ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Selim GÜNDÜZ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMLI RASTGELE DEĞİŞKENLERİN FONKSİYONLARI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2015

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMLI RASTGELE DEĞİŞKENLERİN FONKSİYONLARI

Selim GÜNDÜZ

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 27/04/2015 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	……..	……..
Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ	Doç Dr. Güzin YÜKSEL	Doç. Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

...…….....	**...**…….....
Doç. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL	Yrd. Doç. Dr. M. Çağatay KORKMAZ
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMLI RASTGELE DEĞİŞKENLERİN FONKSİYONLARI

Selim GÜNDÜZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2015, Sayfa: 137
Jüri : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL
: Doç. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL
: Yrd. Doç. Dr. M. Çağatay KORKMAZ

Bu tezde iki yönlü kuvvet dağılımına sahip bağımsız iki rastgele değişkenin toplamı (konvolüsyonu), çarpımı ve bölümünün tam dağılımları elde edilmiştir. Elde edilen dağılımların özellikleri incelenip, momentleri ve yüzdelikleri sunulmuştur. Bu fonksiyonların çeşitli simülasyon ve gerçek veri kümeleri üzerindeki uygulamaları verilmiştir. Modellemede en çok olabilirlik tahmin yöntemi kullanılmıştır.

Anahtar kelimeler: İki yönlü kuvvet dağılımı, Kuvvet fonksiyonu dağılımı, Rastgele değişkenlerin fonksiyonları, Sınırlı uzaya sahip dağılımlar**,** Üçgensel dağılım

ABSTRACT

PhD THESIS

FUNCTIONS OF THE TWO-SIDED POWER DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES

Selim GÜNDÜZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2015, Pages: 137
Jury : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Assoc. Prof. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL
: Asst. Prof. Dr. M. Çağatay KORKMAZ

In this thesis, the exact distribution of the convolution, product and quotient of two independent two-sided power distributed random variables are derived. The shape analysis of these distributions are made, the moments and percentiles are computed. The distributions are demonstrated on some real and simulated data sets. In modelling, the method of maximum likelihood is used.

Key Words: Distributions with bounded range, Function of random variables, Power function distribution, Triangular distribution, Two-sided power distribution

TEŞEKKÜR

Her zaman öğrencisi olmaktan büyük gurur duyacağım ve kendisini örnek almaya çalışacağım kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Ali İhsan Genç'e, yoğun programına rağmen tez çalışmama verdiği katkılardan dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam sırasında karşılaştığım tüm problem ve sıkıntılarımda yardımlarını esirgemeyen Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim elemanlarına ve bendeki yeri her zaman ayrı olan değerli büyüğüm Doç. Dr. Murat Erişoğlu'na da teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca her konuda desteklerini benden esirgemeyen aileme ve hayatımın anlamını artıran kıymetli eşim Araş. Gör. F. Feyza Gündüz'e sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
TABLOLAR DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ XII
1. GİRİŞ 1
2. ÜÇGENSEL DAĞILIM 7
2.1. Üçgensel Dağılımın Özellikleri 7
2.1.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu 7
2.1.2. Momentler ve Moment Çıkaran Fonksiyon 10
2.1.3. Dağılımın Özel Durumları 11
2.1.4. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri 12
2.1.5. Rastgele Sayı Üretimi 13
2.2. Üçgensel Dağılımlı İki Rastgele Değişkenin Konvolüsyonunun Dağılımı 14
2.2.1. İki Yönlü Sürekli Dağılım Ailesi 15
2.2.1.1. Momentler 16
2.2.1.2. İki Yönlü Sürekli Dağılım Ailesinin Konvolüsyonunun Dağılımı 16
2.2.1.3. Üçgensel Dağılımın Konvolüsyonunun Dağılımı 20
2.3. Üçgensel Dağılımlı İki Rastgele Değişkenin Çarpımının Dağılımı 22
2.3.1. Sınır Değerlerinin Sıfır Olduğu Özel Durumlar 27
2.3.1.1. Alt Sınırların Sıfır Olması Durumu 27
2.3.1.2. Alt Sınırlarından Yalnız Birinin Sıfır Olması Durumu 30
2.3.2. Uygulama 33
2.4. Üçgensel Dağılımlı X ve Y Rastgele Değişkenlerinin Bölümünün Dağılımı 35
2.4.1. X/Y'nin Dağılımı 35
2.4.2. $Y/(X+Y)$'nin Dağılımı 41
2.4.3. Uygulama 46

3. STANDART İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI 47
3.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu 47
3.2. Momentler 49
3.3. Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri 51
3.4. Kantil Fonksiyonunun Özellikleri 51
3.5. Limit Dağılımları 52
3.6. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri 54
3.7. Rastgele Sayı Üretimi 55
4. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI 57
4.1. İki Yönlü Kuvvet Dağılımının Özellikleri 57
4.1.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu 57
4.1.2. Momentler 58
4.1.3 Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri. 58
4.1.4. Rastgele Sayı Üretimi 60
4.2. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı Rastgele Değişkenlerin Konvolüsyonunun Dağılımı 60
4.2.1. Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu 61
4.2.1.1. Yansıma Parametreleri Toplamının 1'den Küçük Ya da Eşit Olması Durumu 61
4.2.1.2. Yansıma Parametreleri Toplamının 1'den Büyük Olması Durumu 70
4.2.2. Özdeş Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu 73
4.2.2.1. Yansıma Parametresinin $1/2$ den Küçük Ya da Eşit Olması Durumu 74
4.2.2.2. Yansıma Parametresinin $1/2$ den Büyük Olması Durumu 78
4.2.3. n Özdeş Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu 81
4.2.4. İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu 81
4.2.5. Uygulama 90
4.3. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı Rastgele Değişkenlerin Çarpımının Dağılımı 92
4.3 1. Alt Sınırların Pozitif Olması Durumu. 93
4.3 2. Alt Sınırların Sıfır Olması Durumu. 99

4.3.3. Uygulama 104
4.4. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı X ve Y Rastgele Değişkenlerinin Bölümünün Dağılımı 108
4.4.1. X/Y'nin Dağılımı 108
4.4.2. $Y/(X+Y)$'nin Dağılımı 114
4.4.3. Uygulama 122
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 125
KAYNAKLAR 127
ÖZGEÇMİŞ 133

TABLOLAR DİZİNİ **SAYFA**

Tablo 2.1. Bazı iki yönlü dağılımlar ve üreteç fonksiyonları 15

Tablo 2.2. $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımı altında Z'nin $[0,2]$ aralığında birbiriyle örtüşmeyen yedi alt aralık için belirlenen $A_i(z\,|\theta_x, \theta_y), i = 1, \ldots, 4$ aralıkları 19

Tablo 2.3. $\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımı altında Z'nin $[0,2]$ aralığında birbiriyle örtüşmeyen yedi alt aralık için belirlenen $A_i(z\,|\theta_x, \theta_y), i = 1, \ldots, 4$ aralıkları 19

Tablo 2.4. $a = 0, c = 0$ için durumlar ve alt durumlar 27

Tablo 2.5. $a = 0, c \neq 0$ için durumlar ve alt durumlar 27

Tablo 2.6. Belirlenmiş m ve n değerleri için $f(v)$ nin beklenen değer ve varyansları $(a = c = 0, b = d = 1)$ 33

Tablo 2.7. Türkiye şeker pancarı alım fiyatları ve İstanbul ili için şeker pancarı üretim miktarları 34

Tablo 2.8. Hasılat: yıllık üretim ve birim fiyat parametreleri 34

Tablo 2.9. Hasılat: tanımlayıcı istatistikler 34

Tablo 2.10. İki rasgele değişkenin çarpımın oyf sini belirlemedeki durumlar 35

Tablo 2.11. Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının beklenen değer ve varyansları $(a = c = 1,\ b = d = 2)$ 45

Tablo 4.1. Belirli n ve l değerleri için Z dağılımının momentleri $(\theta_x = 0.25,\ \theta_y = 0.5)$ 68

Tablo 4.2. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$ 69

Tablo 4.3. Belirli n ve l değerleri için Z dağılımının momentleri $(\theta_x = 0.7,\ \theta_y = 0.9)$ 72

Tablo 4.4. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$ 73

Tablo 4.5. $\theta \leq 1/2$ varsayımı altında Z'nin $[0,2]$ aralığındaki beş durumu için belirlenen $A_i(z\,|\theta),\ i = 1,\dots,4$ aralıkları 75
Tablo 4.6. $\theta > 1/2$ varsayımı altında Z'nin $[0,2]$ aralığındaki beş durumu için belirlenen $A_i(z\,|\theta),\ i = 1,\dots,4$ aralıkları 74
Tablo 4.7. Belirli θ ve n değerleri için Z dağılımının momentleri 78
Tablo 4.8. Belirli θ ve n değerleri için Z dağılımının momentleri 81
Tablo 4.9. İki rastgele değişkenin toplamının oyf sini belirlemedeki durumlar 82
Tablo 4.10. Farklı m ve n değerleri için Z dağılımının momentleri $(a = 2, m = 3,\ c = b = 4,\ k = 5,\ d = 7)$ 89
Tablo 4.11. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$ 89
Tablo 4.12. Uygulamada kullanılacak X ve Y değişkenlerine ait veri kümeleri 90
Tablo 4.13. X veri seti tanımlayıcı istatistikler 91
Tablo 4.14. Y veri seti tanımlayıcı istatistikler 91
Tablo 4.15. Mevcut veri seti için TSP dağılımının parametre tahminleri 91
Tablo 4.16. İki rastgele değişkenin çarpımının oyf sini belirlemedeki durumlar 93
Tablo 4.17. $(a = c = 0)$ özel durumu için iki rastgele değişkenin çarpımının oyf sini belirlemedeki durumlar 100
Tablo 4.18. Belirli n ve l değerleri için V dağılımının momentleri $(a = c = 0,\ m = 1,\ b = 5/3,\ k = 3,\ d = 5)$ 103
Tablo 4.19. Farklı parametre değerleri için $V = XY$ dağılımının yüzdelik değerleri ($p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99$) 104
Tablo 4.20. 2012 yılında evde tüketilen alkolsüz içecekler dahil yiyeceğe ayrılan tüketici harcamalarının yüzdesi, kişi başına ABD doları cinsinden verilen eşya ve hizmet alımlarından oluşan tüketici harcamaları ve bunların çarpımı ile elde edilen kişi başı ABD doları cinsinden yiyecek harcamaları 106
Tablo 4.21. Yiyecek harcamaları verisi için TSP dağılımının parametre tahminleri ve uyum iyiliği test sonuçları 107

Tablo 4.22. TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin bölümünün oyf nu belirlemedeki durumlar 109
Tablo 4.23. Belirli n ve l değerleri için V ve W dağılımlarının momentleri $(a = 2,\ m = c = 3,\ b = k = 4,\ d = 5)$..... 119
Tablo 4.24. Farklı n ve l değerleri için V dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$ 120
Tablo 4.25. Farklı n ve l değerleri için W dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$ 121
Tablo 4.26. Uygulamada kullanılacak X ve Y değişkenlerine ait veri setleri 122
Tablo 4.27. X veri kümesinin tanımlayıcı istatistikler..... 123
Tablo 4.28. Y veri kümesinin tanımlayıcı istatistikler 123
Tablo 4.29. Mevcut veri kümesi için *TSP* dağılımının parametre tahminleri.....123

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1. Üçgensel dağılımın oyf sinin grafiği 9

Şekil 2.2. Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ fonksiyonunun grafikleri $(a = c = 0,\ b = d = 1)$ 33

Şekil 2.3. Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının grafikleri $(a = c = 1,\ b = d = 2)$ 45

Şekil 2.4. X ve Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu 46

Şekil 3.1. Farklı m ve n değerleri için $STSP$ dağılımının grafikleri 54

Şekil 4.1 Belirli n ve l değerleri için $g(z)$ fonksiyonlarının grafikleri $(\theta_x = 0.25,\ \theta_y = 0.5)$ 68

Şekil 4.2. Belirli n ve l değerleri için $g(z)$ fonksiyonlarının grafikleri $(\theta_x = 0.7,\ \theta_y = 0.9)$ 72

Şekil 4.3. Belirli θ ve n değerleri için $g(z)$ fonksiyonunun grafikleri.....78

Şekil 4.4. Belirli θ ve n değerleri için $g(z)$ dağılımlarının grafikleri 80

Şekil 4.5. Farklı n ve l değerleri için Z dağılımlarının grafikleri $(a = 2,\ m = 3,\ c = b = 4,\ k = 5,\ d = 7)$ 88

Şekil 4.6. a) X verisinin histogram grafiği, b) Y verisinin histogram grafiği 91

Şekil 4.7. $Z = X + Y$ veri kümesinin histogram ve dağılım fonksiyonunun grafiği 92

Şekil 4.8. Belirli n ve l değerleri için $f(v)$ fonksiyonunun grafikleri $(a = c = 0,\ m = 1,\ b = 5\ /\ 3,\ k = 3,\ d = 5)$ 103

Şekil 4.9. X ve Y için saçılım grafiği 107

Şekil 4.10. (a) X in histogramı ve fit edilmiş TSP oyf si (b) Y nin histogramı ve fit edilmiş TSP oyf si.....107

Şekil 4.11. Yiyecek masrafları ve çarpımın dağılımının oyf si.....108

Şekil 4.12. Belirli n ve l değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının grafikleri $(a = 2,\ m = c = 3,\ b = k = 4,\ d = 5)$ 119

Şekil 4.13. a) X verisinin histogram grafiği, b) Y verisinin histogram grafiği.....123

Şekil 4.14. $V = X/Y$ veri kümesinin histogram ve dağılım fonksiyonunun grafiği 124

1. GİRİŞ

İki yönlü kuvvet (two-sided power - TSP) dağılımı, istatistik bilimine son yıllarda kazandırılan ve henüz çok fazla bir bilinirliğe sahip olmayan bir dağılımdır. Bu dağılım ve özellikleri tanıtılmadan önce iki yönlülük kavramının tam olarak açıklanması, akabinde ise TSP dağılımının tanımlanmasına ilham kaynağı olduğu düşünülen ve literatürde yer alan iki yönlü dağılımlardan ilki olan üçgensel dağılıma değinilmesi faydalı olacaktır.

İki yönlülük, bir rastgele değişkene ait oyf nin (olasılık yoğunluk fonksiyonu), bir köşe noktası ile ikiye bölünen tanım aralığının her bir kısmında farklı fonksiyonlar içermesi olarak ifade edilmektedir. Bu dağılımlardan ilki ise üçgensel dağılım olarak kabul edilmektedir. Üçgensel dağılım, istatistik alanında uzman olan kişilerin yanında, istatistik altyapısı çok iyi olmayan kişilere de iş hayatında kolaylıkla analiz yapıp, karar verme imkânı sağladığından dolayı bilinirliği fazla olan ve yaygın olarak kullanılan bir dağılımdır. Üç parametreye sahip olan bu dağılım, Schmidt (1934) tarafından istatistik bilimine kazandırılmış ve Ayyangar (1941) tarafından da genişletilerek üçgensel dağılımın simetrik ve simetrik olmayan durumları ifade edilmiştir. 1941 yılından yetmişli yılların sonuna kadar geçen sürede üçgensel dağılımı konu alan, Fullman (1953), Ostle ve ark. (1961), Clark (1962), Grubbs (1962), Rider (1963), MacCrimmon ve Ryaveck (1964), Donahue (1964) ve Rohatgi (1976) gibi pek çok çalışmadan bahsetmek mümkün olacaktır. Sonrasında ise üçgensel dağılımın analitik bir araç olarak önemi son yıllardaki çalışmalarda daha fazla hissedilmeye başlanılmış ve Johnson ve ark. (1995), Johnson (1997), Johnson ve Kotz (1999), Kotz ve Van Dorp (2004a), Glickman ve Xu (2008), Stein ve Keblis (2009), Olivares-Pacheco ve ark. (2009), Nagaraja (2013) ve Gündüz ve Genç (2015a) şeklinde sıralanan pek çok çalışma yapılmıştır. Ayrıca üçgensel dağılım, şekilsel benzerlik ve matematiksel işlemlerin daha kolay uygulanabilir olması sebebiyle beta dağılımına alternatif bir dağılım olarak da önerilmiştir.

