XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

KEYFİ DİNAMİK İÇ BASINÇ ALTINDAKİ HETEROJEN DAİRESEL YAPILARIN ELASTİK VE VİSKOELASTİK DAVRANIŞLARI

Beytullah TEMEL [1], Sefa YILDIRIM [2] ve Naki TÜTÜNCÜ [3]
[1]Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana
[2,3] Çukurova Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü, Adana

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden (FDM) yapılmış eksenel simetrik yapıların zorlanmış titreşim çözümlerinde yeni bir yaklaşım ortaya konulmuştur. Heterojen olması bakımından malzeme radyal doğrultuda fonksiyonel olarak derecelendirilmiştir. Derecelendirme fonksiyonu radyal koordinatlarda keyfi sürekli bir fonksiyon olabilir. İç sınırlara uygulanan dinamik basınç fonksiyonları ise impulsif ya da zamana bağlı keyfi sürekli bir fonksiyon olabilir. Bu koşullar altında cismin davranışını idare eden diferansiyel denklemin değişken katsayılı bir denklem olmasına neden olur. Bazı basit derecelendirme fonksiyonları ve iç basınçları dışında, bu tür denklemlerin analitik çözümlerini bulmak mümkün değildir. Bu durumda problemlerin çözümü ancak sayısal yaklaşımlarla bulunabilir. Bu çalışmada sunulan yenilik, çözümlerde Laplace dönüşümü ile Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminin (TFY) birlikte kullanılmasıdır. Laplace dönüşümü uygulanarak, zamandan bağımsız hale dönüşen sınır değer problemi Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Laplace uzayında çözülür. Sonuçların zaman uzayına ters dönüşümleri ise, modifiye edilmiş Durbin yöntemi ile yapılmıştır. Viskoelastisite durumunda ise, Laplace uzayında malzeme sabitlerinin basit bir şekilde değişimi ile kolayca modellenmektedir. Sonuçların doğruluğu ve sayısal çözümlerin yakınsamalarının kontrolü literatürde bulunan referans çalışmalar ile kıyaslanarak yapılmıştır. Basit, etkili ve iyi yapılandırılmış olan çözüm adımları silindir, disk ve küreler için kolayca uygulanabilmektedir.

GİRİŞ

Silindir, disk ve küre gibi dairesel yapıya sahip elemanlar endüstride geniş uygulama alanları bulmaları açısından, bu yapıların titreşim analizleri güvenli tasarım ve işletim açısından büyük önem arz eder. Konu üzerine yapılan ilk çalışmalar homojen izotropik ve ortotropik elemanların analitik çözümlerini kapsamaktadır. Bu bağlamda öncü çalışmalar olarak Tranter [1], Mirsky [2], Klosner ve Dym [3], Ahmed [4], Ghosh [5] gösterilebilir. Eksenel simetriden dolayı oluşan basitleştirmeler sayesinde silindirler için geliştirilen çözümlemeler kolayca küreler ve diskler için de uygulanabilir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) olarak adlandırılan heterojen malzemelerin yapısal elemanlarda kullanımı son yıllarda artış göstermiştir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler; sürekli fonksiyonel yapıda konuma bağlı olarak değişen mekanik özelliklere sahip ve genellikle iki bileşenden oluşan kompozit malzemelerdir. Silindirlerin titreşimi Loy ve ark. [6] ve Pradhan ve ark. [7] tarafından Rayleigh-Ritz yöntemi kullanılarak çalışılmıştır. Zhou ve ark. [8] Chebyshev-Ritz yöntemi kullanarak içi boş ve dolu

