ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Saycan SOYER

SCHREIER VE NIELSEN SINIFLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA,2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHREIER VE NIELSEN SINIFLARI

Saycan SOYER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez …/…/2006 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza:……	İmza:……	İmza:……
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN	Prof.Dr. Naime EKİCİ	Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin,çizelge,şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHREIER VE NIELSEN SINIFLARI

Saycan SOYER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
Yılı : 2006 , Sayfa : 36
Jüri : Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL

Serbest cebirlerin her alt cebirinin de yine serbest olduğu cebirsel sistemlerin bir $\mathcal{G}$ - sınıfına '' Schreier sınıfı '' denir. Eğer $g_1,...,g_n$ bir F serbest cebirinin G alt cebirini üretiyorsa bu alt cebirin serbest üreteç kümesini bulmak için etkin bir yol vardır.

Bir $\mathcal{G}$ - sınıfında serbest $\mathcal{G}$- cebirlerin sonlu üretilmiş homojen alt cebirlerinin de serbest $\mathcal{G}$- cebirler olduğu gösterilerek serbest $\mathcal{G}$- cebirlerin tüm alt cebirlerinin de serbest olduğu elde edilmiştir.Sonuç olarak sonsuz bir cisim üzerinde lineer cebirlerin bir sınıfının Schreier olması için gerek ve yeter koşulun onun Nielsen sınıfı olmasıdır önermesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Schreier sınıfı, Nielsen sınıfı, Serbest Lie cebirleri, homojen alt cebirler.

ABSTRACT

MSc THESIS

SCHREIER AND NIELSEN VARIETIES

Saycan SOYER

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Asist. Prof.Dr. Ela AYDIN
Years : 2006 , Pages : 36
Jury : Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL

A variety $\mathcal{G}$ of algebraic systems in which the subalgebras of free algebras are again free is called a Schreier variety. If $g_1,...,g_n$ generate a subalgebra G of the free $\mathcal{G}$- algebra F, then there is an effective procedure for obtaining a free set of generators for G.

It is proved that every finitely generated homogeneous subalgebras of free $\mathcal{G}$- algebras are free $\mathcal{G}$- algebras.Consequently it is obtained that every subalgebras of free $\mathcal{G}$- algebras are again free. We've investigated that a variety of linear algebras over an infinite field is a Schreier variety if and only if it is a Nielsen variety.

Key Words : Schreier variety, Nielsen variety, free Lie algebras, homogeneous subalgebras.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan , bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygı değer danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca değerli hocam Prof.Dr. Naime EKİCİ 'ye ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim. Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ…… I
ABSTRACT…….II
TEŞEKKÜR……III
1. GİRİŞ……1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER……3
2.1. Temel Bilgiler……3
2.2. Lie Cebirlerinin Homomorfizm ve İzomorfizmleri……...5
2.3. Serbest Lie Cebirleri……..6
2.4. Evrensen Enveloping Cebir…….13
2.5. Serbest Lie Cebirlerinin Otomorfizmleri…….14
3. LİNEER CEBİRLERDE SCHREIER SINIFI……16
3.1. Notasyonlar ve Temel Sonuçlar……...16
3.2. Schreier Sınıfları Nielsen Sınıflarıdır……..20
3.3. Nielsen Sınıfı Schreier Sınıfıdır……...27
KAYNAKLAR……...34
ÖZGEÇMİŞ……36

1.Giriş

K , bir cisim ve $\mathfrak{I}$ de K üzerindeki cebirlerin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathfrak{I}$ sınıfındaki her alt cebir yine bir serbest cebir oluyorsa $\mathfrak{I}$ ye *Schreier sınıfı* denilir. Grupların sınıfları , abelyen gruplar , vektör uzayları , lineer cebirler , Lie cebirler , değişmeli ve değişmeli olmayan cebirler Schreier sınıflarıdır. Eğer $g_1,...,g_n$ ler bir F serbest cebirinin G alt cebirini üretiyorsa bu alt cebirin serbest doğuray kümesini bulmak için etkin bir yol vardır.

J. Nielsen (Nielsen , 1924) ve O. Schreier (Schreier , 1927) bir serbest grubun herhangi bir alt grubunun da serbest olduğunu göstermiştir. Birleşmeli olmayan serbest cebirlerin alt cebirlerinin de serbest olduğu ise A.G. Kurosh (Kurosh , 1947) de vermiştir.

Lie cebirlerinde ise A.I. Shirshov (Shirshov , 1953) de Lie cebirleri sınıfının Schreier olduğunu göstermiştir. Bu sonuç aynı zamanda E. Witt (Witt , 1956) tarafından da elde edilmiştir. Ayrıca , Witt tüm Lie p – cebirleri sınıfının da Schreier olduğunu ispatlamıştır.

Yu.A. Bahturin (Bahturin , 1968 , 1973) ve M.V. Zaicev (Zaicev , 1980) Lie cebirlerinin Shreier sınıflarının tüm Lie cebirlerinin sınıfı olduğunu göstermiştir.

A.I. Shirshov (Shirshov , 1954) birleşmeli olmayan değişmeli veya değişmesiz serbest cebirlerin alt cebirlerinin de serbest olduğunu göstermiştir. Yani değişmeli veya değişmesiz cebirlerin sınıfının Schreier olduğunu elde etmiştir.

A.A. Mikhalev (Mikhalev , 1985) ve A.S. Shtern (Shtern , 1986) Lie süper cebirlerin sınıfının Schreier olduğunu vermişlerdir.

U.U. Umirbaev (Umirbaev , 1994 , 1996) cebirlerin Schreier sınıflarının yeni örneklerini elde etmiştir ve cebirlerin bir sınıfının Schreier olması için gerekli ve yeterli koşulları vermiştir.

Cebirlerin bir homojen sınıfı için Nielsen ve Schreier özelliklerinin denk olduğunu J. Lewin (Lewin , 1968) ispatlamıştır. Bu denkliği kullanarak sonlu ranklı serbest cebirlerin otomorfizm gruplarının elemanter otomorfizmler tarafından üretildiğini görebiliriz. Bu sonuç, serbest Lie cebirleri için P.M. Cohn (Cohn , 1964)

tarafından ve J. Lewin (Lewin , 1968) tarafından serbest birleşmesiz cebirler için elde edilmiştir.

2.1. Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1: F bir cisim A , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $m : A \times A \to A$ fonksiyonuna, her $a_i, b_i \in A$ ve $r \in F$ için ;

$$m(a_1 + a_2, b) = m(a_1, b) + m(a_2, b)$$
$$m(a, b_1 + b_2) = m(a, b_1) + m(a, b_2)$$
$$m(ra, b) = rm(a, b) = m(a, rb)$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyonla A ya bir *cebir* ve tanımdaki m bilineer dönüşümüne bir *çarpım* denir. Eğer A bir cebir ve $x, y \in A$ ise $m(x, y)$ yerine xy yazalım.

Tanım 2.1.2 : A bir cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için ;

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{(birleşme kuralı)}$$

ise A ya bir *birleşmeli cebir* denir.

Tanım 2.1.3 : L , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her (x , y) ikilisine [x , y] elemanını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir çarpım tanımlanmış olsun.

i) Her $x , y \in L$ için ,

$$[x, y] = -[y, x] \qquad \text{(Anti simetri özelliği)}$$

ii) Her $x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ için ,

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$
$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z] \qquad \text{(Bilineerlik Aksiyomu)}$$

iii) Her $x, y, z \in L$ için ,

$$[x,[y, z]] + [y,[z, x]] + [z,[x, y]] = 0 \qquad \text{(Jacobi Özdeşliği)}$$

Bu koşulları sağlayan $[x, y]$ çarpımına bir Lie çarpımı (komütatörü) ve L'ye de bu çarpımla birlikte bir *Lie cebiri* denir. Eğer L , vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise Lie cebiri olarak da sonlu boyutludur. Ayrıca Jacobi özdeşliğinden dolayı Lie cebirleri birleşmeli değildir. L Lie cebiri F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Lie cebirindeki alt cebir ve ideal tanımları ile benzerlik göstermektedir.

