^{v_i} = \left(x\alpha\right)\alpha^{v_i} = x\alpha^{1+v_i}$$

olur ki bu ise r_i nin kabulüyle çelişir. Böylece $v_i = 0$ olmalıdır, yani $r_i \mid p$ dir. O halde $r \mid p$ dir ve dolayısıyla α nın periyodunun r dir.

$(\Rightarrow)$ α, indeksi 1 ve periyodu r olan bir dönüşüm olsun. $1 \le k \le r$ için

$$im\left(\alpha^k\right) \subseteq im\left(\alpha\right) = im\left(\alpha^{1+r}\right) = im\left(\alpha^{1+r-k}\alpha^k\right) \subseteq im\left(\alpha^k\right)$$

olduğundan $im\left(\alpha\right) = im\left(\alpha^k\right)$ bulunur. Eğer $k > r$ ise Bölme algoritmasından $k = ur + v$ ve $0 \le v \le r-1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. $u \ge 1$ dir. Eğer $1 \le v \le r-1$ ise

$$\begin{aligned}\alpha^k &= \alpha^{ur+v} = \alpha^{1+r}\alpha^{(u-1)r+(v-1)} = \alpha\alpha^{(u-1)r+(v-1)} \\ &= \alpha^{(u-1)r+v} = \cdots = \alpha^{r+v} = \alpha^{1+r}\alpha^{v-1} = \alpha^v\end{aligned}$$

olur. Böylece $0 \le v < r$ olduğundan $im\left(\alpha^k\right) = im\left(\alpha^v\right) = im\left(\alpha\right)$ elde edilir. Eğer $v = 0$ ise $k = ur$ ve $u \ge 2$ olup

$$\alpha^k = \alpha^{ur} = \alpha^{1+r}\alpha^{(u-1)(r-1)} = \alpha\alpha^{(u-1)(r-1)} = \alpha^{(u-1)r} = \cdots = \alpha^r$$

bulunur. O halde $im\left(\alpha^k\right) = im\left(\alpha^r\right) = im\left(\alpha\right)$ dir. İspatın ilk kısmında olduğu gibi $r = ekok\left(r_1, r_2, ..., r_t\right)$ benzer şekilde gösterilir. ■

Sonuç 4.2.5 $\alpha \in T_n$ nin indeksi 1 olan bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul α nın $im\left(\alpha\right)$ ya kısıtlanışının bir permütasyon olmasıdır. Özellikle T_n deki tüm idempotentler ve tüm permütasyonlar indeksi 1 olan bir dönüşümdür. ■

T_n nin her idempotent indeksi 1 olan bir dönüşüm olduğundan ve üstelik $Sing_n$ deki her eleman $E(D_{n-1})$ deki elemanlarının çarpımı olarak yazılabildiğinden indeksi 1 olan dönüşümler $Sing_n$ i doğurur ve rankı da $\frac{n(n-1)}{2}$ dir.

Teorem 4.2.6 α noksanlığı $k \geq 1$ olan bir dönüşüm olsun. Eğer α indeksi 1 olan bir dönüşüm ise o zaman

i) $\alpha = \zeta_0\zeta_1\zeta_2...\zeta_k$

ii) $Shift(\zeta_i) \cap Shift(\zeta_j) = \varnothing,\ 0 \leq i \neq j \leq k$

olacak şekilde $\zeta_0 \in S_n$ permütasyonu ve noksanlığı 1 olan k tane $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k$ idempotenti vardır.

İspat: α indeksi 1 olan bir dönüşüm olsun. $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_t$ α nın orbitleri ve $Def(\alpha) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ olsun. O zaman $1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $x \in X_n$ için $\beta_i : X_n \to X_n$ permütasyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$x\beta_i = \begin{cases} x\alpha\ , x \in Z(\Omega_i) \\ x\ \ , x \in X_n - Z(\Omega_i) \end{cases}$$

$\zeta_0 = \beta_1\beta_2...\beta_t$ permütasyonunu alalım. (ζ_0 , β_i lerin ayrık devirlerinin bir çarpımıdır.) $Def(\alpha) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ olduğundan her $1 \leq j \leq k$ için noksanlığı 1 olan

$$\zeta_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x_j\alpha \end{pmatrix}$$

idempotentlerini göz önüne alalım. $1 \leq j \leq t$ için

$$Shift(\zeta_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Z(\Omega_i) = im(\alpha) \text{ ve } Shift(\zeta_j) = \{x_j\} \subseteq Def(\alpha)$$

olduğundan Sonuç 4.2.2 den $0 \le i \ne j \le r$ için $Shift(\zeta_i) \cap Shift(\zeta_j) = \varnothing$ ve $\alpha = \zeta_0\zeta_1\zeta_2...\zeta_k$ bulunur. ■

Not. Dikkat edilecek olursa $Def(\alpha) = \bigcup_{j=1}^{k} Def(\zeta_j)$ dır. Ayrıca yukarıdaki çarpımda çarpanların *Shift* kümeleri farklı olduğundan permütasyon başta olmak üzere idempotent çarpanların yerleri değişebilir.