silindirler için serbest titreşim çözümlemeleri gerçekleştirmiştir. Hibrit sayısal yöntemler kullanılarak, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirlerdeki süreksiz dalgaların çözümlenmesi Han ve ark. [9] tarafından gerçekleştirilmiştir. Periyodik eksenel yükleme altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukların dinamik stabilite çözümlemeleri Ng ve ark. [10] tarafından Bolotin yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır. Kalın cidarlı içi boş FDM silindirlerin sonlu eleman titreşim çözümlemesi Shakeri ve ark. [11] tarafından silindirin, iç içe birçok silindirden meydana gelerek FDM gibi davrandığı kabul edilerek yapılmıştır. Kürelere ilişkin olarak; fonksiyonel olarak derecelendirilmiş piezoseramik içi boş kürelerin serbest titreşim çözümlemeleri Chen ve ark. [12] ve Chiroiu ve Munteanu [13] tarafından yapılmıştır. Ding ve ark. [14]; anlık sabit radyal iç basınç ve termal yüke maruz kalan heterojen izotropik içi boş kürenin dinamik davranışını, değişkenlere ayırma yöntemini kullanarak ve sonuçları ortagonal fonksiyonlar cinsinden genişleterek incelemiştir. Wang ve Ding [15] ani üniform basınca maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş manyeto-elektro-elastik içi boş kürenin dinamik problemlerini çalışmıştır. Çalışmalarında; sonuç sonsuz seriler şekline genişletilmiş ve Volterra integral denklemlerine dönüştürülmüştür. Tornabene ve ark. [16] birinci dereceden kayma şekil değiştirme teorisini konik ve silindirik kabukların serbest titreşim davranışlarını incelemek için kullanmıştır. Belirtilen çalışmada Diferansiyel Quadrature yöntemi, idare eden diferansiyel denklemlerin ayrıştırılmasında kullanılmıştır. Sander kayma şekil değiştirme kuramı Hashemi ve ark. [17] tarafında dönen kabukların doğal frekanslarını belirlemek için kullanılmıştır. Bodaghi ve ark. [18] da birinci dereceden kayma şekil değiştirme kuramını; Laplace dönüşümleri ve Fourier serileri açılımı ile birlikte impulsif yükler altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş piezo-elektrik silindirik panellerin dinamik davranışlarını incelemede kullanmıştır. Shariyat ve ark. [19] şok yükleri altındaki kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş silindirlerin elasto-dinamik çözümleri için sonlu eleman formülasyonu kullanmıştır. Setoodeh ve ark. [20] basit güç yasasına göre derecelendirilmiş dinamik basınç altındaki silindirik kabukların incelenmesinde tabakalanma teorisi ile Diferansiyel Quadrature yöntemini kullanmıştır.

Geleneksel FDM yapısal elemanlarını modelleme yaklaşımı, kabuk kuramlarını veya malzemeyi derecelendirilmiş davranışa benzeterek farklı özellikli homojen alt elemanlara bölmeyi içerir. Sonlu eleman çözümlemesi ve seri açılım yöntemleri literatürde kullanılan temel çözüm yöntemleridir. Bu çalışmada, sonsuz küçük düzlemsel elastisite kuramı uygulanmıştır. Malzemenin derecelendirme fonksiyonuyla radyal yönde fonksiyonel olarak derecelendirilmiş olduğu varsayılır ki, en genel anlamda derecelendirme fonksiyonu, radyal koordinatın rastgele sürekli bir fonksiyonudur. İç veya dış sınırlara uygulanan yük fonksiyonları harmonik veya impulsif dinamik basınçlardır. Bu varsayımlar idare eden denklemlerin değişken katsayılı diferansiyel denklemler olmasını sağlar. Bu şartlar altında, belli bazı basit derecelendirme fonksiyonları ve basınçları hariç, analitik çözümler elde edilemez. Bu çalışmada, iç sınıra uygulanan dinamik basınca tabi fonksiyonel derecelendirilmiş disklerin, silindirlerin ve kürelerin eksenel simetrik elastik ve viskoelastik davranışlarının analizinde kullanılan, Laplace dönüşümü ve Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemini (TFM) birleştiren bir yaklaşım kullanılmıştır. Viskoelastik davranış, karşılıklılık ilkesi kullanarak Laplace uzayında kolaylıkla modellenmiştir. Zaman uzayında elde edilen sonuçlar ise, Durbin'in ters dönüşüm yöntemi -ki bu yöntemin etkin bir sayısal ters dönüşüm yöntemi olduğu kanıtlanmıştır- ile elde edilmiştir [21, 22]. Ayrıca basit bir ters dönüşümle kolayca analiz edilebilen basit güç-yasası özelliklerine sahip FDM silindirleri için de kullanılmıştır [23]. Konumsal koordinatlarda elde edilen diferansiyel denklemler genellikle değişken katsayılara sahiptir. Bu denklemler iki-noktalı sınır-değer problemi oluştururlar. TFY, mevcut literatürde bulunan standart yöntemlerle çözülebilen bir sınır-değer problemini başlangıç-değer problemi olarak çözümlemeye olanak sağlar. Bu çalışmada beşinci derece Runga-Kutta (RK5) yöntemi kullanılmıştır. Bu çözüm prosedürü, yazarların yakın zamanlı

mevcut çalışmalarında statik basınç ve zamandan bağımsız durağan termal yükler altındaki FDM silindirlere, kürelere ve disklere uygulanmıştır [24, 25]. Sunulan bu çalışma, daha önce yapılan statik çözümlemelerinin Laplace uzayındaki dinamik problemlerin çözümü için genişletilmiş halidir. Burada gösteriliyor ki, Laplace dönüşümünün kullanılması herhangi bir karmaşıklığa sebep olmaksızın sayısal çözümlemelerde birleştirilmiş bir prosedür sunar. Çözümler öncelikle silindirik yapılar için ayrıntılı biçimde geliştirilmiş ve sonuçları doğrulamak için literatürde var olan referans çözümler kullanılmıştır. Serbest titreşim analizi, doğal frekansların belirlenmesi ve mod şekilleri gibi ön çalışmalara ihtiyaç olmadan ayrık dinamik davranışlar doğrudan elde edilebilir. Boyutsuz değişkenlerle çalışıldığından, sayısal çözümlerin hızla yakınsadığı gözlemlenmiştir. Basit, etkili ve iyi yapılandırılmış olan çözüm adımları silindir, disk ve küreler için de kolayca uygulanabilmektedir.