Örnek 2.1.4 : V , F cismi üzerinde n boyutlu vektör uzayı olsun.

$$EndV = \{ f \mid f : V \to V, f \text{ lineer dönüşümler } \}$$

olarak tanımlanan bilineer dönüşümlerin kümesi , F üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$EndV \times EndV \to EndV$$

$f, g \in EndV$ ve her $v \in V$ için $fg(v) = f(g(v))$ olarak tanımlanan bileşke işlemi ile $EndV$, birleşmeli bir cebir olur.

Tanım 2.1.5 : L , bir Lie cebiri ve B de L nin bir alt uzayı olsun. Eğer B , L deki Lie çarpımı altında kapalı ise B ye L nin bir *altcebiri* denir ve $B \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 : L , bir Lie cebiri ve I da L nin bir altcebiri olsun. Eğer $[I, L] \subseteq I$ koşulu sağlıyorsa I ya L nin bir *ideali* denir ve $I \lhd L$ gösterimi kullanılır.

Tanım 2.1.7 : L ve M aynı F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. $\alpha : L \to M$ fonksiyonu her $x, y \in L$ için ,

$$\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

eşitliğini sağlayan bir lineer fonksiyon ise α ' ya L ' den M ' ye bir *Lie homomorfizmi* denir. Eğer α , bire-bir ve örten bir dönüşüm ise α ' ya bir *izomorfizm* denir. Bu durumda , L ile M izomorfik cebirlerdir. $\alpha : L \to L$ bir izomorfizm ise α ' ya bir *otomorfizm* denir.

Tanım 2.1.8 : A , F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve B , A nın bir ideali olsun. A/B kümesi

$$A / B = \{a + B \mid a \in A\}$$

olsun. *A/B* de toplama ve çarpma aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$x+B \quad \text{ve} \quad y+B \in A/B$$

olmak üzere

$$(x+B)+(y+B)=(x+y)+B$$
$$[x+B,y+B]=[x,y]+B$$

A/B bu işlemle bir cebir olup bu cebire A nın B ile *bölüm cebiri* denir. B , A/B nin sıfır elemanıdır ve her $x \in A$ için $[x+B,x+B]=B$ dir.

Tanım 2.1.9 : L bir Lie cebiri ve $k \in IN$ için L^k , L nin bir alt uzayı olsun. $\{L^k : k \in IN\}$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa L ye IN tarafından *derecelendirilmiş Lie cebiri* denir.

i) $L = \oplus \{L^k : k \in IN\}$ dir.

ii) Her $n,m \in IN$ için $L^n L^m \subseteq L^{n+m}$ dir.

2.2. Lie Cebirlerinin Homomorfizm ve İzomorfizmleri

A ve B, F cismi üzerinde iki cebir olsun. Bir $\theta : A \to B$ lineer dönüşümü $\theta(xy)=\theta(x)\theta(y)$ yi her $x,y \in A$ için sağlıyorsa θ ya bir *cebir homomorfizmi* denir. A ve B Lie cebirleri ise homomorfizm olma şartı $\theta([x,y])=[\theta(x),\theta(y)]$ şeklindedir. Eğer Lie cebirlerinin bir homomorfizmi bire - bir ve örten ise *izomorfizm* olup iki cebir *izmorfiktir* denir ve $A \cong B$ ile gösterilir. Ayrıca

$\ker(\theta)=\{x \in A \mid \theta(x)=0\}$, θ nın çekirdeğidir.

$\mathrm{Im}(\theta)=\{\theta(x) \mid x \in A\}$, θ nın görüntüsüdür.

Lemma 2.2.1 : $\theta : L_1 \to L_2$ Lie cebirlerinin bir morfizmi olsun. O zaman $L_1/\ker(\theta) \cong \mathrm{Im}(\theta)$ dır.

İspat : $\ker(\theta)$ **,** L_1 in ideali ve $\mathrm{Im}(\theta)$ ise L_2 nin alt cebiridir.

$$\overline{\theta} : L_1 / \ker(\theta) \to \mathrm{Im}(\theta)$$
$$\overline{\theta}(x + \ker(\theta)) = \theta(x)$$

tanımlansın. Lie cebirlerinin morfizmi iyi tanımlıdır.

$$x + \ker(\theta) = y + \ker(\theta)$$

olsun. Buradan

$$x - y \in \ker(\theta)$$
$$\theta(x - y) = 0$$

θ morfizm olduğundan

$$\theta(x) - \theta(y) = 0$$
$$\theta(x) = \theta(y)$$

olur. Birebirdir.

$$\overline{\theta}(x + \ker(\theta)) = \overline{\theta}(y + \ker(\theta))$$
$$\theta(x) = \theta(y)$$
$$\theta(x) - \theta(y) = 0$$

θ morfizm olduğundan

$$\theta(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker(\theta).$$

θ aynı zaman da örtendir. Buradan $L_1 / \ker(\theta) \cong \mathrm{Im}(\theta)$ dır.

2.3. Serbest Lie Cebirleri

Serbest Lie cebiri tanımını vererek gruplar için Howson (Howson , 1962) tarafından ispatlanan ‘‘ serbest bir grubun her alt grubu da serbesttir. ’’ teoremini Lie cebirleri için söyleyelim :

Tanım 2.3.1 : $X \neq \varnothing$ bir küme , F bir cebir ve $i : X \to F$ bir dönüşüm olsun. Her B cebiri ve her $\alpha : X \to B$ dönüşümü için $\alpha = \psi \circ i$ olacak şekilde bir tek $\psi : F \to B$ cebir morfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde *serbest cebir* denir.

Tanım 2.3.2 : X boş olmayan bir küme , F bir Lie cebiri , $i : X \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her B Lie cebiri ve her $\alpha : X \to B$ dönüşümü için $\alpha : \beta \circ i$ olacak şekilde bir $\beta : F \to B$ Lie homomorfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde bir *serbest Lie cebiri* denir.

Bir X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebirini aşağıdaki gibi kurarız. Her n pozitif tam sayısı için X_n kümesini ,

$$X_1 = X, \quad X_2 = X \times X \ ,\ldots, \ X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p})$$

şeklinde tanımlayalım. $M(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ olsun. Her $a, b \in M(X)$ için $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a,b) \in (X_p \times X_q)$ olacak şekilde p ile q sayıları vardır. $n = p + q$ olsun. O zaman , $(a,b) \in (X_p \times X_{n-p})$ olur. (a,b) nin $X_p \times X_{n-p} \to X_n$ kanonik injeksiyonu altındaki görüntüsünü ab ile gösterelim. Böylece, her $a, b \in M(X)$ için (ab) çarpımını tanımlayabiliriz. $a \in X_p$ olacak şekildeki p pozitif tam sayısına *a ' nın uzunluğu* denir ve $l(a)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre uzunluğu 1 olan elemanlar X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar a ve b nin uzunluğu c den küçük olmak üzere $c = ab$ şeklindedir. Şimdi F cismi üzerinde $M(X)$ bazı ile bir vektör uzayı kuralım. $M(X)$ deki çarpımı bu vektör uzayının tümüne lineer olarak genişletelim. Böylece F üzerinde birleşmeli olmayan bir serbest cebir elde etmiş oluruz. Bu cebire $N(X)$ diyelim. $N(X)$ cebiri , $M(X)$ bazı ile birleşmeli olmayan çarpma işlemiyle birlikte bir F - modül olur. $N(X)$ içinde ,

$$Q(a) = aa \quad \text{ve} \quad J(a,b,c) = ((ab)c) + ((ca)b) + ((bc)a)$$

şeklindeki elemanlar tarafından doğrulan ideal A olsun. Bu durumda ,

$$N(X) / A = F(X) = \langle X \rangle$$

bölüm cebiri X üzerinde bir serbest Lie cebiridir. X kümesine, $F(X)$ in bir *serbest doğurucu kümesi* denir. F , X üzerinde bir serbest Lie cebiri ise bunu $F = \langle X \rangle$ ile göstereceğiz. F nin serbest doğurucu kümesinin eleman sayısına *F nin rankı* denir.