Önerme 4.2.7 $\alpha \in T_n$ olsun. α yı içeren $\mathcal{H}$-Green sınıfını H_α ile gösterelim. H_α nın bir grup olması için gerek ve yeter koşul α nın indeksi 1 olan bir dönüşüm olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ H_α bir grup olsun. O zaman $\forall k \in Z^+$ için $\alpha^k \in H_\alpha$ olur ki bu ise $im(\alpha^k) = im(\alpha)$ demektir. Dolayısıyla α indeksi 1 olan bir dönüşümdür.

$(\Leftarrow)$ α indeksi 1 olan bir dönüşüm olsun. α nın periyodu r olsun. $\alpha^{1+r} = \alpha = \alpha^{r+1}$ ve $\alpha\alpha^{r-1} = \alpha^r = \alpha^{r-1}\alpha$ olduğundan $\alpha \mathcal{H} \alpha^r$ bulunur. $\alpha^r \in H_\alpha$ bir idempotent olduğundan H_α bir gruptur. ■

Sonuç 4.2.8 $1 \le r < n$ olmak üzere D_r $\mathcal{D}$-Green sınıfında $\binom{n}{r} r^{n-r}$ tane idempotent olduğundan $\binom{n}{r} r^{n-r}$ tane grup olan $\mathcal{H}$-Green sınıfı vardır. Her bir $\mathcal{H}$-Green sınıfında ise $r!$ tane eleman olduğundan T_n de

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}r^{n-r}r!=\sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}r^{n-r}$$

tane indeksi 1 olan bir dönüşüm vardır. ■

Teorem 4.2.9 α indeksi 1 olan bir dönüşüm ve $k\geq 1$ olmak üzere $Def(\alpha)=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ olsun. O zaman

$$ker(\alpha)=\left\{\left(x_1,x_1\alpha^{m_1}\right),\left(x_2,x_2\alpha^{m_2}\right),...,\left(x_k,x_k\alpha^{m_k}\right)\right\}^e$$

olacak şekilde $m_1,m_2,...,m_k\in\mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat: α indeksi 1 olan bir dönüşüm ve $k\geq 1$ olmak üzere $Def(\alpha)=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ ve $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_t$ α nın orbitleri olsun. O zaman her $1\leq i\leq k$ için Lemma 4.2.1 den bir tek $1\leq j\leq t$ için $x_i\in\Omega_j-Z(\Omega_j)$ ve $x_i\alpha\in Z(\Omega_j)$ olacak şekilde α nın bir Ω_j orbiti vardır. Böylece $x_i\alpha^{m_i+1}=x_i\alpha$ olacak şekilde bazı $m_i\in\mathbb{Z}^+$ vardır. ($x_i\alpha$ yı içeren $Z(\Omega_j)$ nın kardinalitesi m_i dir.) $R=\left\{\left(x_1,x_1\alpha^{m_1}\right),\left(x_2,x_2\alpha^{m_2}\right),...,\left(x_k,x_k\alpha^{m_k}\right)\right\}$ olsun. Tüm $1\leq i\leq k$ için $\left(x_i,x_i\alpha^{m_i}\right)\in ker(\alpha)$ olup $R^e\subseteq ker(\alpha)$ dır.

Tersine $x\neq y$ olmak üzere $(x,y)\in ker(\alpha)$ alalım. $x\alpha=y\alpha$ olduğundan x ve y aynı orbit içindedir. Bu orbit $\Omega_j\,(1\leq j\leq t)$ olsun. x veya y den en fazla biri $Z(\Omega_j)$ ya düşeceğinden iki durum söz konusudur. Ya ikisi de $Z(\Omega_j)$ da değildir ya da sadece biri $Z(\Omega_j)$ dedir.

1. durum: $x,y\in\Omega_j-Z(\Omega_j)$ olsun. O zaman Sonuç 4.2.2 den $x,y\in Def(\alpha)$ dır. $x\alpha=y\alpha$ olduğundan $x\alpha^m=y\alpha^m$ olur. Böylece $\left(x,x\alpha^m\right),\left(y,y\alpha^m\right)\in R$ olduğundan

R^e nin tanımından (R yı içeren en küçük denklik bağıntısı) $\left(x, x\alpha^m\right), \left(y, y\alpha^m\right) \in R^e$ dir. O halde $\left(x, y\right) \in R^e$ dir.