İDARE EDEN DENKLEMLER

Burada, bir silindir için idare eden denklemler ve çözüm adımları sunulacaktır. Bu sonuçların diskler ve kürelere uyarlanması kolayca yapılabilir. Dış yarıçapı r_o ve iç yarıçapı $r_i = r_o/k$ (burada $k > 1.0$) olan kalın cidarlı içi boş bir silindiri ele alalım. Eksenel simetrik şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkileri, normalize edilmiş radyal yer değiştirmeler *V* cinsinden;

$$\varepsilon_r = \frac{dV}{dx} \qquad \text{ve} \quad \varepsilon_\theta = \frac{V}{x} \tag{1}$$

Burada, *u* radyal yer değiştirme ve *r* radyal koordinat olmak üzere, $V = u/r_o$ ve $x = r/r_o$ şeklinde tanımlanan boyutsuz değişkenlerdir. Normalizasyon işlemi, radyal koordinatın 1.0'den küçük ya da eşit olmasını sağlamak için önemlidir. Çünkü bu durum yapılacak olan sayısal çözümlemelerin hızlı yakınsamasını sağlar. Gerilme-şekil değiştirme ilişkileri;

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta \tag{3}$$

burada rijitlik terimleri C_{11} ve C_{12} şu şeklide verilmiştir:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için; elastisite modülü *E*, Poisson oranı *ν* ve buna bağlı olarak rijitlik terimleri boyutsuz radyal koordinat olan *x*'in fonksiyonudur.

Tek aşikâr olmayan hareket denklemi;

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{x} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{4}$$

Burada ayrıca kütlesel yoğunluk *ρ* da radyal koordinatın bir fonksiyonudur. Denklem (1-3) Denklem (4)'de yerine yazılırsa, radyal yer değiştirme için idare eden denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{C_{11}}\frac{dC_{11}}{dx} + \frac{1}{x}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{1}{xC_{11}}\frac{dC_{12}}{dx} - \frac{1}{x^2}\right)V = \frac{\rho}{C_{11}}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{5}$$

Denklem (5)'in Laplace dönüşümü, sıfır başlangıç koşulları $\left(V|_{t=0} = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\right)$ altında alınırsa ve katsayılar;

$$P(x,s)=\frac{1}{C_{11}}\frac{dC_{11}}{dx}+\frac{1}{x} \quad \text{ve} \quad Q(x,s)=\left(\frac{1}{xC_{11}}\frac{dC_{12}}{dx}-\frac{1}{x^2}\right)-s^2\frac{\rho}{C_{11}} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\bar{V}''+P(x,s)\bar{V}'+Q(x,s)\bar{V}=0 \tag{6}$$

şeklinde elde edilir. Burada $(\,)'$ x'e göre türevi, $\bar{V}=V(x,s)$ ifadesi V'nin Laplace dönüşümünü ve s de Laplace dönüşüm parametresini temsil eder.

İç yüzeye $(r=r_i)$ uygulanan üniform dinamik iç basınç için sınır koşulları şu şekle gelir:

$$\bar{\sigma}_r\big|_{x=\frac{1}{k}}=-p(s) \quad \text{ve} \quad \bar{\sigma}_r\big|_{x=1}=0 \tag{7}$$

burada $p(s)$ zaman uzayındaki basıncın, $p(t)$'nin Laplace dönüşümüdür.

Rijitlik terimleri C_{11}, C_{12} ve yoğunluk ρ'nun, x'in fonksiyonları olacağı göz önünde bulundurulursa, denklem (6)'nın genel formda kapalı çözümü mümkün değildir. Laplace uzayındaki çözümler TFY ile elde edilecektir. Çözüm adımlarının detayları [26]'da verilmiştir.

MALZEME MODELİ

Genel olması bakımından, örnek olarak, Mori-Tanaka [27] malzeme modeli kullanılacaktır. Sunulan prosedür içerisinde herhangi başka bir model de kullanılabilir. İzotropik bileşenler; iç kısımda tamamen metal ve içeriden dışarıya doğru düzgünce derecelendirilerek, dış kısımda tamamen seramiktir. Malzeme özellikleri; metal (Alüminyum, Al) için alt indis m ve seramik (Silisyum karbür, SiC) için alt indis c:

$$E_m=67\ GPa,\ \rho_m=2702\tfrac{kg}{m^3},\ \nu_m=0.33,\ E_c=307\ GPa,\ \rho_c=3100\tfrac{kg}{m^3},\ \nu_c=0.17.$$

Metal ve seramik bileşenlerin hacim ve kayma modülleri, K ve G sırasıyla aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$K_m=\frac{E_m}{3(1-2\nu_m)},\ K_c=\frac{E_c}{3(1-2\nu_c)},\ G_m=\frac{E_m}{2(1+\nu_m)},\ G_c=\frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \tag{8}$$