Şimdi serbest Lie cebirlerinde önemli bir yeri olan Hall bazının inşasını inceleyelim :

Hall Bazı

Daha önce tanımlanan $M(X)$ kümesi birleşmeli olmayan $N(X)$ cebirinin vektör uzayı olarak bazıdır. Fakat , $F(X) = N(X)/A$ olup $F(X)$ içinde $M(X)$ lineer bağımsız değildir. Çünkü , $a,b \in M(X)$ için (ab) ve (ba) şeklindeki elemanlar $N(X)$ içinde lineer bağımsız olmalarına rağmen $F(X)$ içinde lineer bağımlıdırlar. O halde , $M(X)$ kümesi $F(X)$ için bir baz olmaz.

Şimdi $F(X)$ kümesini bir vektör uzayı olarak düşünüp bir baz kümesi kuracağız. $M^n(X)$, $M(X)$ de n – uzunluklu elemanların meydana getirdiği kümedir. Burada $M^1(X) = X$ dir.

Tanım 2.3.3 : Bir $H \subseteq M(X)$ Hall kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i) X ve H ye keyfi bir tam sıralama verilmiştir.

ii) $H \cap M^2(X)$, $x, y \in X$ ve $x > y$ olacak şekildeki (xy) elemanlarını içerir.

iii) $H \cap M^m(x)$ tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun (m = 1,2,…,n-1) .

Yani ; $u, v \in M(X)$ ve $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ yazalım ve aynı uzunluklu elemanları keyfi olarak sıralayalım.

$n \geq 3$ için ;

$$H \cap M^n(X) = \left\{ (ab)c \mid a,b,c,ab \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (H \cup M^k(X)), 1 \leq k \leq n-1, a\rangle b \leq c, ab\rangle c \right\}$$

ve

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H \cap M^n(X))$$

olsun. Kısalık olması bakımından $H_n = H \cap M^n(X)$ yazarsak ,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

kümesi $F(X)$ in bir bazıdır. $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ kümelerine *Hall kümeleri* , $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ bazına da $F(X)$ in *Hall bazı* denir.

Örnek 2.3.4 : $X = \{a, b\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebirinin Hall bazını oluşturalım.

$a > b$ olsun

$H_1 = X = \{a, b\}$

$H_2 = \{(ab)\}$

$H_3 = \{((ab)b), ((ab)a)\}$

$\vdots$

Tanım 2.3.5 : $X = \{x_1, ..., x_n\}$ olsun. X üzerindeki Hall bazını H ile gösterelim. Bir $u \in L$ için $a, b, c \in H$ olmak üzere eğer $u = [[ab]c]$ şeklinde ise u ya bir *X-monomial* denir.

İspatını (Bourbaki , 1975) de bulabileceğimiz yukarıdaki teorem serbest Lie cebirlerinin bazının belirlenmesi açısından önemlidir.

Teorem 2.3.6 : L bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. X üzerine kurulan Hall kümesi , L nin bir bazıdır.

L , $X = \{x_1, ..., x_n\}$ üzerinde serbest Lie cebiri ise X kümesinin elemanlarına uzunluğu 1 olan elemanlar diyeceğiz. Hall bazına ait bir kelimenin yazılışında

bulunan ve X kümesinden gelen harflerin sayısına o kelimenin X – *uzunluğu* denir. Bunu bir u elemanı için $X - l(u)$ yazarak belirteceğiz. Bir $f \in L$ elemanı $h_1,...,h_k$ Hall bazının elemanları olmak üzere ,

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i \quad (\alpha_i \in F)$$

olarak tek türlü yazılabilir. f nin bu yazılışındaki en büyük X – uzunluklu parçasını $ld(f)$ ile göstereceğiz. $ld(f)$ nin uzunluğuna f *nin derecesi* denir ve deg (f) ile gösterilir.

Serbest Lie cebirlerindeki temel teoremlerden biri de A.L. Shirsov (Shirshov , 1958) tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.3.7 : Bir serbest Lie cebirinin her alt cebiri de serbesttir.

Tanım 2.3.8 : F , X üzerinde serbest Lie cebiri olsun. X kümesine lineer bir sıralama vermiş olalım. X in elemanlarını uzunluğu 1 olan regüler kelimeler olarak isimlendirelim. Uzunluğu n den küçük olan kelimeleri sıralamış olduğumuzu kabul edelim. O zaman , X – uzunluğu n olan bir $w = uv$ kelimesine aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir *regüler kelime* denir.

i) u ve v regüler kelimelerdir,

ii) $u > v$,

iii) $u = u_1 u_2$ ise $u_2 \le v$ dir.

X kümesindeki elemanların Lie çarpımlarından oluşan bir kelimeye *monomial* denir. Monomiallerin herhangi bir lineer kombinasyonuna da bir *Lie polinomu* diyeceğiz. O halde , bir regüler kelime bir monomialdir. Bir Lie polinomun da her bir terim aynı dereceye sahip ise bu polinoma *homojen polinom* denir.

Tanım 2.3.9 : $Y \subset L$ olsun. Her $y \in Y$ için y° elemanı $\{u^\circ \mid u \in Y - \{y\}\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire ait değilse Y kümesine *indirgenmiş küme* denir.

Tanım 2.3.10 : A , F cismi üzerinde serbest birleşmeli cebir ve X , A nın sonlu bir alt kümesi olsun. Aşağıda X e uygulanan dönüşümlerin her birine *elemanter dönüşüm* denilir.

i) Singüler olmayan bir lineer dönüşümü X in elemanlarına uygulamak.

ii) Bir $x \in X$ elemanını $x + f(x_1,...,x_m)$ ile değiştirmek. (Burada $x_1,...,x_m \in X - \{x\}$)

Aşağıdaki teorem G.P. Kukin (Kukin , 1972) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.11 : Bir serbest Lie cebirinin her B alt cebiri indirgenmiş bir doğurucu kümeye sahiptir.

İspat : İspat (Kurosh , 1947) de yapılmıştır.

$M_0 = \varnothing$ diyelim ve $M_1,...,M_i$ kümelerinin tanımlandığını varsayalım.

$E_i = \bigcup_{j=1}^{i} M_j$, T_i de B alt cebirinin derecesi $\leq i+1$ olan elemanlarının vektör uzayı ve $T_i' = Sp(T_i \cap E_i)$ olsun. T_i uzayında , modülo T_i' maksimal lineer bağımsız M_{i+1} kümesini seçelim. Eğer $T_i = T_i'$ ise $M_{i+1} = \varnothing$ dır. $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ kümesi indirgenmiş olup B alt cebirini doğurur.

Teorem 2.3.12 : (E. Witt , 1956) Bir serbest Lie cebirinin indirgenmiş bir M alt kümesi , bağımsızdır.

İspat : L , $X = \{x_1,...,x_n\}$ tarafından doğurulan serbest bir Lie cebiri ve $M \subset L$ olsun. $M = \{f_1,...,f_m\}$ kümesinin sonlu olduğunu ve boş olmadığını varsayacağız. M nin bağımsız olmadığını kabul edelim.

$\varphi(y_1,...,y_m)$, X kümesinin bağımsız elemanlarının bir Lie polinomu ve $\varphi(f_1,...,f_m)=0$ olsun. f_i elemanları arasındaki sıfırdan farklı bir bağıntı $ld(f_i)$ elemanları arasındaki bir bağıntıyı gerektirir. O halde , M nin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $M'=\{ld(f)\mid f\in M\}$ kümesinin bağımsız olmasıdır. Böylece M nin homojen elemanlardan oluştuğunu varsayabiliriz. M de derecesi 1 olan elemanlar $f_1,...,f_k$ olsun. İndirgenmiş bir küme elemanter dönüşümler yardımıyla yine indirgenmiş bir kümeye dönüştüğünden $f_1,...,f_k$ elemanlarını X kümesinin elemanları olarak düşünebiliriz. $M\subseteq X$ ise M nin bağımsızlığı açıktır. $M\not\subset X$ ve $x_n\notin M$ olsun. $\{x_1,...,x_{n-1}\}$ tarafından doğurulan I idealini düşünelim. $R=\{x_\alpha x_n^k\mid 1\le\alpha\le n, k=0,1,2,...\}$ kümesi , I idealinin bağımsız serbest doğurucu kümesidir (Kukin , 1972). M_1 , R kümesine göre indirgenmiş bağımsız bir küme olsun. Elemanter dönüşümler vasıtasıyla M den M_1 kümesine geçiş yapılabilir. Bu durumda, M kümesi de bağımsız olur.

