ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup OĞUZ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE BAZI FORMDAKİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE BAZI FORMDAKİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Yakup OĞUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez … / … / 2010 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği / Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

……	……	……
Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN DANIŞMAN	Prof. Dr. Naime EKİCİ ÜYE	Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ,şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE BAZI FORMDAKİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Yakup OĞUZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ela Aydın
Yıl: 2010, **Sayfa:** 46
Jüri : Yrd. Doç. Dr. Ela Aydın
Prof. Dr. Naime Ekici
Yrd. Doç. Dr. Ersin Kıral

L, bir *K* cismi üzerinde rankı en az 2 olan bir serbest Lie cebi olsun. Bu çalışmada $u, v \in L$ ve *x*, *y* bilinmeyenler olmak üzere $[x , u] + [y , v] = 0$ şeklindeki denklemler incelenmiştir. *u* ile *v*'nin *L*'nin serbest üreteçleri olması durumunda iki çözüm serisi bulunarak çözüm uzayının homojen elemanlarının boyutları hesaplanmış ve radikali belirlenmiştir. Genel durumda ise sonlu koboyuta kadar çözüm uzayını elde etmek için serbest üreteç katsayılarındaki sonuçların yeterli olacağı görülmüştür. Bir uygulama olarak, bilineer $[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4] = 0$ denkleminin radikali belirlenmiştir. Yine bir uygulama olarak $L = L(a , b)$, rankı 2-olan bir serbest Lie cebiri iken $[x , a] + [y , b] = 0$ denkleminin çözümünü elde edeceğimiz bir algoritma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie cebiri, radikal, çözüm uzayı, homojen eleman

ABSTRACT

MSc. THESIS

SOME EQUATIONS AND THEIR SOLUTIONS IN FREE LIE ALGEBRA

Yakup OĞUZ

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ela Aydın
Year: 2010, **Page:** 46
Jury : Asst. Prof. Dr. Ela Aydın
Prof. Dr. Naime Ekici
Asst. Prof. Dr. Ersin Kıral

Let L be a free Lie algebras of rank at least 2 over an arbitrary field K. In this paper we study equations of the form $[x , u] + [y , v] = 0$, where $u, v \in L$ and x, y are indeterminates. In this case where u and v are free generators of L, we exhibit two series of solutions, we work out the determinates of the homogeneous components of the solution space, and we determine its radical. In the general case we show that the result on free generator coefficients are sufficient to obtain the solution space up to finite codimension. As an application we determine the radical of the bilinear equation $[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4] = 0$. Also as an application we give an algorithm for the exhibit the solution of the equation $[x , a] + [y , b] = 0$, where $L = L(a , b)$ is a free Lie algebra of rank 2.

Key words: Free Lie algebra. Radical, solution space, homogeneous components.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd.Dç.Dr. Ela Aydın'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Saygı değer hocam Prof.Dr. Naime Ekici'ye bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemediği ve yol gösterdiği için çok teşekkür ederim.

Ayrıca tüm Matematik Bölümü akademik personeline yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ…….. I

ABSTRACT……... II

TEŞEKKÜR…….. III

İÇİNDEKİLER……. IV

1. GİRİŞ…… 1

2. TEMEL TANIMLAR,TEOREMLER VE
   TEMEL GERÇEKLER……. 3

3. SERBEST LİE CEBİRLERİNDE YARDIMCI
   SONUÇLAR……. 9

4. L(a,b)'DEKİ [x,a]+[y,b]=0 DENKLEMİ……. 15

   4.1 Çözüm Uzayının Homojen Elemanları…… 15

   4.2 Bazı Çözüm Aileleri…… 18

   4.3 Algoritma……. 24

5. L(a,b,c,……)'DEKİ [x , a] + [y , b] = 0 DENKLEMİ……. 27

6. ÇÖZÜM UZAYININ RADİKALİ…… 32

   6.1.Radikaller ve koordinat cebirleri…….. 32

   6.2.Çözüm uzayı olan V'nin radikali ve koordinat cebiri…….. 33

   6.3.[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4] Denklemi…….. 40

7. L[a,b,c,…….]'DEKİ [x,u]+[y,v]=0 DENKLEMİ…… 42

KAYNAKLAR……. 44

ÖZGEÇMİŞ…….. 46

1.GİRİŞ

L, herhangi bir K cismi üzerinde rankı en az 2 olan serbest Lie cebiri olsun. Bu çalışmada $u , v \in L$ ve x , y bilinmeyenler olmak üzere

$$[x , u] + [y , v] = 0 \qquad (1.1)$$

şeklindeki denklemler üzerinde çalışacağız.

Serbest Lie cebirleri bir çok yönden serbest gruplarla yakın ilişkidedirler. Serbest gruplarda belli başlı bazı sonuçların serbest Lie cebiri teorisinde tam bir karşılığı vardır. Örneğin, serbest grupların alt gruplarındaki Nielsen-Schreirer Teoremi ve serbest Lie cebirlerinin alt cebirlerindeki Shirshov-Witt Teoremi birbirine tam olarak karşılık gelirler. Serbest Lie cebirlerinin teoremlerinin önemli bölümünün serbest gruplardan esinlenerek ve paralel olarak geliştirildiği söylenebilir. Diğer taraftan serbest gruplar üzerindeki denklemler uzun zamandır önemli araştırma konusu olmasına rağmen farklı olarak Lie cebirleri üzerindeki denklemlerin teorisi daha çok başlangıç aşamasındadır. Grupların çözüm kümeleri ve gruplar üzerindeki denklemlerin genel teorisinin önemli bir bölümü Lie cebirlerine aktarılırken, serbest Lie cebirleri üzerindeki somut denklemler ve çözümleri hakkında çok az şey biliniyor. Daniyarova, E. Yu.ve Remeslennikov, V. N.(2005) tarafından çalışılmış olan, en son araştırmadaki çözüm kümeleri, L'nin sonlu afin altuzayları tarafından içerilen L üzerindeki denklem sistemleriyle ilgilidir. Serbest metabelyen Lie cebirleri üzerindeki denklemler Daniyarova, E. Yu., Kazachkov, I. V. ve Remeslennikov, V. N. (2003) tarafından çalışılmıştır. Bu araştırmanın amacı serbest Lie cebirleri üzerindeki somut denklem çalışmasına başlamaktır ve çalışmaya (1.1) lineer denklemi ile başlayacağız. Basitliğine karşın bu denklemi çözmek ilginç problemlere neden olur ve bu çalışma serbest Lie cebirleri üzerindeki daha karmaşık denklemlerin kapsamlı incelenmesine zemin hazırlar.

2. bölümde, (1.1)'in çözüm kümesinin LxL 'nin bir lineer alt uzayı olduğu ve u ile v homojen elemanlar ise bu alt uzayın doğal derecelendirmeye sahip olduğu görülmüştür.(1.1)'in homojen olmayan

$$[x\ ,\ u] + [y\ ,\ v] = w \qquad (u, v, w \in L) \qquad (1.2)$$

denklemi ile ilgisi (cisimler üzerindeki adi lineer denklemlere tam olarak benzerliği) de bu bölümde gösterilmiştir. 4-6 bölümler u ve v ' nin L'nin serbest üreteçleri olduğu durumlar için ayrılacak. 4. bölümde L'nin rankının 2- olması durumu göz önünde bulundurularak, (1.1) çözüm uzayının homojen elemanlarının boyutları belirlenerek çözümlerin iki ailesi verilmiştir. Ayrıca $L = L(a, b)$, rankı 2- olan bir serbest Lie cebiri iken $[x, a] + [y, b] = 0$ denkleminin çözümünü elde edeceğimiz bir denklem verilmiştir. 5. bölümde L 'nin rankı keyfi alınmış ve (1.1) çözüm uzayının rank 2 olması durumu ile tamamen aynı olduğu gösterilmiştir. 6. bölümde çözüm uzayının koordinat cebiri ve radikalini belirlenmiş ve $[x_1, x_2] + [x_3, x_4] = 0$ bilineer denklemi için çözümlere başvurulmuştur. Son olarak, 7. bölümde keyfi u ve v katsayılarıyla (1.1)'e dönülmüş ve 4. ve 5. bölümlerdeki sonuçların sonlu koboyuta kadar genel durumda çözüm uzayını elde etmek için yeterli olduğunu gösterilmiştir.

3. bölümde birkaç yardımcı sonuç belirtilerek bazı notasyonlardan bahsedilmiştir. Bu noktada bir $\mathcal{A}$ kümesinin K-gereni için $< \mathcal{A} >$ ve K üzerindeki bir cebirde bulunan $\mathcal{B}$ kümesi tarafından üretilen ideal için $\mathrm{Id}(\mathcal{B})$ notasyonlarını kullanmak pratik olacaktır.

2.TEMEL TANIMLAR,TEOREMLER VE TEMEL GERÇEKLER

Tanım2.1: L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her $x , y \in L$ için (x , y) ikilisine $[x , y]$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir çarpım tanımlanmış olsun.

i) Her $x, y \in L$ için $[x, y] = -[y, x]$ (Antisimetri özelliği)

ii) Her $x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$ (Bilineerlik özelliği)

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$$

iii) Her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$ (Jacobi özdeşliği)

Bu koşulları sağlayan $[x,y]$ çarpımına bir *Lie çarpımı* (komütatörü), L'ye de bu çarpımla birlikte bir *Lie cebiri* denir. Eğer L vektör uzayı sonlu boyutlu ise, Lie cebiri olarak da sonlu boyutludur. Boyutu 1 olan Lie cebirleri abelyendir. 1-boyutlu bir tek Lie cebiri, 2-boyutlu sadece iki tane izomorfik olmayan Lie cebiri vardır. Ayrıca Jacobi özdeşliğinden dolayı Lie cebirleri birleşmeli değildir.

Tanım2.2: L bir Lie cebiri ve B, L'nin bir alt uzayı olsun. Eğer B, L'deki Lie çarpımı altında kapalı ise B'ye L'nin *alt cebiri* denir ve $B \leq L$ ile gösterilir.

Tanım2.3: L bir Lie cebiri ve I da L'nin bir alt cebiri olsun. Eğer $[I,L] \subseteq I$ koşulu sağlanıyorsa I'ya L'nin *ideali* denir ve $I \triangleleft L$ gösterimi kullanılır.

Tanım2.4: L ve M aynı K cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun.

$\alpha : L \rightarrow M$ fonksiyonu her $x, y \in L$ için,

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

eşitliğini sağlayan bir lineer fonksiyon ise α'ya *L*'den *M*'ye bir *Lie homomorfizmi* denir. Eğer α, bire-bir ve örten bir dönüşüm ise α'ya bir *izomorfizm* denir. Bu durumda, *L* ile *M* izomorfik Lie cebirleridir.

L, *K* cismi üzerinde bir Lie cebiri ve *I* da *L*'nin bir ideali olsun.

$L / I = \{x + I : x \in L\}$ bölüm uzayında $x + I , y + I \in L / I$ için çarpma işlemi

$$[(x + I) , (y + I)] = [x , y] + I$$

şeklinde tanımlanırsa L / I bölüm uzayı bir Lie cebiri meydana getirir. Bu cebire *L*'nin *I* ile *bölüm cebiri* denir.

Tanım2.5: X boş olmayan bir küme, *F* bir Lie cebiri, $i : X \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her *B* Lie cebiri ve her $\alpha : X \to B$ dönüşümü için $\alpha = \beta\, i$ olacak şekilde tek bir $\beta : F \to B$ Lie homomorfizmi varsa (*F*, *i*) ikilisine *X* üzerinde bir *serbest Lie cebiri* denir.

Tanım2.6: Bir Lie polinomunda her bir terim aynı dereceye sahipse bu polinoma *homojen polinom* denir.

Tanım2.7: *L* bir serbest Lie cebiri ve *B* ile *C* de *L*'nin iki alt cebiri olsun. Eğer $C = B*B_1$ olacak şekilde L'nin bir B_1 alt cebiri var ise *B*'ye *C* alt cebirinin bir *serbest faktörü* denir.

Tanım2.8: $\{G_i : i \in I\}$ grupların boş olmayan bir kümesi olsun. *G*, bir grup ve $\lambda_i : G_i \to G$ bir homomorfizm olsun. Eğer G_i'den bazı *H* gruplarının içine $\varphi_i : G_i \to H$ homomorfizlerinin bir kümesi için, $\varphi \lambda_i = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : G \to H$ homomorfizmi varsa λ_i'ye $\{G_i : i \in I\}$ 'nin bir serbest *G-çarpımı* denir. $\{G_i : i \in I\}$ grupların kümesinin *G*-serbest çarpımı $G = \prod_{i \in I}^{*} G_i$ ile gösterilir. G_i'lere de *G*'nin *serbest çarpanları* denir.

(1.2) denkleminin bir çözümü olan, L'nin kartezyen çarpımının bir $(s\ ,\ t) \in L$ x L homojen elemanını göz önüne alalım.$V \subseteq L$ x L , (1.1) in bütün çözümlerinin kümesi olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

Bazı Gerçekler:

i) (1.1) homojen denkleminin bütün çözümlerinin kümesi olan V, L x L' nin lineer alt uzayıdır.

ii) Eğer (1.2) denklemi tutarlı ve $(s_0,\ t_0)$ bir çözüm ise (1.2) nin çözüm kümesi, $(s_0,\ t_0) + V \subseteq L$ x L'nin altuzayıdır.