İki yönlü dağılımlardan biri olan ve beta dağılımına alternatif olarak önerilen bir başka dağılım ise TSP dağılımıdır. Ekonomi, sistem mühendisliği, risk yönetimi vb. pek çok alandaki uygulamalarda kullanılan bu dağılım, Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından tanımlanmıştır. Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b), bu çalışmalarda TSP dağılımının çeşitli özelliklerini tanıtmış, dağılımın parametre tahmin edicilerini elde ederek hesaplama yöntemlerinden bahsetmiş ve bu dağılımı beta dağılımıyla karşılaştırmışlardır. Ayrıca, pozitif uzayı (destek kümesi), beta dağılımı gibi sınırlı bir aralıkta olan, ama bu dağılımının aksine kapalı formda bir kdf (kümülatif dağılım fonksiyonu) ve kantil fonksiyonuna sahip olan TSP dağılımının, beta dağılımına göre matematiksel açıdan daha kullanışlı olduğunu ifade edip, ilaveten TSP dağılımının şekilsel yönden de daha esnek olduğunu göstererek, özellikle ekonomi alanındaki risk ve belirsizlik problemlerinde TSP dağılımını, bu dağılımın bir alternatifi olarak kullanılmasını önermişlerdir.

Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b)'un çalışmaları sonrasında TSP dağılımıyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları, Van Dorp ve Kotz (2003), Kotz ve Van Dorp (2004), Oruç ve Bairamov (2005), Perez ve ark. (2005), Soltani ve Homei (2009) ve Herrerıas-Velasco ve ark. (2009) şeklinde sıralanabilir. Bu çalışmalarda da genel olarak, standart iki yönlü kuvvet (standard two sided power - $STSP$) dağılımından yararlanılarak, TSP dağılımının genel durumu sınırlı bir aralıkta tanımlanmış, genelleştirmeler yapılmış, bu dağılımların özellikleri tanıtılmış ve en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir.

Yukarıda bazılarına değinilen, literatürdeki tüm çalışmalar detaylı olarak incelendiğinde, TSP dağılımıyla ilgili yapılmış çok sayıda çalışmaya rastlanılsa da, bu dağılıma sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımlarının belirlenmesiyle ilgili bir çalışmanın mevcut olmadığı görülmüştür. Halbuki, uygulamalı ve teorik bilimlerin pek çok alanında karşılaşılan problemlerin içinde, rastgele değişkenlerin çeşitli cebirsel kombinasyonlarının dağılımları azımsanmayacak ölçüde yer tutmaktadır. X ve Y rastgele değişken olmak üzere bu kombinasyonlarda da genellikle $X+Y$, XY, X/Y ve $Y/(X+Y)$ fonksiyonlarının dağılımları öne çıkmaktadır. Her ne kadar rastgele değişkenlerin fonksiyonları ile ilgili olayların olasılıkları ya da bu fonksiyonlarının dağılımının çeşitli özellikleri,

simülasyon yaklaşımı yoluyla elde edilebiliyor olsa da kesin ve net sonuçlara ulaşılması açısından bu fonksiyonların tam dağılımını elde etmek oldukça önemlidir.

Yukarıdaki fonksiyonların kullanım yerlerine aşağıda verilen örneklerdeki gibi rastlanabilmektedir.

Rastgele değişkenlerin konvolüsyonunun dağılımının bilinmesi pek çok alan için büyük önem arz etmektedir. Örneğin, X'in bir akarsuyun, Y'nin ise yakınlardaki bir diğer akarsuyun su hacmini temsil ettiği düşünülsün. $X + Y$ konvolüsyonunun dağılımının hesaplanması neticesinde bu iki akarsuyun bir kavşakta birleşmesinden sonraki karşılaşılabilecek sel felaketleri hakkında bilgi sahibi olunabilecek ve bunun için gerekli önlemlerin alınması sağlanabilecektir. Veya ihtiyaç duyulan bir bölgeye su sağlamak için düşük debili bir akarsu ile bir başka akarsuyu birleştirme yoluna gidilebilecek ve iki akarsuyun toplam debisi hesaplanarak sorunun nasıl çözülebileceği üzerinde değerlendirme yapılabilecektir.

Rastgele değişkenlerin çarpımının dağılımının kullanım alanlarına değinilecek olursa, hidroloji, petrol arama birimleri, aktüerya, işletme, ekonometri, elektronik mühendisliği, sistem mühendisliği, biyoloji, fizik vb. bir çok alandan söz etmek mümkün olacaktır. Hidroloji alanından başlanarak örneklendirilme yapılırsa; X, kuraklık şiddetini ve Y, kuraklık süresini temsil etmek üzere, XY, kuraklığın büyüklüğünü gösterecektir. Benzer şekilde X, kar yağışı yoğunluğunu ifade ederken, Y, kar yağış süresini ifade ederse, XY çarpımı kar miktarını verecektir. Yine X, akarsuyun bir rezervuarın içine akış hızını, Y ise fırtına süresini temsil ederse, XY çarpımı biriken su miktarını verecektir. Bir diğer kullanım alanı olan petrol arama birimlerinden ise şöyle bir örnek verilebilir; X, petrol depolarının sayısını gösterirken, Y, her depodan elde edilen ürünü ifade ederse, XY, petrol bölgesinden elde edilen toplam ürünü verecektir. Aktüerya alanında ise X, olasılık ve Y, sonucu ifade ederse XY karşılaşılacak riski verecektir. Bu şekilde örnekleri artırmak mümkündür.

Benzer şekilde, insanların her zaman bir niceliğin bir başka niceliğe olan kıyasını merak etmesinden kaynaklanan ve genelde bu problemin çözümünde kullandığı rastgele değişkenlerin bölümlerinin dağılımlarının da pek çok alanda uygulaması mevcuttur. Rastgele değişkenlerin bölümlerinin dağılımının uygulama

alanları sıralanırken, toplamın ve çarpımın dağılımlarında olduğu gibi ilk olarak hidrolojideki kullanım alanından bir örnekle başlamak gerekirse; X, A istasyonundaki azami yağış miktarını ifade ederken, Y, B istasyonundaki azami yağış miktarını ifade ederse, $Y/(X+Y)$ bölümü, A istasyonundaki yağış miktarının, B istasyonundaki yağış miktarına olan göreceliğini temsil edecektir. Rastgele değişkenlerin bölümünün dağılımlarının kullanıldığı diğer uygulama alanlarından bir kaçına ana hatlarıyla değinilecek olursa, biyoistatistik ve sağlık bilimlerindeki vücut kitle indeksi hesaplamaları (X: vücut ağırlığı, Y: boy uzunluğunun karesi), güvenilirlikteki bir makinanın işlevde kaldığı zaman oranı hesaplamaları (X: makinenin tamirde kaldığı süre, Y: makinanın bozulma süresi), nükleer fizikte kitlesel enerjiyi hesaplamada, meteorolojide yağış kontrol hedeflerini belirlemede, ekonomide envanter oranlarının hesaplanmasında vb. pek çok uygulamadan bahsetmek mümkün olacaktır.

Bu alanda literatürde birçok dağılım için çalışma yapılmıştır. Kapsamlı bir literatür taraması aşağıda verilmiştir. İki rastgele değişkenin konvolüsyonu ile ilgili; Student t ailesi için Fisher (1935) ve Chapman (1950), normal aile için Christopeit ve Helmes (1979), ki-kare ailesi için Davies (1980) ve Farebrother (1984), üstel aile için Ali (1982), gamma ailesi için Moschoppoulos (1985) ve Provost (1989a), Poisson ailesi için Dobson ve ark. (1991), beta ailesi için Pham-Gia ve Turkkan (1993) ve Pham ve Turkkan (1994), düzgün aile için Kamgar-Parsi ve ark. (1995) ve Albert (2002), Rayleigh ailesi için Hitezenko (1998) ve Hu ve Lin (2001) ve ters gamma ailesi için Witkovsky (2001) çalışmalarına bakılabilir. İki rastgele değişkenin çarpımı ile ilgili; düzgün aile için Sakamoto (1943), Student's t ailesi için Harter (1951) ve Wallgren (1980), normal aile için Springer ve Thompson (1970), gamma ailesi için Stuart (1962) ve Podolski (1972), beta ailesi için Steece (1976), Bhargava ve Khatri (1981) ve Tang ve Gupta (1984), güç fonksiyonu ailesi için Abu-Salih (1983) ve üstel aile için Malik ve Trudel (1986) çalışmaları mevcuttur. İki rastgele değişkenin bölümü ile ilgili olarak da; normal aile için Marsaglia (1965) ve Korhonen ve Narula (1989), Student's t ailesi için Press (1969), Weibull ailesi için Basu ve Lochner (1971), merkezi olmayan ki-kare ailesi için Hawkins ve Han (1986), gamma ailesi için Provost (1989b) ve Bowman ve ark. (1998) ve beta ailesi için Pham-Gia (2000) çalışmaları verilebilir. İki bağımsız rastgele değişkenin

fonksiyonların tam dağılımlarının elde edilişi ile ilgili bu bölümde özellikle son on yıl içinde yapılan çalışmalara dikkat çekmek için ayrı bir sınıflandırma yapma ihtiyacı duyulmuştur. Pek çok farklı dağılımla yapılan bu çalışmaların bazılarını şu şekilde sıralamak mümkündür; beta ve gamma dağılımına sahip iki rastgele değişkenin çarpım ve bölümünün dağılımın elde edilişi (Nadarajah ve Kotz, 2005), Frechet dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının elde edilişi (Nadarajah ve Kotz, 2006), gamma ve Rayleigh dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının elde edilişi (Shakil ve Kibria, 2006), Maxwell ve Rice dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının elde edilişi (Shakil ve ark., 2006), beta dağılımına sahip iki rastgele değişkenin toplam, çarpım ve bölümünün dağılımının bulunması (Nadarajah, 2006), Pareto dağılımına sahip iki rastgele değişkenin fonksiyonlarının dağılımın elde edilişi (Nadarajah ve Ali, 2008), üçgensel dağılıma sahip iki rastgele değişkenin çarpımının dağılımın elde edilişi (Glickman ve Xu, 2008), Pareto dağılımına sahip rastgele değişkenlerin çarpımının dağılımın bulunması (Nadarajah ve Gupta, 2008), Maxwell ve Rayleigh dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının elde edilişi (Shakil ve ark., 2008), genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımının bulunması (Nadarajah, 2009), Laplace dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımlarının elde edilmesi (Nadarajah, 2009), Rayleigh dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının bulunması (Shakil ve Ahsanullah, 2011), üçgensel dağılıma sahip iki rastgele değişkenin bölümünün dağılımın elde edilişi (Gündüz ve Genç, 2015a) ve *TSP* dağılımına sahip iki rastgele değişkenin çarpımının dağılımının bulunması (Gündüz ve Genç, 2015b).

Daha öncede değinildiği gibi TSP dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımlarının belirlenmesiyle ilgili bir çalışmanın mevcut olmadığı görülmüş ve bu eksikliğin giderilmesi açısından, bu tez çalışmasında dağılımının tanımı ve özelliklerine ayrıntılı bir şekilde yer verilerek, TSP dağılımına sahip rastgele değişkenlerin toplam, çarpım ve bölümünün tam dağılımları bulunmuştur.

Çalışma kapsamında kullanılan dağılımların tanıtıldığı, rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının genel tanımı ve uygulama alanlarının verildiği ve çalışmanın amacı ile öneminin belirtildiği bu bölümün ardından, çalışmanın ikinci bölümünde, üç

parametreye sahip iki yönlü bir dağılım olan üçgensel dağılım tanıtılmış, dağılımın özellikleri verilmiş, üçgensel dağılıma sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının tam dağılımları elde edilmiş, momentleri hesaplanmış ve farklı parametre değerlerine göre grafikleri çizdirilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde $STSP$ dağılımı ve özellikleri tanıtılmış, bu dağılımın özel ve limit durumları, dağılım fonksiyonu özellikleri, dağılımın diğer dağılımlarla olan ilişkileri, momentleri, rastgele sayı üretimi ve parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerinin elde edilişi sunulmuştur.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise, öncelikle TSP dağılımı tanıtılarak dağılımın özelliklerinden bahsedilmiş, ardından $X\ ve\ Y\ TSP$ dağılıma sahip bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere bu iki rastgele değişkenin toplam, çarpım ve bölümlerinin tam dağılımları elde edilmiştir. Elde edilen yeni dağılımlar için, özel ve limit durumları, dağılım fonksiyonlarının özellikleri, momentler ve yüzdelik değerleri gibi özellikler incelenmiş ve parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. Ayrıca, gerçek veri kümesi ve simülasyon çalışmaları ile veri analizi yapılmıştır.

Son bölümde ise TSP dağılımına sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonları ile ilgili ulaşılan bulgular değerlendirilmiş ve hangi sonuçlara varıldığına değinilip önerilere yer verilmiştir.

2. ÜÇGENSEL DAĞILIM

Bu bölümde, TSP dağılımının tanımlanmasına ilham kaynağı olduğu düşünülen ve literatürde tanımlanan iki yönlü dağılımlardan ilki olan üçgensel dağılım ve özellikleri tanıtılacak ve bu dağılıma sahip rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımları elde edilecektir.

Tıpkı semicircle dağılım gibi, üçgensel dağılım da basit bir geometrik şekle sahiptir. Düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenlere, birtakım dönüşümler uygulanarak elde edilen bir dağılımdır. Üçgensel dağılımın temelleri kombinasyonel olasılıkların yoğun olarak çalışıldığı 18. yüzyılın ortalarında atılmıştır. İlk olarak bu dağılımın izlerine, Simpson'un (1755) çalışmasında rastlanılmış olsa da, tam anlamıyla üçgensel dağılımın tanımlanması ve istatistik bilimine kazandırılması Schmidt (1934) tarafından olmuştur. Schmidt, üçgensel dağılımı [0,1] aralığında tanımlı iki düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenin aritmetik ortalamasının dağılımı olarak tanımlamış ve *"tine dağılımı"* olarak isimlendirmiştir. Daha sonrasında ise Ayyangar (1941), [0,1] aralığında tanımlı asimetrik standart üçgensel dağılımı ifade etmiştir. Giriş bölümünde de belirtildiği gibi üçgensel dağılım birçok yazar tarafından çeşitli alanlarda kullanılmıştır.

2.1. Üçgensel Dağılımın Özellikleri

Bu kısımda TSP dağılımının önemli bir alt sınıfı olan üçgensel dağılımın özellikleri verilecektir.

2.1.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

İlk olarak, Schmidt (1934) tarafından tanımlanan simetrik üçgensel dağılıma sahip X rastgele değişkeninin oyf si eşitlik (2.1.) ile aşağıdaki gibi verilmektedir,

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , \ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 4(1-x), & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \quad (2.1.)$$

Ayyangar (1941) tarafından tanımlanan ve standart üçgensel dağılım olarak da isimlendirilen, asimetrik üçgensel dağılıma sahip X rastgele değişkeninin oyf si ise (2.2.) numaralı eşitlikle gösterilmektedir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} & , \ 0 \le x \le \theta \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta}, & \theta \le x \le 1 \end{cases} \quad (2.2.)$$

Bu dağılım tek modlu bir dağılım olmakla birlikte, dağılımın modu θ dır. Asimetrik üçgensel dağılımın oyf sinde $\theta = 1/2$ olarak alınır ise eşitlik (2.1.) de verilen simetrik üçgensel dağılımın oyf si elde edilmektedir. Ayrıca bu dağılımda, $\theta = 0$ ise sol üçgensel dağılım elde edilir ve oyf si, $f(x) = 2(1-x), \ 0 \le x \le 1$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\theta = 1$ olması durumunda da sağ üçgensel dağılım elde edilir ve oyf si, $f(x) = 2x, \ 0 \le x \le 1$ ile gösterilir.

Standart üçgensel dağılıma sahip bir X rastgele değişkenin kdf si ise,

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\theta} & , \ 0 \le x \le \theta \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{1-\theta}, & \theta \le x \le 1 \end{cases} \quad (2.3.)$$

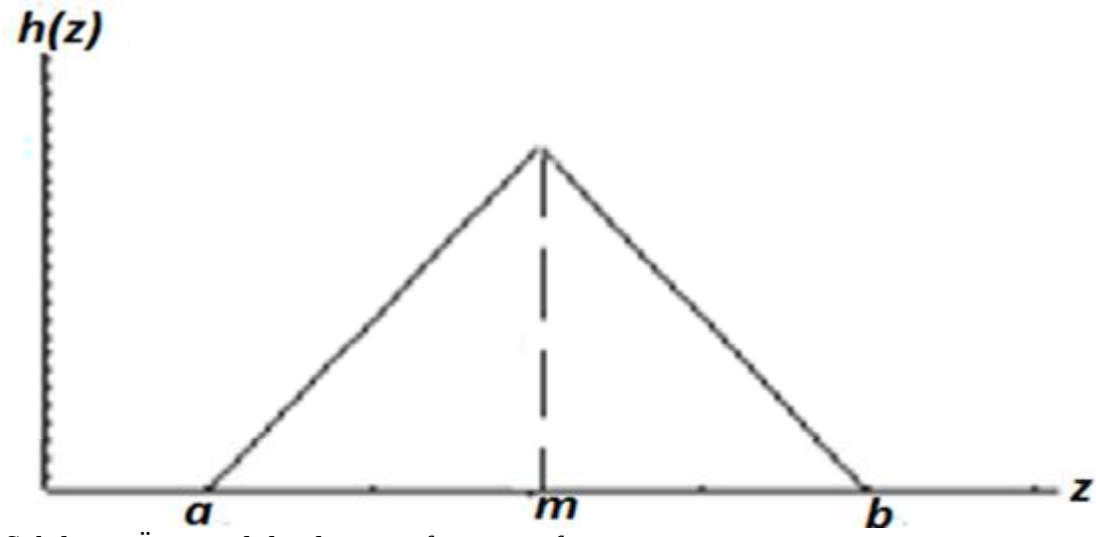
eşitliği ile ifade edilir. Ayrıca, eğer $\theta = 0$ ise $F(x) = 1 - (1-x)^2, \ 0 \le x \le 1$, $\theta = 1$ ise $F(x) = x^2, \ 0 \le x \le 1$ dir.