Tanım 2.3.13 : Bir G kümesi B üzerinde grupoittir öyle ki α,β G den B ye tanımlı birer fonksiyon ve özel olarak $(g,h)\to GH$ ikili işlem tanımlanmış olsun. Aşağıdaki dört şartla birlikte G ye B üzerinden bir *grupoid* denir.

1. $\alpha(g\,h)=\alpha$ g , $\beta(g\,h)=\beta$ h durumlarında ve her ne zaman $\beta\,g=\alpha\,h$ olursa $g\,h$ tanımlıdır.
2. Asosyatif özellik vardır yani ; $(g\,h)\,k=g\,(h\,k)$
3. Her $g\in G$ için sol ve sağ birim eleman vardır. σ_g sol birim eleman , δ_g sağ birim eleman olmak üzere $\sigma_g\,g=g=g\,\delta_g$
4. Her $g\in G$ için ters eleman olan g^{-1} vardır öyle ki $g^{-1}g=\sigma_g$, $gg^{-1}=\delta_g$

Ayrıca , bir X kümesi tarafından serbestçe üretilen grupoide ise *serbest grupoid* denir.

2.4. Evrensel Enveloping Cebir

Tanım 2.4.1 : L bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı ve birleşmeli $U(L)$ cebirine L nin *evrensel enveloping cebiri* denir.

1. L den $[U(L)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\varepsilon : L \to [U(L)]$ homomorfizmi vardır.
2. K cismi üzerindeki birim elemanlı her B birleşmeli cebiri ve her $\varphi : L \to [B]$ homomorfizmi için $\psi \varepsilon = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\psi : [U(L)] \to B$ homomorfizmi vardır.

Bir Lie cebirinin evrensel enveloping cebirinin bazını belirleyen aşağıdaki teorem Poincaré – Birkhoff – Witt Teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.4.2 : L , K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $U(L)$, L nin evrensel enveloping cebiri olsun. Eğer L bir serbest F-modül ve E , L nin iyi sıralı bir bazı ise o zaman $\varepsilon : L \to U(L)$ kanonik dönüşümü injektif olup $U(L)$, 1 ve

$$e_1 e_2 \ldots e_n \quad , \quad e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_n \quad , \quad n \geq 1$$

formundaki monomialler tarafından üretilen bir serbest K – modüldür.

Teorem 2.4.3 : L bir Lie cebiri, $U(L)$ L nin evrensel enveloping cebiri ve $v_1, v_2, \ldots v_m, v \in L$ olsun. v nin $U(L)$ de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tarafından üretilen ideale ait olduğunu varsayalım. O zaman v ; $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tarafından üretilen Lie alt cebirine aittir.

2.5. Serbest Lie Cebirlerinin Otomorfizmleri

L , F cisminde X üzerinde serbest Lie cebiri olsun. L nin bir α otomorfizmi X kümesini L nin diğer bir $\alpha(x)$ serbest üreteç kümesine dönüştürür. α otomorfizmi X üzerindeki etkisiyle tam olarak bellidir. L nin herhangi iki üreteç kümesi arasında daima bir otomorfizm vardır. L nin serbest üreteç kümesine elemanter Lie dönüşümü uygulandığında bir otomorfizm tanımlanır.

Teorem 2.5.1 : L , F cisminde sonlu bir X serbest üreteç kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. L nin her otomorfizmi , X e art arda elemanter Lie dönüşümü uygulanmasıyla elde edilir.

İspat. L yi A nın içinde , X üzerinde serbest birleşmeli cebir olarak alabiliriz. α , L nin otomorfizmi ve $Y = \alpha(x)$ olsun. Y de L nin serbest üreteç kümesidir. Böylece , $A = \langle Y \rangle$ dir. Y ye elemanter Lie dönüşümü uygulandığında buna denk bir Z kümesi elde ederiz. Bu küme indirgenemez kümedir. Böylece her elemanter Lie dönüşümü bir otomorfizm tanımlar. $\beta : X \to Z$ otomorfizmini alalım. β yı elemanter Lie dönüşümünün toplamı olarak ispatlarsak sonuca ilerleriz. Aslında β nın bir lineer dönüşüm olduğunu göstermeliyiz.

Verilen $z \in Z$ nin leading formunu z^* ile gösteririz. Z^* bütün bu leading formların bir kümesi olsun. Böylece Z^* da indirgenemez. $B = \langle Z^* \rangle$, A nın serbest alt cebiridir. Yani Z^* tarafından üretilmiş birleşmeli evrensel enveloping Lie cebiridir. Böylece Z^* , B – bağımsız ve serbesttir.

$X = \{x_1,...,x_k\}$, $Z = \{z_1,...,z_k\}$ olsun. $\beta : X \to Z$ otomorfizmi var olduğundan ,

(*) $x_i = f_i(z_1,...,z_k)$, (i = 1,…,k)

ifadesini elde ederiz.

Elemanter dönüşüm ile her bir f_i nin sıfır sabit terime sahip olduğunu varsayabiliriz. Bazı i ler için f_i , $z_1,...,z_k$ kümesinde lineer değilse en yüksek X – dereceli terimlerin eşitliğinden z nin leading formları arasında trivial olmayan bir polinom bağıntı elde ederiz. Bu ise Z^* ın serbest olmasıyla çelişir. Böylece ($*$) lineerdir. Bundan dolayı $\beta : X \to Z$ da lineerdir. Ve böylece elemanter Lie dönüşümüyle X den Y ye geçiş elde ederiz.

Sonuç. L , { x , y } üreteçleriyle bir serbest Lie cebir olsun. L nin otomorfizmleri , lineer dönüşümlerdir. Yani , $\varphi : L \to L$ otomorfizmi,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha x + \beta y \\ \varphi(y) &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K \quad \text{ve} \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$$

şeklindedir.

Teorem 2.5.2 : L , X üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer Y , L nin bir üreteç kümesi ise Y , L nin bir üreteç kümesine denktir.

Bu teoremin ispatı (P.M. Cohn , 1964) de bulunabilir. Teoremdeki denkliğin anlamı; Y nin elemanter dönüşümler ile bir serbest üreteç kümesinden elde edilebilir olmasıdır. Bu teoremin bir sonucu olarak ; L nin bir Y serbest üreteç kümesinin X kümesine denk olduğu söylenilebilir.

3. LİNEER CEBİRLERDE SCHREIER SINIFI

3.1. Notasyonlar ve temel sonuçlar.

Tanım 3.1.1 : Sonsuz ϕ cismi üzerinde tüm cebirler asosyatif lineer cebir olmak zorunda değildir. Bir A cebirinin alt kümesi S ise, $< S >$ (S tarafından üretilmiş A nın alt uzayı), Alg (S) (S tarafından üretilmiş A nın alt cebiri), Id (S) (S tarafından üretilmiş A nın ideali) olarak gösterilir.

X bir küme olsun. X tarafından üretilen serbest cebiri $F = F(X)$ ile gösteririz. $M = M(X)$, X üzerinde bir serbest grupoid ise $M \cup \{ 1 \}$, F nin bir ϕ - bazıdır. F deki çarpım $M \cup \{ 1 \}$ deki çarpımın bir lineer genişlemesidir. $M \cup \{1\}$ nin bir elemanı F ' de monomialdir. Bir monomialin derecesini $d(m)$ ile göstereceğiz. Ayrıca $x \in X$ için $d(1) = 0$, $d(x) = 1$ olarak kabul edilecektir. $x \in X$ ve $m \in M$ için ,

$$d(xm) = d(mx) = d(m) + d(x) = d(m) + 1$$

dir. Derecesi k olan monomialler tarafından üretilmiş F nin alt uzayı H^k olsun. F , H^i tarafından derecelendirilmiş olup ,

$$F = \oplus H^i \quad \text{ve} \quad H^i H^j \subset H^{i+j}$$

dir.