2. durum: Genelliği kaybetmeksizin $x \in Z\left(\Omega_j\right)$ ve $y \in \Omega_j - Z\left(\Omega_j\right) \subseteq Def\left(\alpha\right)$ alalım. $x \in Z\left(\Omega_j\right)$ ve $y\alpha \in Z\left(\Omega_j\right)$ olduğundan $y\alpha^{m+1} = y\alpha$ ve $x = x\alpha^m$ olur. Benzer şekilde $x\alpha^m = y\alpha^m$ bulunur. Üstelik $\left(y, y\alpha^m\right) \in R$ olduğundan $\left(y, y\alpha^m\right) = \left(y, x\alpha^m\right) = \left(y, x\right) \in R$ olup $\left(x, y\right) \in R^e$ dir.

Her iki durumda da $ker\left(\alpha\right) \subseteq R^e$ dir. O halde $ker\left(\alpha\right) = R^e$ olur. ■

Sonuç 4.2.10 $\alpha \in T_n$ indeksi 1 ve periyodu r olan bir dönüşüm ve $k \geq 1$ olmak üzere $def\left(\alpha\right) = k$ olsun. $\alpha \mathcal{H} \alpha^r$ olduğundan $im\left(\alpha^r\right) = im\left(\alpha\right)$ ve $\ker\left(\alpha^r\right) = \ker\left(\alpha\right)$ olur. α^r bir idempotenttir. α^r, noksanlığı 1 olan k tane idempotentin çarpımı olarak yazılabilir. ■

Örnek 4.2.11 Örnek 4.2.3 teki $\alpha \in T_{14}$ göz önüne alalım. $Def\left(\alpha\right) = \left\{1, 2, 6, 7, 8\right\}$, $r_1 = 3$, $r_2 = r_4 = 1$ ve $r_3 = 4$ olup $r = ekok\left(1, 3, 4\right) = 12$ dir. O halde

$$\alpha^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 9 & 9 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} \in E\left(D_{14-5}\right)$$

ve

$$\alpha^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 5 & 9 & 9 & 9 & 11 & 12 & 13 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$\alpha^{1+12} = \alpha$ dır. Burada

$$ker(\alpha) = \left\{(1,1\alpha^3),(2,2\alpha^3),(6,6\alpha^3),(7,7\alpha),(8,8\alpha)\right\}^e$$
$$= \left\{(1,5),(2,5),(6,4),(7,9),(8,9)\right\}^e$$

ve

$$\alpha^{12} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$$

dır.

5. SİNGÜLER DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMESİ

Howie, (1966) daki çalışmasında $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ sonlu kümesi üzerinde $n \geq 3$ olmak üzere singüler dönüşümler yarıgrubu $Sing_n$ nin noksanlığı 1 olan idempotentler tarafından doğurulduğunu göstermiştir. Daha sonra Howie, (1978) deki çalışmasında $Sing_n$ nin idempotent rankının (sadece idempotentlerden oluşan minimal doğuray kümesinin kardinalitesi) $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu ve (1987) de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada da $Sing_n$ nin rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir.

Ayık ve ark. (2008) te yaptıkları çalışmada ise $Sing_n$ nin (m,r)-patika devirler tarafından doğurulduğunu ve (m,r)-patika devir rankının ($(m,r)-$ patika devirlerden oluşan minimal doğuray kümesinin kardinalitesi) da yine $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölümde ise noksanlığı 1 olan elemanlardan oluşan herhangi bir $A \subseteq D_{n-1}$ kümesinin $Sing_n$ için bir (minimal) doğuray kümesi olması için hangi koşulları sağlaması gerektiği gösterilmiştir.

$1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere noksanlığı r olan tüm singüler dönüşümlerin $\mathcal{D}$-Green sınıfını D_{n-r} ile göstereceğiz.

$\alpha \in D_{n-1}$ ise $i, j \in X_n$, $i \neq j$ olmak üzere $\ker(\alpha)$, $\{(i,j)\}$ (veya $\{(j,i)\}$) tarafından doğurulan X_n üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda $Ker(\alpha)$ kümesini $Ker(\alpha) = \{i, j\}$ olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $Ker(\alpha)$ kümesi X_n nin alt kümesidir. Ayrıca $\alpha \in D_{n-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $Def(\alpha) = \{k\}$ olacak şekilde bir $k \in X_n$ olmasıdır.

α nın idempotent olması için gerek ve yeter koşulun α nın $im(\alpha)$ ya kısıtlanmasının birim dönüşüm olması gerektiği açıktır.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}$ dönüşümünü kısaca $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ olarak yazacağız.