Bundan sonra (1.1) homojen denklemine odaklanacağız. $g,\ h \in L$ ve $h \neq 0$ iken $[g,\ h] = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, g'nin h' nin skaler bir katı olmasıdır. Yani, eğer $u \neq 0$ ve $v = 0$ ise (1.1)'in çözüm uzayı $<u> \times L$ ve eğer $u = 0$ ve $v \neq 0$ ise çözüm uzayı, $L \times <v>$ dır. Eğer $u = v = 0$ ise (1.1) in çözüm uzayı, tüm L x L kartezyen çarpımıdır. Şimdi $u,\ v \neq 0$ olduğunu farzedelim. $u,\ v$ elemanları lineer bağımlıysa yani $v = \alpha u,\ \alpha \in K, \alpha \neq 0$ iken diğer dejenere durum ortaya çıkar. O zaman (1.1) denklemi ,$[x + \alpha y,\ u] = 0$ şekline dönüşür ve bu denklemin çözüm uzayı $\{(\beta u - \alpha t,\ t) : t \in L,\ \alpha, \beta \in K\}$ olur.

Bu çalışmanın geri kalan kısmında (1.1)'deki $u,\ v$ elemanlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edeceğiz. L'deki antikomutatiflikten dolayı $\alpha\ ,\ \beta \in K$ olmak üzere bütün $(\alpha u\ ,\ \beta v) \in L$ x L elemanları (1.1)'in çözümleridir ve bunlar trivial çözümler olarak adlandırılacak. Bunlar çözüm uzayının 2 boyutlu bir alt uzayını oluşturur: $< u >$ x $< v > \subseteq V$

Tanım2.9: V, K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekildeki L cebirine, V üzerinde bir *serbest Lie cebiri* denir:

1. V, L'nin bir alt uzayıdır.
2. V'nin her bazı, L'nin serbest üreteç kümesidir.

L'de herhangi iki a, b elemanın çarpımını $[a,\ b]$ ile ve $a_1,\ a_2, \ldots\ldots,\ a_n \in L$

için […..[a_1, a_2],…….. a_n] çarpımını da [a_1, a_2,……..., a_n] ile göstereceğiz. L'nin bir B altkümesi tarafından gerilen altuzayı ise < B > ile göstereceğiz.

Tanım2.10: L, bir serbest Lie cebiri; $A = \{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ ve $F = < I >$, I tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. Eğer $\sigma : i \to a_i$ olacak şekilde $F = < I >$ dan L içine bir σ homomorfizmi var ve örten ise A'ya L'nin bir *serbest üreteç kümesi* denir

Tanım2.11: L, V üzerinde bir serbest Lie cebiri ve V'nin bir bazı da $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ olsun. $1 \le i, j \le n$ ve $i \ne j$ iken; $L_1 = < v_i >$, $L_2 = < [v_i, v_j] >, \ldots, L_n = < [v_1, v_{2,\ldots.} v_n] >$ olsun. Yani her pozitif n tamsayısı için, L_n'ler n-uzunluklu elemanlar tarafından gerilsin. Bu şekilde oluşturulan her bir L_n'ye, *n-dereceli homojen altuzay* denir.

Bu durumda L'yi bir vektör uzayı olarak $L = \bigoplus_{n \ge 1} L_n$ direkt toplamı şeklinde yazabiliriz.

Her bir L_n'nin sonlu boyutlu olduğu açık olup, L_n'nin boyutunu dimL_n ile göstereceğiz.

Aslında eğer V'nin boyutu m ise o zaman L_n'nin boyutu Witt formülü ile verilir:

$$\dim(L_n) = \frac{1}{n}\sum_{d/n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$$

dir. Burada d, n'nin pozitif bölenleri olup μ Möbiüs fonksiyonudur. Yani

$$\mu : \mathbb{Z}^+ \to \{-1, 0, 1\}$$

$$\mu(d) = \begin{cases} 0, & d \text{ bir asal sayının karesine bölünebiliyorsa} \\ 1, & d = 1 \quad \text{ise} \\ (-1)^n, & d = p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots p_k \ (p_i\text{'ler asal}) \text{ise} \end{cases}$$

dir.

L serbest Lie cebirinin önemli bir özelliği dereceyle derecelendirilebilmesidir. L_n, L'nin n. dereceden homojen elemanı olarak tanımlansın. O zaman

$$L = \bigoplus_{n\geq 1} L_n$$

olup bu ise L x L kartezyen çarpımının bir derecelendirmesine sebep olur:

$$L \text{ x } L = \bigoplus_{i,j\geq 1} L_i x L_j \text{ dir.}$$

Eğer (1.1) deki u *ve* v, L'nin deg$u = k$, deg$v = l$ olacak şekilde homojen elemanları ise L x L nin derecelendirmesi, V çözüm uzayının bir derecelendirmesine sebep olur:

$$V = \bigoplus_{i,j\geq 1} V_{i,j} \qquad , V_{i,j} = V \cap (L_i \text{ x } L_j) \tag{2.1}$$

dir.

Aşikar çözümler $V_{k,l}$ 'de bulunduğundan bu alt uzay her zaman sıfırdan farklıdır. Aksi durumda sıfırdan farklı olması için $(i , j) \neq (k , l)$ olmak üzere (2.1)'deki $V_{i,j}$ 'de $i + k = j + l$ olmalıdır.

Özel olarak eğer $k = l = 1$ ise $i \neq j$ olmak üzere (2.1) deki bütün $V_{i,j}$ alt uzayları sıfırdır. L deki derecesi 1 olan herhangi iki lineer bağımsız eleman, serbest bir üreteç kümesinde bulunduğundan aşağıdaki ifadeden söz edebiliriz:

Önerme2.1: Eğer u ve v, L'nin farklı serbest üreteçleri ise (1.1)'in çözüm uzayı olan V, derecelendirilmiş bir lineer uzaydır ve $V_n = V \cap (L_n \text{ x } L_n)$ olmak üzere $V = \bigoplus_{n\geq 1} V_n$ şeklindedir.

Tanım2.12: F bir cisim ve $a \in F$ olsun. Her $f \in F[x]$ polinom halkası için $\Phi : F[x] \rightarrow F$, $\Phi(f) = f(a)$ olarak tanımlanan homomorfizme *evaluation homomorfizmi* denir. Φ, bir evaluation homomorfizmi olmak üzere;

1) Φ, $F[x]$'den F'ye bir (halka) homomorfizmidir.
2) Her $b \in F$ için $\Phi(b) = b$ dir.
3) Φ altında x polinomunun görüntüsü a'dır.

Önerme2.2: F bir cisim, $a \in F$ olsun ve $\Phi : F[x] \to F$ evaluation homomorfizmi tanımlansın. O zaman,

1) Φ'nin çekirdeği, $F[x]$'de x-a tarafından üretilen idealdir.
2) $I = \langle x\text{-}a \rangle$ olmak üzere, $F[x] / I$ bölüm halkası F'ye izomorfiktir.
3) I, $F[x]$'de maksimal idealdir.

Tanım2.13: $v_1, v_2, ..., v_n$ vektörler dizisinin afin kombinasyonu, $c_1, c_2, ..., c_n$'ler reel sayı ve $c_1 + c_2 + ... + c_n = 1$ şeklinde olmak üzere $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ olarak tanımlanır.

Afin altuzay ise bir lineer uzayın alt kümesidir öyle ki afin altuzaydaki vektörlerin herhangi afin kombinasyonu yine afin altuzaydadır.

3.SERBEST LİE CEBİRLERİNDE YARDIMCI SONUÇLAR

İleride serbest Lie cebirleriyle ilgili biraz daha ileri seviyede materyala ihtiyaç duyacağız ve bunlardan bazılarını bu bölümde bir araya getireceğiz.

Lie braketleri için sol-normallenmiş notasyonu kullanacağız ($[a,b,c] = [[a,b],c]$) ve $[a, b, b,\ldots\ldots, b]$ için $[a, b^k]$ yazacağız. Ayrıca $[a, b^0] = a$ olacaktır. Genellikle hesaplamalarımızda

$$[c, b, a] = [[c, a], b] + [c, [b, a]] \tag{3.1}$$

özdeşliğini kullanacağız. Bu eşitlik kolaylıkla

$$[c, b, a^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [[c, a^i], [b, a^{k-i}]] \tag{3.2}$$

şeklinde genelleştirilebilir ve küçük bir işlemle

$$[c, [b, a^k]] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} [c, a^i, b, a^{k-i}] \tag{3.3}$$

elde edilir. Eğer (3.1) de $c = [b, a]$ ise

$$[b, a, b, a] = [b, a, a, b]$$

olur.

$L = L(\mathcal{A})$ değişmeli bir K halkası üzerinde bir $\mathcal{A}$ kümesi üzerine kurulmuş serbest Lie cebiri olsun. L için Hall bazının aşağıdaki özel şeklini kullanacağız:

$n \geq 2$ sabit dereceli elemanları içeren Hall bazları alfabetik olarak düzenlenmiştir. L'nin bir $\mathcal{H}$ Hall bazının L'nin homojen elemanlarının bir kümesi olduğunu öyle ki bu elemanların lineer olarak $\forall\ e,f \in \mathcal{H}$ için deg$e$ > deg$f$ ise $e > f$ şeklinde düzenlendiğini hatırlayalım. $\mathcal{H}$ deki birinci dereceden elemanlar önceden verilen sıralama ile $\mathcal{A}$ dan gelen serbest üreteçlerdir.

$e,f \in \mathcal{H}$, deg$e < n$, deg$f < n$ olmak üzere, derecesi $n > 1$ olan elemanlar (dereceleri n'den küçük olan baz elemanları zaten gereken şekilde düzenlenmiştir) $[e, f]$ şeklindeki elemanlardır öyle ki

i) deg$e$ + deg$f = n$

ii) $e > f$

iii) deg$e = 1$ veya eğer $e=[e_1 , e_2]$ $(e_1 , e_2 \in \mathcal{H})$ ise $e_2 \leq f$

dir.

Bu durumda derecesi n'den küçük olan elemanların zaten belirtilen kuralı, bütün dereceleri n'den küçük ve eşit olan elemanlarının kümesine genişletilmiştir öyle ki derecesi n olan elemanlar keyfi olarak sıralanmıştır ve n. dereceden elemanlar daha az dereceli elemanlardan daha uzundur. Bu çalışmada $\mathcal{H}$ deki n. dereceden elemanların sıralamasının alfabetik olduğunu varsayacağız. Ayrıca $e_1, e_2, f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ olmak üzere $[e_1, e_2]$, $[f_1, f_2] \in \mathcal{H}$ ve deg$[e_1, e_2]$ = deg$[f_1, f_2] = n$ $(n \geq 2)$ iken, $[e_1, e_2] < [f_1, f_2]$ olması için gerek ve yeter koşul $e_1 < f_1$ veya $e_1 = f_1$ ise $e_2 < f_2$ olmasıdır. Böyle sıralanmış bir Hall bazı Özel Hall Bazı olarak adlandıralım. Herhangi sıfırdan farklı $g \in L$ elemanı için maksimal eleman olan $M(g)$'yi, verilen Hall bazına uygun olarak, $\mathcal{H}$'nin elemanlarının bir K-lineer kombinasyonu olan g nin yegane ifadesindeki sıfırdan farklı katsayı ile ortaya çıkan $\mathcal{H}$ nin en büyük elemanı olarak tanımlayacağız.

Önerme3.1: (Waldinger, 1961) $\mathcal{H}$, L=L($\mathcal{A}$) nın Özel Hall bazı olsun ve $f_1 > f_2$, $e \neq f_1$ ve $e \neq f_2$ olmak üzere $e, f_1 , f_2 \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman $M([e, f_1]) > M([e, f_2])$ dir. $\mathcal{B}$ ve C ayrık kümeler olmak üzere serbest üreteç kümesi olan $\mathcal{A}$ 'nın,$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup C$ şeklinde olduğunu farzedelim. O zaman

$$L(\mathcal{A})=L(\mathcal{B}) \oplus Id(C)$$

dir. Burada Id(C), C tarafından üretilen idealdir. Aşağıdaki sonuç Lazard çıkarma teoreminin orta kısmıdır.

Önerme3.2: (Bourbaki, 1987) Id(C) ideali L'nin serbest Lie alt cebiridir ve $c \in C$, $b_i \in \mathcal{B}$, $k \geq 0$ iken, $[c, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_k]$ elemanları Id(C) için bir serbest üreteç kümesi oluşturur.

Bu bölümün geri kalan kısmında K bir cisim olarak düşünülecektir.

Serbest Lie cebirlerindeki temel teoremlerden birisi de Shirsov tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremdir :

Teorem3.1: (Shirsov,1958) Bir serbest Lie cebirinin her alt cebiri de serbesttir.

Tanım3.1: $\mathcal{M}$, L 'nin homojen elemanların bir kümesi olsun. Eğer $a \in \mathcal{M}$ elemanları $\mathcal{M} \setminus \{a\}$ tarafından üretilen alt cebire ait değilse, $\mathcal{M}$ kümesi *indirgenmiş* olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem Kukin tarafından ispatlanmıştır :

Teorem3.2: (Kukin, 1972) Bir serbest Lie cebirinin her B alt cebiri indirgenmiş bir üreteç kümesine sahiptir.