N , F nin homojen elemanlarının bir kümesi tarafından üretilen bir ideali ve $\eta : F \to F / N = A$ doğal epimorfizmini ele alalım. $\eta(H^i)$ nin derecesi A dır. F de monomial m ise $\eta(m)$ de monomialdir. A için monomiallerden oluşan bir B bazını seçelim. $w \neq 0$, $w \in A$ ise

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i , \ \alpha_i \neq 0, \ m_i \in B, \ m_i = m_j \Leftrightarrow i = j$$

Ayrıca $\eta(H^i)$ lerin görüntüsü, direkt toplamları ürettiği için $h_{k_l} \neq 0$, $h_k \in H^{k^i}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_l$ olmak üzere,

$$w = \sum_{i=1}^{l} h_{k_i}$$

olarak da tek türlü yazılabilir. Eğer *w* nun derecesi 1 ise homojendir. *w* nun derecesi $d(w) = k_l$ ile ve indeksini de $i(w) = k_1$ ile gösterelim. Eğer h_1 ve h_2 homojen elemanlar ve $h_1 h_2 \neq 0$ ise

$$d(h_1 h_2) = d(h_1) + d(h_2)$$

dir. w_1 ve w_2 *A* nın farklı elemanları ise,

$$d(w_1 - w_2) \leq \max(d(w_1), d(w_2)) \quad \text{ve} \quad i(w_1 - w_2) \geq \min(i(w_1), i(w_2))$$

dir.

A nın sonlu bir alt kümesi *S* ise *A* nın derecesi, *S* nin sıfır olmayan elemanlarının derecelerinin toplamıdır.

Önerme 3.1.2 : *A* , yukarıdaki gibi tanımlı sonlu üretilmiş derecelendirilmiş bir cebir olsun. Eğer $\theta : A \to A$ örten endomorfizm ise θ, otomorfizmdir.

İspat. Varsayalım ki $d(w) = d$, $w \in \text{Ker}\,\theta$ ve $K = \sum_{i=d+1}^{\infty} \eta(H^i)$ olsun. Bu durumda K , A nın bir ideali ve $w \notin K$ dır. Böylece θ , $\theta(K) \subset K$ olduğundan $A/K \to A/K$ olan örten $\bar{\theta}$ endomorfizmini gerektirir. Böylece $\bar{\theta}$, bir otomorfizmdir. Bununla birlikte,

$$\bar{\theta}(w + K) = \theta(w) + K = K$$

olup $w \in K$ dır. Bu ise $w \notin K$ ile çelişir.

Tanım 3.1.3 : X sayılabilir sonsuz bir küme, V de $F(X)$ in bir alt kümesi olsun. A, bir cebir iken $v(a_1,...,a_k)$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen ideali $\vartheta(A)$ olarak tanımlayalım . Burada $v(x_1,...,x_k) \in V$, $x_i \in X$ ve $a_i \in A$ dır. ϑ sınıfı, $\vartheta(A) = 0$ olacak şekildeki A cebirlerinin sınıfıdır.Y, kardinalitesi c olan bir küme olsun.

$$F(\vartheta, Y) = F(Y)/\vartheta(F(Y))$$

cebirine, Y tarafından serbestçe üretilen ve rankı c olan *serbest* ϑ *- cebiri* denir. ϑ de bir cebirin altkümesi olan S serbest bir ϑ - cebiri üretiyorsa S ye *serbest* ϑ *- altcebirdir* denir.

Böylece $(s_1,...,s_k) \in S$ olmak üzere $u(s_1,...,s_k) = 0$ olduğundan $u(x_1,...,x_k) \in \vartheta(F(X))$ ise S, bir serbest ϑ - altcebirdir.

Önerme 3.1.4 : Y, herhangi bir küme ve X, V nin bir alt kümesi ise $\vartheta(F(Y))$, homojen elemanlar tarafından üretilmiştir. ϑ serbest cebirlerin alt cebirleri de ϑ serbest ise bu cebir sınıfına *Schreier sınıfı* denir.

Tanım 3.1.5 : Bir serbest cebirin her alt cebiri de serbest ise bu cebir *Schreier sınıfındadır*.

Tanım 3.1.6 : $F(\vartheta,\{x_1,...,x_n\})$, bir ϑ sınıfında rankı n olan bir serbest cebir olsun. $\tau : (x_1,...,x_n) \to (y_1,...,y_n)$ dönüşümü, aşağıdakileri sağlaması halinde bir *elemanter dönüşüm* olarak adlandırılır.

i) τ , tersinir olmayan bir ϕ - lineer dönüşümüdür.

ii) $y_1 = x_1$, ..., $y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_n = x_n + w$, burada $w \in \mathrm{Alg}(x_1,...,x_{n-1})$ dir.

A , ϑ de herhangi bir cebir, A nın $n-$sıralı elemanları $(a_1,...,a_n)$ ve $\varphi(x_i) = a_i$ için $\varphi : F \to A$ bir homomorfizm olsun. $\varphi(y_i) = b_i$ için $\tau(a_1,...,a_n) = (b_1,...,b_n)$ olarak $\tau(a_1,...,a_n)$ yi tanımlarız.

ϑ, rankı sonlu olan bir F serbest cebirinin elemanları a_1 ,..., a_m olmak üzere bir Nielsen sınıfı ise *m*-inci dereceden elemanter dönüşümlerin öyle bir $\tau_1,\ldots,\tau_k$ dizisi vardır ki

$$(...((a_1,...,a_m)\,\tau_1)...)\tau_k = (b_1,...,b_m)$$

dir.

$b_1,...,b_m$ üzerindeki pozitif dereceli terimler F nin Alg($a_1,...,a_m$) alt cebirlerini serbestçe üretirler.

3.2. Schreier sınıfları Nielsen sınıflarıdır.

Tanım 3.2.1 : $F = F(\mathcal{9}, X)$, $\mathcal{9}$ sınıfında X tarafından üretilmiş sayılabilir rankı olan serbest $\mathcal{9}$-cebiri olsun. F nin bir R alt cebiri, homojen elemanlardan oluşan bir üreteç kümesine sahipse R ye *homojendir* denir. R nin homojen olması için gerek ve yeter koşul, w $\in R$ ve w nun homojen terimlerinin de R de olmasıdır. Örneğin; $X = \{ a , b \}$, $R = <X>$ olsun. $R = \{ a , b , ab , abb + bab , bb + a \}$ alalım. bb + a kelimesi homojen olamaz. (Birkaç terimin toplamı ise her bir terimin dereceleri aynı olmalıdır.)

Lemma 3.2.2 : R , F nin $Y = \{y_1,..., y_n\}$ tarafından üretilen homojen alt cebiri olsun. h_i, y_i nin en yüksek dereceli homojen terimi olsun. $H = \{ h_1,...,h_n \}$ serbest bir küme ise H, R yi serbestçe üretir.(Serbest üreteç kümesindeki eleman kadar eleman içeren bir küme R yi serbestçe üretiyorsa o küme bir üreteç kümesidir.)

İspat. İspatı Y nin homojen uzunlukları üzerinde tümevarımla yapacağız. Eğer Y nin homojen uzunluğu n ise , ya her bir y_i homojendir yada bazı y_i ler sabit olup ispatlanacak bir şey yoktur. Bu Lemma nın homojen uzunluğu s olan üreteçlerin kümesi için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi de Y nin homojen uzunluğunun $s + 1$ olduğunu kabul edelim.

$y_1 = h_1 , \ldots , y_r = h_r$ homojen ve $y_{r+i} = l_{r+i} + \bar{y}_{r+i} + h_{r+i}$, $i = 1,\ldots,n\text{-}r$ olacak şekilde y_i leri yeniden sıralayalım. Burada l_{r+i}, y_{r+i} içindeki en küçük dereceli homojen terimdir.

$$d(l_{r+i}) \leq d(l_{r+i+1})$$

olduğunu varsayabiliriz. R homojen olup $l_{r+i} \in R$ dir ve F nin

$$w(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad m_i \in B, \ \alpha_i \neq 0$$

olacak şekilde bir elemanı vardır. (Burada B monomiallerin oluşturduğu baz). Burada $l_{r+1} = w(y_1,\ldots,y_n)$ olacak şekilde $w(x_1,\ldots,x_n)$ yi minimal uzunluklu olarak seçebiliriz. Eğer m monomial ise

$$m(h_1,\ldots,h_n) = 0 \quad \text{veya} \quad d(m(h_1,\ldots,h_r)) = d(m(y_1,\ldots,y_n))$$

dir. Bazı l ler için $m_l(h_1,\ldots,h_r) = 0$ ise H, bir serbest küme olduğundan $m_l(y_1,\ldots,y_n) = 0$ dır. Böylece,

$$l_{r+1} = \sum_{i \neq l} \alpha_i m_i(y_1,\ldots,y_n)$$

olup bu ise w nun minimal uzunluklu olmasıyla çelişir.