Birçok standart dağılıma benzer olarak standart üçgensel dağılım, konum ve ölçek parametreleri eklenerek genelleştirilebilir. Buradan yola çıkarak $X, \theta \in [0,1]$ aralığında tanımlı standart üçgensel dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun. $a \in R$ ve $w \in (0, \infty)$ için $Z = a + wX$ olmak üzere Z rastgele değişkeni, a konum parametreli, w ölçek parametreli ve θ şekil parametreli üçgensel dağılıma sahiptir. Burada dağılımın ifadesinin daha anlaşır olması için $m = a + \theta w$ ve $w = (b-a)$

(a; alt sınır, m; mod, ve b; üst sınır) dönüşümleri yapılırsa, üçgensel dağılıma sahip Z rastgele değişkeninin oyf si,

$$h(z;a,m,b) = \begin{cases} \frac{2(z-a)}{(b-a)(m-a)}, & a \le z \le m \\ \frac{2(b-z)}{(b-a)(b-m)}, & m \le z \le b \end{cases} \qquad (2.4.)$$

eşitliği ile gösterilir ve $Z \sim Triangular(a,m,b)$ olarak ifade edilir. Oyf si pozitif uzayda, $[a,b]$ aralığında süreklidir, $[a,m]$ aralığında doğrusal artan iken $[m,b]$ aralığında doğrusal azalandır ve Şekil 2.1. de verilen üçgensel dağılımın grafiğinde de net olarak görülmektedir.



Şekil 2.1. Üçgensel dağılımın oyf sinin grafiği

Üçgensel dağılıma sahip bir Z rastgele değişkenin kdf si ise,

$$F(z) = \begin{cases} \frac{(z-a)^2}{(b-a)(m-a)}, & a \le z \le m \\ 1 - \frac{(b-z)^2}{(b-a)(b-m)}, & m \le z \le b \end{cases} \qquad (2.5.)$$

eşitliği ile verilmektedir.

2.1.2. Momentler ve Moment Çıkaran Fonksiyon

[0,1] aralığında tanımlı standart üçgensel dağılımın $k-ıncı$ momenti, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir.

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k f(x)dx = \frac{2(1-\theta^{k+1})}{(k+1)(k+2)(1-\theta)} \quad (2.6.)$$

$$E[X] = \mu_1' = \frac{\theta+1}{3} \quad (2.7.)$$

$$Var(X) = \mu_2 = \frac{1-\theta(1-\theta)}{18} \quad (2.8.)$$

Varyans, $\theta = 0$ ve $\theta = 1$ olduğunda $1/18$ değerini alır ki bu değer alabileceği en büyük değerdir. $\theta = 1/2$ olduğunda ise varyans $3/72$ değerini alır ki bu değer de alabileceği en küçük değerdir.

Benzer şekilde eşitlik (2.6.) da $k = 3$ ve $k = 4$ alınarak merkezi moment tanımı uygulandığında çarpıklık ve basıklık katsayılarının ölçüleri de aşağıda verilen eşitliklerdeki gibi hesaplanabilir.

$$\mu_3 = E\big[\big(X - E(X)\big)\big]^3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2{\mu_1'}^3 = \frac{(1-2\theta)(2-\theta)(1-\theta)}{270} \quad (2.9.)$$

$$\mu_4 = E\big[\big(X - E(X)\big)\big]^4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'{\mu_1'}^2 - 3{\mu_1'}^4 = \frac{\big(1-\theta(1-\theta)\big)^2}{135} \quad (2.10.)$$

$[a, b]$ aralığında tanımlı üçgensel dağılıma sahip Z rastgele değişkenin momentleri ise, standart üçgensel dağılıma sahip X rastgele değişkenin momentlerinden yararlanılarak $Z = a + (b-a)X$ dönüşümü ile hesaplanabilir. Z rastgele değişkeninin bazı satır ve merkezi momentleri aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir.

$$E[Z^k] = E[\{a + (b-a)X\}^k] = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(b-a)^i a^{k-1}E[X^i] \quad (2.11.)$$

$$\mu_1' = E(Z) = \frac{a+m+b}{3} \quad (2.12.)$$

$$\mu_2' = E(Z^2) = \frac{a^2+m^2+b^2+ab+am+bm}{6} \quad (2.13.)$$

$$\mu_2 = Var(Z) = \frac{a^2+m^2+b^2-ab-am-bm}{18} \quad (2.14.)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(a+b-2m)(2a-b-m)(a-2b+m)}{5(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.15.)$$

$$\gamma_2 = -\frac{3}{5} \quad (2.16.)$$

$[a, b]$ aralığında tanımlı üçgensel dağılımın medyanı (2.17.) ve moment çıkaran fonksiyonu ise (2.18.) numaralı eşitliklerle verilir.

$$medyan = \begin{cases} a + \sqrt{\frac{(b-a)(m-a)}{2}}, & m \geq \frac{a+b}{2} \\ b - \sqrt{\frac{(b-a)(b-m)}{2}}, & m \leq \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad (2.17.)$$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = \frac{2(b-m)e^{at}-(b-a)e^{mt}+(m-a)e^{bt}}{(b-a)(m-a)(b-m)t^2}, \quad t \neq 0 \quad (2.18.)$$

2.1.3. Dağılımın Özel Durumları

Parametrelerin çeşitli durumlarında üçgensel dağılımlı bir rastgele değişkenin çeşitli fonksiyonları da yine bir üçgensel dağılıma sahiptir. İspatları Kotz ve Van Dorp (2004a) da bulunan bu özellikler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Teorem 2.1. U_1 ve U_2 standart düzgün dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere,

a) $X = |U_2 - U_1|$ rastgele değişkeni, $\theta = 0$ olmak üzere standart üçgensel dağılıma sahiptir.

b) $Y = (U_1 + U_2)/2$ rastgele değişkeni, $\theta = 1/2$ olmak üzere standart üçgensel dağılıma sahiptir.

Teorem 2.2. U_1 ve U_2 rastgele değişkenlerinin standart düzgün dağılıma sahip ve birbirinden bağımsız oldukları varsayılsın. O zaman,

- $X = \min\{U_1, U_2\}$ rastgele değişkeni, $\theta = 0$ olmak üzere standart üçgensel dağılıma sahiptir.
- $Y = \max\{U_1, U_2\}$ rastgele değişkeni, $\theta = 1$ olmak üzere standart üçgensel dağılıma sahiptir.

Teorem 2.3. Eğer X, θ parametreli standart üçgensel dağılıma sahip ise, $1 - X$ de $1 - \theta$ parametreli standart üçgensel dağılıma sahiptir.

2.1.4. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri

Eşitlik (2.2.) de verilen standart üçgensel dağılımdaki şekil (veya eşik) parametresi olan θ nın tahmini, açıklayıcı bir yol izlenerek elde edilecektir (Kotz ve Van Dorb, 2004a).

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)$, s birimlik bir örneklem ve sıra istatistikleri $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(s)}$ olsun. Eşitlik (2.2.) de verilen dağılımın olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\underline{X}; \theta) = 2^s \{H(\underline{X}; \theta)\} \qquad (2.19.)$$

şeklindedir. (2.19.) numaralı eşitlikte yer alan $H(\underline{X}; \theta)$ fonksiyonu ise aşağıda gibi tanımlanmıştır.

$$H\left(\underline{X};\theta\right) = \frac{\prod_{i=1}^{r} X_{(i)} \prod_{i=r+1}^{s}(1-X_{(i)})}{\theta^{r}(1-\theta)^{s-r}} \tag{2.20.}$$

burada $X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}$, $X_{(0)} \equiv 0$ ve $X_{(s+1)} \equiv 1$ dir.

Teorem 2.4. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)$, standart üçgensel dağılımdan alınmış, bağımsız bir örneklem olsun. Eşitlik (2.19.) da verilen olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta} = X_{(\hat{r})} \tag{2.21.}$$

ve eşitlikte yer alan $\hat{r}$ ise,

$$\hat{r} = \underbrace{\arg max}_{r \in \{1,\dots,s\}} \; M(r) \tag{2.22.}$$

olarak gösterilir, (2.22.) numaralı eşitlikte yer alan $M(r)$ ise,

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^{s} \frac{1-X_{(i)}}{1-X_{(r)}} \tag{2.23.}$$

eşitliği ile verilmektedir.

2.1.5. Rastgele Sayı Üretimi

Olasılık integral dönüşümü yardımıyla, standart üçgensel dağılımdan rastgele sayı üretilebilir. (2.3.) numaralı eşitlikte yer alan kdf yardımıyla kantil fonksiyonu aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{\theta y}, & 0 \leq y < \theta \\ 1 - \sqrt{(1-y)(1-\theta)}, & \theta \leq y \leq 1. \end{cases} \tag{2.24.}$$

$U \sim U(0,1)$, [0,1] aralığı üzerindeki düzgün dağılım, ve aynı şekilde $(1-U) \sim U(0,1)$ olsun. O zaman aşağıdaki rastgele değişken θ parametreli standart üçgensel dağılıma sahip olur ve böylece rastgele sayı üretilmiş olur.

$$X = \begin{cases} \sqrt{\theta u}, & 0 \leq u < \theta \\ 1 - \sqrt{(1-u)(1-\theta)}, & \theta \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (2.25.)$$

Ayrıca ilk çeyreklik, eğer $1/4 \leq \theta \leq 1$ ise $\sqrt{\theta/4}$, eğer $0 \leq \theta \leq 1/4$ ise $1 - \sqrt{3(1-\theta)/4}$ olur. Medyan, eğer $1/2 \leq \theta \leq 1$ ise $\sqrt{\theta/2}$, eğer $0 \leq \theta \leq 1/2$ ise $1 - \sqrt{(1-\theta)/2}$ olur. Üçüncü çeyreklik de, eğer $3/4 \leq \theta \leq 1$ ise $\sqrt{3\theta/4}$, eğer $0 \leq \theta \leq 3/4$ ise $1 - \sqrt{(1-\theta)/4}$ olarak elde edilir.

Benzer şekilde, $[a, b]$ aralığında tanımlı üçgensel dağılımdan da rastgele sayı üretilebilir. (2.5.) numaralı eşitlikte yer alan kdf yardımıyla elde edilen kantil fonksiyonu aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + (b-a)\sqrt{\theta y}, & 0 \leq y < \theta \\ a + (b-a)(1 - \sqrt{(1-y)(1-\theta)}), & \theta \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (2.26.)$$

$U \sim U(0,1)$, ve aynı şekilde $(1-U) \sim Unif(0,1)$ olsun. O zaman aşağıdaki rastgele değişken $[a, b]$ aralığında tanımlı, θ parametreli üçgensel dağılıma sahip olur ve böylece rastgele sayı üretilmiş olur.

$$Z = \begin{cases} a + (b-a)\sqrt{\theta u}, & 0 \leq u < \theta \\ a + (b-a)(1 - \sqrt{(1-u)(1-\theta)}), & \theta \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (2.27.)$$

2.2. Üçgensel Dağılımlı İki Rastgele Değişkenin Konvolüsyonunun Dağılımı

Bu kısımda önce iki yönlü sürekli bir dağılım ailesi tanıtılacak ve bu aileye dayalı olarak, Van Dorp ve Kotz (2003) tarafından elde edilen bir konvolüsyonun tam dağılımı verilecektir.

2.2.1. İki Yönlü Sürekli Dağılım Ailesi

Bu kısımda öncelikli olarak, sınırlandırılmış iki yönlü sürekli dağılımlar ailesinin genel formu tanıtılarak bu dağılımların konvolüsyonlarının genel olarak elde edilişi verilecektir. Akabinde ise üçgensel dağılıma sahip rastgele değişkenlerin konvolüsyonunun dağılım fonksiyonu elde edilecektir.

[0,1] aralığında tanımlı genelleştirilmiş iki yönlü sürekli dağılımlar ailesinin oyf si (2.28.) eşitliğindeki gibi tanımlanmıştır (Van Dorp ve Kotz, 2003).

$$g\{x \mid \theta, p(. \mid \psi)\} = \begin{cases} p\left(\frac{x}{\theta} \mid \psi\right), & 0 < x \leq \theta \\ p\left(\frac{1-x}{1-\theta} \mid \psi\right), & \theta < x \leq 1 \end{cases} \qquad (2.28.)$$

$p(. \mid \psi)$, ψ parametreli [0,1] aralığında tanımlı belirlenen dağılıma uygun bir oyf dir. $p(. \mid \psi)$ fonksiyonu iki yönlü dağılımlar ailesinin üreteç fonksiyonu ve θ parametresi ise yansıma parametresi olarak bilinir.

Eşitlik (2.28.) ile tanımlanan ailede, iki yönlü dağılımların her birini elde etmek için farklı üreteç fonksiyonları kullanılır. Örnek teşkil etmesi bakımından bu dağılım ve üreteç fonksiyonlarının bazılarına Tablo 2.1 de yer verilmiştir. [0,1] aralığında tanımlı tüm iki yönlü dağılımlar için benzer şekilde üreteç fonksiyonları tanımlanabilmektedir.

Tablo 2.1. Bazı iki yönlü dağılımlar ve üreteç fonksiyonları

Elde Edilecek Dağılım	**Üreteç Fonksiyonu**
Üçgensel Dağılım	$p(y) = 2y$
Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı	$p(y \mid n) = ny^{n-1}$
İki Yönlü Kesilmiş Üstel Dağılım	$p(y \mid \lambda) = e^{-\lambda y}/(1 - e^{-\lambda})$
İki Yönlü Slope Dağılımı	$p(y \mid \alpha) = (2/(\alpha + 1))\{\alpha(1 - y) + y\}$
Ogive Dağılımı	$p(y \mid \alpha) = \{2m(m + 1)/(3m + 1)\}y^{\frac{m-1}{2}} + \{(1 - m^2)/(3m + 1)\}y^m$

İki yönlü sürekli dağılımlar ailesinin kdf si ise aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$G\{x \mid \theta, P(. \mid \psi)\} = \begin{cases} \theta P\left(\frac{x}{\theta} \mid \psi\right) & , \ 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1-\theta)P\left(\frac{1-x}{1-\theta} \mid \psi\right), & \theta < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.29.)$$

$P(. \mid \psi)$, $p(. \mid \psi)$ üreteç fonksiyonunun kdf sidir. Bu eşitlikten yararlanarak $G(\theta \mid \theta, \psi) = \theta P(1 \mid \psi)$ özelliği elde edilebilir. Buradan çıkarılan sonuç ise, bütün iki yönlü dağılımların dağılım fonksiyonu için θ nın bir bağlantı noktası olduğudur.

2.2.1.1. Momentler

Eğer $X \sim g\{x \mid \theta, p(. \mid \psi)\}$ ve $Y \sim p(. \mid \psi)$ ise, X ve Y nin sıfıra göre momentleri arasındaki ilişki kullanılarak basit bir biçimde aşağıdaki ifade elde edilmiştir (Van Dorp ve Kotz, 2003).

$$E[X^k \mid \theta, \psi] = \theta^{k+1} E[Y^k \mid \psi] + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (1-\theta)^{i+1} E[Y^i \mid \psi]. \quad (2.30.)$$

Eşitlik (2.30.) yardımıyla, özellikle büyük k değerleri için Y nin üreteç fonksiyonu kullanılarak iki yönlü dağılımların momentleri kapalı formda kolayca hesaplanabilir. Örnek olması açısından beklenen değer ve varyans bu eşitlik kullanılarak sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E[X \mid \theta, \psi] = (2\theta - 1)E[Y \mid \psi] + (1 - \theta) \quad (2.31.)$$

$$Var[X \mid \theta, \psi] = [\theta^3 + (1-\theta)^3] Var(Y \mid \psi) + \theta(1-\theta)(E[Y \mid \psi] - 1)^2 \quad (2.32.)$$

2.2.1.2. İki Yönlü Sürekli Dağılım Ailesinin Konvolüsyonunun Dağılımı

Bu kısımda, Van Dorp ve Kotz (2003) tarafından, tam dağılımı bulunmuş olan iki yönlü sürekli dağılım ailesinin konvolüsyonunun dağılımının nasıl elde edildiği aktarılacaktır.