Tanım 5.1 $Ker(\alpha)=\{i,j\}$ ve $Def(\alpha)=\{k\}$ olan bir $\alpha \in D_{n-1}$ dönüşümü için α^e, α^f idempotentlerini ve $\alpha^p : X_n \to X_n$ permütasyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\alpha^e = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix},\ \alpha^f = \begin{pmatrix} k \\ i\alpha \end{pmatrix},\ x\alpha^p = \begin{cases} k & , x = i \\ x\alpha & , x \neq i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Eğer $\alpha^e = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ alırsak o zaman α^p permütasyonu $x\alpha^p = \begin{cases} k & , x = j \\ x\alpha & , x \neq j \end{cases}$

şeklinde tanımlıdır. Her iki durumda da $\alpha^f = \begin{pmatrix} k \\ i\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ j\alpha \end{pmatrix}$ olup

$$\alpha = \alpha^e\alpha^p = \alpha^p\alpha^f \tag{5.1}$$

dir.

Örnek 5.2 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ olsun. $Ker(\alpha)=\{1,2\}$ ve $Def(\alpha)=\{1\}$ olduğundan

$$\alpha = \alpha^e\alpha^p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha^p\alpha^f$$

veya

$$\alpha = \alpha^e\alpha^p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha^p\alpha^f$$

dir.

Lemma 5.3 $i \neq j,k$ olmak üzere $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ dir. ■

Lemma 5.4 $n \geq 3$ olmak üzere $\alpha, \beta \in D_{n-1}$ olsun. $\alpha\beta \in D_{n-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $Def(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Yukarıdaki notasyonlarla $\alpha\beta = (\alpha^p \alpha^f)(\beta^e \beta^p)$ olduğundan $\alpha\beta \in D_{n-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha^f \beta^e \in D_{n-1}$ olmasıdır.

$Def(\alpha) = \{i\}$ ve $Ker(\beta) = \{k,l\}$ olmak üzere $\alpha\beta \in D_{n-1}$ olsun. O zaman ya $\beta^e = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ ya da $\beta^e = \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$ dır ve $\alpha^f = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ olacak şekilde $i \neq j \in X_n$ vardır. $\alpha^f \beta^e \in D_{n-1}$ olduğundan her iki durumda da ya $i = k$ ya da $i = l$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $Def(\alpha) = \{i\}$ olmak üzere $Def(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $Ker(\beta) = \{i,k\}$ olacak şekilde $i \neq k \in X_n$ vardır. Yine yukarıdaki notasyonlarla $\beta^e = \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$ seçebileceğimizden Lemma 5.3 ten

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (\alpha^p \alpha^f)(\beta^e \beta^p) = \alpha^p (\alpha^f \beta^e) \beta^p \\ &= (\alpha^p \alpha^f) \beta^p = (\alpha^e \alpha^p) \beta^p \\ &= \alpha^e (\alpha^p \beta^p) \end{aligned}$$

olur. $\alpha^e \in E(D_{n-1})$ ve $\alpha^p, \beta^p \in S_n$ olduğundan $\alpha\beta = \alpha^e (\alpha^p \beta^p) \in D_{n-1}$ bulunur. ■

$\alpha \in D_{n-1}$ de $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ idempotentini içeren $\mathcal{H}$-Green sınıfını $H_{i,j}$ ile gösterelim. O zaman $\alpha \in H_{i,j}$ olması için gerek ve yeter koşul $Def(\alpha) = \{i\}$ ve $ker(\alpha) = \{(i,j)\}^e$ (veya eşdeğer olarak $Ker(\alpha) = \{i,j\}$) olmasıdır.

Lemma 5.5 $\alpha \in D_{n-1}$ olsun. $\alpha \in H_{i,j}$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\beta$ ve $i \in Fix(\beta)$ olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ permütasyonunun var olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in H_{i,j}$ olsun. $Def(\alpha) = \{i\}$ ve $Ker(\alpha) = \{i,j\}$ olduğundan $\alpha^e = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ olacak şekilde seçebiliriz. α^p nin tanımından $i \in Fix(\alpha^p)$ olur. (5.1) numaralı eşitlikten $\alpha = \alpha^e\alpha^p$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\alpha = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\beta$ ve $i \in Fix(\beta)$ olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ permütasyonu var olsun. $i \in Fix(\beta)$ olduğundan $im(\alpha) = im\left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right) = X_n - \{i\}$ ve $Ker(\alpha) = \{i,j\}$ olur. Böylece $\alpha \in H_{i,j}$ dir. ■

$E(D_{n-1})$ noksanlığı 1 olan idempotentlerin kümesi olmak üzere $\alpha \in E(D_{n-1})$ ise α yı $\alpha = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \zeta_{i,j}$ ile gösterelim. $A \subseteq E(D_{n-1}) = \{\zeta_{i,j} : i,j \in X_n \text{ ve } i \neq j\}$ olsun. Δ_A diyagramını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

- Köşe kümesi $V = V(\Delta_A) = X_n$
- Yönlendirilmiş kenar kümesi $\vec{E} = \vec{E}(\Delta_A) = \{(j,i) \in V \times V : \zeta_{i,j} \in A\}$

Howie (1978) , '' $A \subseteq E(D_{n-1})$ kümesinin $Sing_n$ için bir minimal doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşulun Δ_A diyagramının tam ve güçlü bağlantılı olması'' gerektiğini göstermiştir.