$\{1,\ldots,k\}$ kümesini aşağıdaki şekilde parçalara ayıralım:

$m_j(h_1,\ldots,h_n) = \max_{1\le j\le r} d(m_j(h_1,\ldots,h_n))$ ise $j \in S_1$ dir. Aksi halde $j \in S_2$ dir. $l_{r+1} = w(y_1,\ldots,y_n)$ deki aynı dereceli eşit terimlerde $h = \sum_{i\in S_1} \alpha_i m_i(h_1,\ldots,h_n)$ olarak yazarsak ya $h = 0$ veya $h = l_{r+1}$ olduğunu görürüz. $h = 0$ ise $\sum_{i\in S_1} \alpha_i m_i(y_1,\ldots,y_n) = 0$ ve yine w nun minimalliğiyle çelişir. Böylece $h = l_{r+1}$ dir. Fakat $d(h_{r+i}) > d(l_{r+1})$ olup her m_i nin derecesi sıfır yada $x_1,\ldots,x_r$ de monomialdir. Böylece $w(y_1,\ldots,y_n) \in \text{Alg}(y_1,\ldots,y_r)$ ve $Y' = \{y_1',\ldots,y_n'\}$ kümesi ,

$$y_1' = y_1,\ldots,y_r' = y_r \quad , \quad y_{r+1}' - w(y_1,\ldots,y_n) \quad , \quad y_{r+2}' = y_{r+2},\ldots,y_n' = y_n$$

elemanları tarafından tanımlanmış R için bir üreteç kümesi olsun. Y' nün homojen uzunluğu s ve y_1' homojen teriminin en yüksek derecesi h_i dir. Böylece tümevarım hipotezinden $R = \text{Alg}(H)$ olarak elde edilir.

$F^k = \sum_{i=0}^{k} H^k$ olsun. R, F nin alt cebiri ise $R_{-1} = 0$, $R_k = R \cap F^k$ ve $R_k' = \text{Alg}(R_{k-1}) \cap F^k$ elde edilmiştir. Bununla aşağıdaki Lemmayı kolayca ispatlayabiliriz.

Lemma 3.2.3 : F nin homojen elemanlarının bir kümesi $H = \{ h_1,...,h_n \}$ olsun. $H_k = \{ h_i \mid d(h_i) = k \}$ ve $R = \text{Alg}(H)$ olarak alalım. $< H_k > = R_k \bmod R_k'$ ve $\text{Alg}(R_k) = \text{Alg}(H_1 \cup \ldots \cup H_k)$ dır.

Teorem 3.2.4 : $\mathcal{G}$, serbest $\mathcal{G}$-cebirlerin sonlu üretilmiş homojen alt cebirlerinin serbest olduğu bir sınıf olsun. $H = \{ h_1,...,h_n \}$, F nin homojen elemanlarının bir kümesi ve $R = \text{Alg}(H)$ alalım. O zaman , H nin bazı alt kümeleri R yi serbestçe üretirler.

İspat. Eğer $n = 1$ ise teorem açıktır. $(n-1)$ elemanlı kümeler için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. $L = \{ h_1,...,h_{n-1} \}$ olsun. Eğer L serbest değilse tümevarım hipotezinden $L' \subset L$ alt kümesi , $\text{Alg}(L)$ yi üretir. Fakat $R = \text{Alg}(L', h_n)$ iken tümevarım hipotezinden dolayı R nin en fazla $(n-1)$ eleman tarafından üretilmiş olduğunu varsayabiliriz. Eğer R nin rankı n ise, Önerme 3.1.2. den H, serbest bir kümedir. Böylece R nin rankını $(n-1)$ alabiliriz. (En az (n-1) elemanlıydı sonra en çok $(n-1)$ saydı. Dolayısıyla $(n-1)$ aldı.)

$Y = \{ y_1,...,y_{n-1} \}$, en yüksek dereceli $z_1,\ldots,z_{n-1}$ homojen terimlere sahip serbest üreteçlerin bir kümesi olsun öyle ki Y nin derecesi minimaldir. Eğer $Z = \{ z_1,...,z_{n-1} \}$ kümesi serbest ise Lemma 3.2.2. den Z , R yi üretir. Aksi takdirde $\text{Alg}(Z)$ nin rankı en fazla $n-2$ ve yine tümevarım hipotezinden Z nin bir Z' öz alt kümesi , $\text{Alg}(Z)$ yi üretir. Gerekirse y_i leri yeniden düzenleyerek

$$z_1 = w(z_2,\ldots,z_{n-1})$$

elde ederiz.

$$y_1' = y_1 - w(y_2,\ldots,y_{n-1}) \quad , \quad y_2' = y_2 \quad ,\ldots, \quad y_{n-1}' = y_{n-1}$$

elemanları tarafından tanımlanmış $Y' = \{ y_1' \quad ,\ldots, y_{n-1}' \}$ kümesi , R için bir serbest üreteç kümesidir ve Y nin derecesinden Y' nün derecesi daha küçüktür. Bu çelişki şunu gösterecektir ki Z , R için bir serbest üreteç kümesidir.

$H_k = \{ h_i \mid d(h_i) = k \}$ ve $Z_k = \{ z_i \mid d(z_i) = k \}$ olsun. Lemma 3.2.3. ten dolayı , H_1 ve Z_1 in her ikisi R_1 i modulo R_0 gerecektir. Z_1 serbest olduğundan Z_1 kümesi R_1 için modulo R_0 bir bazdır. H_1 in dışında R_1 için modulo R_0 H_1' bazını oluşturalım. Z_1 ile H_1' , aynı altcebiri üretir ve aynı sonlu kardinale sahiptirler. H_1' Önerme 3.1.2. den serbesttir. Z_1 , modulo R_0 R_1 i üretiyor ; Z_2, modulo R_1 R_2 yi üretiyor, $\{ H_1' \cup \bigcup_{i\geq 2} Z_i \}$, R yi üretecek.

Tümevarımla kabul edebiliriz ki $i \leq k$ için H_i nin dışında R_i için modulo R_i' H_i' bazını oluşturabiliriz öyle ki

$$\{ \bigcup_{i=1}^{k} H_i' \cup \bigcup_{i\geq k+1} Y_i \}$$

kümesi R yi üretir. Burada Y_i kümeleri, en yüksek dereceli terimleri Z_i kümelerini oluşturan kümelerdir. Lemma 3.2.3. ten Z_{k+1} ve H_{k+1} in her ikisi de R_{k+1} i modulo R_{k+1}' gerer. Z_{k+1} , R_{k+1} in modulo R_{k+1}' bir bazıdır. Ve yine Lemma 3.2.3. ten

$R'_{k+1} \subset$ Alg (R_k) = Alg $(Z_1 \cup ... \cup Z_k)$ olup Z serbesttir. $H'_{k+1} \subset H_{k+1}$, R_{k+1} için modulo R'_{k+1} bir baz olsun. Eğer $z \in Z_{k+1}$ ise

$$z = \sum \beta_j h_j + u$$

burada $\beta_j \in \phi$, $h_j \in H'_{k+1}$, $u \in R'_{k+1}$ dir. Lemma 3.2.3. ten $R'_{k+1} \subset$ Alg $(\bigcup_{i=1}^{k} H'_i)$ olup , $Z_{k+1} \subset$ Alg $(\bigcup_{i=1}^{k+1} H'_i)$ elde ederiz. Böylece sonuç olarak , $\{ \bigcup_{i=1}^{k+1} H_i' \cup \bigcup_{i \geq k+2} Z_i \}$ kümesi R yi üretecektir. Hatta Z ile aynı kardinale sahip olduğundan R yi serbestçe üretmek zorundadır.