$X \sim g_X\{x \mid \theta_x, p(. \mid \psi)\}$ ve $Y \sim g_Y\{y \mid \theta_y, q(. \mid \gamma)\}$ $(0 \leq \theta_x, \theta_y \leq 1)$ olmak üzere birbirinden bağımsız iki rastgele değişken olsun. $Z = X + Y$ nin oyf si olan $g_Z(z \mid \theta)$, Van Dorp ve Kotz (2003) tarafından aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunmuştur.

$$g_Z(z \mid \Theta) = \int_{x=0}^{x=1} g_X\{x \mid \theta_x, p(. \mid \psi)\} g_Y\{z - x \mid \theta_y, q(. \mid \gamma)\} I_{[0,1]}(z - x) dx \tag{2.33.}$$

eşitlikte yer alan Θ parametre kümesi; $\Theta = \{\theta_x, \psi, \theta_y, \gamma\}$ ve $I_A(x)$ gösterge fonksiyonu ise,

$$I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} \tag{2.34.}$$

olarak ifade edilirler. Ayrıca Van Dorp ve Kotz (2003), $g_Z(z \mid \Theta)$ integralini, dört integralin toplamı olarak aşağıdaki eşitlikteki gibi göstermiştir.

$$g_Z(z \mid \Theta) = \sum_{i=1}^{4} I_i(z \mid \Theta) \tag{2.35.}$$

(2.35.) eşitliğindeki $I_i(z \mid \Theta)$ ifadeleri açık halde (2.36.) eşitliğinde sunulmuştur.

$$\begin{cases} I_1(z \mid \Theta) = \int_{x \in A_1(z)} p(\frac{x}{\theta_x} \mid \psi) q(\frac{z-x}{\theta_y} \mid \gamma) dx \\ I_2(z \mid \Theta) = \int_{x \in A_2(z)} p(\frac{x}{\theta_x} \mid \psi) q(\frac{1-z+x}{1-\theta_y} \mid \gamma) dx \\ I_3(z \mid \Theta) = \int_{x \in A_3(z)} p(\frac{1-x}{1-\theta_x} \mid \psi) q(\frac{z-x}{\theta_y} \mid \gamma) dx \\ I_4(z \mid \Theta) = \int_{x \in A_4(z)} p(\frac{1-x}{1-\theta_x} \mid \psi) q(\frac{1-z+x}{1-\theta_y} \mid \gamma) dx \end{cases} \tag{2.36.}$$

Bu integrallerin sınırlarının belirlenmesini sağlayan $A_i(z)$ aralıkları ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{cases} A_1(z\,|\theta_x,\theta_y) = [0,\theta_x) \cap (z-\theta_y, z] \\ A_2(z\,|\theta_x,\theta_y) = [0,\theta_x) \cap (z-1, z-\theta_y] \\ A_3(z\,|\theta_x,\theta_y) = [\theta_x,1) \cap (z-\theta_y, z] \\ A_4(z\,|\theta_x,\theta_y) = [\theta_x,1) \cap (z-1, z-\theta_y] \end{cases} \quad (2.37.)$$

Örnek olarak, $\theta_x < \theta_y$ ve $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımları altında $\theta_x \leq z \leq \theta_y$ durumu için $A_i(z\,|\theta_x,\theta_y), i = 1,\dots,4$ nın hesaplanışı eşitlik (2.38.) ile verilmiştir.

$$\begin{cases} A_1(z\,|\theta_x,\theta_y) = [0,\theta_x) & \theta_x \leq z \leq \theta_y \\ A_2(z\,|\theta_x,\theta_y) = \emptyset & \theta_x \leq z \leq \theta_y \\ A_3(z\,|\theta_x,\theta_y) = [\theta_x, z) & \theta_x \leq z \leq \theta_y \\ A_4(z\,|\theta_x,\theta_y) = \emptyset & \theta_x \leq z \leq \theta_y \end{cases} \quad (2.38.)$$

Böylece, (2.38.) eşitliğinde görüldüğü gibi, $\theta_x \leq z \leq \theta_y$ durumunun $g_Z(z\,|\Theta)$ nın elde edilişindeki $I_2(z\,|\Theta)$ ve $I_4(z\,|\Theta)$ integrallerine bir katkısı olmadığı anlaşılmaktadır.

(2.37) eşitliğindeki bölgelerin tanımlanması için çeşitli alt aralıkların incelenmesi gerekmektedir. $\theta_x \leq \theta_y$ ve $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımları için,

$$z \in [0,\theta_x),\ z \in [\theta_x,\theta_y),\ z \in [\theta_y,\theta_x+\theta_y),\ z \in [\theta_x+\theta_y,1), z \in [1,\theta_x+1),$$
$$z \in [\theta_x+1,\theta_y+1), z \in [\theta_y+1,2] \quad (2.39.)$$

durumları söz konusu iken, $\theta_x \leq \theta_y$ ve $\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımları için ise,

$$z \in [0,\theta_x),\ z \in [\theta_x,\theta_y),\ z \in [\theta_y,1),\ z \in [1,\theta_x+\theta_y),\ z \in [\theta_x+\theta_y,\theta_x+1)$$
$$z \in [\theta_x+1,\theta_y+1),\ z \in [\theta_y+1,2] \quad (2.40.)$$

durumları değerlendirilir. Bu durumlar ve $A_i(z\,|\theta_x,\theta_y), i = 1,\dots,4$ aralıkları $\theta_x + \theta_y \leq 1$ ve $\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımlara göre sırasıyla Tablo 2.2. ve Tablo 2.3. de daha açık bir şekilde görülebilir.

Tablo 2.2. $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımı altında Z nin [0,2] aralığında birbiriyle örtüşmeyen yedi alt aralık için belirlenen $A_i(z \mid \theta_x, \theta_y), i = 1, \ldots, 4$ aralıkları

Alan	$\boldsymbol{A_1(z)}$	$\boldsymbol{A_2(z)}$	$\boldsymbol{A_3(z)}$	$\boldsymbol{A_4(z)}$
$z \in [0, \theta_x)$	$[0, z]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$z \in [\theta_x, \theta_y)$	$[0, \theta_x)$	$\emptyset$	$[\theta_x, z]$	$\emptyset$
$z \in [\theta_y, \theta_x + \theta_y)$	$(z - \theta_y, \theta_x)$	$[0, z - \theta_y]$	$[\theta_x, z]$	$\emptyset$
$z \in [\theta_x + \theta_y, 1)$	$\emptyset$	$[0, \theta_x)$	$(z - \theta_y, z]$	$[\theta_x, z - \theta_y]$
$z \in [1, \theta_x + 1)$	$\emptyset$	$[z - 1, \theta_x)$	$(z - \theta_y, 1]$	$[\theta_x, z - \theta_y]$
$z \in [\theta_x + 1, \theta_y + 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(z - \theta_y, 1]$	$[z - 1, z - \theta_y]$
$z \in [\theta_y + 1, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[z - 1, 1]$

Tablo 2.3. $\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımı altında Z nin [0,2] aralığında birbiriyle örtüşmeyen yedi alt aralık için belirlenen $A_i(z \mid \theta_x, \theta_y), i = 1, \ldots, 4$ aralıkları

Alan	$\boldsymbol{A_1(z)}$	$\boldsymbol{A_2(z)}$	$\boldsymbol{A_3(z)}$	$\boldsymbol{A_4(z)}$
$z \in [0, \theta_x)$	$[0, z]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$z \in [\theta_x, \theta_y)$	$[0, \theta_x)$	$\emptyset$	$[\theta_x, z]$	$\emptyset$
$z \in [\theta_y, 1)$	$(z - \theta_y, \theta_x)$	$[0, z - \theta_y]$	$[\theta_x, z]$	$\emptyset$
$z \in [1, \theta_x + \theta_y)$	$(z - \theta_y, \theta_x)$	$[z - 1, z - \theta_y]$	$[\theta_x, 1]$	$\emptyset$
$z \in [\theta_x + \theta_y, \theta_x + 1)$	$\emptyset$	$[z - 1, \theta_x)$	$(z - \theta_y, 1]$	$[\theta_x, z - \theta_y]$
$z \in [\theta_x + 1, \theta_y + 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(z - \theta_y, 1]$	$[z - 1, z - \theta_y]$
$z \in [\theta_y + 1, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[z - 1, 1]$

Tablo 2.2 ve Tablo 2.3 incelendiğinde dikkat çeken noktalardan biri, her bir durumdaki $A_i(z)$ aralıklarının en az birinin boş küme olmasıdır. Bir başka nokta ise, [0,2] aralığının ilk alt durumu ($z \in [0, \theta_x)$) sadece $I_1(z \mid \Theta)$ integralinin belirlenmesine katkı sağlarken, son alt durumu ($z \in ([\theta_y + 1, 2]$) ise sadece $I_4(z \mid \Theta)$ integralinin belirlenmesine katkı sağlamaktadır.

$\theta_x + \theta_y \leq 1$ ve $\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımları altında, X'in $p(\cdot \mid \psi)$ ve Y'nin $q(\cdot \mid \gamma)$ üreteç fonksiyonları açık şekilde tanımlandığında eşitlik (2.35) ve (2.36) ile Tablo 2.2 ve Tablo 2.3 kullanılarak Z'nin dağılımı elde edilebilir.

2.2.1.3. Üçgensel Dağılımın Konvolüsyonunun Dağılımı

Van Dorp ve Kotz (2003), ayrıntılarıyla yukarıda anlatılan genel formdan yola çıkarak üçgensel dağılıma sahip iki bağımsız rastgele değişkenin konvolüsyonunun dağılımını aşağıda anlatıldığı şekilde elde etmiştir.

X ve Y, θ_x ve θ_y yansıma parametreli ve [0,1] aralığında tanımlı üçgensel dağılıma sahip olsun. Üreteç fonksiyonları ise sırasıyla, $p(x\,|\psi) = 2x$ ve $q(y\,|\gamma) = 2y$ dir. Böylece $\theta_x < \theta_y$ ve $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımları altında;

$k_1 = 2/(3\theta_x\theta_y)$ olmak üzere;

$$I_1(z\,|\theta_x,\theta_y) = \begin{cases} k_1 z^3, & z \in [0,\theta_x) \\ k_1(3\theta_x^2 z - 2\,\theta_x^3), & z \in [\theta_x,\theta_y) \\ k_1(3(\theta_x^2 + \theta_y^2)z - z^3 - 2(\theta_x^3 + \theta_y^3)), & z \in [\theta_y,\theta_x + \theta_y) \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{2.41.}$$

$k_2 = 2/(3\,\theta_x(1-\theta_y))$ olmak üzere;

$$I_2(z\,|\theta_x,\theta_y) = \begin{cases} k_2(3z^2 - z^3 + 3\theta_y(\theta_y - 2)z \\ \quad +\theta_y^2(3 - 2\theta_y)), & z \in [\theta_y,\theta_x + \theta_y) \\ k_2(\theta_x^2(2\theta_x + 3) - 3\theta_x^2 z), & z \in [\theta_x, +\theta_y, 1) \\ k_2(z^3 - 3z^2 + 3(1-\theta_x^2)z \\ \quad +\theta_x^2(2\theta_x + 3) - 1), & z \in [1,\theta_x + 1) \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{2.42.}$$

$k_3 = 2/(3(1-\theta_x)\theta_y)$ olmak üzere;

$$I_3(z\mid\theta_x,\theta_y)=\begin{cases}k_3(3z^2-z^3+3\theta_x(\theta_x-2)z & \\ +\theta_x^2(3-2\theta_x)), & z\in[\theta_x,\theta_x+\theta_y)\\ k_3(\theta_y^2(2\theta_y+3)-3\theta_y^2z), & z\in[\theta_x,+\theta_y,1)\\ k_3(z^3-3z^2+3(1-\theta_y^2)z & \\ +\theta_y^2(2\theta_y+3)-1), & z\in[1,,\theta_y+1)\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{cases} \quad (2.43.)$$

$k_4=2/(3(1-\theta_x)(1-\theta_y))$ olmak üzere;

$$I_4(z\mid\theta_x,\theta_y)=\begin{cases}k_4(z^3-6z^2+3(2+3(\theta_x+\theta_y)-\theta_x^2-\theta_y)z & \\ +2(\theta_x^3+\theta_y^3)-6(\theta_x+\theta_y)), & z\in[\theta_x+\theta_y,\theta_x+1)\\ k_4(-3+6\theta_y-3\theta_y^2)z & \\ +2\theta_y^3-6\theta_y+4), & z\in[\theta_x+1,\theta_y+1)\\ k_4(2-z)^3, & z\in[\theta_y+1,2]\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{cases} \quad (2.44)$$

integral parçaları elde edilir ve (2.35.) numaralı eşitliği uygulanırsa Z'nin oyf si eşitlik (2.45.) deki gibi elde edilir.

$$g_Z(z\mid\theta_x,\theta_y)=\begin{cases}\frac{2z^3}{\theta_x\theta_y}, & z\in[0,\theta_x)\\ \frac{2(3z^2-z^3-3\theta_xz+\theta_x^2)}{3(1-\theta_x)\theta_y}, & z\in[\theta_x,\theta_y)\\ \frac{g_{3Z}(z\mid\Theta)}{3(\theta_x(1-\theta_x)\theta_y(1-\theta_y))}, & z\in[\theta_y,\theta_x+\theta_y)\\ \frac{g_{4Z}(z\mid\Theta)}{3(1-\theta_x)(1-\theta_y)}, & z\in[\theta_x+\theta_y,1)\\ \frac{g_{5Z}(z\mid\Theta)}{3\theta_x(1-\theta_x)\theta_y(1-\theta_y)}, & z\in[1,\theta_x+1)\\ \frac{2(z^33z^2+3(1-\theta_y)z+\theta_y^2+4\theta_y-1)}{3(1-\theta_x)\theta_y}, & z\in[\theta_x+1,\theta_y+1)\\ \frac{2(2-z)^3}{3(1-\theta_x)(1-\theta_y)}, & z\in[\theta_y+1,2]\end{cases} \quad (2.45.)$$

(2.45) eşitliğinde yer alan $g_{3Z}(z\mid\Theta), g_{4Z}(z\mid\Theta)$ ve $g_{5Z}(z\mid\Theta)$ ifadeleri ise aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir.

$$g_{3Z}(z\,|\Theta) = 2\left(\left(\theta_x\theta_y - 1\right)z^3 + 3\left(\theta_x + \theta_y - 2\theta_x\theta_y\right)z^2 - 3\left(\theta_x^2\left(1-\theta_y\right) + \theta_y^2(1-\theta_x)\right)z + \theta_x^3\left(1-\theta_y\right) + \theta_y^3(1-\theta_x)\right) \quad (2.46.)$$

$$g_{4Z}(z\,|\Theta) = 2\left(z^3 - 6z^2 + \left(6 + 3\theta_x + 3\theta_y\right)z - \theta_x(3+\theta_x) - \theta_y\left(3+\theta_y\right)\right) \quad (2.47.)$$

$$g_{5Z}(z\,|\Theta) = 2\left(\left(\theta_x + \theta_y - \theta_x\theta_y\right)z^3 - 3\left(\theta_x + \theta_y\right)z^2\right) + 3\left(\theta_x\left(1+\theta_y^2\right) + \theta_y(1+\theta_x^2)\right)z - \left(\theta_x + \theta_y\right) - \theta_x\theta_y\left(\theta_x^2 + \theta_y^2 + 3\theta_x + 3\theta_y - 2\right) \quad (2.48.)$$

Böylece, üçgensel dağılımlı bağımsız iki rastgele değişkenin konvolüsyonunun tam dağılımı (2.45.) eşitliğindeki gibi parçalı formda bir oyf ile elde edilir.

2.3. Üçgensel Dağılımlı İki Rastgele Değişkenin Çarpımının Dağılımı

Glickman ve Xu (2008), üçgensel dağılıma sahip bağımsız iki rastgele değişkenin çarpımının tam dağılımını elde etmiştir. Tezin bu kısmında öncelikle, Glickman ve Xu (2008) nun elde ettiği tam dağılım verilecek, sonrasında ise yazarlar tarafından verilmemiş olan sınır parametrelerinin sıfır olduğu özel durumlar çalışılacaktır.