Şimdi $A \subseteq D_{n-1}$ alalım ve Γ_A diyagramını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

- Köşe kümesi $V = V(\Delta_A) = A$
- Yönlendirilmiş kenar kümesi $\vec{E}(\Gamma_A) = \{(\alpha, \beta) \in V \times V : Def(\alpha) \subseteq Ker(\beta)\}$

Herhangi iki $\alpha, \beta \in V(\Gamma_A)$ köşesi için α dan β ya yönlendirilmiş bir patika varsa α ile β, Γ_A da bağlantılıdır denir ve $\alpha \sim \beta$ ile gösterilir.

Teorem 5.6 A, D_{n-1} Green $\mathcal{D}$-sınıfının bir alt kümesi olsun. A nın $Sing_n$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul her $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ idempotenti için

i) $Ker(\alpha) = \{i, j\}$

ii) $Def(\beta) = \{i\}$

iii) Γ_A diyagramında $\alpha \sim \beta$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ var olmasıdır.

İspat: $Sing_n$ i doğurmak için D_{n-1} i doğurmak yeterlidir. Çünkü $Sing_n$ nin her elemanı D_{n-1} in elemanlarının bir çarpımı olarak yazılabilir.

$(\Rightarrow)$ $Sing_n = \langle A \rangle$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ için

$$\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_r = \zeta_{i,j}$$

olacak şekilde $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r \in A$ vardır. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\zeta_{i,j} \in D_{n-1}$, $Ker(\alpha_1) \subseteq Ker(\zeta_{i,j})$ ve $im(\zeta_{i,j}) \subseteq im(\alpha_r)$ olduğundan

$$Ker(\alpha_1) = Ker(\zeta_{i,j}) = \{i,j\}$$
$$Def(\alpha_r) = Def(\zeta_{i,j}) = X_n - im(\alpha_r) = X_n - im(\zeta_{i,j}) = \{i\}$$

olur ve her bir $1 \le k \le r-1$ için $\alpha_k\alpha_{k+1} \in D_{n-1}$ elde edilir. O halde Lemma 5.4 ten $Def(\alpha_k) \subseteq Ker(\alpha_{k+1})$ dir. Böylece α_1 den α_r ye yönlendirilmiş bir patika vardır. Yani Γ_A da $\alpha_1 \sim \alpha_r$ dir.

$(\Leftarrow)$ $Sing_n$ kümesinin her elamanının $E(D_{n-1})$ deki idempotentlerin çarpımı olarak yazılabildiği iyi bilindiğinden $E(D_{n-1}) \subseteq \langle A \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ olsun. i) ve ii) den $Ker(\alpha) = \{i,j\}$ ve $Def(\beta) = \{i\}$ olacak şekilde $\alpha,\beta \in A$ vardır. iii) den her $1 \le t \le r-1$ için $Def(\alpha_t) \subseteq Ker(\alpha_{t+1})$ olacak şekilde α den β ye yönlendirilmiş

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_{r-1} \to \alpha_r = \beta$$

patikası vardır. Eğer her $1 \le t \le r-1$ için $Def(\alpha_t) = \{i_t\}$ ise $Ker(\alpha_{t+1}) = \{i_t, j_t\}$ olacak şekilde $i_t \ne j_t$ vardır. (5.1) deki notasyonlarla