FDM'nin etkin K ve G formülasyonları şöyle verilmiştir:

$$\frac{K-K_m}{K_c-K_m}=\frac{H_c}{1+(1-H_c)\frac{3(K_c-K_m)}{3K_m+4G_m}},\quad \frac{G-G_m}{G_c-G_m}=\frac{H_c}{1+(1-H_c)\frac{G_c-G_m}{G_m+f_1}} \tag{9}$$

burada seramiğe ait hacim oranı H_c, inhomojenlik parametresi β olmak üzere, $H_c(x)=x^\beta$ olarak tanımlanmıştır ve burada f_1;

$$f_1=\frac{G_m(9K_m+8G_m)}{6(K_m+2G_m)}$$

Seramiğin ve metalin hacim oranı, sırasıyla H_c ve H_m olduğu göz önüne alınırsa;

$$H_c+H_m=1 \tag{10}$$

ilişkisi sağlanmalıdır. Böylece etkin hacimsel ve kayma modülleri belirlenerek, FDM'nin elastisite modülü ve Poisson oranı alışagelmiş biçimde;

$$E(x) = \frac{9KG}{3K+G}, \nu(x) = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} \tag{11}$$

Karışımlar kuralına göre yoğunluk $\rho(x)$ şu şeklide ifade edilebilir:

$$\rho(x) = H_m \rho_m + H_c \rho_c \tag{12}$$

SÖNÜM ETKİSİ

Mütekabiliyet (karşılıklılık) ilkesi yardımıyla ifade edilen viskoelastik iç sönümleme Boley ve Weiner [28]'deki gibi tanımlanır. Kelvin viskoelastik modelinin bünye denklemi;

$$S_{ij} = 2G\left(e_{ij} + g\frac{d\,e_{ij}}{dt}\right) \tag{13}$$

burada G kayma modülü ve g sönüm katsayısıdır. Deviatorik gerilme ve şekil değiştirme tensörleri S_{ij} ve e_{ij}, sırasıyla, gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri σ_{ij} ve ε_{ij} cinsinden δ_{ij} Kronecker deltayı ve toplamı ifade eden tekrarlanan indisler ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{kk}, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \tag{14}$$

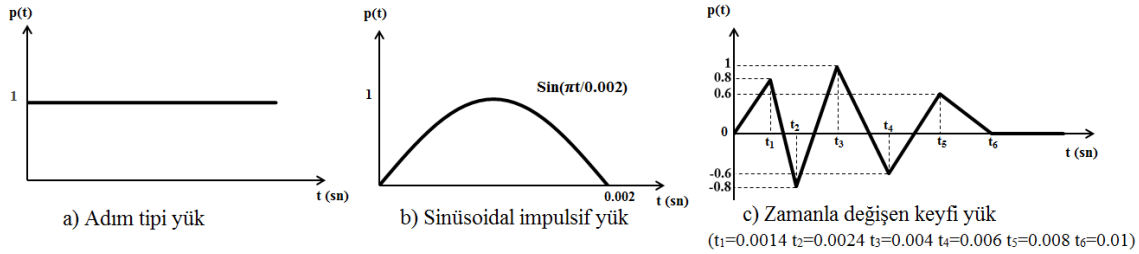
Karşılıklılık ilkesi şu şeklide tanımlanır: viskoelastik çözümlerin Laplace dönüşümleri; elastik sabitler, E ve G'nin Laplace dönüşümlerinin alınmasıyla elde edilen aşağıdaki ifadeler ile Laplace uzayında değiştirilerek bulunur:

$$E_v = E(1+g\,s), \qquad G_v = G(1+gs) \tag{15}$$

burada s Laplace dönüşüm parametresidir.

SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Çözümlemelerde üç çeşit dinamik iç basınç kullanılacaktır: a) Adım tipi yük (Şek. 1.a), b) Sinüsoidal impulsif yük (Şek. 1.b), c) Zamanla değişen keyfi yük (Şek. 1.c). Malzeme modeli bir önceki bölümde tanımlanmıştır. Tüm durumlarda, iç yarıçapın dış yarıçapa oranı $1/k = 0.6$ olarak alınmıştır.