$V = XY$ olsun. V'nin oyf si ise aşağıdaki integralin çözülmesiyle elde edilir.

$$f(v) = \int_{x_1}^{x_2} g\left(\frac{v}{x}\right) h(x)\frac{1}{x}dx \quad (2.49.)$$

Oyf lerin sınırlı uzayda parçalı fonksiyonlar olmaları nedeniyle, burada integral sınırları aşağıda anlatılan çeşitli durumlara göre belirlenir.

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $a \le x \le m,\ c \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_1 = 4 \,/\, ((d-c)(n-c)(b-a)(m-a))$ olarak verilir. Yukarıda bahsedildiği gibi bu durumda, $an < mc$, $an = mc$ ve $an > mc$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $an < mc$ durumu;

$$f_{11}(v) = \begin{cases} k_1\left[2(ac-v) + (ac+v)\ln\left(\frac{v}{ac}\right)\right] & , v \in (ac, an) \\ k_1\left[a(c-n) - \left(1-\frac{c}{n}\right)v + (ac+v)\ln\left(\frac{n}{c}\right)\right] & , v \in (an, mc) \\ k_1\left[\left(\frac{a}{m}+\frac{c}{n}\right)v - mc - an + (ac+v)\ln\left(\frac{mn}{v}\right)\right], & v \in (mc, mn) \end{cases} \quad (2.50.)$$

İkinci alt durum olan $an = mc$ durumu;

$$f_{12}(v) = \begin{cases} k_1\left[2(ac-v) + (ac+v)\ln\left(\frac{v}{ac}\right)\right] & , v \in (ac, an) \\ k_1\left[\left(\frac{a}{m}+\frac{c}{n}\right)v - mc - an + (ac+v)\ln\left(\frac{mn}{v}\right)\right], & v \in (an, mn) \end{cases} \quad (2.51.)$$

Üçüncü alt durum olan $an > mc$ durumu;

$$f_{13}(v) = \begin{cases} k_1\left[2(ac-v) + (ac+v)\ln\left(\frac{v}{ac}\right)\right] & , v \in (ac, mc) \\ k_1\left[\left(\frac{a}{m}-1\right)v + (a-m)c + (ac+v)\ln\left(\frac{m}{a}\right)\right], & v \in (mc, an) \\ k_1\left[\left(\frac{a}{m}+\frac{c}{n}\right)v - mc - an + (ac+v)\ln\left(\frac{mn}{v}\right)\right], & v \in (an, mn) \end{cases} \quad (2.52.)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $a \le x \le m,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise

$k_2 = 4 / ((d-c)(d-n)(b-a)(m-a))$ olarak verilir. Birinci duruma benzer olarak, $ad < mn,\ ad = mn$ ve $ad > mn$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $ad < mn$ durumu;

$$f_{21}(v) = \begin{cases} k_2\left[\left(\frac{d}{n}+1\right)v - a(n+d) + (ad+v)\ln\left(\frac{an}{v}\right)\right], & v \in (an, ad) \\ k_2\left[\left(\frac{d}{n}-1\right)v + a(d-n) + (ad+v)\ln\left(\frac{n}{d}\right)\right], & v \in (ad, mn) \\ k_2\left[(a+m)d - \left(\frac{a}{m}+1\right)v + (ad+v)\ln\left(\frac{v}{dm}\right)\right], & v \in (mn, md) \end{cases} \quad (2.53.)$$

İkinci alt durum olan $ad = mn$ durumu;

$$f_{22}(v) = \begin{cases} k_2\left[\left(\frac{d}{n}+1\right)v - a(n+d) + (ad+v)\ln\left(\frac{an}{v}\right)\right], & v \in (an, ad) \\ k_2\left[(a+m)d - \left(\frac{a}{m}+1\right)v + (ad+v)\ln\left(\frac{v}{dm}\right)\right], & v \in (ad, md) \end{cases} \quad (2.54.)$$

Üçüncü alt durum olan $ad > mn$ durumu;

$$f_{23}(v) = \begin{cases} k_2\left[\left(\frac{d}{n}+1\right)v - a(n+d) + (ad+v)\ln\left(\frac{an}{v}\right)\right], & v \in (an, mn) \\ k_2\left[(m-a)d - \left(\frac{a}{m}-1\right)v + (ad+v)\ln\left(\frac{a}{m}\right)\right], & v \in (mn, ad) \\ k_2\left[(a+m)d - \left(\frac{a}{m}+1\right)v + (ad+v)\ln\left(\frac{v}{dm}\right)\right], & v \in (ad, md) \end{cases} \quad (2.55.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ c \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = 4 / ((d-c)(n-c)(b-a)(b-m))$ olarak verilir. Birinci duruma benzer olarak bu durumda da, $mn < bc,\ mn = bc$ ve $mn > bc$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $mn < bc$ durumu;

$$f_{31}(v) = \begin{cases} k_3\left[\left(\frac{b}{m}+1\right)v-(m+b)c+(bc+v)\ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right], v\in(mc,mn) \\ k_3\left[\left(1-\frac{c}{n}\right)v+b(n-c)+(bc+v)\ln\left(\frac{c}{n}\right)\right] \quad , v\in(mn,bc) \\ k_3\left[b(n+c)-\left(1+\frac{c}{n}\right)v+(bc+v)\ln\left(\frac{v}{bn}\right)\right], v\in(bc,bn) \end{cases} \tag{2.56.}$$

İkinci alt durum olan $mn = bc$ durumu;

$$f_{32}(v) = \begin{cases} k_3\left[\left(\frac{b}{m}+1\right)v-(m+b)c+(bc+v)\ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right], \quad v\in(mc,mn) \\ k_3\left[b(n+c)-\left(1+\frac{c}{n}\right)v+(bc+v)\ln\left(\frac{v}{bn}\right)\right] \quad , \quad v\in(mn,bn) \end{cases} \tag{2.57.}$$

Üçüncü alt durum olan $mn > bc$ durumu;

$$f_{33}(v) = \begin{cases} k_3\left[\left(\frac{b}{m}+1\right)v-(m+b)c+(bc+v)\ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right], v\in(mc,mn) \\ k_3\left[\left(\frac{b}{m}-1\right)v+c(b-m)+(bc+v)\ln\left(\frac{m}{b}\right)\right], v\in(mn,bc) \\ k_3\left[b(n+c)-\left(1+\frac{c}{n}\right)v+(bc+v)\ln\left(\frac{v}{bn}\right)\right], v\in(bc,bn) \end{cases} \tag{2.58.}$$

Durum 4: Son durumda ise x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = 4/((d-c)(d-n)(b-a)(b-m))$ olarak verilir. Birinci duruma benzer olarak, $md < bn,\ md = bn$ ve $md > bn$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $md < bn$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} k_4[\left(bn+dm-\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right)v+(bd+v)\ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], \ v\in(mn,md) \\ k_4\left(n(n-d)+\left(1-\frac{d}{n}\right)v+(bd+v)\ln\left(\frac{d}{n}\right)\right] \ , \ v\in(md,bn) \\ k_4\left(2(v-bd)+(bd+v)\ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \ , \ v\in(bn,bd) \end{cases} \tag{2.59.}$$

İkinci alt durum olan $md = bn$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} k_4[\left(bn + dm - \left(\frac{d}{n} + \frac{b}{m}\right)v + (bd + v)\ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], & v \in (mn, md) \\ k_4\left(2(v - bd) + (bd + v)\ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] & , v \in (md, bd) \end{cases} \quad (2.60.)$$

Üçüncü alt durum olan $md > bn$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} k_4[\left(bn + dm - \left(\frac{d}{n} + \frac{b}{m}\right)v + (bd + v)\ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, bn) \\ k_4\left(v\left(1 - \frac{b}{m}\right) + (m - b)d + (bd + v)\ln\left(\frac{b}{m}\right)\right], v \in (bn, md) \\ k_4\left(2(v - bd) + (bd + v)\ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] & , v \in (md, bd) \end{cases} \quad (2.61.)$$

Görüldüğü gibi çarpımın oyf sini belirlemede an, mc, ad, mn, bc, md ve bn çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynamaktadır. Örneğin, ilk olarak an ile mc karşılaştırılır. Buna göre $f_{1i}(v)$' lerden biri alınır. Sonra ad ile mn karşılaştırılır ve $f_{2i}(v)$'lerden biri alınır ve bu şekilde devam edilir. Böylece $v \in (v_{k-1}, v_k)$ için V nin oyf si (2.63.) eşitliğindeki $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_v(v) = f_{1U(an-mc)} + f_{2U(ad-mn)} + f_{3U(md-bn)} + f_{4U(md-bn)}(v) \quad (2.62.)$$

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases} \quad (2.63.)$$

2.3.1. Sınır Değerlerinin Sıfır Olduğu Özel Durumlar

Yukarıdaki kısımda anlatılan V'nin tam dağılımı, Glikman ve Xu (2008) tarafından sınır değerlerinin pozitif olduğu varsayımıyla elde edilmiştir. Halbuki sınır

değerleri pekala sıfır değerini de alabilmektedir. Bu durumda V'nin tam dağılımının ne olacağı bilinmek istenebilir. Bu kısımda Glikman ve Xu (2008) nun çalışmasının bir tamamlayıcısı olarak bu özel durumlarda V'nin oyf leri elde edilmiştir.

$X \sim Triangular(a,m,b)$ ve $Y \sim Triangular(c,n,d)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $a = 0, c = 0$ ve $a = 0, c \neq 0$ durumları göz önünde bulundurularak $V = XY$ nin oyf leri elde edilecektir.

Özel durumlar için de genel durumdakine benzer olarak, V'nin oyf si (2.49.) numaralı eşitlik yardımıyla elde edilmekte ve oyf lerinin parçalı tanımlı olmalarından ötürü dört farklı durum ve bu durumların farklı alt durumları ile karşılaşılmaktadır. $a = 0,\ c = 0\ ve\ a = 0,\ c \neq 0$ için tüm durum ve alt durumlar sırasıyla Tablo 2.4. ve Tablo 2.5. ile verilmektedir.

Tablo 2.4. $a = 0, c = 0$ için durumlar ve alt durumlar

Durumlar	**Alt durumlar**
$0 \leq x \leq m\ , 0 \leq y \leq n$	$0 < mn$
$0 \leq x \leq m\ , n \leq y \leq d$	$mn < md$
$m \leq x \leq b\ , 0 \leq y \leq n$	$mn < bn$
$m \leq x \leq b\ , n \leq y \leq d$	$md < bn, md = bn, md > bn$

Tablo 2.5. $a = 0, c \neq 0$ için durumlar ve alt durumlar

Durumlar	**Alt durumlar**
$0 \leq x \leq m\ , c \leq y \leq n$	$mc < mn$
$0 \leq x \leq m\ , n \leq y \leq d$	$mn < md$
$m \leq x \leq b\ , c \leq y \leq n$	$mn < bc, mn = bc, mn > bc$
$m \leq x \leq b\ , n \leq y \leq d$	$md < bn, md = bn, md > bn$

2.3.1.1. Alt Sınırların Sıfır Olması Durumu

Birinci durum ($0 \leq x < m,\ 0 \leq y < n$),

$$f_1(v) = \int_{v/n}^{m} \frac{2x}{bm} \frac{2(\frac{v}{x})}{dn} \frac{1}{x} dx \qquad (2.64.)$$

fonksiyonu yardımı ile elde edilir. Benzer işlemlerle ve integrallerin çözülmesiyle diğer tüm durumlar ve alt durumlar aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ 0 \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak integral sabiti ise $k_1 = 4/dbmn$ olarak verilir.

$$f_1(v) = k_1\left[vln\left(\frac{mn}{v}\right)\right], v \in (0, mn) \tag{2.65.}$$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_2 = 4/bd(d-n)m$ olarak verilir.

$$f_2(v) = \begin{cases} k_2\left[vln\left(\frac{n}{d}\right) + \frac{d}{n} - 1\right] & , v \in (0, mn) \\ k_2\left[v\left(ln\left(\frac{v}{md}\right) - 1\right) + dm\right], & v \in (mn, md) \end{cases} \tag{2.66.}$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ 0 \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = 4\ /\ bd(b-m)n$ olarak verilir.

$$f_3(v) = \begin{cases} k_3\left[v\left(-1 + \frac{b}{m} + ln\left(\frac{m}{b}\right)\right)\right], v \in (0, mn) \\ k_3\left[v\left(ln\left(\frac{v}{nb}\right) - 1\right) + nb\right] & , v \in (mn, bn) \end{cases} \tag{2.67.}$$

Durum 4: Son durumda ise x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = 4\ /\ (bd(d-n)(b-m))$ olarak verilir.

Birinci alt durum olan $md < bn$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} k_4\left[-v\left(\frac{d}{n} + \frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v + bd)\,ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, md) \\ k_4\left[v\left(1 - \frac{d}{n}\right) + b(n-d) + (v + bd)\,ln\left(\frac{d}{n}\right)\right] & , v \in (md, bn) \\ k_4\left[2(v - bd) + (v + bd)\,ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] & , v \in (bn, bd) \end{cases} \tag{2.68.}$$

İkinci alt durum olan $md = bn$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} k_4\left[-v\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v+bd)\,ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, md) \\ k_4\left[2(v-bd) + (v+bd)\,ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \quad , v \in (bn, bd) \end{cases} \tag{2.69.}$$

Üçüncü alt durum olan $md > bn$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} k_4\left[-v\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v+bd)\,ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, bn) \\ k_4\left[v\left(1-\frac{b}{m}\right) + d(m-b) + (v+bd)\,ln\left(\frac{b}{m}\right)\right] \quad , v \in (bn, md) \\ k_4\left[2(v-bd) + (v+bd)\,ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \quad , v \in (md, bd) \end{cases} \tag{2.70.}$$

Çarpımın oyf sini belirlemede md ve bn çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Örneğin, Durum 4'te md ile bn karşılaştırılır ve buna göre $f_{4i}(v)$ lerden biri alınır. Böylece $v \in (0, bd)$ için V'nin oyf si (2.63.) eşitliğinde verilen $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_v(v) = \sum_{i=1}^{3} f_i(v) + f_{4U(md-bn)}(v) \tag{2.71.}$$

2.3.1.2. Alt Sınırlarından Yalnız Birinin Sıfır Olması Durumu

Birinci durum $(0 \le x \le m,\ c \le y \le n)$,

$$f_1(v) = \begin{cases} \int_{v/n}^{v/c} \frac{2(\frac{v}{x}-c)}{(d-c)(n-c)} \frac{2x}{bm} \frac{1}{x}\,dx, v \in (0, mc) \\ \int_{v/n}^{m} \frac{2(\frac{v}{x}-c)}{(d-c)(n-c)} \frac{2x}{bm} \frac{1}{x}\,dx, v \in (mc, mn) \end{cases} \tag{2.72.}$$

fonksiyonu yardımı ile elde edilir. Benzer işlemlerle ve integrallerin çözülmesiyle diğer tüm durumlar ve alt durumlar aşağıdaki gibi elde edilir:

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ c \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_1 = 4/((d-c)(n-c)bm)$ olarak verilir.

$$f_1(v) = \begin{cases} k_1\left[v\left(ln\left(\frac{n}{c}\right) + \frac{c}{n} - 1\right)\right] & , v \in (0, mc) \\ k_1\left[v\left(ln\left(\frac{mn}{v}\right) + \frac{c}{n}\right) - cm\right], & v \in (mc, mn) \end{cases} \quad (2.73.)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_2 = 4/((d-c)(d-n)bm)$ olarak verilir.

$$f_2(v) = \begin{cases} k_2\left[v\left(ln\left(\frac{n}{d}\right) + \frac{d}{n} - 1\right)\right] & , v \in (0, mn) \\ k_2\left[v\left(ln\left(\frac{v}{dm}\right) - 1\right) + dm\right], & v \in (mn, md) \end{cases} \quad (2.74.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ c \le y \le n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = 4/((d-c)(n-c)b(b-m))$ olarak verilir.

Birinci alt durum olan $mn < bc$ durumu;

$$f_{31}(v) = \begin{cases} k_3\left[v\left(1 + \frac{b}{m}\right) - c(b+m) + (v+bc)\left(ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right)\right], & v \in (mc, mn) \\ k_3\left[v\left(1 - \frac{c}{n}\right) + b(n-c) + (v+bc)\,ln\left(\frac{c}{n}\right)\right] & , v \in (mn, bc) \\ k_3\left[-v\left(1 + \frac{c}{n}\right) + b(c+n) + (v+bc)\,ln\left(\frac{v}{nb}\right)\right] & , v \in (bc, bn) \end{cases} \quad (2.75.)$$

İkinci alt durum olan $mn = bc$ durumu;

$$f_{32}(v) = \begin{cases} k_3\left[v\left(1+\frac{b}{m}\right) - c(b+m) + (v+bc)\left(ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right)\right], v \in (mc, mn) \\ k_3\left[-v\left(1+\frac{c}{n}\right) + b(c+n) + (v+bc)\,ln\left(\frac{v}{nb}\right)\right] \quad , v \in (mn, bn) \end{cases}$$

(2.76.)