$$\alpha_1^e = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix},\ \alpha_{t+1}^e = \begin{pmatrix} i_t \\ j_t \end{pmatrix},\ (1 \le t \le r-1)$$
$$\alpha_1^f = \begin{pmatrix} i_1 \\ i\alpha_1 \end{pmatrix},\ \alpha_t^f = \begin{pmatrix} i_t \\ i_{t-1}\alpha_t \end{pmatrix},\ (2 \le t \le r-1)$$
$$\alpha_r^f = \begin{pmatrix} i \\ i_{r-1}\alpha_r \end{pmatrix} \text{ ve } \alpha_t^p\ (1 \le t \le r)$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Her $1 \le t \le r-1$ için Lemma 5.3 ten $\alpha_t^f \alpha_{t+1}^e = \alpha_t^f$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-1}\alpha_r &= \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-2}\left(\alpha_{r-1}^p\alpha_{r-1}^f\right)\left(\alpha_r^e\alpha_r^p\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-2}\alpha_{r-1}^p\left(\alpha_{r-1}^f\alpha_r^e\right)\alpha_r^p \\
&= \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-2}\alpha_{r-1}^p\alpha_{r-1}^f\alpha_r^p \\
&= \alpha_1\alpha_2...\alpha_{r-2}\alpha_{r-1}\alpha_r^p \\
&\vdots \\
&= \alpha_1\alpha_2^p\alpha_3^p...\alpha_r^p \\
&= \left(\alpha_1^e\alpha_1^p\right)\alpha_2^p\alpha_3^p...\alpha_r^p \\
&= \left(\zeta_{i,j}\alpha_1^p\right)\alpha_2^p\alpha_3^p...\alpha_r^p \\
&= \zeta_{i,j}\left(\alpha_1^p\alpha_2^p...\alpha_r^p\right)
\end{aligned}$$

olur. $\delta = \alpha_1^p\alpha_2^p...\alpha_r^p$ diyelim.

$$i\alpha_1^p = i_1,\ i_{t-1}\alpha_t^p = i_t\ \left(2 \le t \le r-1\right) \text{ ve } i_{r-1}\alpha_r^p = i$$

olduğundan

$$i\delta = \left(i\alpha_1^p\right)\alpha_2^p...\alpha_r^p = \left(i_1\alpha_2^p\right)\alpha_3^p...\alpha_r^p = \cdots = i_{r-1}\alpha_r^p = i$$

dir. Böylece $\zeta_{i,j}\delta \in H_{i,j}$ olur. $H_{i,j}$ birim elemanı $\zeta_{i,j}$ olan sonlu bir grup olduğundan $\left(\zeta_{i,j}\delta\right)^m = \zeta_{i,j}$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır. Yani $\zeta_{i,j} = \left(\alpha_1\alpha_2...\alpha_r\right)^m \in \langle A\rangle$ olup $E\left(D_{n-1}\right) \subseteq \langle A\rangle$ dir. ■

Sonuç 5.7 $A \subseteq D_{n-1}$ ve $|A| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ olsun. A nın $Sing_n$ nin bir minimal doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul her $\zeta_{i,j} \in E\left(D_{n-1}\right)$ idempotenti için

i) $Ker(\alpha)=\{i,j\}$

ii) $Def(\beta)=\{i\}$

iii) Γ_A diyagramında $\alpha \sim \beta$

olacak şekilde $\alpha,\beta \in A$ var olmasıdır. ■

Şimdi $A \subseteq E(D_{n-1})$ ve $|A|=\dfrac{n(n-1)}{2}$ olduğunda (Howie, 1978) deki sonucun Teorem 5.6 ile çakıştığını gösterelim. Δ_A tam olduğundan Teorem 5.6 nın i) koşulu sağlanır. Δ_A güçlü bağlantılı olduğundan herhangi $i \neq j \in X_n$ köşesi için j den i ye yönlendirilmiş bir

$$j=i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{r-1} \to i_r = i$$

patikası vardır. Böylece $\zeta_{i_r,i_{r-1}}=\begin{pmatrix} i_r \\ i_{r-1} \end{pmatrix} \in A$ olur ve $Def\left(\zeta_{i_r,i_{r-1}}\right)=\{i_r\}=\{i\}$ olduğundan Teorem 5.6 nın ii) koşulu sağlanır.

Üstelik $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ için, eğer $\zeta_{i,j} \in A$ ise $Ker\left(\zeta_{i,j}\right)=\{i,j\}$ ve $Def\left(\zeta_{i,j}\right)=\{i\}$ olduğundan Teorem 5.6 nın iii) koşulu sağlanır. Eğer $\zeta_{i,j} \notin A$ ise Δ_A tam olduğundan $\zeta_{j,i} \in A$ dır. Δ_A güçlü bağlantılı olduğundan j den i ye yönlendirilmiş bir

$$j=i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{r-1} \to i_r = i$$

patikası vardır ve bu yüzden Γ_A da $\zeta_{j,i}$ den $\begin{pmatrix} i \\ i_{r-1} \end{pmatrix}$ e yönlendirilmiş bir

$$\zeta_{j,i}=\begin{pmatrix} i_1 \\ i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i_3 \\ i_2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} i_r \\ i_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i_{r-1} \end{pmatrix}$$

patikası vardır. Böylece Teorem 5.6 nın iii) koşulu sağlanmış olur.