İspat: İspat Kurosh'un (Kurosh,1947)'de kullandığı yöntemle yapılacaktır.

$M_0 = \phi$ diyelim ve $M_1, \ldots\ldots\ldots, M_i$ kümelerinin tanımlandığını varsayalım.

$E_i = \underset{j=1}{\overset{i}{U}} M_j$, T_i de B alt cebirinin derecesi i+1'den küçük eşit olan elemanların vektör uzayı ve $T_i' = \mathrm{Sp}(T_i \cap E_i)$ olsun. T_i uzayında, modülo T_i' maksimal lineer bağımsız M_{i+1} kümesini seçelim. Eğer $T_i = T_i'$ ise $M_{i+1} = \phi$ dır. $M = \underset{j=0}{\overset{\infty}{U}} M_j$ kümesi indirgenmiş olup B alt cebirini üretir.

Teorem3.3: (Witt,1956) Bir serbest Lie cebirinin indirgenmiş bir M alt kümesi bağımsızdır.

Önerme3.3: (Shirsov, 1953)Serbest Lie cebirindeki homojen elemanların herhangi bir indirgenmiş kümesi olan $\mathcal{M}$, kendi ürettiği altcebir için bir serbest üreteç kümesidir.

"Bir serbest grubun sonlu üretilmiş herhangi bir alt grubu , sonlu indeksli bir altgrubun serbest çarpanıdır." ifadesi Marshall Hall tarafından ifade edilmiştir. 7. Bölümde bu sonucun serbest Lie cebirleri için benzerine ihtiyaç duyacağız.

Önerme3.4: (Rosset ve Wasserman, 1997)*B, L* serbest Lie cebirinin sonlu üretilmiş bir alt cebiri olsun. O zaman *L*'de sonlu koboyutlu bir *C* altcebiri vardır öyle ki *B, C*'nin bir serbest çarpanıdır.

Not: Önerme3.3 kullanılarak Önerme3.4 deki *C* altcebirini şöyle seçebiliriz: *B* sonlu üretildiğinden $\mathcal{B}$, *L*'nin sonlu üreteç kümesi olan $\mathcal{A}$'nın bir sonlu alt kümesi olmak üzere, L($\mathcal{B}$) tarafından içerilir. Ayrıca eğer $\{b_1,\ldots\ldots,b_m\}$, *B*'nin bir serbest üreteç kümesi ise, q,b_i (i=1,…..,m)'nin maksimum derecesi ise ve $\mathcal{X} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ise $L_n(\mathcal{B})$ ($n \geq q$) ile beraber $\{b_1,\ldots\ldots,b_m\}$ tarafından üretilen *C* alt Lie cebiri ve Id($\mathcal{X}$) istenen özelliklere sahiptir. Sonuç olarak *L*'nin adjoint temsili ile kendi evrensel enveloping cebiri için bir modül olduğu gerçeğini ve PBW-bazının kullanılışını göstereceğiz. A=$A(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$'da serbest asosyatif cebir olarak tanımlansın ve A_n , n-inci dereceden homojen eleman olarak tanımlansın. *A, L*'nin evrensel enveloping cebiridir. Böylece *L, A*'da $\mathcal{A}$ tarafından üretilen Lie altcebiri ile belirlenebilir. Eğer $\mathcal{H}$, *L*'nin Hall bazı ise $e_1,e_2,\ldots,e_k \in \mathcal{H}$, $e_1 \leq \ldots..\leq e_k$ ve $\deg e_1 + \ldots.+\deg e_k = n$ olmak üzere $e_1e_2\ldots e_k$ formundaki elemanlar, A_n'nin bir bazını oluşturur. Bu baz bir PBW-bazı olarak adlandırılır. Biz A_n'nin bu bazını asosyatif $a_1a_2\ldots a_k$ (6.2 bölümündeki $a_1,a_2,\ldots a_n \in \mathcal{A}$) monomiallerinden oluşan standart bazın yanında kullanacağız. O bölümde biz *L*'yi *A* için bir (sağ) modül olarak düşüneceğiz. " $\circ$ " olarak tanımlanan

modül çarpımı $a \in \mathcal{A}$ serbest üreteçleri ve $g \in L$ için $g \circ a = [g , a]$ şeklindedir. Herhangi $h \in A$ Lie elemanı için $g \circ h = [g , h]$ dır.

Tanım3.2: *L*, bir Lie cebiri olsun. *gl*(*L*), *L* Lie cebiri üzerindeki bütün lineer dönüşümlerin cebiri (genel Lineer Lie cebir) olmak üzere ad: $L \rightarrow gl(L)$ dönüşümünü her $x, y \in L$ için $(adx)(y) = [x , y]$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan "*ad*" dönüşümü lineerdir ve Lie çarpımını korur.

Not: *gl*(*L*), fonksiyonların bileşke işlemiyle birimli ve birleşmeli bir cebirdir.

A, bir *F* cismi üzerinde asosyatif bir cebir olsun. *A* üzerinde Lie çarpımı

her $x, y \in A$ için $[x, y] = x y - y x$ olarak tanımlanırsa *A* bu çarpımla bir Lie cebiri olur. Bu cebir [*A*] veya A_{Lie} ile gösterilir.

Tanım3.3: *L*, bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı ve birleşmeli *U*(*L*) cebirine, *L*'nin *evrensel enveloping cebiri* denir.

1. *L*'den [*U*(*L*)]'ye kanonik (doğal) homomorfizm denilen bir $\varepsilon : L \rightarrow [U(L)]$ homomorfizmi vardır.
2. *K* cismi üzerindeki birim elemanlı her *B* birleşmeli cebiri ve her $\varphi: L \rightarrow [B]$ homomorfizmi için $\Psi\ \varepsilon = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\Psi : [U(L)] \rightarrow [B]$ homomorfizmi vardır.

Eğer *L*, *X* üzerinde serbest Lie cebiri ise *X* tarafından üretilen serbest asosyatif cebir, *L*'nin evrensel enveloping cebiridir.

Teorem3.4 (Poincare-Birkhoff-Witt): *L*, *K* üzerinde serbest bir Lie cebiri olsun. Eğer *L*, bir serbest *K*-modül ve *E* de *L*'nin iyi sıralı bir bazı ise, o zaman $\varepsilon : L \rightarrow [U(L)]$ kanonik dönüşümü injektif olup *U*(*L*), 1 ve $e_1 e_2 \ldots\ldots e_n$, $e_1 \geq e_2 \geq \ldots\ldots \geq e_n$, $n \geq 1$ formundaki monomialler tarafından üretilen bir serbest *K*-modüldür.

Tanım3.4: L, K cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L'nin bir V vektör uzayı üzerindeki bir representasyonu (temsili), bir $\rho : L \to gl(V)$ şeklindeki bir Lie cebiri morfizmidir.

Eğer $\rho : L \to gl(V)$ bir temsil ise V, bir L-modüldür. L'nin V üzerindeki etkisi ρ ile belirtilmiştir. ($L \times V \to V$) V'nin bir L-modül oluşu aşağıdakilerin sağlanmasıyla bellidir:

1. $\alpha, \beta \in K, x \in L, v,w \in V$ için,
   $\rho(x)\,(\alpha\, v + \beta\, v) = \alpha\, \rho(x)\, v + \beta\, \rho(x)\, w$
2. $\alpha, \beta \in K, x, y \in L, v \in V$ için,
   $\rho(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, \rho(x) + \beta\, \rho(y)$
3. $x, y \in L, v \in V$ için,
   $\rho([x,y])\, v = \rho(x)\, \rho(y)\, v - \rho(y)\, \rho(x)\, v$

   Eğer ρ'nun ne olduğu biliniyorsa " $\rho(x)\, v$ " yerine " $x\, v$ " yazılır.

   $\rho([x,y])\, v = x\, y\, v - y\, x\, v$

Örneğin, L, bir Lie cebiri olsun. $ad : L \to gl(L)$ dönüşümü L'nin bir temsilidir. Bu temsile *adjoint temsil* denir.

4.$L(a,b)$ CEBİRİNDE $[x , a] + [y , b] = 0$ DENKLEMİ

Bu bölümde, a ve b serbest üreteçler olmak üzere rankı 2 olan $L = L(a , b)$ serbest Lie cebirini ele alacağız. Ayrıca,

$$[x , a] + [y , b] = 0 \tag{4.1}$$

denklemini inceleyeceğiz.

4.1.Çözüm Uzayının Homojen Elemanları:

Önerme2.1'den, (4.1) denkleminin çözüm uzayı olan V, $V_n = V \cap (L_n \text{ x } L_n)$ homojen elemanları ile derecelendirilmiş bir uzaydır. d_n ile L_n homojen elemanının boyutunu gösterelim. μ möbiüs fonksiyonu olmak üzere, Witt'in formülünden

$$\mathrm{d_n} = \frac{1}{n}\sum_{d/n}\mu(d)2^{\frac{n}{d}}$$

dir.

Teorem4.1*:* V_n, (4.1) denkleminin çözüm uzayı olan V'nin n. dereceden homojen elemanları olsun. O zaman $n \geq 1$ için $\dim V_n = 2\ d_n - d_{n+1}$ dir.

İspat*:* V_1 , $(a , 0)$, $(0 , b)$ (trivial çözümden gelen) ve (b,a) tarafından gerilir. Böylece $\dim V_1 = 3 = 2\ d_1 - d_2$ olur.Şimdi $n \geq 2$ olsun. η: L_n x $L_n \rightarrow L_{n+1}$ k-lineer dönüşümü tanımlansın, öyle ki $\eta(s,t) = [s,a]$. η, bijektif olarak çözüm uzayı olan V_n'den L_{n+1}'deki $[L_n , a] \cap [L_n , b]$'ye bir dönüşüm tanımlar. Gerçekten eğer $(s , t) \in V_n$ ise $[s , a] = -[t , b]$ ve böylece $\eta\ (V_n) \subseteq [L_n , a] \cap [L_n , b]$ dir.Ayrıca, eğer $g \in [L_n , a] \cap [L_n , b]$ ise $s, t \in L_n$ için $g = [s , a] = [t , b]$ dir. O zaman $(s , -t) \in V_n$ ve $g = \eta(s , -t)$ olur. Böylece η örtendir. Şimdi (s_1, t_1) , $(s_2, t_2) \in V_n$ ve $\eta(s_1, t_1) = \eta\ (s_2, t_2)$ olsun. $[s_1 , a] = [s_2 , a]$ olduğunu farzedelim. O zaman $[s_1 - s_2 , a] = 0$ ve bu sayede $s_1 = s_2$ olur. Aynı zamanda $[t_1 , b] = -[s_1 , a] = -[s_2 , a] = [t_2 , b]$ olup $[t_1 - t_2 , b] = 0$ dır. Böylece $t_1 = t_2$ olur. Sonuç olarak η birebirdir. Dolayısıyla V_n'nin boyu, L_{n+1}'deki $[L_n , a] \cap [L_n , b]$ kesişiminin boyuna eşittir. $L = L(a , b)$ serbest Lie cebirinde

$$\dim[L_n , a] = \dim[L_n , b] = \dim L_n \text{ ve } [L_n , a] + [L_n , b] = L_{n+1}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\dim([L_n , a] \cap [L_n , b]) = \dim[L_n , a] + \dim[L_n , b] - \dim L_{n+1} = 2\, d_n - d_{n+1}$$

olur.Sonuç olarak $\dim V_n \sim \frac{2n+1}{n(n+1)}$ elde edilir.

Küçük n'ler için tablo:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim V_n$	3	0	1	0	3	0	6	4	13	12	37	40	99	140	284

Burada ilginç olan 2,4 ve 6 derecelerde çözüm yok ve sıfır olmayan en küçük çift çözüm n=8dir. Bölüm4.2'de iki çözüm ailesi sergileyeceğiz ve bunlar V_3 ve V_5 için baz oluşturmaya yeterli olacaktır. Ama ilk olarak V_n'in iyi homojen elemanlara nasıl ayrışacağının kısa bir iskeletini oluşturacağız. Pozitif tamsayıların bütün sıralı (p,q) çiftleri için $L_{p,q}$ ile, a'ya göre derecesi p ve b'ye göre derecesi q olan a ile b'ye bağlı tüm Lie çarpımlarının gerdiği uzayı gösterelim. O zaman $L = \bigoplus_{p,q\geq 1} L_{p,q}$ ve

$L \times L = \bigoplus_{p,q,p',q'\geq 1} L_{p,q} \times L_{p',q'}$ dır.

Witt formülü ile homojen eleman $L_{p,q}$ 'nun boyu ;

$$d_{p,q} = \dim L_{p,q} = \frac{1}{p+q} \sum_{d/(p,q)} \frac{(\frac{p+q}{d})!}{(\frac{p}{d})!(\frac{q}{d})!}$$

olur.