Teorem 3.2.5 : Bir $\mathcal{G}$ sınıfında serbest $\mathcal{G}$- cebirlerinin sonlu üretilmiş homojen alt cebirleri de serbest $\mathcal{G}$ - cebirleridir. F nin elemanları $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ olsun. n-inci dereceden derece indirgeyen elemanter dönüşümlerin bir dizisi vardır öyle ki ,

$$(\ . \ . \ . (\ Y \tau_1 \ ) \ . \ . \ . \ ) \tau_k$$

üzerindeki pozitif dereceli elemanlar Alg(Y) nin serbest üreteç kümesidir.

İspat. Y pozitif dereceli elemanları içeriyor ve bu elemanlar serbest küme değilse bir elemanter dönüşümle Y nin derecesini indirgeyebileceğimizi göstermek yeterli olacaktır. Y nin pozitif dereceli elemanlardan oluştuğunu ve

$$y_i = \bar{y}_i + h_i \quad , \quad d(h_i) = d(y_i)$$

olduğunu kabul edelim. $\bar{y}_i = 0$ veya $d(\bar{y}_i) < d(h_i)$ ve h_i , homojendir. $H = \{h_1,...,h_n\}$ olsun. H serbest ise Y de serbesttir. $w(y_1,...,y_n) = 0$ olan minimal uzunluklu eleman $0 \neq w(x_1,...,x_n)$ olsun. Lemma 3.2.2. de olduğu gibi,

$$(*) \qquad w(x_1,...,x_n) = \sum_{i \in S_1} \alpha_i m_i(x_1,...,x_n) + \sum_{i \in S_2} \alpha_i m_i(x_1,...,x_n)$$

burada $\alpha_i \in \phi$, $m_i \in B$ dir.

$m_i(h_1,...,h_n) \neq 0$ olarak yazarız. $d(m_i(h_1,...,h_n) = \max_i(d(m_i(h_1,...,h_n)))$ ise $i \in S_1$ aksi takdirde $i \in S_2$ dir. $w(y_1,...,y_n) = 0$ olan minimal uzunluklu eleman $0 \neq w(x_1,...,x_n)$ olsun. Böylece , $w(y_1,...,y_n) = 0$ olduğundan $(*)$ eşitliğinde x_i ler yerine y_i leri yazalım. O zaman açılınca ve gerekli işlem yapılınca ,

$$\sum_{i \in S_1} \alpha_i m_i(h_1,...,h_n) = 0$$

elde ederiz. H serbest olduğundan

$$\sum_{i \in S_1} \alpha_i m_i(x_1,...,x_n) = 0$$

dır.

Böylece $S_2 = \varnothing$ ise $w(x_1,...,x_n) = 0$, $S_2 \neq \varnothing$ ise

$$0 = w'(y_1,...,y_n) = \sum_{i \in S_1} \alpha_i m_i(y_1,...,y_n)$$

dir. w' , w dan daha kısadır , böylece çelişki elde ederiz. H serbest değilse $K \subset H$, Alg (H) yi serbestçe üretir. y_i ler yeniden düzenlendiğinde $w(x_2,...,x_n) \in F$ için $h_1 = w(h_2,..,h_n)$ elde ederiz. τ ,

$$(x_1,...,x_n)\tau = (x_1,...,x_{n-1},x_n - w(x_2,...,x_n))$$

olarak tanımlanır.

τ (Y), Alg(Y) yi üretir ve derecesi Y den küçüktür.

3.3. Nielsen sınıfı Schreier sınıfıdır.

Serbest $\mathcal{G}$ cebirlerinin sonlu üretilmiş homojen alt cebirleri serbesttir. Böylece serbest $\mathcal{G}$ cebirlerinin tüm alt cebirleri de serbesttir.

Teorem 3.3.1 : $\mathcal{G}$, Teorem 3.2.5. in hipotezini sağlıyorsa bir Schreier sınıfıdır. Yani , bir Nielsen sınıfı bir Schreier sınıfıdır.

İspat. F, $\mathcal{S}$ de bir serbest cebir olsun ve R, F nin bir alt cebiri olsun. Y_k, $k \geq 1$ iken R_k için modulo R'_k bir baz olsun.[$R_k = R \cap F_k$, $R'_k = \text{Alg}(R_{k-1}) \cap F^k$ idi] $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, R yi üretir. Y nin sonlu bir $\overline{Y} = \{ y_1, ..., y_k \}$ alt kümesi vardır öyle ki $\overline{Y}$, serbest değildir. $\mathcal{S}$, Teorem 3.2.5. in hipotezini sağladığından ispatta olduğu gibi $\overline{Y}$ yi yeniden sıralayabiliriz öyle ki,

$$d(y_1 - w(y_{i_1}, ..., y_{i_k})) < d(y_1)$$

$d(y_{i_j}) \leq d(y_1)$, $i_j \neq 1$ olacak şekilde bir $w(y_{i_1}, ..., y_{i_k})$ elemanı bulunsun. (Yeniden sıralama yaparken böyle bir elemanın olmasına dikkat ediliyor.) Böylece derecesi $d(y_1)$ olan terimler sıfır olmalı. Bu durum derecesi $d(y_1)$ olan y_i lerin modulo $R_{d(y_1)}$ ϕ - bağımsız olmalarıyla çelişir.

Teorem 3.3.2 : $F = F(x_1, ..., x_n)$, bir Schreier sınıfında rankı n - olan serbest cebir olsun. F nin otomorfizimler grubu ;

$$\alpha_\varphi : x_1 \to \varphi\, x_1 \quad , \quad i \neq 1 \quad , \varphi \in \phi \quad , \varphi \neq 0$$

$$x_i \to x_i$$

$$\sigma_\omega : x_1 \to x_1 + w(x_2, \ldots, x_k)$$

$$x_i \to x_i \quad , \quad i \neq 1$$

otomorfizmlerle birlikte x_1 ,…, x_n kümesinin permütasyonları tarafından üretilmiştir.

Önerme 3.3.3 : L , F cisminde X üzerinde serbest Lie cebiri olsun. Y , L nin herhangi sonlu alt kümesi ise Y , L nin bir serbest alt kümesine denktir.

Burada denkliğin anlamı , elemanter Lie dönüşümleri tarafından elde edilebilir ve sıfırlar dahil edilebilir veya edilemez olmasıdır. Önermenin ispatı için ilk önce Y ye denk indirgenemez bir Z kümesi oluştururuz. Z nin elemanlarının leading formları arasında trivial olmayan polinom bağıntı yoktur. Yani Z serbesttir. Teorem 2.5.1. sonlu ranklı bir serbest Lie cebirinin otomorfizm grubu için bir üreteç kümesi elde etmek kolaydır. L , x_1 ,..., x_k üzerinde serbest ve T herhangi elemanter Lie dönüşümü olsun. X e uygulanmış L nin bir σ otomorfizmi tanımlanır. Y , L nin herhangi serbest üreteç kümesi ise L nin bir α otomorfizmi vardır öyle ki

$$Y = \alpha\ (X)$$

dir. Böylece ,

$$Y\,.\,T = \alpha\ (X)\,.\,T = \sigma\ (\alpha\ (X))$$

Teorem 2.5.1.den T_1 ,..., T_r formunda bir otomorfizm , T_i bir elemanter Lie dönüşümüdür. σ_i , X e T_i elemanter Lie dönüşümü uygulayarak elde edilmiş otomorfizm olsun.

$$(*) \qquad X T_1 T_2 \ldots T_r = \sigma_r\ (\ldots (\sigma_2\ (\sigma_1\ (X))) \ldots) \quad , \quad (i = 1, \ldots, r)$$

r = 1 olduğu zaman σ_1 in tanımından doğrudur. $r > 1$ olsun ve r üzerinden tümevarım uygulayalım. r-1 için hipotezin doğru olduğunu kabul edelim. Yani ,

$$X T_1 T_2 \ldots T_{r-1} = \sigma_{r-1} (\ldots (\sigma_1 (X)) \ldots)$$

r için T_r elemanter Lie dönüşümü uygulayarak ,

$$\begin{aligned} X\, T_1\, T_2 \ldots T_{r-1}\, T_r &= \sigma_{r-1} (\ldots (\sigma_1 (X)) \ldots) T_r \\ &= \sigma_r (\sigma_{r-1} (\ldots (\sigma_1 (X)) \ldots)) \end{aligned}$$

yani ($*$) formunda yazılmış olur ve ispat biter.