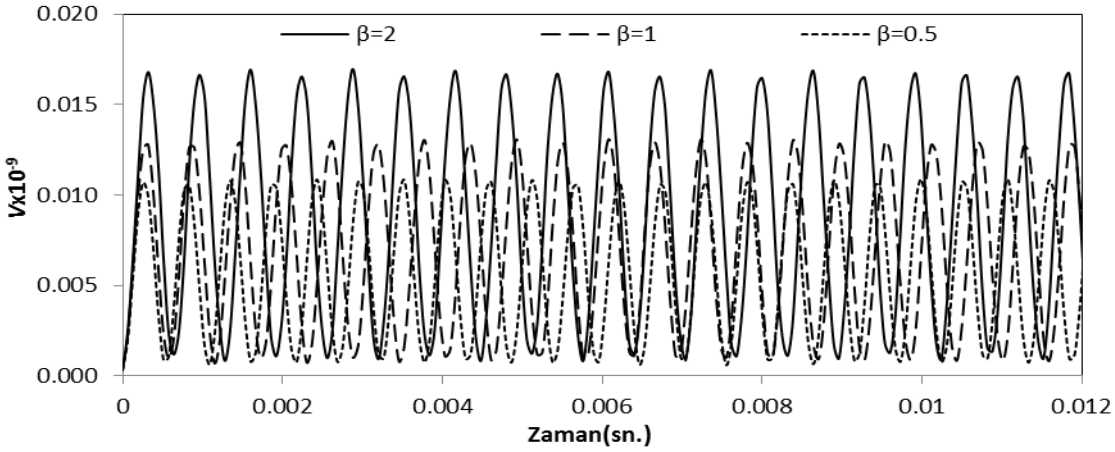
a) Adım tipi yük b) Sinüsoidal impulsif yük c) Zamanla değişen keyfi yük (t_1=0.0014 t_2=0.0024 t_3=0.004 t_4=0.006 t_5=0.008 t_6=0.01)

Şekil 1. Uygulanan yük fonksiyonları

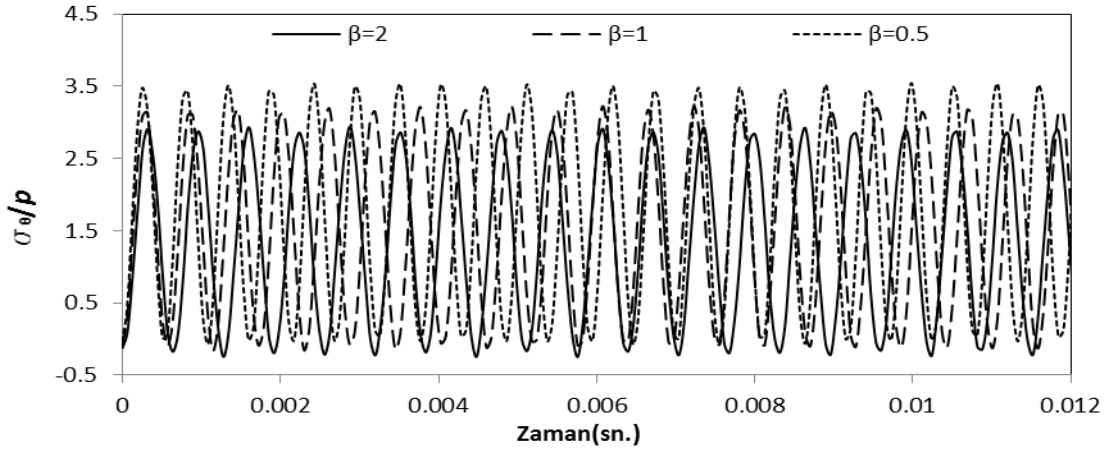
Sunulan yöntemin etkinliği ve doğruluğu, ilk olarak basit üstel malzeme modeli $E(x) = E_m x^{\beta}, \rho(x) = \rho_m x^{\beta}, \nu = 0.3$ ve adım tipi iç basınç için analitik sonuçlarla karşılaştırılacaktır [29]. Kalınlık boyunca 5 nokta (4 bölme) için altı basamak hassasiyet elde edilmiştir. Aynı malzeme modeli için, dinamik analizlerde Newmark yönteminin kullanıldığı ANSYS [30] sonuçlarıyla da bir kıyaslama yapılmıştır. İnhomojenlik, kalınlık boyunca

$\beta = 1.0$ için 10 homojen tabaka alınarak benzetilmiştir. Sunulan modelden, işlem süresinden oldukça tasarruf elde edilmesini sağlayan kaba zaman artışları kullanılarak elde edilen sonuçlar ile, 16 kat daha hassas zaman artışı kullanılan Newmark yönteminden elde edilen sonuçlar tamamen aynıdır. Ayrıca dikkat edilmelidir ki; ANSYS ile aynı hassasiyete 1.5 ve 2.0 gibi diğer β değerleri için de ulaşılmak istenildiğinde, çözümleme verimliğinde ilave kısıtlamalara neden olan tabaka sayısında kayda değer bir artış gerekmektedir.