Eğer $(s , t) \in V_n$ elemanı (4.1)'in trivial olmayan çözümü ve $s \in L_{p,q+1}$ $(p+q+1 = n \geq 3)$ ise, $t \in L_{p+1,q}$ ve $[s , a] , [t , b] \in L_{p+1,q+1}$ dir. $p , q \geq 1$ ve $p + q = n$-1 için $V_{n;p,q} = V_n \cap (L_{p,q+1} \times L_{p+1,q})$ alalım. Bu durumda $V_n = \bigoplus_{p,q\geq 1} V_{n;p,q}$ olup $\dim V_{n;p,q} = \dim([L_{p,q+1} , a] \cap [L_{p+1,q} , b])$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece de

$\dim[L_{p,q+1}, a] = \dim L_{p,q+1}$, $\dim[L_{p+1,q},b] = \dim L_{p+1,q}$ ve

$[L_{p,q+1} , a] + [L_{p+1,q} , b] = L_{p+1,q+1}$ dir. Dolayısıyla,

$$\dim V_{n;p,q} = \dim([L_{p,q+1} , a] \cap [L_{p+1,q} , b])$$

$$= \dim[L_{p,q+1} , a] + \dim[L_{p+1,q} , b] - \dim([L_{p,q+1} , a] + [L_{p+1,q} , b])$$

$$= \dim L_{p,q+1} + \dim L_{p+1,q} - \dim L_{p+1,q+1}$$

$= d_{p,q+1} + d_{p+1,q} - d_{p+1,q+1}$ olarak elde edilecektir.

Teorem4.2: Her $n \geq 3$ için (4.1)'in çözüm uzayının n-inci dereceden homojen elemanlarının kümesi olan V_n , $V_{n;p,q} = V_n \cap (L_{p,q+1} \text{ x } L_{p+1,q})$ olmak üzere, homojen elemanların direkt toplamı olarak $V_n = \bigoplus_{\substack{p,q\geq 1 \\ p+q=n-1}} V_{n;p,q}$ şeklinde yazılır. Ayrıca

$\dim V_{n;p,q} = d_{p,q+1} + d_{p+1,q} - d_{p+1,q+1}$ şeklindedir.

$n = 3,5,7,8$ için $V_{n;p,q}$ iyi homojen elemanlarının boyutları;

p,q	1,1
$\dim V_{3;p,q}$	1

p,q	1,3	2,2	3,1
$\dim V_{5;p,q}$	1	1	1

p,q	1,5	2,4	3,3	4,2	5,1
$\dim V_{7;p,q}$	1	1	2	1	1

p,q	1,6	2,5	3,4	4,3	5,2	6,1
$\dim V_{8;p,q}$	0	1	1	1	1	0

Önerme4.1: Ψ , L'nin serbest üreteçler olan a ve b'yi değiştiren bir otomorfizmi, yani

$$\Psi: L \to L$$

$$a \to b$$

$$b \to a$$

olsun. O zaman

i) Eğer (s , t) , (4.1)'in bir çözümü ise $(\Psi(t), \Psi(s))$ de (4.1)'in bir çözümüdür.

ii) $p, q \geq 1$ ve $p+q = n-1 \geq 2$ olmak üzere her p,q,n için $\Psi^* : L \times L \to L \times L$, $\Psi^*(s,t)=(\Psi(t),\Psi(s))$, $V_{n;p,q}$ dan $V_{n;p,q}$ ya izomorfik olarak bir dönüşüm tanımlar.

4.2. Bazı Çözüm Aileleri

(4.1)'in sıfır olmayan iki çözüm ailesini bulacağız. İlk olarak, $n \geq 3$ olmak üzere bütün tek derecelilerden oluşan çözüm ailesi bulunacaktır ve bu sonraki çalışmada önemli bir rol oynayacaktır. İkinci çözüm ailesi $n = 6$ hariç bütün $n \geq 5$ derecelilerden oluşacak, bu da 8'den büyük ve eşit olmak üzere bütün çift dereceli çözümler için örnekler verilmesini sağlayacaktır.

Teorem4.3: (Remeslennikov ve Stöhr, 2007) $k \geq 1$ ve $s_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i [b, a^{2k-i}, [b, a^{i-1}]]$, $t_k = [b , a^{2k}]$ olsun. O zaman (s_k , t_k), (4.1)'in sıfırdan farklı bir çözümüdür.

İspat: (3.1) özdeşliği kullanılarak ,

$$[s_k , a] = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i [[b, a^{2k-i}, [b, a^{i-1}]], a] = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i ([b, a^{2k-i+1}, [b, a^{i-1}]] + [b, a^{2k-i}, [b, a^i]])$$

olduğu bulunur.

Bu toplamda $i = 1,\ldots..,k\text{-}1$ için i-inci terimin 2. toplamı $(i+1)$-inci terimin ilk toplamından çıkarılırsa,

$$[s_k , a] = -[b , a^{2k}, b] + (-1)^k [b , a^k , [b,a^k]] = -[b , a^{2k} , b] = -[t_k , b]$$

olup bu da istenen sonuçtur. (s_k , t_k)'nın sıfırdan farklı olduğu açıktır.

Aşağıdaki önermede, tamsayılar halkası üzerinde serbest Lie cebiri olan serbest Lie halkası üzerinde çalışılacaktır.

$\mathcal{L}$'yi, a ve b tarafından üretilen ve rankı 2 olan serbest Lie halkası olarak tanımlayalım.

Önerme4.2: (Remeslennikov ve Stöhr, 2007) $k < m < n$ olmak üzere negatif olmayan tamsayıların herhangi (k , m , n) üçlüsü için

$$s_{k,m,n} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} [[b,a^k],[b,a^m],a^i,b,a^{n-i-1}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [[b,a^m],[b,a^n],a^i,b,a^{k-i-1}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} [[b,a^n],[b,a^k],a^i,b,a^{m-i-1}]$$

$$t_{k,m,n} = (-1)^n [[b , a^k] , [b , a^m] , a^n]$$

$$+(-1)^k [[b , a^m] , [b , a^n] , a^k]$$

$$+(-1)^m [[b , a^n] , [b , a^k] , a^m]$$

olsun. O zaman $\mathcal{L}$'de $[s_{k,m,n} , a] + [t_{k,m,n} , b] = 0$ dir. Ayrıca, eğer $(k , m , n) \neq (k , k+1 , k+3)$ ise, $s_{k,m,n}$ ve $t_{k,m,n}$, $\mathcal{L}$'de sıfır olmayan elemanlardır.

İspat: (3.3) ve Jacobi özdeşliği kullanılarak

$$0=[[b , a^k] , [b , a^m] , [b , a^n]]+[[b , a^m] , [b , a^n] , [b , a^k]]+[[b , a^n] , [b , a^k] , [b , a^m]]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} [[b, a^k], [b, a^m], a^i, b, a^{n-i}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} [[b, a^m], [b, a^n], a^i, b, a^{k-i}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} [[b, a^n], [b, a^k], a^i, b, a^{m-i}]$$

$$= [s_{k,m,n} , a] + [t_{k,m,n} , b]$$

olduğu bulunur. Bu ise önermenin ilk kısmını ispatlar. İkinci kısım için uygun koşullar altında $t_{k,m,n} \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.2) özdeşliğini kullanarak bu elemanı şöyle yeniden yazabiliriz:

$$t_{k,m,n} = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [[b, a^{k+i}], [b, a^{m+n-i}]]$$

$$+ (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [[b, a^{m+i}], [b, a^{n+k-i}]] \qquad (4.2)$$

$$+ (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [[b, a^{n+i}], [b, a^{k+m-i}]]$$

Sağ taraftaki her bir komütatör $[[b , a^p] , [b , a^q]]$ formundadır. Bu sayede $t_{k,m,n}$, $p > q$ olmak üzere kolayca $[[b , a^p] , [b , a^q]]$ temel komütatörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. O zaman $[[b , a^{n+m-1}] , [b , a^{k+1}]]$ teriminin katsayıları $m \neq k+1$ ise

$$(-1)^n (-n) + (-1)^m m \qquad (4.3)$$

dir. (İlk terim (4.2) 'deki ilk toplamın $i = 1$ teriminden gelir ve ikinci terim (4.2)'deki üçüncü toplamın $i = m$-1 teriminden gelir) Eğer $m = k+1$ ise

$$(-1)^n (-n+1) + (-1)^k (-1) + (-1)^m m \qquad (4.4)$$

(İlk terim (4.2)'deki ilk toplamının $i = 1$ ve $i = n$ teriminden gelir, ikinci terim (4.2)'deki ikinci toplamın $i=0$ teriminden gelir ve üçüncü terim (4.2)'deki üçüncü toplamın $i=m$-1 teriminden gelir.)

Buradaki (4.3), $m \neq n$ olduğundan bütün m ve n 'ler için sıfırdan farklıdır. (4.4), $n=m+2$ durumu hariç sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak $m = k + 1$ ve $n = m + 2$ durumu hariç $t_{k,m,n} \neq 0$ 'dır.

Hariç tutulmuş $(k,m,n)=(k,k+1,k+3)$ durumu bu önermede istisnadır.

Gerçekten de

$$t_{k,k+1,k+3} = (-1)^k (-[[b , a^k] , [b , a^{k+1}] , a^{k+3}] + [[b , a^{k+1}] , [b , a^{k+3}] , a^k]$$
$$- [[b , a^{k+3}] , [b , a^k], a^{k+1}])$$
$$= (-1)^k [(-[[b , a^k] , [b , a^{k+1}] , a^3]+[[b , a^{k+1}] , [b , a^{k+3}]]$$
$$- [[b , a^{k+3}] , [b , a^k] , a])$$

olup parantez içindeki terimler için

$$- [[b , a^k] , [b , a^{k+1}] , a^3] + [[b , a^{k+1}] , [b , a^{k+3}]] - [[b , a^{k+3}] , [b , a^k] ,a]$$
$$= - [[b , a^{k+3}] , [b , a^{k+1}]] - 3 [[b , a^{k+2}] , [b , a^{k+2}]] - 3 [[b , a^{k+1}] , [b , a^{k+3}]]-$$
$$[[b , a^k] , [b , a^{k+4}]] + [[b , a^{k+1}] , [b , a^{k+3}]] - [[b,a^{k+4}],[b,a^k]]-$$
$$[[b,a^{k+3}],[b,a^{k+1}]]= 0$$

olduğu elde edilir.Böylece $t_{k,\, k+1\, ,\, k+3}=0$ olur.

Şimdi K cismi üzerindeki serbest L Lie cebirini düşünelim. Eğer K'nın karekteristiği sıfır ise Önerme4.2 den $(s_{k,m,n},t_{k,m,n})$, (4.1) denkleminin sıfırdan farklı bir çözümüdür. Fakat K'nın karekteristiği pozitif p olduğu durumda, ki bu gerekli koşul değil, bazı pozitif q tamsayıları için $s_{k,m,n},t_{k,m,n} \in q\mathcal{L}$ olabileceğinden eğer p, q'yu bölüyorsa bir sıfır çözümüne sahip oluruz. Bu durum genelde olur. Örnek

olarak $t_{0,1,7} \in 2\mathcal{L}$ olmak üzere (0,1,7) üçlüsünü verebiliriz. Sıfırdan farklı bir çözüm elde etmek için, $s_{k,m,n}$ ve $t_{k,m,n}$ 'yi $s_{k,m,n}$, $t_{k,m,n} \in q\mathcal{L}$ olmak üzere en büyük pozitif tamsayı olan q ile bölmemiz gerekir. Bu sayede, eğer $\frac{1}{q}\, s_{k,m,n}$, $\frac{1}{q}\, t_{k,m,n}$ elemanlarının tamsayı katsayıları , K'nın asal alt cisminin elemanları olarak yorumlanırsa o zaman bu elemanlar herhangi bir karekteristikte sıfırdan farklıdır. Açık olarak, eğer $s_{k,m,n}$ ve $t_{k,m,n}$, $\mathcal{L}$'nin $\mathbb{Z}$ - bazının bazı elemanlarının lineer kombinasyonu olarak yazılırsa, q, bu ifadede bulunan sıfırdan farklı tamsayı katsayılarının en büyük ortak böleni olur.

Teorem4.4: $k < m < n$ ve $(k , m , n) \neq (k , k{+}1 , k{+}3)$ olmak üzere negatif olmayan tamsayıların herhangi bir (k , m , n) üçlüsü için bir $q = q\,(k , m , n)$ tamsayısı vardır öyle ki $(\frac{1}{q}\, s_{k,m,n} , \frac{1}{q}\, t_{k,m,n}) \in L \times L$ 'dir. Burada $s_{k,m,n}$ ve $t_{k,m,n}$ Önerme4.2'deki (4.1)'in sıfırdan farklı bir çözümüdür.

$\deg s_{k,m,n} = \deg t_{k,m,n} = k + m + n + 2$ olduğuna dikkat edersek, Teorem4.4 , 7'den daha büyük veya eşit ve ayrıca 5. dereceden olan bütün dereceler için (4.1)'in sıfırdan farklı çözümlerine örnekler sağlar. Farklı (k,m,n) üçlüleri tarafından indekslenen sıfırdan farklı çözümlerin lineer bağımsız olması gerekmediğinden bahsedebiliriz.

Örneğin, $(s_{0,1,4},t_{0,1,4})$ ve $(s_{0,2,3},t_{0,2,3})$ çözümleri, 1-boyutlu olduğunu bildiğimiz $V_{7;4,2}$ homojen elemanına aittir. Teorem4.3 ve Teorem4.4'de elde edilen çözümler bizim V_3 ve V_5 çözüm uzaylarının tam tanımlarını vermemize de kolaylık sağlar.1 boyutlu V_3 uzayı (s_1,t_1) elemanı tarafından gerilir:

$$V_3 = \langle(-[b , a , b] , [b , a , a])\rangle ,$$

3 boyutlu V_5 uzayı

$$(-[b , a^3 , b] + [b , a^2 , [b , a]] , [b , a^4]), \tag{4.5}$$

$$(2[b , a^2 , b^2] - [[b , a , b] , [b , a]] , -2\,[b , a^3 , b] - 3[[b , a , a] , [b , a]]) \tag{4.6}$$

ve

$$([a , b^4] , - [a , b^3 , a] + [a , b^2 , [a , b]]) \tag{4.7}$$

elemanları tarafından gerilir.