Üçüncü alt durum olan $mn > bc$ durumu;

$$f_{33}(v) = \begin{cases} k_3\left[v\left(1+\frac{b}{m}\right) - c(b+m) + (v+bc)\left(ln\left(\frac{mc}{v}\right)\right)\right], v \in (mc, bc) \\ k_3\left[v\left(\frac{b}{m}-1\right) + c(b-m) + (v+bc)\,ln\left(\frac{m}{b}\right)\right] \quad , v \in (bc, mn) \\ k_3\left[-v\left(1+\frac{c}{n}\right) + b(c+n) + (v+bc)\,ln\left(\frac{v}{nb}\right)\right] \quad , v \in (mn, bn) \end{cases}$$

(2.77.)

Durum 4*:* Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ n \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = 4/((d-c)(d-n)b(b-m))$ olarak verilir.

Birinci alt durum olan $md < bn$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} k4\left[-v\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v+db) + ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, md) \\ k4\left[v\left(1-\frac{d}{n}\right) + b(n-d) + (v+bd)\,ln\left(\frac{d}{n}\right)\right] \quad , v \in (md, bn) \\ k4\left[2(v-bd) + (v+bd)\,ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \quad , v \in (bn, bd) \end{cases}$$

(2.78.)

İkinci alt durum olan $md = bn$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} k4\left[-v\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v+db) + ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, md) \\ k4\left[2(v-bd) + (v+bd)\,ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \quad , v \in (md, bd) \end{cases}$$

(2.79.)

Üçüncü alt durum olan $md > bn$ durumu;

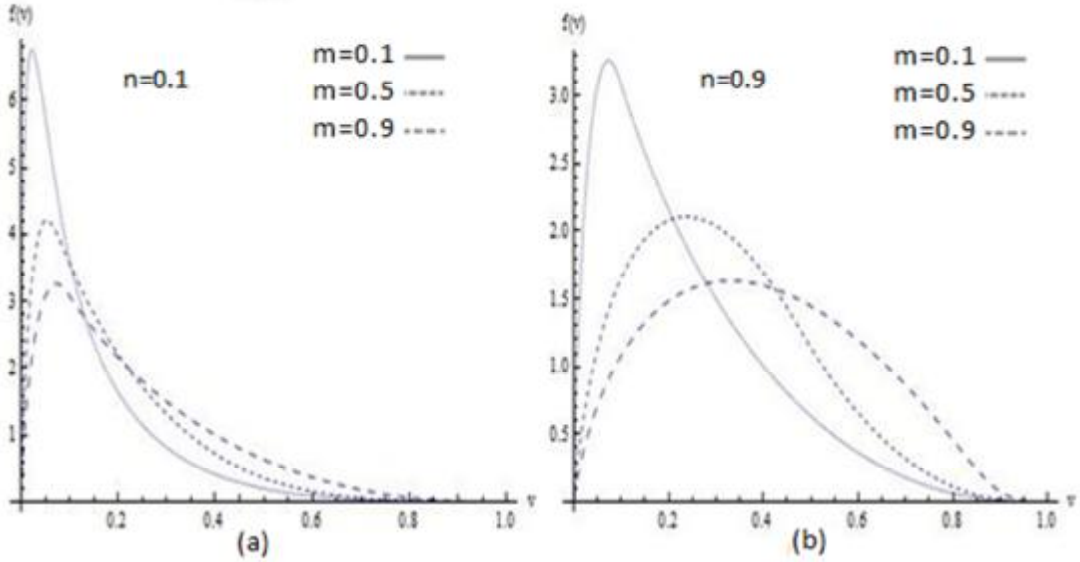
$$f_{43}(v) = \begin{cases} k4\left[-v\left(\frac{d}{n}+\frac{b}{m}\right) + bn + dm + (v+db) + ln\left(\frac{v}{mn}\right)\right], v \in (mn, bn) \\ k4\left[v\left(1-\frac{b}{m}\right) + d(m-b) + (v+bd)\, ln\left(\frac{b}{m}\right)\right] \quad , v \in (bn, md) \\ k4\left[2(v-bd) + (v+bd)\, ln\left(\frac{bd}{v}\right)\right] \quad , v \in (md, bd) \end{cases}$$

(2.80.)

Çarpımın oyf sini belirlemede $bc, bn, md\ ve\ mn$ çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Durum 3'te mn ile bc, Durum 4'te ise md ile bn karşılaştırılır ve buna göre $f_{3i}(v)$ lerden uygun olanı ile $f_{4i}(v)$ lerden uygun olanı seçilir. Böylece $v \in (0, bd)$ için V'nin oyf si, (2.63.) eşitliğindeki $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_v(v) = \sum_{i=1}^{2} f_i(v) + f_{3U(mn-bc)}(v) + f_{4U(md-bn)}(v) \qquad (2.81.)$$

Şekil 2.2.(a) da, $n = 0.1$ ve m için $0.1, 0.5$ ve 0.9 değerleri verilerek, $X \sim Triangular(0, m, 1)$ ve $Y \sim Triangular(0, n, 1)$ olduğundaki $f(v)$ fonksiyonunun sonuçları verilmiştir. Şekil 2.2. (b) de ise, $n = 0.9$ e yükseltilmiş ve m için yine $0.1, 0.5$ ve 0.9 değerleri verilmiştir. Her iki şekilde de m arttıkça dağılımın beklenen değer, varyans ve basıklığının arttığı görülürken, n arttıkça ise dağılımın beklenen değer ve varyansının arttığı, çarpıklığının ise azaldığı görülmektedir.



Şekil 2.2**.** Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ nin grafikleri $(a = c = 0, b = d = 1)$

Tablo 2.6. da altı dağılımın her birinin ortalaması ve varyansı verilmiştir. Beklenen değer, bağımsızlık varsayımıyla $h(x)$ ve $g(y)$ nin ortalamalarının çarpımıyla kolayca görülmektedir.

Tablo 2.6. Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ nin beklenen değer ve varyansları $(a = c = 0, b = d = 1)$

m	n	$E(V)$	$Var(V)$
0.1	0.1	0.1344	0.0161
0.5	0.1	0.1833	0.0203
0.9	0.1	0.2322	0.0296
0.1	0.9	0.2322	0.0296
0.5	0.9	0.3167	0.0315
0.9	0.9	0.4011	0.0431

2.3.2. Uygulama

$a = 0, c \neq 0$ durumu için, bağımsız iki üçgensel rastgele değişkenin çarpımının dağılımının yapısını örneklendirmek amacıyla aşağıdaki uygulama yapılmıştır. Bu uygulama, İstanbul'da üretilen şeker pancarından yıllara göre elde edilen hasılatı göstermektedir. Hasılat, o yıl üretilen şeker pancarı miktarının, yine aynı yıl belirlenen birim fiyatı ile çarpılmasıyla elde edilir. Miktar ve birim

fiyatlarıyla ilgili veriler Tablo 2.7. de yer almaktadır. Bu veriler http://www.turkseker.gov.tr sitesinden alınmıştır.

Tablo 2.7. Türkiye şeker pancarı alım fiyatları ve İstanbul ili için şeker pancarı üretim miktarları

Yıllar	Üretilen Pancar (Ton)	%16 Polar Şeker İçeren Pancar Fiyatları (TL/Ton)
2001	1362	50,00
2002	2774	74,00
2003	1197	88,31
2004	1420	98,91
2005	1892	99,00
2006	820	92,00
2007	199	96,00
2008	0	110,00
2009	0	116,00
2010	723	119,00
2011	753	126,00

Şeker pancarının üretim miktarı ile birim fiyatının yıllara göre minimum, maksimum ve ortalama değerlerine Tablo 2.8. de yer verilirken, *R* programı (*R* Development Core Team, 2011) yardımıyla hesaplanan tanımlayıcı istatistikler ise Tablo 2.9. da sunulmuştur.

Tablo 2.8. Hasılat: yıllık üretim ve birim fiyat parametreleri

Belirlenen yıl	Üretim miktarı	Fiyat	Pancar fiyatı
En az verimin olduğu yıl	0	En ucuz fiyat (2001)	50.00
Ortalama verim	1012.72	Ortalama fiyat	97.20
En fazla verimin olduğu yıl	2774	En pahalı fiyat (2011)	126.00

Tablo 2.9**.** Hasılat: tanımlayıcı istatistikler

Minimum	2027.391
Maksimum	320037.2
Ortalama	115545.8
Medyan	108187.3
Mod	90000.0
Standart sapma	57243.82

Böylece tezin bu kısmında üçgensel dağılıma sahip iki bağımsız rastgele değişkenin çarpımının oyf si olan $f(v)$ nin bileşenleri sunulmuştur. Bu bileşenler, iki üçgensel dağılımın her birinin üç parametresinin değerlerine bağlı olarak elde edilmiştir. Böylece X ve Y için üçgensel dağılımın parametreleri bilindiği zaman, $V = XY$ çarpımının herhangi bir değer aralığının olasılığı hesaplanabilir.

2.4. Üçgensel Dağılımlı X ve Y Rastgele Değişkenlerinin Bölümünün Dağılımı

Bu kısımda, Glikman ve Xu (2008) nun iki rastgele değişkenin çarpımının tam dağılımını bulurken kullandığı yöntem, bölümün kullanışlı iki formunun tam dağılımı bulunurken de kullanılacaktır (Gunduz ve Genc, 2015a).

2.4.1. X/Y'nin Dağılımı

$X \sim Triangular(a, m, b)$ ve $Y \sim Triangular(c, n, d)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $V = X/Y$ olsun. Burada $Z = 1 / Y$ dönüşümü uygulandığında Z'nin oyf si (2.82.) numaralı eşitlik ve V'nin oyf si ise (2.49.) numaralı eşitlik yardımıyla elde edilir.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{2(d-\frac{1}{z})}{(d-c)(d-n)z^2}, & \frac{1}{d} \le z \le \frac{1}{n} \\ \frac{2(\frac{1}{z}-c)}{(d-c)(n-c)z^2}, & \frac{1}{n} \le z \le \frac{1}{c} \end{cases} \qquad (2.82.)$$

V'nin oyf si elde edilirken dört farklı durum ve her bir duruma ait üç farklı alt durumun göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Bu durum ve alt durumlar Tablo 2.10. de verilmiştir.

Tablo 2.10. İki rastgele değişkenin çarpımın oyf sini belirlemedeki durumlar

Durumlar	Alt Durumlar
$a \le x \le m,\ \ 1/d \le z \le 1/n$	$a/n < m/d,\ \ a/n = m/d,\ \ a/n > m/d$
$a \le x \le m,\ \ 1/n \le z \le 1/c$	$a/c < m/n,\ \ a/c = m/n,\ \ a/c > m/n$
$m \le x \le b,\ \ 1/d \le z \le 1/n$	$m/n < b/d,\ \ m/n = b/d,\ \ m/n > b/d$
$m \le x \le b,\ \ 1/n \le z \le 1/c$	$m/c < b/n,\ \ m/c = b/n,\ \ m/c > b/n$

Birinci durumun ilk alt durumu, $a/n < m/d$ için;

$$f_{11}(v) = \begin{cases} I_{11}(v) = \int_a^{dv} \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)} \frac{2(d-\frac{x}{v})x^2}{(d-c)(d-n)v^2} \frac{1}{x} dx, & v \in (\frac{a}{d}, \frac{a}{n}) \\ I_{12}(v) = \int_{vn}^{dv} \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)} \frac{2(d-\frac{x}{v})x^2}{(d-c)(d-n)v^2} \frac{1}{x} dx, & v \in (\frac{a}{n}, \frac{m}{d}) \\ I_{13}(v) = \int_{vn}^{m} \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)} \frac{2(d-\frac{x}{v})x^2}{(d-c)(d-n)v^2} \frac{1}{x} dx, & v \in (\frac{m}{d}, \frac{m}{n}) \end{cases} \quad (2.83.)$$

integralinin çözülmesiyle kapalı formda $f_{11}(v)$ elde edilir. Dört durumun tüm alt durumlarının kapalı formdaki fonksiyonları da benzer şekilde elde edilerek sonuçlar aşağıdaki gibi verilir.

Durum 1: İlk durumda x ve z için aralık değerleri $a \le x \le m$, $1/d \le z \le 1/n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_1 = 1/(3(b-a)(m-a)(d-c)(d-n))$ olarak verilir.

Yukarıda bahsedildiği gibi bu durumda, $a/n < m/d$, $a/n = m/d$ ve $a/n > m/d$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{1j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{11}(v) = k_1 \left[-\frac{1}{v^3}(a-dv)^3(a+dv) \right] \quad (2.84.)$$

$$I_{12}(v) = k_1 [\frac{1}{v^3}(d-n)^2 v^3(-2a(d+2n) + (d^2+2dn+3n^2)v] \quad (2.85.)$$

$$I_{13}(v) = k_1 [1/v^3 (-3m^4 + 4dm^3 v + n^3(-4d+3n)v^4 + a(4m^3 - 6dm^2 v + 2(3d-2n)n^2 v^3))] \quad (2.86.)$$

$$I^*_{12}(v) = k_1 [-\frac{1}{v^3}(a-m)^2(a^2 + m(3m-4dv) + 2a(m-dv))] \quad (2.87.)$$

Birinci alt durum olan $a/n < m/d$ durumu;

$$f_{11}(v) = \begin{cases} I_{11}(v), & v \in (\frac{a}{d}, \frac{a}{n}) \\ I_{12}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{m}{d}) \\ I_{13}(v), & v \in (\frac{m}{d}, \frac{m}{n}) \end{cases} \quad (2.88.)$$

İkinci alt durum olan $a/n = m/d$ durumu;

$$f_{12}(v) = \begin{cases} I_{11}(v), & v \in (\frac{a}{d}, \frac{a}{n}) \\ I_{13}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{m}{n}) \end{cases} \quad (2.89.)$$

Üçüncü alt durum olan $a/n > m/d$ durumu;

$$f_{13}(v) = \begin{cases} I_{11}(v), & v \in (\frac{a}{d}, \frac{m}{d}) \\ I^*{}_{12}(v), & v \in (\frac{m}{d}, \frac{a}{n}) \\ I_{13}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{m}{n}) \end{cases} \quad (2.90.)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve z için aralık değerleri $a \leq x \leq m$, $1/n \leq z \leq 1/c$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_2 = 1/(3(b-a)(m-a)(d-c)(n-c))$ olarak verilir. Bu durumda da $a/c < m/n$, $a/c = m/n$ ve $a/c > m/n$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{2j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{21}(v) = k_2 \left[\frac{1}{v^3}(a-nv)^2(a^2 + 2a(-c+n)v + n(-4c+3n)v^2)\right] \quad (2.91.)$$

$$I_{22}(v) = k_2 \left[\frac{1}{v^3}(c-n)^2v^3(-2a(c+2n) + (c^2 + 2cn + 3n^2)v)\right] \quad (2.92.)$$

$$I_{23}(v) = k_2 \left[\frac{1}{v^3}(m-cv)^2\left(3m^2 + 2cmv + c^2v^2 - 2a(2m+cv)\right)\right] \quad (2.93.)$$

$$I^*{}_{22}(v) = k_2\left[\frac{1}{v^3}(a-m)^2(a^2 + m(3m-4cv) + 2a(m-cv))\right] \quad (2.94.)$$

Birinci alt durum olan $a/c < m/n$ durumu;

$$f_{21}(v) = \begin{cases} I_{21}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{a}{c}) \\ I_{22}(v), & v \in (\frac{a}{c}, \frac{m}{n}) \\ I_{23}(v), & v \in (\frac{m}{n}, \frac{m}{c}) \end{cases} \quad (2.95.)$$

İkinci alt durum olan $a\ /\ c = m\ /\ n$ durumu;

$$f_{22}(v) = \begin{cases} I_{21}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{a}{c}) \\ I_{23}(v), & v \in (\frac{a}{c}, \frac{m}{c}) \end{cases} \quad (2.96.)$$