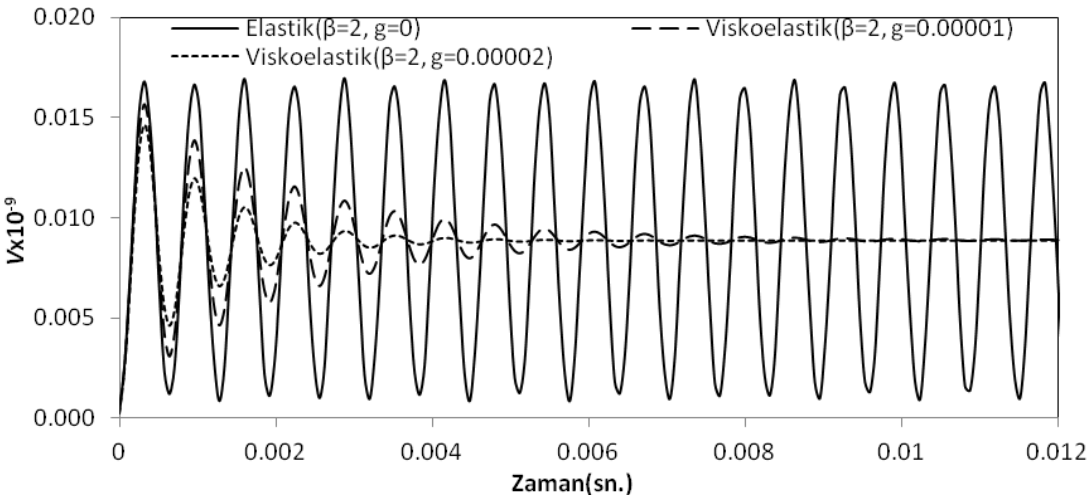
Takip eden tüm çözümlemelerde kalınlık dörde bölünecektir. Şekil (2-3), adım tipi iç basınç için elastik boyutsuz radyal yer değiştirmeyi ve çevresel gerilmeyi göstermektedir. Yer değiştirme genliği, β'nın artışı ile artarken; çevresel gerilme azalmaktadır. Viskoelastik davranış için sönüm etkisi ise, $\beta = 2.0$ için Şekil (4-5)'de gösterilmiştir. Sinüsodial impulsif iç basınç altındaki elastik ve viskoelastik davranış $\beta = 2.0$ için Şekil 6'da ve zamanla değişen keyfi yük için ise Şekil 7'de verilmiştir.



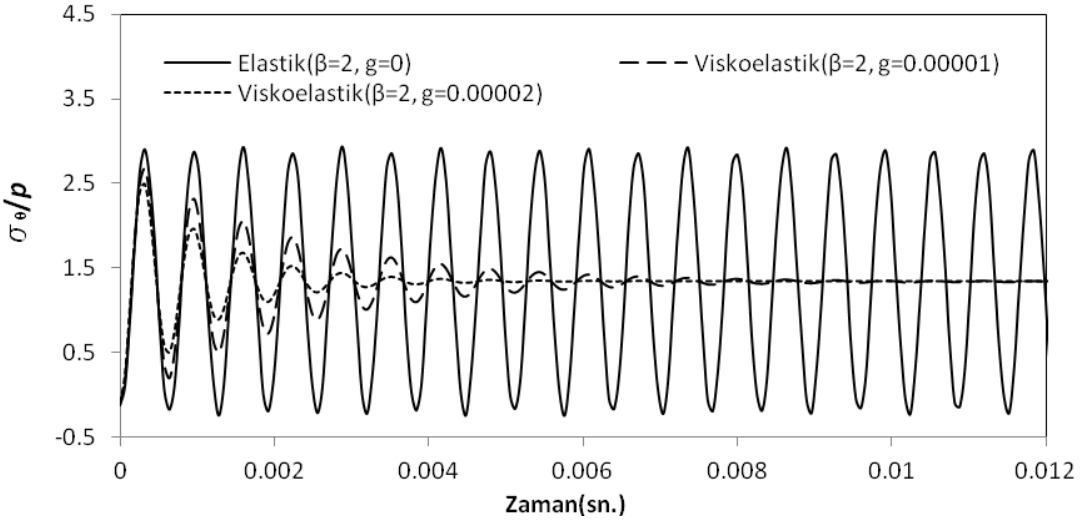
Şekil 2. Adım tipi yük için boyutsuz radyal yer değiştirmenin zamana göre değişimi



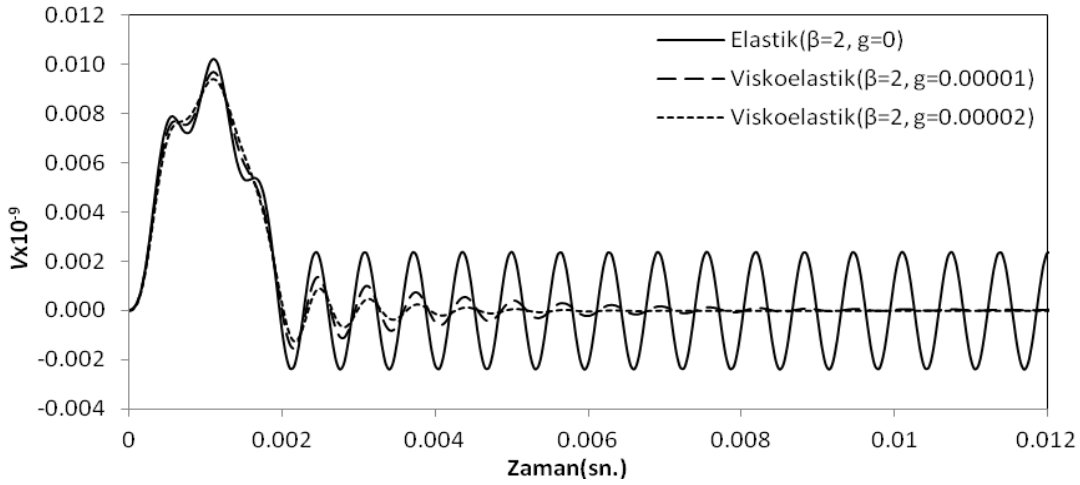
Şekil 3. Adım tipi yük için boyutsuz çevresel gerilmenin zamana göre değişimi