Burada (4.5), Teorem4.3'den (s_2 , t_2) çözümüdür. (4.7), Ψ^* lineer dönüşümüne başvurularak (4.5)'den elde edilir ve (4.6), Teorem 4.4'deki temel komütatörlerin lineer kombinasyonu olarak yeniden yazılan ($s_{0,1,2}$, $t_{0,1,2}$) çözümüdür.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} s_{0,1,2} &= [b , [b , a] , b , a] - 2 [b , [b , a] , a , b] + [[b , a^2] , b , b] \\ &= - [b , a , b^2 , a] + 2 [b , a , b , a , b] + [b , a^2 , b^2] \\ &= - [b , a , b^2 , a] + 3 [b , a , b , a , b] \\ &= 2 [b , a , b , a , b] - [[b , a , b] , [b , a]] \\ &= 2 [b , a^2 , b^2] - [[b , a , b] , [b , a]] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_{0,1,2} &= [b , [b , a] , a^2] + [[b , a] , [b , a^2]] - [[b , a^2] , b , a] \\ &= - [b , a , b , a^2] - [[b , a^2] , [b , a]] - [b , a^2 , b , a] \\ &= - 2 [b , a^2 , b , a] - [[b , a^2] , [b , a]] \\ &= - 2 [b , a^3 , b] - 3 [[b , a^2] , [b , a]] \end{aligned}$$

(4.5), (4.6) ve (4.7) çözümleri sırasıyla$V_{5;3,1}$,$V_{5;2,2}$ ve $V_{5;1.3}$ farklı iyi homojen elemanlarına ait olduğu için lineer bağımsızdırlar.

Bütün V_n ($n \geq 1$)'ler için aşikar bazı bulmak ilginç bir problemdir. Ama, n = 5 için nispeten karmaşık cevap ve V_n'nin boyutlarının eksponansiyel büyümesi problemin muhtemelen oldukça zor olduğunu gösteriyor.

4.3.Algoritma

$L = L(a , b)$, rankı 2 olan serbest Lie cebiri olsun ve

$[x , a] + [y , b] = 0$

denklemini ele alalım. Bu denklemi çözen algoritmayı başlatmak için girilmesi gereken verileri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

i) a ve b değerleri (L'nin üreteçlerinin $X = \{a , b\}$ kümesi)
ii) Çözüm uzayının boyutu olan n sayısı

Adım1: V, bütün çözümlerin kümesi olmak üzere, girilen n değerinin yardımıyla n boyutlu çözüm uzayı olan V_n kümesinin boyutu hesaplanacak. L_n derecesi n- olan Lie polinomlarının uzayı olsun.Bu durumda $V_n = V \cap (L_n \text{ x } L_n)$ olup aşağıdaki adımlar izlenir:

a) d_n, L_n homojen uzayının boyutu olarak tanımlansın.

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{d/n} \mu(d) 2^{\frac{n}{d}}$$

eşitliğinin yardımıyla d_n ve d_{n+1} hesaplanır. Burada, μ,Möbiüs fonksiyonudur.

b) (a)'da bulunan d_n ve d_{n+1} ile $\dim V_n = 2\, d_n - d_{n+1}$ hesaplanır.

Böylece V_n'in boyutu bulunmuş olur. Eğer V_n'in boyutu, sıfır çıkarsa çözüm olmadığı anlaşılır. Eğer $V_n > 0$ ise algoritmaya devam edilir.

Adım2= Verilen n değeri tek ise $k = \frac{n-1}{2}$ eşitliğinden k bulunur. Daha sonra bu k yardımıyla

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i [b, a^{2k-i}, [b, a^{i-1}]], \quad t_k = [b , a^{2k}]$$

elemanları hesaplanır. Burada $[b, a^m] = [b, \underbrace{a, ..., a}_{m-defa}]$ dır.

Sonuç olarak $V_n = \{(s_k , t_k) | k \in \mathbb{Z}\} = Sp(\{s_k , t_k\})$ olarak elde edilir. Böylece (s_k , t_k), denklemin bir çözümü olur.

Eğer verilen n değeri çift ise $k + m + r + 2 = n$ eşitliğinden bir $\{k , m , r\}$ üçlüsü seçilir ve aşağıdaki elemanlar hesaplanır:

$$s_{k,m,r} = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r}{i} [[b, a^k], [b, a^m], a^i, b, a^{r-i-1}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [[b, a^m], [b, a^r], a^i, b, a^{k-i-1}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} [[b, a^r], [b, a^k], a^i, b, a^{m-i-1}]$$

$$t_{k,m,r} = (-1)^r [[b , a^k] , [b , a^m] , a^r]$$

$$+(-1)^k [[b , a^m] , [b , a^r] , a^k]$$

$$+(-1)^m [[b , a^r] , [b , a^k] , a^m]$$

Böylece $(s_{k,m,r} , t_{k,m,r})$ denklem için bir çözüm olmuş olur.

Burada $V = \oplus V_n$ şeklindedir.

Örnek1: n = 3 olsun. $V_3 = V \cap (L_3 \text{ x } L_3)$, $d_3 = 2$ ve $d_4 = 3$ dir. Böylece $\dim V_3 = 2 \text{ x } 2 - 3 = 1$ olur. $2k + 1 = 3$ eşitliğinden k = 1 olur. $s_2 = [b , a, b]$,

$t_2 = [b, a, a]$ olup (s_1 , t_1) denklemin bir çözümüdür. Gerçekten,

$[x , a] + [y , b] = -[[b , a , b] , a] + [b , a , a , b] = -[b , a , b , a] + [b , a , b , a] = 0$

dir. $\{(s_1 , t_1)\}$, V_3'ün bir bazı olacaktır.

Örnek2: n = 5 olsun. $V_5 = V \cap (L_5 \text{ x } L_5)$, $d_5 = 6$ ve $d_6 = 9$ dir ve böylece $\dim V_5 = 3 > 0$ olur. 2k + 1 = 5 eşitliğinden k = 2 olur. $s_2 = -[b , a^3, b] + [b , a^2, b, a]$,

$t_2 = [b, a^4]$ olup (s_2 , t_2) denklemin bir çözümüdür.

Örnek3: n = 8 olsun. $V_8 = V \cap (L_8 \text{ x } L_8)$, $d_8 = 30$ ve $d_9 = 56$ dir. Böylece $\dim V_8 = 4 > 0$ olur. $k + m + r + 2 = 8$ eşitliğinden k = 1, m = 2, r = 3 alınabilir.

$$s_{1,2,3} = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \binom{3}{i}[[b,a],[b,a^2],a^i,b,a^{2-i}]$$

$$+[[b,a^2],[b,a^3],b]$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(-1)^i \binom{2}{i}[[b,a^3],[b,a],a^i,b,a^{1-i}]$$

$$t_{1,2,3} = -[[b , a] , [b , a^2] , a^3] - [[b , a^2] , [b , a^3] , a] + [[b , a^3] , [b , a] , a^2]$$

olup $(s_{1,2,3} , t_{1,2,3})$ denklemin bir çözümüdür.

5.$L(a,b,c,\ldots\ldots)$'DEKİ $[x\ ,\ a]+[y\ ,\ b]=0$ DENKLEMİ

Bu bölümde L, $\mathcal{A}=\{a, b, c,\ldots.\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiridir ve L üzerindeki

$$[x\ ,\ a]+[y\ ,\ b]=0 \tag{5.1}$$

denklemi üzerinde çalışılacaktır.

Tanım5.1: Eğer s ve t, L'nin a ve b katsayıları tarafından üretilen L(a , b) altcebirine ait ise $(s\ ,\ t)\in L$ x L çözümüne *iç çözüm* denir. Bu bölümde L üzerindeki (5.1)'in bütün çözümlerinin iç çözüm olduğu ispatlanacaktır.

Teorem5.1: $L=L(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}=\{a, b, c,\ldots.\}$ üzerindeki serbest Lie cebiri olsun. O zaman L üzerindeki (5.1) denkleminin bütün çözümleri, iç çözümdür.

$\mathcal{X}=\{c\ ,\ldots.\}$ olmak üzere $\mathcal{A}=\{a\ ,\ b\}\cup\mathcal{X}$ yazarsak $I=\mathrm{Id}(\mathcal{X})$ olup

$L=L(a\ ,\ b)\oplus I$ olur. O zaman Önerme3.2'den

$$[z\ ,\ d_1\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ d_m]\ ,\ \ (z\in\mathcal{X}\ ,\ di\in\{a\ ,\ b\}\ ,\ m\geq 0) \tag{5.2}$$

serbest üreteçleri ile I, bir serbest Lie cebiridir. Şimdi (s , t), (5.1)'in bir çözümü olsun. O zaman $s',t'\in L(a,b)$ ve $s'',t''\in I$ olmak üzere $s=s'+s''$ ve $t=t'+t''$ şeklindedir. Ayrıca (s',t') ve (s'',t'')'nün (5.1)'in çözümleri olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla 5.1'in I x I'da sıfır olmayan çözümünün olmadığı yani

$$[I\ ,\ a]\cap[I\ ,\ b]=\{0\} \tag{5.3}$$

olduğu gösterildiğinde Teorem5.1 ispat edilmiş olacaktır.

Bu kısmın geri kalan bölümünde (5.3)'in ispatı yapılacak. $\mathcal{D}$'yi, (5.2) şeklindeki elemanlardan oluşan I'nın serbest üreteç kümesi olarak alalım. $\mathcal{X}$ de keyfi yolla düzenlenmiş bir küme olsun. Bu durumda $z\ ,\ z'\in\mathcal{X}\ ,\ d_i\ ,d'_j\ \in\{a\ ,\ b\}$ olmak üzere, $[z,d_1,.....,d_m]\ <\ [z',d'_1,.....,d'_n]$ olması için gerek ve yeter koşul $m<n$ veya $m=n$ ve $z<z'$ veya $m=n,\ z=z'$ iken bir j $(1\le j\le m)$ vardır öyle ki $i<j$ ve $d_j=a$ ve $d'_j=b$ için $d_i=d'_i$ dir. Kısaca $\mathcal{D}$'nin sıralaması dereceyledir ve her bir derece alfabetik olarak düşünülecektir ($a<b$ ile). $\mathcal{D}$ kümesi, a ile b'nin çarpımı altında sabittir: Eğer $e, f\in\mathcal{D}$ ve $e<f$ ise $[e, a]<[f, a]$ ve $[e, b]<[f, b]$ dir. Deg, serbest üreteç kümesi olan $\mathcal{D}$'ye uyarak I'daki elemanların derecelerini tanımlamak için kullanılacak. (L'nin serbest üreteç kümesi olan $\mathcal{A}$'ya uygun olarak kullanılan deg'den ayırt etmek için) Bütün $e\in\mathcal{D}$ elemanları için $\mathrm{Deg}e=1$ dir. Şimdi $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}$ kümesinin kuralından (Bölüm3) alınan I'nın özel Hall bazı olsun. Herhangi $g\in I$ elemanı, özel Hall bazı olan $\mathcal{K}$'nın elemanlarının lineer bir kombinasyonu olarak tek türlü ifadeye sahiptir. $M(g)$, $\mathcal{K}$'nın bu lineer kombinasyonda ortaya çıkan elemanlarının en büyüğü olarak tanımlansın. Hall bazı elemanı olan her bir $g\in\mathcal{K}$ 'nın şu tek türlü ifadeye sahip olduğuna dikkat edelim: $g_1\in\mathcal{D}$, $g_2,\ldots..g_k\in\mathcal{K}$, $k\ge 1$ iken, $g=[g_1\ ,\ g_2\ ,\ldots\ldots\ldots..g_k]$ dir. Bu ifadeye g'nin *sola dayalı parçalanışı* diyeceğiz.

Örneğin, eğer L, a,b,c serbest üreteçlerine sahipse $\mathcal{D}$'de $[c\ ,\ a]<[c\ ,\ b]<[c\ ,\ a\ ,\ b]$

$g=[[[c\ ,\ b]\ ,\ [c\ ,\ a]\ ,\ [c\ ,\ b]]\ ,\ [[c\ ,\ b]\ ,\ [c\ ,\ a]]\ ,\ [[c\ ,\ a\ ,\ b]\ ,\ [c\ ,\ a]\ ,\ [c\ ,\ a\ ,\ b]]]\in\mathcal{K}$

iken

$$g_1=[c\ ,\ b]\ ,\ g_2=[c\ ,\ a]\ ,\ g_3=[c\ ,\ b]\ ,\ g_4=[[c\ ,\ b]\ ,\ [c\ ,\ a]]\ ,$$
$$g_5=[[c\ ,\ a\ ,\ b]\ ,\ [c\ ,\ a]\ ,\ [c\ ,\ a\ ,\ b]]$$

alınırsa,

$g=[g_1,g_2,g_3,g_4,g_5]$ olur.