Üçüncü alt durum olan $a\ /\ c > m\ /\ n$ durumu;

$$f_{23}(v) = \begin{cases} I_{21}(v), & v \in (\frac{a}{n}, \frac{m}{n}) \\ I^*{}_{22}(v), & v \in (\frac{m}{n}, \frac{a}{c}) \\ I_{23}(v), & v \in (\frac{a}{c}, \frac{m}{c}) \end{cases} \quad (2.97.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve z için aralık değerleri $m \le x \le b$, $1/d \le z \le 1/n$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_3 = 1/(3(b-a)(b-m)(d-c)(d-n))$ olarak verilir. Bu durumda da $m/n < b/d$, $m/n = b/d$ ve $m/n > b/d$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{3j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{31}(v) = k_3\left[-\frac{1}{v^3}(m-dv)^2\left(3m^2 + 2dmv + d^2v^2 - 2b(2m+dv)\right)\right] \quad (2.98.)$$

$$I_{32}(v) = k_3\left[-\frac{1}{v^3}(d-n)^2v^3(-2b(d+2n)+(d^2+2dn+3n^2)v)\right] \quad (2.99.)$$

$$I_{33}(v) = k_3\left[-\frac{1}{v^3}(b-nv)^2(b^2+2b(-d+n)v+n(-4d+3n)v^2)\right] \quad (2.100.)$$

$$I^*{}_{32}(v) = k_3\left[-\frac{1}{v^3}(b-m)^2(b^2+m(3m-4dv)+2b(m-dv))\right] \quad (2.101.)$$

Birinci alt durum olan $m/n < b/d$ durumu;

$$f_{31}(v) = \begin{cases} I_{31}(v), & v \in (\frac{m}{d},\frac{m}{n}) \\ I_{32}(v), & v \in (\frac{m}{n},\frac{b}{d}) \\ I_{33}(v), & v \in (\frac{b}{d},\frac{b}{n}) \end{cases} \quad (2.102.)$$

İkinci alt durum olan $m/n = b/d$ durumu;

$$f_{32}(v) = \begin{cases} I_{31}(v), & v \in (\frac{m}{d},\frac{m}{n}) \\ I_{33}(v), & v \in (\frac{m}{n},\frac{b}{n}) \end{cases} \quad (2.103.)$$

Üçüncü alt durum olan $m/n > b/d$ durumu;

$$f_{33}(v) = \begin{cases} I_{31}(v), & v \in (\frac{m}{d},\frac{b}{d}) \\ I^*{}_{32}(v), & v \in (\frac{b}{d},\frac{m}{n}) \\ I_{33}(v), & v \in (\frac{m}{n},\frac{b}{n}) \end{cases} \quad (2.104.)$$

Durum 4: Son durumda ise x ve z için aralık değerleri $m \le x \le b$, $1/n \le z \le 1/c$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_4 = 1/(3(b-a)(b-m)(d-c)(n-c))$ olarak verilir. Bu durumda da

$m/c < b/n$, $m/c = b/n$ ve $m/c > b/n$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{4j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{41}(v) = k_4(3m^4 - 4cm^3v + (4c - 3n)n^3v + b/v^3\,(-4m^3 + 6cm^2v + 2n^2(-3c + 2n)v^3)) \quad (2.105.)$$

$$I_{42}(v) = k_4\left[-\frac{1}{v^3}(c-n)^2v^3(-2b(c+2n) + (c^2 + 2cn + 3n^2)v)\right] \quad (2.106.)$$

$$I_{43}(v) = k_4\left[\frac{1}{v^3}(b - cv)^3(b + cv)\right] \quad (2.107.)$$

$$I^*{}_{42}(v) = k_4\left[-\frac{1}{v^3}(b-m)^2(b^2 + m(3m - 4cv) + 2b(m - cv))\right] \quad (2.108.)$$

Birinci alt durum olan $m/c < b/n$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} I_{41}(v), & v \in (\frac{m}{n}, \frac{m}{c}) \\ I_{42}(v), & v \in (\frac{m}{c}, \frac{b}{n}) \\ I_{43}(v), & v \in (\frac{b}{n}, \frac{b}{c}) \end{cases} \quad (2.109.)$$

İkinci alt durum olan $m\ /\ c = b\ /\ n$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} I_{41}(v), & v \in (\frac{m}{n}, \frac{m}{c}) \\ I_{43}(v), & v \in (\frac{m}{c}, \frac{b}{c}) \end{cases} \quad (2.110.)$$

Üçüncü alt durum olan $m\ /\ c > b\ /\ n$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} I_{41}(v), & v \in (\frac{m}{n}, \frac{b}{n}) \\ I^*{}_{42}(v), & v \in (\frac{b}{n}, \frac{m}{c}) \\ I_{43}(v), & v \in (\frac{m}{c}, \frac{b}{c}) \end{cases} \quad (2.111.)$$

Bölümün oyf sini belirlemede $a/n, m/d, a/c, m/n, b/d, m/c$ ve b/n çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Örneğin, Durum 4'te m/c ile b/n karşılaştırılır. Buna göre $f_{4i}(v)$ eşitliklerinden biri alınır. Böylece $v \in (a/d, b/c)$ için V'nin oyf si (2.63.) numaralı eşitlikle verilen $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_V(v) = f_{1U\left(\frac{a}{n}-\frac{m}{d}\right)}(v) + f_{2U\left(\frac{a}{c}-\frac{m}{n}\right)}(v) + f_{3U\left(\frac{m}{n}-\frac{b}{d}\right)}(v) + f_{4U\left(\frac{m}{c}-\frac{b}{n}\right)}(v) \quad (2.112.)$$

2.4.2. $Y/(X+Y)$ nin Dağılımı

Bu bölümde $V = X/Y$ dönüşümü kullanılarak $W = 1/(1+V)$ nin dağılımı elde edilmiştir. $V = X/Y$ bölümünün dağılımına benzer olarak W nun dağılımı da dört durum altında incelenmiştir. W nun oyf si aşağıdaki eşitlik kullanılarak elde edilecektir;

$$G(w) = \int_{\frac{1}{w}-1}^{v^*} f_V(v)dv \quad (2.113.)$$

v^*, $f_V(v)$ oyf sinin aralıklarına bağlıdır.

Durum 1: $a/n < m/d$, $a/n = m/d$ ve $a/n > m/d$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $a/n < m/d$ durumu;

$$g_{11}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w}-1\right), & w \in (\frac{n}{n+m}, \frac{d}{m+d}) \\ \frac{1}{w^2} I_{12}\left(\frac{1}{w}-1\right), & w \in (\frac{d}{m+d}, \frac{n}{a+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{11}\left(\frac{1}{w}-1\right), & w \in (\frac{n}{a+n}, \frac{d}{a+d}) \end{cases} \quad (2.114.)$$

İkinci alt durum olan $a/n = m/d$ durumu;

$$g_{12}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{n+m}, \frac{d}{m+d}) \\ \frac{1}{w^2}\ I_{11}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{d}{m+d}, \frac{d}{a+d}) \end{cases} \quad (2.115.)$$

Üçüncü alt durum olan $a/n > m/d$ durumu;

$$g_{13}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{n+m}, \frac{n}{a+n}) \\ \frac{1}{w^2}\ I^*{}_{12}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{a+n}, \frac{d}{m+d}) \\ \frac{1}{w^2} I_{11}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{d}{m+d}, \frac{d}{a+d}) \end{cases} \quad (2.116.)$$

Durum 2: $a/c < m/n$, $a/c = m/n$ ve $a/c > m/n$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $a\ /\ c < m\ /\ n$ durumu;

$$g_{21}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{n}{m+n)} \\ \frac{1}{w^2} I_{22}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{m+n}, \frac{c}{a+c}) \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{c+a}, \frac{n}{a+n}) \end{cases} \quad (2.117.)$$

İkinci alt durum olan $a\ /\ c = m\ /\ n$ durumu;

$$g_{22}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{n}{m+n)} \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{c+a}, \frac{n}{a+n}) \end{cases} \quad (2.118.)$$

Üçüncü alt durum olan $a\ /\ c > m\ /\ n$ durumu;

$$g_{23}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{c}{a+c}) \\ \frac{1}{w^2} I^*_{22}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{a+c}, \frac{n}{m+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{m+n}, \frac{n}{a+n}) \end{cases} \quad (2.119.)$$

Durum 3: $m/n < b/d$, $m/n = b/d$ ve $m/n > b/d$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $m/n < b/d$ durumu;

$$g_{31}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{b+n}, \frac{d}{b+d}) \\ \frac{1}{w^2} I_{32}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{d}{b+d}, \frac{n}{m+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{m+n}, \frac{d}{m+d}) \end{cases} \quad (2.120.)$$

İkinci alt durum olan $m\ /\ n = b\ /\ d$ durumu;

$$g_{32}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{b+n}, \frac{n}{m+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{m+n}, \frac{d}{m+d}) \end{cases} \quad (2.121.)$$

Üçüncü alt durum olan $m\ /\ n > b\ /\ d$ durumu;

$$g_{33}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{b+n}, \frac{n}{m+n}) \\ \frac{1}{w^2} I^*_{32}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{m+n}, \frac{d}{b+d}) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{d}{b+d}, \frac{d}{m+d}) \end{cases} \quad (2.122.)$$

Durum 4: $m\ /\ c < b\ /\ (n,)$ $m\ /\ c = b\ /\ n$ ve $m\ /\ c > b\ /\ n$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur.

Birinci alt durum olan $m\ /\ c < b\ /\ n$ durumu;

$$g_{41}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{b+c}, \frac{n}{b+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{42}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{b+n}, \frac{c}{m+c}) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{n}{m+n}) \end{cases} \quad (2.123.)$$

İkinci alt durum olan $m / c = b / n$ durumu;

$$g_{42}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{b+c}, \frac{c}{m+c}) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{n}{m+n}) \end{cases} \quad (2.124.)$$

Üçüncü alt durum olan $m / c > b / n$ durumu;

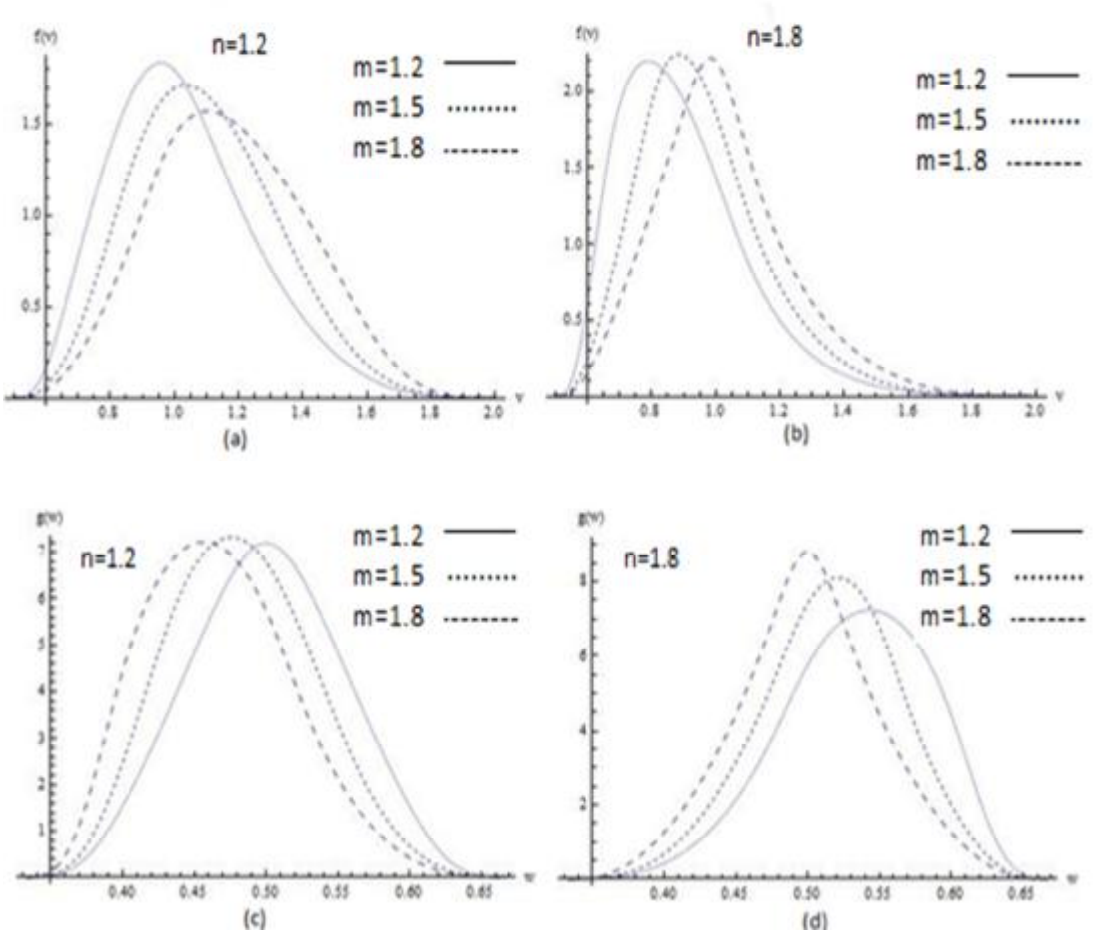
$$g_{43}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{b+c}, \frac{c}{m+c}) \\ \frac{1}{w^2} I^*{}_{42}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{c}{m+c}, \frac{n}{b+n}) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in (\frac{n}{b+n}, \frac{n}{m+n}) \end{cases} \quad (2.125.)$$

V rastgele değişkeninin oyf sini belirlemede uygulanan yol izlenir ve böylece W rastgele değişkeninin oyf si (2.63.) numaralı eşitlikle verilen $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g_W(w) = g_{1U\left(\frac{a}{n} - \frac{m}{d}\right)}(w) + g_{2U\left(\frac{a}{c} - \frac{m}{n}\right)}(w) + g_{3U\left(\frac{m}{n} - \frac{b}{d}\right)}(w) + g_{4U\left(\frac{m}{c} - \frac{b}{n}\right)}(w) \quad (2.126.)$$

Şekil 2.3. (a) ve (c) grafiklerinde, $n = 1.2$ ve m için 1.2, 1.5 ve 1.8 değerleri verilerek, $X \sim Triangular(1, m, 2)$ ve $Y \sim Triangular(1, n, 2)$ olmak üzere $f(v)$ ve $g(w)$ oyf leri çizdirilmiştir. Şelik 2.3. (b) ve (d) grafiklerinde ise $n = 1.8$ e yükseltilmiş ve m için yine 1.2, 1.5 ve 1.8 değerleri verilmiştir. Şekil 2.3.(a) da, m arttıkça dağılımın beklenen değer ve varyansının arttığı ve sivriliğinin azaldığı görülürken, Şekil 2.3. (b) de, n deki artışın dağılımın çarpıklığının azalmasına ve

sivriliğinin artmasına etki ettiği görülmektedir. Şekil 2.3. (c) incelendiğinde, m arttıkça dağılımın beklenen değer ile varyansının azaldığı ve basıklığının değişmediği, Şekil 2.3. (d) ise n arttıkça dağılımın belenekn değer ve sivriliğinin arttığı varyansının azaldığı gözlenmektedir.



Şekil 2.3. Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının grafikleri $(a = c = 1,\ b = d = 2)$

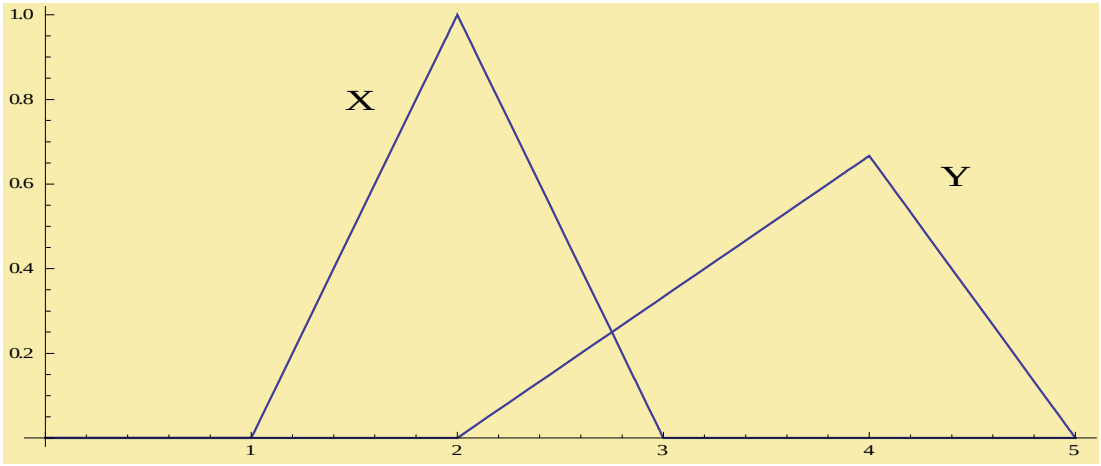
Yukarıdaki şekilde, m ve n nin farklı değerleri için oyf leri incelenen bu dağılımların beklenen değer ve varyansları Tablo 2.11. de verilmiştir.