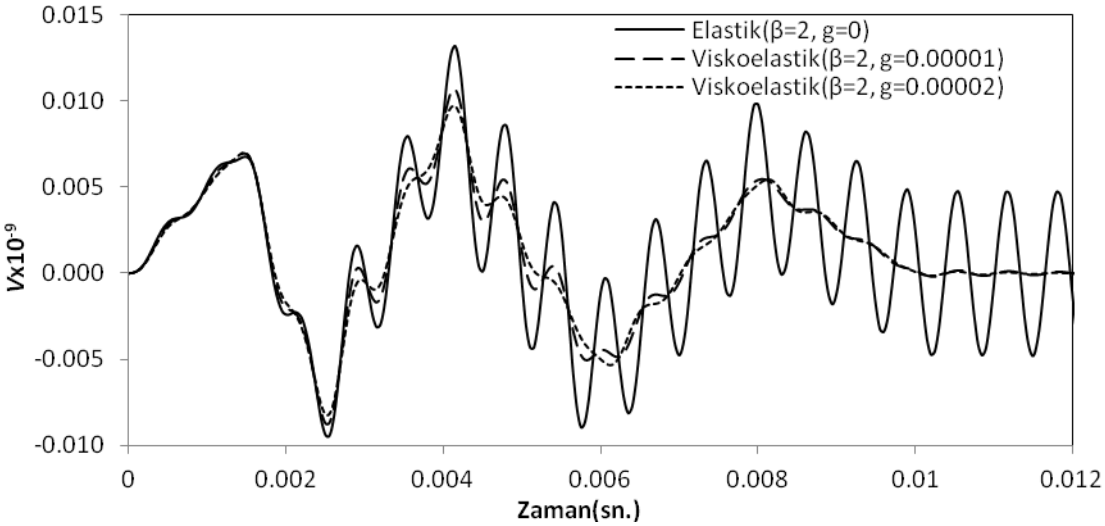
Şekil 4. Adım tipi yük için boyutsuz radyal yer değiştirmenin zamana göre değişimi



Şekil 5. Adım tipi yük için boyutsuz çevresel gerilmenin zamana göre değişimi



Şekil 6. Sinüsoidal yük için boyutsuz radyal yer değiştirmenin zamana göre değişimi



Şekil 7. Keyfi yük için boyutsuz radyal yer değiştirmenin zamana göre değişimi

Radyal koordinatın dış yarıçapa bölünmesiyle yapılan normalizasyonda, boyutsuz konumsal değişkenin 1.0'den küçük ya da eşit tutmak önemlidir. Bu şekilde, hızlı yakınsama ve dolayısıyla yüksek hassasiyet, problemin çözüm aralığı boyunca yalnızca birkaç bölme yapmakla elde edilebilir. Böyle bir normalizasyon yapılmaksızın, problemin gerçek boyutlarına bağlı olarak, konumsal değişken 1.0'dan büyük olabilir. Tamamen temsili olarak, $r_i = 1.0\ m$ ve $r_o = 1.67\ m$ boyutlarında bir silindir incelenmiştir. Her ne kadar bu durum statik problemlerde etkili bir biçimde uygulanabilmekte ise de (referans [24] ve [25]'e bakınız.), dinamik durumlarda artan bölme sayısına karşılık, ne uygun bir dinamik davranış ne de sonuçlarda bir yakınsama elde edilmiştir.