Önerme5.1: Sola dayalı parçalanış olan $e=[g_1\ ,\ g_2\ ,\ldots\ldots g_k]$ için $e\in\mathcal{K}$ ve $d\in\{a,\ b\}$ olsun. O zaman

i) $M([e\ ,\ d])=[[g_1\ ,\ d]\ ,\ g_2,\ldots\ldots\ldots,\ g_k]$,

ii) $M([e,d])>e$,

iii) $e>f$ olacak şekildeki her $f\in\mathcal{K}$ için, $M([e\ ,\ d])>M([f\ ,\ d])$

dir.

İspat: Bu önermenin üç iddiası Dege üzerinden tümevarımla eşzamanlı olarak ispat edilecektir. Eğer Dege $=1$ ise $e=g_1\in\mathcal{D}$, $[e\ ,\ d]=[g_1\ ,\ d]\in\mathcal{D}$ dir, öyleyse (i) trivialdir ve (ii) ile (iii), $\mathcal{D}$'deki kuralın tanımının açık sonucudur.

Şimdi Dege >1 olsun. İlk olarak (i) için tümevarımsal adımı saptarız. Dege >1 olduğundan $k>1$ ve $e=[e',g_k]$ $(e'=[g_1,\ g_2,\ldots\ldots,\ g_{k-1}])$ dır. Dege$g_k\leq$ Dege$e'<$ Dege$e$ ve bu sayede (i)-(iii) e' ve g_k'ya uygulanır. (3.1)'den

$$[e,\ d]=[[\,e'\ ,\ d]\ ,\ g_k]+[\,e'\ ,\ [g_k,\ d]] \tag{5.4}$$

(i)'den $M([\,e'\ ,\ d])=[[g_1\ ,\ d]\ ,\ g_2\ ,\ldots\ldots,\ g_{k-1}]$ ve Önerme3.1'den

$$M([[\,e'\ ,\ d]\ ,\ g_k])=M([[g_1\ ,\ d]\ ,\ g_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,g_{k-1},\ g_k])$$

$[g_1,d]>g_1$ olduğundan $[[g_1\ ,\ d],\ g_2,\ldots\ldots..,g_{k-1},\ g_k]\in\mathcal{K}$ ve bu sayede

$$M([[\,e',d]\ ,\ g_k])=[[g_1\ ,\ d]\ ,\ g_2,\ldots\ldots\ldots,g_{k-1},\ g_k] \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5)'den dolayı, (i) için tümevarımsal adım

$$M([\,e'\ ,\ [g_k,\ d]])<M([[\,e'\ ,\ d]\ ,\ g_k]) \tag{5.6}$$

olduğu gösterildiğinde tamamlanmış olacaktır.

$\mathcal{K}$ özel Hall bazının elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak $[g_k\,,\,d]$'yi yazarsak,

$$[g_k\ ,\ d]\ =\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\ f_i\quad ,\ f_i\in\mathcal{K},\ f_1>\ldots\ldots>f_m \text{ ve } \alpha_i\in\mathcal{K},\ \alpha_i\neq 0 \text{ olur.}$$

$M([g_k,\,d])=f_1$ olduğuna dikkat edelim.

O zaman Önerme3.1'den

$$M([\,e'\,,[g_k\,,\,d]])=\begin{cases}M([e',\,f_1]), & e'\neq f_1;\\ M([e',\,f_2]), & e'=f_1 \text{ ve } m>1;\\ 0, & e'=f_1 \text{ ve } m=1.\end{cases}$$

olur. Şimdi bu 3 durumu ayrı ayrı göz önünde bulunduracağız.

Durum1: $e'\neq f_1$. Burada iki alt durum ayırt edilecek. Eğer $e'>f_1$ ise $[\,e'\,,\ f_1]\in\mathcal{K}$ dır. Gerçekten, $k=2$ ve $k>2$ için açıktır ve (ii)'den $f_1=M([g_k,\,d])>g_k$'dir. $g_k\geq g_{k-1}$ olduğundan $f_1>g_{k-1}$ ve bu da $[\,e'\,,\ f_1]\in\mathcal{K}$ olduğunu ifade eder. Ama o zaman $M([\,e'\,,\,[g_k\,,\,d]])=[\,e'\,,\,f_1]$ ve (ii)'den $e'<[\,e'\,,\,d]$ olduğundan bu (5.6)'yı ispatlar. Diğer taraftan, eğer $f_1>e$ ise $\mathrm{Deg} f_1=\mathrm{Deg}\,e'$ dir. Bu durumda $-[\,e'\,,\,f_1]=[f_1\,,\,e'\,]\in\mathcal{K}$ ve bu sayede $M([\,e'\,,\ f_1])=[f_1\,,\,e'\,]$ olur. $g_k<e'$ olduğundan (iii) sayesinde $f_1=M([g_k,\,d])<M([\,e'\,,\,d])$ dir. Böylece (5.6) yeniden sağlanır.

Durum2: $e'=f_1$ ve $m>1$. Bu durumda $\mathrm{Deg}\,e'=\mathrm{Deg}\,f_1=\mathrm{Deg}\,f_2$ ve $e'>f_2$ dir.

O zaman $[\,e'\,,\,f_2]\in\mathcal{K}$ dir ve bu sayede $M([\,e'\,,\ f_2])=[\,e'\,,\,f_2]<[M([\,e'\,,\,d])\,,\,g_k]$

olur. ((*iii*)'den dolayı $e'<M([\,e'\,,\,d])$ idi)

Durum3: Burada $M([\,e'\,,\,[g_k,\,d]])=0$ dır ve ispatlanacak bir şey yoktur.

Bu ise (*i*) için tümevarım adımını ispatlar. (*ii*) ve (*iii*) iddiaları (*i*)'nin sonucu ve $\mathcal{K}$'daki kuralın tanımdan çıkar.

Şimdi (5.3)'ün ispatına bakabiliriz. $\mathcal{K}$, I'nın bir bazı olduğundan, $[I\ ,\ a]$ ve $[I\ ,\ b]$ alt uzayları sırasıyla $[\mathcal{K}\ ,\ a]$ ve $[\mathcal{K}\ ,\ b]$ kümeleri tarafından gerilir. $d\in\{a\ ,\ b\}$ için $\sigma_d : \mathcal{K}\to\mathcal{K},\ e\to M([e\ ,\ d])$ $(e\in\mathcal{K})$ dönüşümünü göz önünde bulunduralım. O zaman Önerme5.1 (i), σ_a ve σ_b'nin birebir olduğunu ifade eder. Ayrıca $\sigma_a(\mathcal{K})\cap\sigma_b(\mathcal{K})=\phi$ dır. Bunu $[\mathcal{K},\ a]\cup[\mathcal{K},\ b]$'nın lineer bağımsız olduğu ve $<[\mathcal{K}\ ,\ a]>\ \cap\ <[\mathcal{K},\ b]>\ =\ \{0\}$ olduğu izler. Bu (5.3)'ü ispatlar ve böylece Teorem5.1'in ispatı tamamlanır.

6.ÇÖZÜM UZAYININ RADİKALİ

Bu bölümde (5.1) denkleminin çözüm uzayı olan V'nin radikali ve koordinat cebirini belirlenecektir. Radikallerin daha genel bahsi için, koordinat cebirleri ve bunların cebirsel küme teorisiyle ilişkisine değinilecektir.

6.1. Radikaller ve koordinat cebirleri:

$L = L(\mathcal{A})$ sayılabilir keyfi bir $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde serbest Lie cebiri ve $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_k\}$ bir küme olsun. $L[\mathcal{X}] = L(\mathcal{A}\cup \mathcal{X})$, $\mathcal{A}\cup\mathcal{X}$ üzerinde serbest Lie cebiridir ve L'nin k-inci kartezyen kuvveti için L^k yazılır. Her bir $p = (p_1,\ldots,p_k) \in L^k$ elemanı için $\Pi_p : L[\mathcal{X}] \to L$,

her $a\in\mathcal{A}$ için $a \to a$, $1 \le i \le k$ için $x_i \to p_i$

şeklinde tanımlanan Π_p evaluation homomorfizmi vardır.

Tanım6.1: L üzerinde, $x_1,\ldots\ldots x_k$ belirsizlerine bağlı bir denklem sistemi, $L[\mathcal{X}]$'den gelen elemanların bir S kümesidir ve S'nin bir çözümü her $f\in S$ için $\Pi_p(f) = 0$ olacak şekildeki bir $p = (p_1,\ldots,p_k) \in L^k$ sıralı k-lisidir. S sisteminin bütün çözümleri $\sum(S)$ ile gösterilecektir. Şimdiye kadar lineer denklemler göz önüne alındı, çözümler de bu yolla yorumlanabilir. L^k'nın bir U altkümesi, eğer bazı $S \subseteq L[\mathcal{X}]$ sistemleri için $U = \sum(S)$ şeklindeyse L üzerinde *cebirsel küme* olarak adlandırılır. $U = \sum(S) \subseteq L^k$ cebirsel kümesinin radikali olan Rad(U),

$$\mathrm{Rad}(U) = \{f \in L[\mathcal{X}] : \Pi_p(f) = 0 \ \forall\ p\in U \text{ için}\}$$

ve $\mathrm{Rad}(\phi) = L[\mathcal{X}]$ kuralı ile tanımlanır. Diğer bir ifadeyle U'nun radikali, çözüm kümesi U olan bütün $f \in L[\mathcal{X}]$ denklemlerini içerir. Eğer $U = \sum(S)$ ise, $S \subseteq \mathrm{Rad}(U)$'dur. Üstelik Rad($U$), $L[\mathcal{X}]$'de bir idealdir ve bu sayede $\mathrm{Id}(S) \subseteq \mathrm{Rad}(U)$'dir.

Diğer kısımda (5.1) denkleminin çözüm kümesi olan $V = \sum([x , a] + [y , b])$ uzayının radikalinin, $L[x , y]$'deki $[x , a] + [y , b]$ tarafından üretilen idealle tutarlı olduğu gösterilecektir. Genel olarak $I(S) \subseteq \text{Rad}(U)$ yazılabilir. Örneğin, $S = \{[x , y]\}$ ise her $g \in L$ için $[[x , g] , [y , g]] \in \text{Rad}\sum(S)$'dir, fakat $g \neq 0$ için $[[x , g] , [y , g]] \notin \text{Id}([x , y])$'dir.

Aşağıdaki sonuç $L[\mathcal{X}]$'deki bir idealin, cebirsel bir kümenin radikali olması için kullanışlı bir kriterdir.

Önerme 6.1: *J*, $L[\mathcal{X}]$'de bir ideal ve $U = \sum(S)$, L^k'de bir cebirsel küme olsun. O zaman $J = \text{Rad}(U)$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır :

i) Her $g \in J$ ve her $p \in U$ için $\Pi_p(g) = 0$ dir.

ii) Her $g \in L[\mathcal{X}] \backslash J$ için bir $p \in U$ elemanı vardır öyle ki $\Pi_p(g) \neq 0$ dır.

İspat: Bu önermenin ispatı radikalin tanımından dolayı açıktır. İlk koşul *J*'nin Rad(*U*)'da bulunduğunu ifade eder ve ikinci koşul da Rad(*U*)'da *J* dışında eleman olmadığını ifade eder.

Bir $U = \sum(S)$ cebirsel kümesinin koordinat cebiri olan $\Gamma(U)$, $\Gamma(U)=L(\mathcal{X})/\text{Rad}(U)$ olarak tanımlanan bölüm cebiridir.

6.2.Çözüm uzayı olan V'nin radikali ve koordinat cebiri:

$L = L(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \{a, b, c,\ldots\ldots\}$ ile 5. Bölümdeki gibi tanımlansın ve V, (5.1) denkleminin çözüm uzayı olsun. $L[x , y]$ de $\mathcal{A} \cup \{x , y\}$ üzerinde tanımlı serbest Lie cebiri olsun.Ayrıca *L*'nin $L[x , y]$'nin altcebiri olduğunu göz önüne alalım. O zaman $L[x , y]$, $L[x , y] = L \oplus I$ olarak yazılabilir. Burada $I = \text{Id}(x , y)$ dir yani $L[x , y]$'de *x* ve *y* tarafından üretilen idealdir. Önerme3.2'den *I*,

$$[x , d_1,\ldots\ldots,d_m] , [y , d_1,\ldots\ldots,d_m] \quad (d_i \in \mathcal{A}, m \geq 0) \tag{6.1}$$

elemanlarından oluşan serbest üreteç kümesi ile, L'nin bir serbest altcebiridir.

$L[x , y]$'de $[x , a] + [y , b]$ tarafından üretilen $J = \mathrm{Id} <[x , a] + [y , b]>$ idealini ele alalım. J'nin I idealinin alt kümesi olduğu açıktır.

Önerme6.2: $L[x , y]$'nin $J = \mathrm{Id} <[x , a] + [y , b]>$ ideali,

$$[x , a, d_1,\ldots\ldots,d_m] - [y, b, d_1,\ldots\ldots, d_m] \quad (d_i \in \mathcal{A}, m \geq 0) \qquad (6.2)$$

elemanları tarafından üretilen I ideali ile çakışır.