Tersine $|A| = \frac{n(n-1)}{2}$ olmak üzere $A \subseteq E(D_{n-1})$ olsun ve Teorem 5.6 nın tüm koşullarını sağlasın. i) koşulundan Δ_A tam olur. Δ_A tam ve $A \subseteq E(D_{n-1})$ olduğundan Δ_A da herhangi iki $i \neq j \in X_n$ köşe için ya $\zeta_{i,j} \in A$ ya da $\zeta_{j,i} \in A$ dır. Eğer $\zeta_{j,i} \in A$ ise i den j ye bir kenar vardır. $\zeta_{i,j} \in A$ olduğunu varsayalım. Teorem 5.6 nın ii) koşulundan $Def(\beta) = \{j\}$ olacak şekilde bir $\beta \in A$ vardır. Yani $j \neq k$ olmak üzere $\beta = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \in A$ dır. Teorem 5.6 nın iii) koşulundan Γ_A da $\zeta_{i,j}$ ile β bağlantılı olduğundan yönlendirilmiş bir

$$\zeta_{i,j} = \begin{pmatrix} i_0 \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} i_{2r} \\ i_{2r-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i_{2r+2} \\ k \end{pmatrix} = \beta \tag{5.2}$$

patikası vardır. Eğer $0 \leq t \leq r$ için $i_{2t} = i_{2t+2}$ ise

$$Def\left(\begin{pmatrix} i_{2t} \\ i_{2t-1} \end{pmatrix}\right) = \{i_{2t+2}\} \subseteq Ker\left(\begin{pmatrix} i_{2t+4} \\ i_{2t+3} \end{pmatrix}\right)$$

olduğundan Γ_A da yönlendirilmiş bir

$$\begin{pmatrix} i_{2t} \\ i_{2t-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i_{2t+4} \\ i_{2t+3} \end{pmatrix}$$

kenarı vardır. Böylece Γ_A da (5.2) patikasını

$$\zeta_{i,j} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j_1 \\ i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j_2 \\ j_1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} j_q \\ j_{q-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ j_q \end{pmatrix} = \beta$$

olacak şekilde indirgeyebiliriz ve bu yüzden Δ_A da yönlendirilmiş bir

$$i \to j_1 \to j_2 \to \cdots \to j_{q-1} \to j_q \to j$$

patikası vardır. O halde Δ_A güçlü bağlantılı olur. Yukarıdaki notasyonları kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.8 $|A| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ olmak üzere $A \subseteq E(D_{n-1})$ olsun. Δ_A diyagramının tam ve güçlü bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul her $\zeta_{i,j} \in E(D_{n-1})$ idempotenti için

i) $Ker(\alpha) = \{i, j\}$

ii) $Def(\beta) = \{i\}$

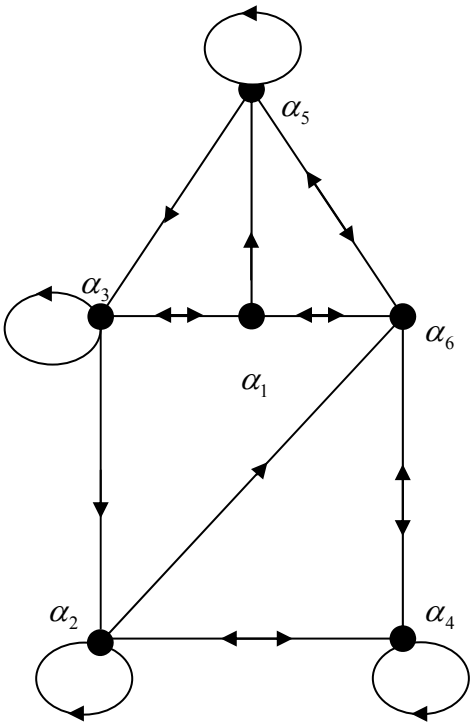
iii) Γ_A diyagramında $\alpha \sim \beta$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in A$ var olmasıdır. ■

Örnek 5.9 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

olmak üzere noksanlığı 1 olan dönüşümlerin $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ kümesini alalım. Yukarıdaki notasyonlarla $\zeta_{1,2} \in E(D_{4-1})$ için $Ker(\alpha_1) = \{1, 2\}$ ve $Def(\alpha_3) = \{1\}$ dir. $\zeta_{1,3} \in E(D_{4-1})$ için $Ker(\alpha_2) = \{1, 3\}$ ve $Def(\alpha_3) = \{1\}$ dir. Benzer şekilde $E(D_{4-1})$ in diğer tüm idempotentleri için aynı işlem yapılabilir. Böylece Teorem 5.6 nın i) ve ii) koşulları sağlanmış olur. Üstelik