Bu çalışmada sunulan birleştirilmiş yaklaşımla, malzeme özelliklerinin fonksiyonel sürekliliğinde uzlaşmak zorunda kalınmaz ve yükleme türleri sadece özel formlarla kısıtlanmaz. Keyfi bir fonksiyon formunda olan ve dinamik iç basınca maruz kalan herhangi bir malzeme modelinin çözümlenmesi, TFY ve Laplace dönüşüm yöntemleri uygulanarak yüksek doğrulukta ve etkin olarak yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Tranter CJ. The application of the Laplace transformation to a problem on elastic vibrations. Philos Mag 1942; 33(223): 614-622.
[2] Mirsky I. Axisymmetric vibrations of orthotropic cylinders. J Acoust Soc Am 1964; 36(11): 2106-2112.
[3] Klosner JM, Dym CL. Axisymmetric, plane-strain dynamic response of a thick orthotropic shell. J Acoust Soc Am 1965; 39(1): 1-7.
[4] Ahmed N. Axisymmetric plane-strain vibrations of a thick-layered orthotropic cylindrical shell. J Acoust Soc Am 1965; 40(6): 1509-1516.
[5] Ghosh AK. Axisymmetric vibration of a long cylinder. J Sound Vib 1995; 186(5): 711-721.
[6] Loy CT, Lam KY, Reddy JN. Vibration of functionally graded cylindrical shells. Int J Mech Sci 1999; 41(3): 309-324.
[7] Pradhan SC, Loy CT, Lam KY, Reddy JN. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. Appl Acoust 2000; 61(1): 111-129.
[8] Zhou D, Cheung YK, Lo SH, Au FTK. 3D vibration analysis of solid and hollow cylinders via Chebyshev-Ritz method. Comp Methods App Mech Eng 2003; 192(13-14): 1575-1589.
[9] Han X, Liu GR, Xi Zc, Lam KY. Transient waves in a functionally graded cylinder. Int J Solids Struct 2001; 38(17): 3021-3037.

[10] Ng TY, Lam KY, Liew KM, Reddy JN. Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading. Int J Solids Struct 2001; 38(8): 1295-1309.
[11] Shakeri M, Akhlaghi M, Hoseini SM. Vibration and radial wave propogation velocity in functionally graded thick hollow cylinders. Compos Struct 2006; 76(1-2): 174-181.
[12] Chen WQ, Wang LZ, Lu Y. Free vibrations of functionally graded piezoceramic hollow spheres with radial polarization. J Sound Vib 2002; 251(1): 103-114.
[13] Chiroiu V, Munteanu L. On the free vibrations of a piezoceramic hollow sphere. Mech Res Commun 2007; 34(2): 123-129.
[14] Ding HJ, Wang HM, Chen WQ. Analytical thermo-elastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere. Arch Appl Mech 2002; 72(8): 545-553.
[15] Wang HM, Ding HJ. Spherically symmetric transient response of functionally graded magneto-electro-elastic hollow sphere. Struct Eng Mech 2006; 23(5): 525-542.
[16]Tornabene F, Viola E, Inman DJ. 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shells and annular plate structures. J Sound Vib 2009; 328(3): 259-290.
[17] Hashemi ShH, Ilkhani MR, Fadaee M. Accurate natural frequencies and critical speeds of a rotating functionally graded moderately thick shell. Int J Mech Sci 2013; 76(1): 9-20.
[18] Bedaghi M, Shakeri M. An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads. Compos Struct 2012; 94(5): 1721-1736.
[19] Shariyat M, Nikkah M, Kazemi R. Exact and numerical elastodynamic solutions for thick-walled functionally graded cylinders subjected to pressure shocks. Int J Pressure Vessels Piping 2011; 88(2-3): 75-87.
[20] Setoodeh AR, Tahani M, Selahi E. Hybrid layerwise-differantial quadrature transient dynamic analysis of functionally graded axisymmetric cylindrical shells subjected to dynamic pressure. Compos Struct 2011; 93(11): 2663-2670.
[21] Temel B. Transient analysis of viscoelastic helical rods subjected to time-dependent loads. Int J Solids Struct 2004; 41(5-6): 1605-1624.
[22] Temel B, Çalım FF, Tutuncu N. Forced vibration of composite cylindrical helical rods. Int J Mech Sci 2005; 47(7): 998-1022.
[23] Pekel H, Keles I, Temel B, Tutuncu N. Transient response of FGM pressure vessels. In: Proceedings of Vibration Problems ICOVP 2011. Springer Proceedings in Physics Volume 139, p.315-320.
[24] Tutuncu N, Temel B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. Compos Struct 2009; 91(3): 385-390.
[25] Tutuncu N, Temel B. An efficient unified method for thermoelastic analysis of functionally graded rotating disks of variable thickness. Mech Adv Mater Struct 2013; 30(1): 38-46.
[26] Temel B., Yildirim S. and Tutuncu N., Elastic and Viscoelastic Response of Heterogeneous Annular Structures under Arbitrary Transient Pressure. Int J Mech Sci. 2014; 89: 78-83.
[27] Gunes R, Aydın M. Elastic response of functionally graded circular plates under a drop-weight. Compos Struct 2010; 92(10): 2445-2456.
[28] Boley BA, Weiner JH. Theory of thermal stresses. New York: Wiley, 1960.
[29] Keles I, Tutuncu N. Exact analysis of axisymmetric dynamic response of functionally graded cylinders (or disks) and spheres. J Appl Mech-Trans ASME 2011; 78(6): 061014-1-7.
[30] ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, USA.