İspat: $\overline{J}$, I 'nın (6.2) elemanları tarafından üretilen ideali olarak tanımlansın. O halde $\overline{J}$ ideali; g_1 ,(6.2) formundaki elemanlarından biri ve $g_2,\ldots\ldots,g_k$ lar da (6.1) formunda olmak üzere tüm $[g_1,g_2,\ldots\ldots g_k]$ şeklindeki Lie çarpımları tarafından gerilecektir. Fakat herhangi bir $d \in A$ için ((3.1) ardı ardına kullanılarak)

$$[g_1,\ldots\ldots\ldots g_k,d] = \sum_{i=1}^{k} [g_1,\ldots\ldots\ldots,[g_i,d],\ldots\ldots\ldots,g_k]$$

elde edilecektir. Sağ taraflı çarpım altında bütün Lie çarpımlarında ilk giriş (6.2) formundadır ve geri kalanlar da (6.1) formundadır. Dolayısıyla $\overline{J}$, $L[x , y]$'de bir idealdir ve bu sayede $J = \overline{J}$ dir.

Sonuç 6.1: I / J bölüm cebiri,

$$x, y, [x, c_1 ,\ldots\ldots,c_m] , [y, d_1,\ldots\ldots\ldots,d_m] \ (c_i, d_i \in \mathcal{A}, c_1 \neq a , m \geq 1) \qquad (6.3)$$

elemanlarından oluşan serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiridir.

İspat: (6.3) ve (6.2) elemanlarının I idealinin serbest bir üreteç kümesini oluşturduğuna dikkat edilmesi yeterlidir.

Tanım6.2: A bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için,

$$d(xy) = d(x)\, y + x\, d(y)$$

koşulunu sağlayan $d : A \to A$ dönüşümüne A'nın bir *derivasyonu* (*türevi*) denir. d, lineer bir dönüşümdür. A'nın tüm derivarsonlarının kümesini DerA ile gösterelim. DerA, bir vektör uzayıdır. DerA kümesi [,] işlemine göre kapalıdır ve A, bir Lie cebiri iken DerA'nın da bir Lie cebiri olduğu gösterilebilir.

Tanım6.3: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2'nin vektör uzayı olarak $L_1 \oplus L_2$ direkt toplamını düşünelim. Bu toplam üzerinde L_1 ve L_2'deki çarpımların bir genişlemesi olan $L_1 \oplus L_2$ 'yi bir Lie cebiri yapan bir çarpma tanımlayalım : $[\ ,\ ]_1$, L_1'deki çarpım ve $[\ ,\ ]_2$ de L_2'deki çarpım olsun. Bir morfizmini $\theta : L_1 \to Der L_2$ düşünelim. $x_1, y_1 \in L_1$ ve $x_2, y_2 \in L_2$ için,

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1]_1 + \theta(x_1)y_2 - \theta(y_1)x_2 + [x_2, y_2]_2$$

çarpımını tanımlayalım. Bu durumda $L_1 \oplus L_2$, yukarıdaki çarpımla bir Lie cebiri olacaktır.

Not: Eğer θ'nın ne olduğu biliniyorsa, yarı direkt toplam L_1 x L_2 şeklinde gösterilir. Herhangi bir θ'ya göre yarı direkt toplam söz konusu ise $L1$ x_θ $L2$ ile gösterilir. Eğer θ = 0 olarak alınırsa yukarıdaki çarpım

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1]_1 + 0(x_1)y_2 - 0(y_1)x_2 + [x_2, y_2]_2$$

$$= [x_1, y_1]_1 + [x_2, y_2]_2$$

şekline dönüşür. Bu durumda L'ye L_1 ile L_2'nin *direkt toplamı* denir.

Sonuç 6.2: $L[x\ ,\ y]$ / J bölüm cebiri, L serbest Lie cebiri ile I / J idealinin yarı direkt toplamı olup (6.3) formundaki serbest üreteçleriyle serbest Lie cebiridir.

$L[x\ ,\ y] / J = L \oplus I / J$ dir.

Önerme6.3: m ve k, $m < 2k$ olacak şekilde pozitif tamsayılar ve s_k ile t_k Teorem4.3'de tanımlandığı şekilde olsun. O zaman c_i, $d_i \in \mathcal{A}$, $c_1 \neq a$ iken,

$$[s_k, c_1, \ldots\ldots, c_m], [t_k, d_1, \ldots\ldots, d_m] \qquad (6.4)$$

elemanları, L'de lineer bağımsızdır.

İspat: *L*'yi kendi evrensel enveloping cebiri ile bir modül olarak düşünelim. *A*, serbest üreteç kümesi, 3. Bölümde verilen $\mathcal{A}$ kümesi olan serbest birleşmeli cebir olsun. Önermeyi sonlu bir $\mathcal{A}$ için ispatlamak yeterlidir. $|\mathcal{A}|$ = p olsun. A_m, *A*'nın *m*-inci dereceden homojen elemanını tanımlasın. A_m, $d_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere bütün $d_1d_2\ldots\ldots d_m$ monomiallerin kümesi olan $\mathcal{D}_m$ tarafından gerilir. $\mathcal{E}_m$, $d_1 = a$ iken tüm $d_1d_2\ldots\ldots d_m$ şeklindeki monomiallerin kümesi ve $\mathcal{F}_m$ de $d_1 \neq a$ iken tüm $d_1d_2\ldots\ldots d_m$ monomiallerin kümesi olarak tanımlanırsa $\mathcal{D}_m = \mathcal{E}_m \cup \mathcal{F}_m$ olur. L'nin (6.4) elemanları tarafından gerilen alt uzayı $s_k \circ \langle\mathcal{F}_m\rangle + t_k \circ A_m$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\dim(s_k \circ \langle\mathcal{F}_m\rangle + t_k \circ A_m) = (p\text{-}1)\, p^{m-1} + p^m \qquad (6.5)$$

olduğunu göstermeliyiz:

$\mathcal{H}$, *L*'nin bir Hall bazı olsun. (a en küçük ve b ikinci en küçük eleman olmak üzere serbest üreteçlerde a < b <…… sıralaması kullanılacak.) $\mathcal{P}_m$, A_m'nin 3. bölümdeki $\mathcal{H}$'den gelen PBW bazı olsun. O zaman $\mathcal{P}_m$ kümesi m-inci dereceden ilk çarpanı *a* olan bütün PBW-bazı elemanlarının kümesi ve $\mathcal{S}_m = \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{R}_m$ de geriye kalan PBW- baz elemanlarının kümesi olarak tanımlanırsa, $\mathcal{P}_m$, ayrık kümelerin birleşimi olarak $\mathcal{P}_m = \mathcal{R}_m \cup \mathcal{S}_m$ şeklinde yazılabilir.

Örneğin,

$\mathcal{A} = \{a , b\}$ ise

$\mathcal{R}_3 = \{a^3, a^2b, ab^2, a[b , a]\}$ ve $\mathcal{S}_3 = \{b^3 , b[b , a] , [b , a , a] , [b , a , b]\}$ dir.

Buradan,

$A_m = \langle \mathcal{E}_m \rangle \oplus \langle \mathcal{F}_m \rangle = \langle \mathcal{R}_m \rangle \oplus \langle \mathcal{S}_m \rangle$ ve $\langle \mathcal{E}_m \rangle = \langle \mathcal{R}_m \rangle$ olduğu görülebilir.

$\langle \mathcal{F}_m \rangle$ ile $\langle \mathcal{S}_m \rangle$, A_m'deki $\langle \mathcal{E}_m \rangle$'nin vektör uzayı tamamlayanı olduklarından, her $r \in \mathcal{S}_m$ için bir $\bar{r} \in \langle \mathcal{E}_m \rangle$ elemanı vardır öyle ki $r + \bar{r}$ elemanları $\langle \mathcal{F}_m \rangle$'nin bir bazını oluşturur: $\langle \mathcal{F}_m \rangle = \langle r + \bar{r} : r \in \mathcal{S}_m \rangle$

$e_i \in \mathcal{H}$, $\sum \deg e_i = m$ ve $e_1 \leq \ldots\ldots \leq e_l$ olmak üzere her bir $r \in \mathcal{P}_m$, $r = e_1 e_2 \ldots\ldots\ldots e_l$ formundadır ve $t_k \circ r = [b, a^{2k}, e_1, e_2, \ldots\ldots\ldots, e_l]$ dir.

$m < 2k$ olduğundan $r \in \mathcal{P}_m$ olmak üzere, $t_k \circ r$ elemanları, p^m tane farklı Hall komütatörünün kümesini oluşturacaktır. Bu küme, $t_k \circ A_m$ 'nin bir bazını oluşturur ve dim $(t_k \circ A_m) = p^m$'dir.

Şimdi, $s_k \circ \langle \mathcal{F}_m \rangle = \langle s_k \circ (r + \bar{r}) : r \in \mathcal{S}_m \rangle$ alt uzayını göz önüne alalım.

$[s_k, a] = -[t_k, b]$ olduğundan $s_k \circ \langle \varepsilon_m \rangle = [s_k, a] \circ A_{m-1} = -[t_k, b] \circ A_{m-1} \subseteq t_k \circ A_m$ olur ve dolayısıyla, $\bar{r} \in \langle \varepsilon_m \rangle$ olduğundan da

$$s_k \circ \langle \mathcal{F}_m \rangle = s_k \circ \langle \mathcal{S}_m \rangle \qquad \text{mod } t_k \circ A_m$$

olur. Bu sayede $r \in \mathcal{S}_m$ olmak üzere $s_k \circ r$ elemanları

$$s_k \circ \langle \mathcal{E}_m \rangle + t_k \circ A_m \qquad \text{mod } t_k \circ A_m$$

kümesini gerer. $e_i \in \mathcal{H}$, $\sum \deg e_i = m$ ve $b \leq e_1 \leq \ldots\ldots \leq e_l$ olmak üzere her bir $r \in \mathcal{S}_m$ elemanı

$r = e_1 e_2 \ldots\ldots\ldots e_l$ formundadır. Buradan da

$$s_k \circ r = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i [b, a^{2k-i}, [b, a^{i-1}], e_1, ..., e_l] \qquad (6.6)$$

elde edilir.

$(s_k \circ r)'$ = - [b , a^{2k-1} , b , e_1 ,……, e_l], (6.6)'daki i = 1 durumu olmak üzere ve $(s_k \circ r)''$ da geriye kalan terimler (i = 2,….,k) olmak üzere $s_k \circ r = (s_k \circ r)' + (s_k \circ r)''$ yazarız. r, $\mathcal{S}_m$'yi taradıkça $(s_k \circ r)'$ elemanları, (p-1) p^{m-1} farklı baz komütatörlerini oluşturur ve üstelik bunların hepsi $r \in \mathcal{P}_m$ iken $t_k \circ r$ formundaki baz komütatörlerinden farklıdır. Bu sayede

$$\{ t_k \circ r : r \in \mathcal{P}_m \} \cup \{ (s_k \circ r)' : r \in \mathcal{S}_m \} \qquad (6.7)$$

birleşimi lineer bağımsız bir kümedir. Üstelik, bütün $t_k \circ r$ ($r \in \mathcal{P}_m$) ve $s_k \circ r$ ($r \in \mathcal{S}_m$) elemanları, $A \setminus \{a\}$ tarafından üretilen ve L'nin ideali olan $\tilde{I}$ = Id(b , c ,…..)'ye aittir. Önerme3.2'den $\tilde{I}$ ideali (L'nin altcebiri olarak), $z \in A\setminus\{a\}$ ve $i \geq 0$ olmak üzere $[z, a^i]$ elemanları tarafından serbest olarak üretilmiştir. $\tilde{I}$ idealinin serbest üreteç kümesi ayrık kümelerin birleşimi olarak $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ olarak yazılabilir öyle ki burada

$$\mathcal{I} = \{[b , a^i] : 0 \leq i \leq 2k - 2\} \cup \{[z , a^i] : z \in \mathcal{A}\setminus\{a , b\} , i \geq 0\}$$

$$\mathcal{J} = \{[b , a^i] : i \geq 2k - 1\} \text{ dır.}$$

Bu durumda $\tilde{I}$ = $L(\mathcal{I}) \oplus$ Id($\mathcal{J}$)'dir. Şimdi (6.6)'daki, $L(\mathcal{I})$'ya ait olan e_1,…..,e_l elemanlarını dikkate alacağız. O zaman $r \in \mathcal{S}_m$ olmak üzere $(s_k \circ r)''$ elemanları da $L(\mathcal{I})$'ya aittir. Diğer taraftan, $t_k \circ r$ ($r \in \mathcal{P}_m$) ve $(s_k \circ r)'$ ($r \in \mathcal{S}_m$) elemanları Id($\mathcal{J}$)'ye aittir. Bu sayede bu elemanlar sadece lineer bağımsız değil ayrıca

mod $L(\mathcal{I})$'ya göre lineer bağımsızdırlar. (6.7) kümesi, $(s_k \circ r)'$ elemanları ile $s_k \circ r$ elemanları değiştirildiği taktirde yine lineer bağımsız kalır. Bu da (6.5)'i ispatlar ve sonuç olarak önerme ispatlanır.

Önceki bölümde olduğu gibi herhangi $(s , t) \in L \times L$ için

$$\prod_{(s,t)} : L[x, y] \to L ,$$

her $d \in \mathcal{A}$ için $d \to d$ ve $x \to s$, $y \to t$ evaluation homomorfizmi tanımlansın. Aşağıdaki önermedeki s_k ve t_k elemanları Teorem4.3 'de tanımlandığı gibidir.