Şekil 5.1 Γ_A nın diyagramı

Γ_A nın grafiği, $\alpha_5 \to \alpha_3 \to \alpha_2 \to \alpha_4 \to \alpha_6 \to \alpha_1 \to \alpha_5$ devri bir Hamilton devri (=tüm köşeleri içeren bir devir) olduğundan bir Hamilton diyagramıdır. Böylece Γ_A güçlü bağlantılı olup Teorem 5.6 nın iii) koşulu sağlanır. O halde A kümesi $Sing_4$ için bir minimal doğuray kümesidir. Gerçekten $E(D_{4-1})$ in tüm idempotentleri için

$$\zeta_{1,2} = (\alpha_1\alpha_3)^3,\ \zeta_{1,3} = \alpha_2\alpha_6\alpha_5\alpha_3,\ \zeta_{1,4} = {\alpha_3}^3$$

$$\zeta_{2,1} = \alpha_1\alpha_6,\ \zeta_{2,3} = (\alpha_4\alpha_6)^2,\ \zeta_{2,4} = (\alpha_5\alpha_6)^2$$

$$\zeta_{3,1} = {\alpha_2}^3,\ \zeta_{3,2} = {\alpha_4}^2,\ \zeta_{3,4} = (\alpha_6\alpha_4)^2$$

$$\zeta_{4,1} = (\alpha_3\alpha_1)^3,\ \zeta_{4,2} = {\alpha_5}^3,\ \zeta_{4,3} = (\alpha_6\alpha_5)^2$$

olduğundan $E(D_{4-1}) \subseteq \langle A \rangle$ dır ve böylece A kümesi $Sing_4$ için bir minimal doğuray kümesidir.

Not. $\forall \zeta_{i,j} \in E\left(D_{4-1}\right)$ idempotentini A kümesinin elemanlarının bir çarpımı olarak yazmak için Γ_A diyagramındaki patikalar kullanılmıştır ve bu yazılış tek türlü değildir. Örneğin $\zeta_{4,3} = \left(\alpha_6\alpha_5\right)^2 = \alpha_6\alpha_1$ dir.

KAYNAKLAR

AYIK, G., AYIK, H. and HOWIE, J.M., 2005. On factorisations and generators in transformation semigroups. Semigroup Forum, 70(2): 225-237.

AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ, Y. and HOWIE, J.M., 2005. The structure of elements in finite full transformation semigroups. Bull. Austral. Math. Soc., 70(1): 69-74.

_____, 2008. Rank properties of the semigroup of singular transformations on a finite set. Communications in Algebra, 36: 2581-2587.

CAMERON, P.J., 1994. Combinatorics: topics, techniques, algorithms. Cambridge University Press, Cambridge, 355s.

GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V., 2009. Classical finite transformation semigroups, An introduction. Algebra and Applications, 9. Springer-Verlag London, Ltd., London, 314s.

GOMES, G.M.S. and HOWIE, J.M., 1987. On the ranks of certain finite semigroups of transformations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 101: 395-403.

GRIMALDI, R.P., 2004. Discrete and combinatorial mathematics, An applied introduction. Fifth Edition. Pearson Education, Addison-Wesley Publishing Co., 833s.

HARARY, F., 1969. Graph theory, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London, 262s.

HIGGINS, P.M., 1992. Techniques of semigroup theory. With a foreword by G. B. Preston. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 258s.

HIGGINS, P.M., 1993. Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 113: 281-296.

HOWIE, J.M., 1966. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup. J. London Math. Soc., 41: 707-716.

_____, 1978. Idempotent generators in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 81A: 317-323.

_____, 1980. Products of idempotents in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 86A: 243-254.

HOWIE, J.M. and MCFADDEN, R.B., 1990. Idempotent rank in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 114(3-4): 161-167.

HOWIE, J.M., LUSK, EWING L., MCFADDEN, R.B., 1990. Combinatorial results relating to products of idempotents in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 115: 289-299

HOWIE, J.M., 1995. Fundamentals of semigroup theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 351s.

HOWIE, J.M., MARQUES RIBEIRO, M.I., 1999. Rank properties in finite semigroups. Comm. Algebra, 27: 5333-5347.

_____, 2000. Rank properties in finite semigro-ups II: the small rank and the large rank. Southeast Asian Bull. Mat., 24: 231-237.

MCALISTER, D.B., 2009. Semigroup for windows, Bilgisayar yazılımı, ind. adr:http://www.math.niu.edu/~don/sgpwin.exe

MITCHELL, J.D., 2002. Extremal problems in combinatorial semigroup theory. Ph.D. Thesis, University of St. Andrews.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Ereğli'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Seydişehir'de, lise öğrenimini ise Mersin'de tamamladı. 2003 yılında N. Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl N. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2004 yılında araştırma görevlisi olarak akademik hayata atıldı. 2005 yılında yüksek lisans çalışmasını tamamladı. 2006 yılında Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora çalışmasına başladı. Bir çocuk babasıdır.