Teorem 3.3.4 : L , F cismi üzerinde $x_1 , \ldots , x_k$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. L nin otomorfizm grubu ,

$$\begin{aligned} \sigma_f : x_1 &\to x_1 + f(x_2, \ldots, x_k) \\ x_i &\to x_i \qquad\qquad (i \neq 1) \end{aligned}$$

otomorfizmleriyle birlikte $x_1 , \ldots , x_k$ kümesi tarafından gerilmiş alt uzay üzerinde genel lineer grup tarafından üretilir.

Sonuç. L , $x_1 ,..., x_k$ üzerinde serbest Lie cebiri ise L nin otomorfizm grubu

$$\alpha_\varphi : x_1 \to \varphi\ x_1 \quad , \quad i \neq 1 \quad , \quad \varphi \in \phi \quad , \varphi \neq 0$$

$$x_i \to x_i$$

$$\sigma_\omega : x_1 \to x_1 + w(x_2, \ldots, x_k)$$

$$x_i \to x_i \qquad , \qquad i \neq 1$$

otomorfizmlerle birlikte $x_1 ,..., x_k$ kümesinin permütasyonları tarafından üretilmiştir.

Aynı zamanda Teorem 3.3.2. nin ispatını da yapmış olduk.

Teorem 3.3.5 : F , Teorem 3.3.2. deki gibi tanımlanmış ve N , F nin bir ideali olsun öyle ki F/N serbest ϑ- cebiridir. F nin $y_1 ,..., y_n$ üreteçlerinin bir kümesi vardır öyle ki N , $y_1 ,..., y_k$ tarafından üretilmiş idealdir. ($k \leq n$)

Lemma 3.3.6 : N , homojen ideal üreteçlerinin bir G kümesine sahip olduğunu varsayalım öyle ki her k için $G_k = \{g \in G \mid d(g) = k\}$ kümesi sonlu ve sayılabilirdir.

Lemma 3.3.7 : N , Lemma 3.3.6. daki gibi tanımlanmış ve $N \neq F$ olsun. O zaman , aşağıdaki özellikleri sağlayan F nin monomiallerinin bir $B = \{ b_0 = 1 , b_1 , ... \}$ kümesi bulabiliriz.

i) $\{ b_i + N \}$, A için bir ϕ - bazdır. ($i = 0 , 1 , \ldots$)

ii) $w \in F$ nin derecesi k ise k , G , n ve ϕ ye bağlı bir s (k) tamsayısı vardır öyle ki , en fazla s (k) – adımda

$$(*) \qquad w = \alpha_1 b_{i_1} + \ldots + \alpha_r b_{i_r} + t \qquad , \qquad \alpha_i \in \phi \ , \ b_{i_j} \in B \ , t \in N$$

ifadesini bulabiliriz. Bu ifade tektir.

İspat. a_1 , $a_2 \in B^i \cup \{ b_i \}$ için $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in N$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \phi$ bulunabiliyorsa a_1, a_2 ye *modulo N lineer bağımlı* denir. Eğer $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in N$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \phi$ yoksa a_1, a_2 ye *modulo N lineer bağımsızdır* denir.

Tümevarımdan $B^0 = \{ 1 \}$ ve dizide en küçük monomial b_i ise $B^i = B^{i-1} \cup \{b_i\}$ olarak tanımlarız öyle ki $B^i \cup \{b_i\}$ modulo N lineer bağımsızdır veya böyle bir monomial yoksa $B^i = B^{i-1}$ dir. $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B^i$ olarak yazabiliriz. Burada B nin *i*) özelliğini sağladığı görülür.

B^k yı sayabildiğimizi ve bunun en büyük monomialinin derecesinin p olduğunu varsayalım. $B^k_p = \{b \in B \mid d(h) = p\}$ olsun. Derecesi p bir monomial m , B^k nın herhangi bir monomialinden daha büyük olsun. $\{ m \} \cup B^k$ nın bağımsız olup olmadığını bulabiliriz. $N' = Id(G \cup B^k_p)$ olduğunu varsayalım. $m \in N'$ olup olmadığına Lemma 3.3.6. dan karar verebiliriz. $B^{k+1} = B^k \cup \{m\}$ olarak kurabiliriz. $m \in N'$ ise Lemma 3.3.6. dan m yi $G \cup B^k_p$ nin elemanları cinsinden ifade edebiliriz. d (m) = p olduğundan bu elemanlar ($*$) formundadır. B^{k+1} i tanımlamak için B^k ya eklenecek derecesi p – olan bir monomial yoksa , N de

olmayan ve derecesi p ile $2p$ arasında olan bazı monomialler için m yi bu şekildeki en küçük monomial olarak seçeriz ve

$$B^{k+1} = B^k \cup \{m\}$$

olarak tanımlarız. Sonuçta , derecesi p ile $2p$ arasında olan tüm monomialler de N dedir. O zaman

$$B^{k+1} = B^k$$

yazarız.

F nin herhangi bir elemanı , sonlu sayıda monomialın bir lineer toplamı olduğundan *ii*) gerçeklenir.

KAYNAKLAR

BAHTURİN, Yu. A., *Two remarks on Lie algebra varieties.* Mat. Zametki 4 (1968), 387 – 398.

BAHTURİN, Yu. A., *Identities in Lie algebras, I.* Vestnik Moskov. Univ.Ser. I. Mat. Mekh. 28 (1973), no. 1, 12 – 18. English translation: Moscow Univ. Math. Bull. 28 (1973), no. 1, 9 – 15.

BOURBAKİ, N., *Lie groups and Lie algebras.* Part2. Addison – Wesley, (1975).

COHN, P. M., *Subalgebras of free associative algebras.* Proc. London Math. Soc. 14 (1964), no. 3, 618 – 632.

HOWSON, A., *On the intersection of finitely generated free groups.* London Math. Soc. 29 (1962), 428 – 434.

KUKİN, G. P., *The subalgebras of a free Lie p – algebras.* Algebra Logika, 11 (5) (1972), 535 – 550.

KUROSH, A. G., *Non-associative free algebras and free products of algebras.* Mat. Sb. 20 (1947), 239 – 262.

LEWİN, J., *On Schreier varieties of linear algebras.* Trans. Amer. Math. Soc.132 (1968), 553 – 562.

MİKHALEV, A. A., *Subalgebras of free color Lie superalgebras.* Mat. Zametki 37 (1985), no. 5, 653 – 661. English translation: Math. Notes 37 (1985), 356 – 360.

NİELSEN, J., *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe.* Math. Ann. 91 (1924), 169 – 209.

SCHREİER, O., *Die Untergruppen der freien Gruppen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 5 (1927), 161 – 183.

SHİRSHOV, A. I., *Subalgebras of free Lie algebras.* Mat. Sb. 33 (1953), 441 – 452.

SHİRSHOV, A. I., *Subalgebras of free commutative and free anti-commutative algebras.* Mat. Sb. 34 (1954), 81 – 88.

SHİRSHOV, A. I., *On free Lie ring.* Math. Sb. 45 (2) (1958), 113 – 122.

SHTERN, A. S., *Free Lie suoeralgebras.* Sibirsk. Mat. Zh. 27 (1986), 170 – 174. English translation: Siberian Math. J. 27 (1986), 136 – 140.

UMİRBAEV, U. U., *On Schreier varieties of algebras.* Algebra Logika 33 (1994), no. 2, 184 – 185.

UMİRBAEV, U. U., *Universal derivations and subalgebras of free algebras.* In: *Algebra (Krasnoyarsk, 1993)*. Walter de Gruyter, Berlin, 1996, 255 – 271.

WİTT, E., *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe.* Math. Z. 64 (1956), 195 – 216.

ZAİCEV, M. V., *Schreier varieties of Lie algebras.* Mat. Zametki 28 (1980), no. 1, 119 – 126. English translation: Math. Notes 28 (1980) , nos. 1-2, 523 – 526.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İstanbul ’da doğdum. İlk , orta ve lise öğrenimimi Adana’da tamamladım. 1996 yılında Çukurova Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ ne girdim. 2000 yılında lisans öğrenimimi tamamlayıp 2003 yılında bölümde yüksek lisansa başladım. Adana Erkek Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. Evliyim ve 2 yaşında Yahya Emir adında bir oğlum var.