Önerme6.4: Herhangi $g \in L(x , y)\backslash J$ için eğer $g \in I$ ise pozitif bir k tamsayısı vardır öyle ki $\prod_{(s_k,t_k)}(g) \neq 0$ 'dır ve eğer $g \notin$ I ise $\prod_{(0,0)}(g) \neq 0$ 'dır.

İspat: $g \in I / J$ olsun. Negatif olmayan bir l tamsayısı vardır öyle ki g, I / J'nin $m \leq l$ olmak üzere (6.3) elemanları tarafından serbest üretilen D altcebirine aittir. $\prod_{(s_k,t_k)}$ bu elemanlardan

$$s_k, t_k, [s_k, b, d_1, ..., d_m], [t_k, d_o, d_1, ..., d_m] \quad (d_i \in \{a, b\},\ 0 \leq m \leq l) \qquad (6.8)$$

elemanlarının kümesi üzerine bir dönüşüm tanımlar. Bu küme $\mathcal{D}_{l,k}$ ile tanımlansın. Eğer k yeterince büyük ise, bu elemanların L'de ürettikleri alt cebirler için serbest üreteçler olduğunu iddia ediyoruz. Önerme3.3 den dolayı, $\mathcal{D}_{l,k}$' nın herhangi bir elemanının geriye kalan elemanlar tarafından üretilen alt cebire ait olmadığı gösterilirse iddia ispatlanmış olur. Fakat bu büyük k'lar içindir, çünkü Önerme6.3'den $\mathcal{D}_{l,k}$'nın elemanları lineer bağımsızdır ve dereceleri $2k + 1$ (s_k ve t_k 'nın derecesi) ile $2k + l + 2$ ($m = l$ için (6.8) elemanlarının derecesi) aralığındadır. $\prod_{(s_k,t_k)}$ 'nın D'ye kısıtlanmışı olan fonksiyon bu sınırlamadan dolayı bire-birdir ve dolayısıyla $\prod_{(s_k,t_k)}(g) \neq 0$ 'dır. önermenin ikinci kısmı ise açıktır.

Aşağıdaki teorem Önerme6.4 ve Önerme6.1'in sonucudur.

Teorem6.1: *V*, $L = L[a , b , c , \ldots\ldots]$ serbest Lie cebiri üzerindeki (5.1) denkleminin çözüm uzayı olsun. $L[x , y]$ de $a , b , c, \ldots\ldots, x , y$ serbest üreteçleriyle serbest Lie cebiri olsun. O zaman,

i) *V*'nin radikali, $[x,a]+[y,b]$ tarafından üretilen $L[x , y]$'deki $\mathrm{Id}([x,a]+[y,b])$ idealidir,

$$\mathrm{Rad}(V) = \mathrm{Id}([x,a]+[y,b])$$

ii) *V*'nin koordinat cebiri,

$$\Gamma(V) = L \oplus Id(x,y) / Id([x,a]+[y,b])$$

yarıdirekt toplamına eşittir. Buradaki $Id(x,y) / Id([x,a]+[y,b])$ ideali sonsuz ranklı bir serbest Lie cebiridir.

İspat: Önerme6.4 ve Önerme6.1, (i)'yi sağlar ve (ii) de Sonuç6.2 den çıkar.

6.3. $[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4]$ Denklemi:

Önceki bölümde x_1, x_2, x_3 , x_4 bilinmeyenler olmak üzere

$$[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4] = 0 \qquad (6.9)$$

bilineer denklemi için bazı sonuçlar vardı. Yani, $\mathcal{X} = \{ x_1, x_2, x_3 , x_4 \}$ olsun ve $L[\mathcal{X}] = L(\mathcal{A} \cup \mathcal{X})$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{X}$ üzerindeki serbest Lie cebiriolsun. $L[x_2 , x_4]$ ile, $\mathcal{A} \cup \{x_2 , x_4\}$ tarafından üretilen altcebirini ve $L[\mathcal{X}]$'deki $[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4]$ tarafından üretilen $J = \mathrm{Id}([x_1 , x_2] + [x_3 , x_4])$ idealini göz önüne alalım. Ayrıca s_k' , t_k' elemanları Teorem4.3'deki gibi tanımlı olan s_k ve t_k elemanlarından *a* ve *b*'nin sırasıyla x_2 , x_4 ile değiştirilmesiyle elde edilen, x_2 , x_4 üzerindeki serbest Lie cebirinin elemanları olarak tanımlansın. O zaman Önerme6.4'den, herhangi bir $g \in L[\mathcal{X}] \setminus J$ için bir *k* vardır öyle ki

$$\varphi_k : L[\mathcal{X}] \to L[x_2 , x_4]$$

her $d \in \mathcal{A}$ için $d \to d$, $x_2 \to x_2$, $x_4 \to x_4$, $x_1 \to s_k'$, $x_3 \to t_k'$

homomorfizmi, g'yi $L[x_2 , x_4]$'deki sıfırdan farklı bir elemana götürür. Bu durumda $\Psi : L[x_2 , x_4] \to L$ olan ve her d$\in \mathcal{A}$ için $\Psi(d) = d$ ve $\Psi\varphi_k(g) \neq 0$ olarak tanımlanan bir homomorfizm vardır. $\Psi\varphi_k$ bileşkesi, $\prod_p : L[X] \to L$ olan $p = (\Psi(s_k^{'}) , \Psi(x_2) , \Psi(t_k^{'}) , \Psi(x_4)) \in L^4$ 'yi sağlayan evaluation homomorfizmi olarak yorumlanabilir. Böylece *p* elemanı, (6.9) denkleminin çözüm kümesine aittir. O zaman Önerme6.1 aşağıdaki teoremi ifade eder :

Teorem6.2: *U*, serbest Lie cebiri olan *L* üzerindeki (6.9) denkleminin çözüm kümesi olsun. O zaman

i) *U*'nun radikali, $L[X]$'deki $[x_1 , x_2] + [x_3 , x_4]$ tarafından üretilen idealdir.

$\mathrm{Rad}(U) = \mathrm{Id}([x_1 , x_2] + [x_3 , x_4])$ dir

ii) *U*'nun koordinat cebiri ise, $\Gamma(U) = \mathrm{L}[X] / \mathrm{Id}([x_1 , x_2] + [x_3 , x_4])$ dir

7.*L*[*a*,*b*,*c*,…….]'DEKİ [*x* , *u*] + [*y* , *v*] = 0 DENKLEMİ

Bu son bölümde, *u* ve *v*, *L* = *L*(a, b, c,……)'deki (homojen olması zorunlu olmayan) lineer bağımsız elemanlar olmak üzere

$$[x , u] + [y , v] = 0 \qquad (7.1)$$

denklemi için 4. ve 5. Bölümün sonuçlarına başvuracağız. $B = L(u , v)$, *L*'de *u* ve *v* tarafından üretilen altcebir olsun. O zaman *B*, $\{u , v\}$ serbest üreteç kümesi ile 2 ranklı serbest Lie cebiri olur. $s, t \in B$ iken (s , t), (7.1) denkleminin bir çözümü oluyorsa bu çözüme bir *iç çözüm* denir. Çözümler konusuna 4. bölümde değinilmişti. Bütün iç çözümlerin oluşturduğu kümeyi V_{in} ile gösterirsek V_{in} kümesi, bütün çözümlerin uzayı olan *V*'nin bir alt uzayı olacaktır. Bu durumda Teorem5.1'den, *u* ve $v \in L$ elemanları *L*'nin serbest üreteçleri iken (7.1)'in bütün çözümleri iç çözüm olacaktır. Fakat genel olarak, $V \neq V_{in}$'dir. Örneğin, $[x, [b , a , b]] + [y , [b , a , a]] = 0$

denklemi $(a , -b)$ çözümüne sahiptir, fakat bu çözüm yine bir iç çözüm değildir.

Teorem7.1: $u , v \in L$ elemanları, *L*'de lineer bağımsız olsun. O zaman, *L* serbest Lie cebiri üzerindeki (7.1) denkleminin iç çözümlerinin V_{in} uzayı, bütün çözümlerin uzayı olan *V*'de sonlu koboyutludur.

İspat: Önerme3.4'den *L*'nin sonlu boyutlu bir *C* alt cebiri vardır öyle ki, *B*, *C*'nin serbest çarpanıdır. Diğer bir deyişle, *C*, *u* ve *v*'yi içeren bir serbest üreteç kümesi üzerinde *L*'nin bir (serbest) alt cebiridir: $C = L(u , v ,….)$. *W*, *C*'nin *L*'deki bir vektör uzayı tamamlayanı olsun. Bu sayede $L = C \oplus W$ ve $\dim W < \infty$ olur. (s , t), (7.1)'in bir çözümü olsun. $s_1 , t_1 \in C$ ve $s_2 , t_2 \in W$ olmak üzere $s = s_1 + s_2$ ve $t = t_1 + t_2$ olsun. O zaman $[s_1,u]+[t_1,v]=-[s_2,u]-[t_2,v]\in[W,u]+[W,v]$ dir. Diğer bir deyişle, $g, h \in C$ olmak üzere $\theta : C x C \to L$, $(g , h) \to [g , u] + [h , v]$ olarak tanımlanan k-lineer dönüşümü, (s_1 , t_1)'i $Z = \mathrm{Im}\theta \cap ([W,u]+[W,u])$ üzerine tanımlar. *Z*'nin sonlu boyutlu olduğunu görebiliriz. Gerçekten de, W sonlu boyutlu olduğundan $[W , u] + [W , v]$ de sonlu boyutludur ve *Z*, ikincisinde bulunur.

Z, sonlu boyutlu olduğundan, C x C'nin $\theta(D) = Z$ olacak şekilde sonlu boyutlu bir D alt uzayı vardır.O zaman C x C'deki Z'nin tamamının θ altındaki ters görüntüsü D + Kerθ'dir. Kerθ, C üzerindeki (7.1)'in çözüm uzayına eşittir ve bu uzay Teorem5.1'den $B = L(u , v)$ üzerindeki (7.1)'in çözüm uzayı ile aynı olacağından, Kerθ = V_{in} elde edilir. Dolayısıyla $(s_1 , t_1) \in D + V_{in}$ olur. Böylece $(s , t) \in D + W$ x $W + V_{in}$ olup (7.1)'in tüm çözümlerinin uzayı olan V, $D + W$ x $W + V_{in}$ 'de bulunur. D ile W x W 'nun ikisi de sonlu boyutlu olduğundan V_{in} uzayı V'de sonlu koboyutlu olarak elde edilecektir.

KAYNAKLAR

BAUMSLAG, G., MYASNIKOV, A., REMESLENNIKOV, V. (1999) Algebric geometry over groups. I. Algebric sets and ideal theory. J. Algebra 219, no. 1, 16-79.

BOURBAKI, N. (1987) Lie groups and Lie algebras, Part I:Chapter 1-3 (Hermann, Paris).

DANIYAROVA, E. YU. (2004) Elements of algebric geometry over Lie algebras (Russian), Prepirint no. 131, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of Mathematics, Novosibirsk.

DANIYAROVA, E. YU., REMESLENNIKOV, V. N. (2005) Bounded algebric geometry over the free Lie algebra (Russian), Algebra Logika 44, 269-304, 383. English translation in Algebra Logic 44, 148-167.

DANIYAROVA, E. YU., KAZACHKOV, I. V., REMESLENNIKOV, V. N. (2003) Algebric geometry over the freemetabelian Lie algebra. I. U-algebras and universal classes (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 9, 37-63.

DANIYAROVA, E. YU., KAZACHKOV, I. V., REMESLENNIKOV, V. N. (2003) Algebric geometry over the freemetabelian Lie algebra. II. The finite field case (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 9, 65-87.

KUKIN, G.P.(1972) The subalgebras of a free Lie p-algebras. Algebra Logika, 11(5) : 535-550.P

KUROSH, A. G. (1947) Nonassociative free algebras and free product of algebras. Math. Sb. 20(2) : 239- 262.

MAGNUS, W., KARRASS, A., SOLITAR, D. (1966) Combinatorial group theory, Interscience Publishers (John Wiley ve Sons, Inc.), New York-London-Sidney.

MYASNIKOV, A., REMESLENNIKOV, V. (2000) Algebric geometry over groups. II. Logical foundations. J. Algebra 234, no.1, 225-276.

REUTENAUER, C.(1993) Free Lie algebras (Poincare-Birkhoff-Witt Theorem)

REMESLENNIKOV, V., STÖHR, R. (2007), The Equation $[x, u]+[y,v] = 0$ in Free Lie Algebras, Internat J. Algebra Comp. 17, no.5/6, 1165-1187.

ROSSET, S., WASSERMAN, A.(1997) The Schreier technique for subalgebras of a free Lie algebra, Can. J. Math. 49, 600-616.

SHİRSHOV, A. I. (1953) Subalgebras of free Lie algebras (Russian), Mat. Sbornik N. S. 33, 441-452.

WALDINGER, H. V. (1961) A natural linear ordering of basic commutators. Proc. Amer. Math. Soc. 12, 140-147.

WITT, E. (1956) Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Math. Zh. 64(2) : 195-216

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi. 2006 yılında lisans eğitimini tamamlayıp aynı yıl yüksek lisansa başladı ve halen eğitimine devam etmekte.