Tablo 2.11: Belirli m ve n değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının beklenen değer ve varyansları $(a = c = 1,\ b = d = 2)$

m	n	$E(v)$	$Var(V)$	$E(w)$	$Var(w)$
1.2	1.2	1.0232	0.0488	0.5	0.0028
1.5	1.2	1.0963	0.0495	0.4824	0.0026
1.8	1.2	1.1694	0.0560	0.4665	0.0027
1.2	1.8	0.8928	0.0373	0.5335	0.0027
1.5	1.8	0.9566	0.0379	0.5159	0.0024
1.8	1.8	1.0203	0.0428	0.5	0.0025

2.4.3. Uygulama

Strese maruz kalmış ve bu strese karşı direnç gösteren bir sistem olsun. Sistemin stres ve güç değerlerinin kesin olarak bilinmediğini fakat stresin 2 MN ortalama ile 1-3 MN arasında ve gücün de 4 MN ortalama ile 2-5 MN arasında olduğu varsayılsın. O zaman X ile gösterilen stres değeri ve Y ile gösterilen güç değeri üçgensel dağılımla ifade edilebilir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. X ve Y nin oyf leri

Sistem güvenirliği, $P(Y > X)$ ya da denk olarak $P(V < 1)$ olasılığı ve sistemin başarısızlığı da $P(X > Y)$ veya $P(V > 1)$ olasılığına eşittir. V nin tam dağılımı bilindiği için sistemin güvenirliliği tam olarak hesaplanabilir. Hesaplama

sonucunda sistemin güvenirliliği 0.9861 bulunur ki bu da sistemin güvenirliğinin yüksek olduğunun göstergesidir.

Ayrıca gücün stresi belli bir yüzdelik oranında aşması olasılığı da bulunabilir. Örneğin gücün stresin %25 ini aşması olasılığı $P(1.25X < Y) = P(V < 0.8) = 0.9177$ bulunur. Yani gücün stresi %25 lik bir miktarla yenmesinden %92 olasılıkla emin olunur.

3. STANDART İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

$STSP$, Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından özellikle ekonomideki risk ve belirsizlik problemlerinde beta dağılımına alternatif bir dağılım olarak tanımlanmıştır. Beta dağılımına alternatif olarak literatürde daha önceden de tanımlanmış çeşitli dağılımlar mevcuttur. $STSP$ dağılımının da içinde bulunduğu beta tipi olarak sınıflandırılan bu dağılımların, genel özellikler itibariyle birbirine benzedikleri ancak matematiksel hesaplamalardaki kullanışlılığı, şekilsel yönden esneklikleri vb. açılardan ise birbirlerine göre farklılıklar gösterdikleri görülmüştür. Van Dorp ve Kotz'un (2002a, 2002b) çalışmalarında da, bahsedilen bu benzerlik ve farklılıklar ortaya konulmuştur. Örneğin, $STSP$ dağılımının pozitif uzayının da beta dağılımı gibi sonlu bir aralıkta olmasıyla birlikte, $STSP$ dağılımının beta dağılımının aksine kapalı formda bir kdf ve kantil fonksiyonuna sahip olduğu vurgulanmıştır. Bu açıdan bakıldığında $STSP$ dağılımının beta dağılımına göre matematiksel açıdan daha kullanışlı olduğu ve şekilsel yönden daha esnek olduğu söylenilebilir.

Tezin bu bölümünde özellikleri Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından çalışılmış olan $STSP$ dağılımının daha iyi tanınması açısından bazı önemli özellikleri aktarılacaktır.

3.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından tanımlanmış $STSP$ dağılımına sahip X rastgele değişkeninin oyf si;

$$f(x|\ m,n) = \begin{cases} n(\frac{x}{m})^{n-1}, & 0 < x \leq m \\ n(\frac{1-x}{1-m})^{n-1}, & m \leq x < 1 \end{cases} \qquad (3.1.)$$

eşitliğindeki gibi verilir ve $STSP(m,n)$ gösterimi ile ifade edilir. Burada, $n > 0$, $0 \leq m \leq 1$ dir ve n tam sayı olmak zorunda değildir. Bununla birlikte, m parametresi, yansıma parametresi ve n parametresi ise biçim parametresidir.

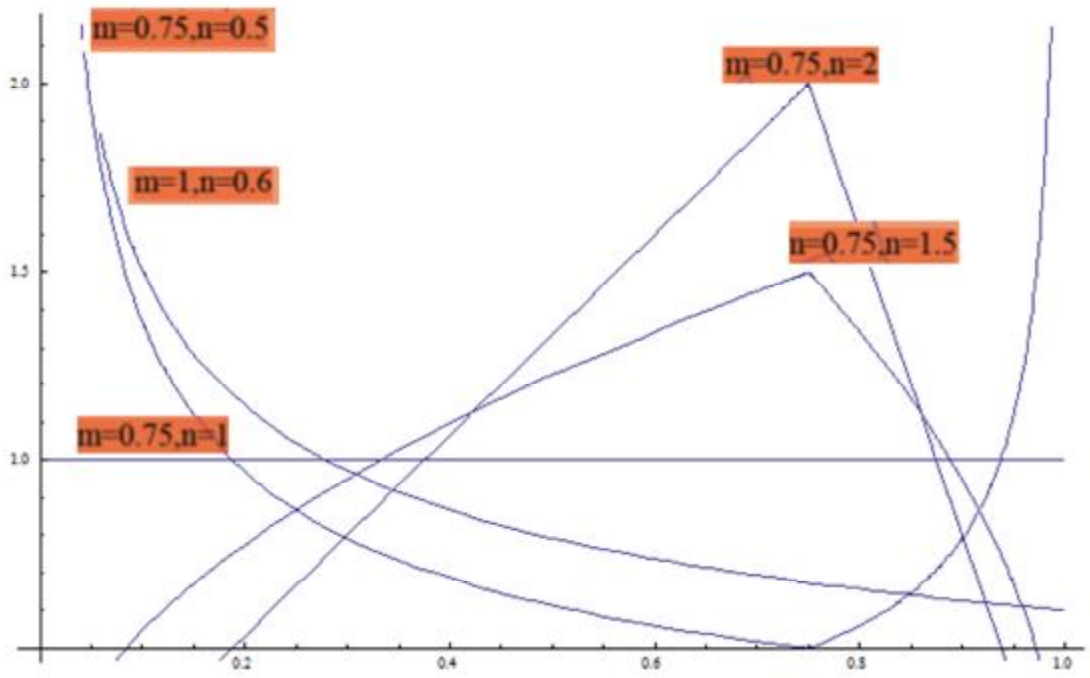
$STSP(m,n)$ dağılımının kdf si ise,

$$F(x|\ m,n) = \begin{cases} m(\frac{x}{m})^n\,, & 0 \le x \le m \\ 1-(1-m)\left(\frac{1-x}{1-m}\right)^n\,, & m \le x \le 1 \end{cases} \qquad (3.2.)$$

eşitliği ile ifade edilir.

$STSP$ dağılımına sahip X rastgele değişkeninin oyf si, parametrelerinin aldığı değerlere göre farklı şekiller almaktadır. Örneğin;

- $n = 2$ ise X rastgele değişkeninin oyf si üçgensel dağılımlıdır,
- $n = 1$ ise X rastgele değişkeninin oyf si düzgün dağılımlıdır,
- $a = 0, m = b = 1$ ise X rastgele değişkeninin oyf si güç fonksiyonuna dönüşür,
- $0 \le m \le 1$ ve $0 < n < 1$ ise X rastgele değişkeninin oyf si $U-$şekillidir,
- $n > 1$ ise X rastgele değişkeninin oyf sinin modu m olur.



Şekil 3.1. Farklı m ve n değerleri için $STSP$ dağılımının grafikleri

3.2. Momentler

$X \sim STSP(m,n)$ olmak üzere, eşitlik (3.1) yardımıyla elde edilen k-mertebeden moment;

$$E[X^k] = \int_0^m x^k n \frac{x^{n-1}}{m^{n-1}} dx + \int_m^1 x^k n \left(\frac{1-x}{1-m}\right)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{m^{n-1}} \int_o^m x^{n+k-1} dx + \frac{n}{(1-m)^{n-1}} \int_m^1 x^k (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{m^{n-1}} \frac{x^{n+k}}{n+k} \Big|_0^m + \frac{n}{(1-m)^{n-1}} \int_m^{1-m} (1-u)^k u^{n-1} du$$

$$= \frac{n}{m^{n-1}} \frac{m^{n+k}}{n+k} + \frac{n}{(1-m)^{n-1}} \int_0^{1-m} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^i \, u^{n-1} du$$

$$= \frac{nm^{k+1}}{n+k} + \frac{n}{(1-m)^{n-1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{(1-m)^{i+n}}{i+n}$$

$$E[X^k] = \frac{nm^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-m)^{i+1} \qquad (3.3.)$$

eşitliği ile verilir. Böylece (3.3) numaralı eşitlikte $k = 1$ alınır ise beklenen değer;

$$E[X] = \frac{1}{n+1} 0 + \frac{(n-1)}{n+1} m + \frac{1}{n+1} 1 = \frac{(n-1)m+1}{n+1} \qquad (3.4.)$$

olarak bulunur ve $(3.3.)$ eşitliğinde $k = 2$ alınarak;

$$E[X^2] = \frac{m(n-1)(mn+2)+2}{(n+2)(n+1)} \qquad (3.5.)$$

ifadesi elde edilir. (3.4.) ve (3.5.) numaralı eşitliklerin kullanılmasıyla da varyans, aşağıdaki gibi bulunur.

$$Var(X) = \frac{n-2(n-1)m(1-m)}{(n+2)(n+1)^2} \tag{3.6.}$$

(3.4.) numaralı eşitlik n = 2 için [0,1] aralığında tanımlı üçgensel dağılımın ortalamasını verir (alt sınır 0, mod m ve üst sınır 1. n = 1 için (3.4.) numaralı eşitlik, $1/2$ ye eşittir ki bu da U[0,1] dağılımının beklenen değeridir.

X ratgele değişkenin çarpıklık ölçüsü;

$$\gamma_1 = \frac{[E(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{E(X^3)-3E(X^2)E(X)+3E(X)E(X)^2-E(X)^3}{\sigma^3} \tag{3.7.}$$

eşitliği yardımıyla bulunur. (3.3.) numaralı eşitlikte k = 3 alındıktan sonra elde edilen diğer eşitliklerle birlikte (3.7.) numaralı eşitlikte yerine yazılırsa, $STSP$ dağılımının çarpıklık katsayısı aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\gamma_1 = \frac{\left[\frac{n[m^4-(1-m)^4]}{n+3}+\frac{(n+1)(1-m)-3n(1-m)^3}{n+1}+\frac{3n(1-m)^3}{n+2}\right]}{\left[\frac{n-2m(n-1)(1-m)}{(n+2)(n+1)}\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\left[\frac{m(n-1)(mn+2)+2}{(n+2)(n+1)}\right]\left[\frac{m(n-1)+1}{n+1}\right]+2\left[\frac{m(n-1)+1}{n+1}\right]^3}{\left[\frac{n-2m(n-1)(1-m)}{(n+2)(n+1)}\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{3.8.}$$

Ayrıca X ratgele değişkenin basıklık ölçüsü;

$$\gamma_2 = \frac{[E(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{E(X^4)-4E(X^3)E(X)+6E(X^2)E(X)^2-4E(X)E(X)^3+E(X)^4}{\sigma^4} \tag{3.9.}$$

eşitliği yardımıyla bulunur. (3.3.) numaralı eşitlikte k = 4 alındıktan sonra elde edilen diğer eşitliklerle birlikte (3.9.) numaralı eşitlikte yerine yazılırsa, basıklık ölçüsü (3.10.) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$\gamma_2 = \frac{\left[\frac{n[m^5-(1-m)^5}{n+4}+\frac{(n+1)(1-m)-4n(1-m)^2}{n+1}+\frac{6n(1-m)^3}{n+2}-\frac{4n(1-m)^4}{n+3}\right]}{\left[\frac{n-2m(n-1)(1-m)}{(n+2)(n+1)^2}\right]^2}$$

$$-\frac{4\left[\frac{n[m^4-(1-m)^4]}{n+3}+\frac{(n+1)(1-m)-3n(1-m)^2}{n+1}+\frac{3n(1-m)^3}{n+2}\right]\left[\frac{m(n-1)+1}{n+1}\right]}{\left[\frac{n-2m(n-1)(1-m)}{(n+2)(n+1)^2}\right]^2}$$

$$+\frac{6\left[\frac{m(n-1)(mn+2)+2}{(n+2)(n+1)}\right]\left[\frac{m(n-1)+1}{n+1}\right]^2-\left[\frac{m(n-1)+1}{n+1}\right]^4}{\left[\frac{n-2m(n-1)(1-m)}{(n+2)(n+1)^2}\right]^2} \qquad (3.10.)$$

3.3. Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

Beta dağılımına benzer olarak, $STSP$ dağılımı stokastik olarak artan ve azalan özellikleri sağlar. Aşağıdaki teoremlerde ifade edilen dağılım fonksiyonu ile ilgili özelliklerin ispatları Van Dorp ve Kotz (2002a) da bulunur.

Teorem 3.1.

A. $n > 1$ için, dağılım fonksiyonu stokastik olarak artandır, öyle ki,

$$m_1 < m_2,\ x\epsilon(0,1) \Rightarrow F(x|\ m_1, n) > F(x|\ m_2, n). \qquad (3.11.)$$

B. $n < 1$ için, dağılım fonksiyonu stokastik olarak azalandır, öyle ki,

$$m_1 < m_2,\ x\epsilon(0,1) \Rightarrow F(x|\ m_1, n) < F(x|\ m_2, n). \qquad (3.12.)$$

3.4. Kantil Fonksiyonunun Özellikleri

x_p, $p-inci$ yüzdelik olarak ifade edilir, yani $F(x_p|\ m, n) = p$ dir. Verilecek olan 2., 3. ve 4. özellikler m'nın başlangıç tahmininde kullanılabilir. Özellik 3 ve 4, x_p ve x_{1-p} kantilleri arasındaki beklenmedik ilişkiyi vermektedir. Bu özelliklerin ispatları Van Dorp ve Kotz (2002a) un çalışmasında bulunabilir.

Özellik 1: Dağılım fonksiyonundan $x_p < p \Leftrightarrow p < m$ ifadesi elde edilebilir.

Özellik 2: Benzer şekilde, $x_p = m \Leftrightarrow p = m$, n'nin değerinden bağımsızdır.

Özellik 3: $p < min(m, 1-m)$ olan, p'nin değerlerini ele alalım dağılım fonksiyonu ve 1. özellikten,

$$\frac{x_p^n}{m^{n-1}} = \frac{(1-x_{1-p})^n}{(1-m)^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{x_p}{1-x_{1-p}} = \left(\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{3.13.}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle $\frac{x_p}{1-x_{1-p}}$ oranı $p < min(m, 1-m)$ için p değerine bağlı değildir.

Özellik 4. Özellik 3 e benzer olarak, $p > maks(m, 1-m)$ için,

$$\frac{x_{1-p}}{1-x_p} = \left(\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{3.14.}$$

oranı p değerinden bağımsızdır.

3.5. Limit Dağılımları

$X \sim STSP(m, n)$ dağılımına sahip olsun. Buna göre;

i) $\boldsymbol{m = 0,\ n \to \infty}$ **durumu:** X rasgele değişkeni, $lim_{n\to\infty} F(x|\ m = 0, n) = lim_{n\to\infty}(1-(1-x)^n) = 1$ olup, üstelik $F(x|\ m = 0, n) = 0$ dır. Böylece;

$$lim_{n\to\infty} F(x|\ m = 0, n) = G(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

sıfır noktasında 1 yoğunluklu bir dejenere dağılıma yakınsar ve oyf si ise aşağıdaki gibidir.

$$P(X = x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

ii) $\boldsymbol{m = 1}$, $\boldsymbol{n \to \infty}$ **durumu:** X'in limit dağılımı, $lim_{n\to\infty} F(x|\ m = 1, n) = lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olup, üstelik $F(x|\ m = 1, n) = 1$ dır. Böylece;

$$lim_{n\to\infty} F(x|\ m = 1, n) = G(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

olduğundan, tüm olasılığın 1 noktasında toplandığı dejenere bir dağılımdır.

iii) $\boldsymbol{0 < m < 1}$, $\boldsymbol{n \to \infty}$ **durumu:** X rasgele değişkeni,

$$lim_{n\to\infty} F(x|\ 0 < m < 1, n) = G(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olduğundan m noktasında 1 yoğunluklu bir dejenere dağılıma yakınsar.

$0 < m < 1$ ve $n \to \infty$ olarak alındığında (3.3.) no lu eşitlikten, bütün k değerleri için $\lim_{n\to\infty} E(X^k) = 1 - m$ elde edilir. Bunun sonucu olarak $n \to \infty$ iken k. moment 1 noktasında $1 - m$ nın yoğunluğunda bir bernolli dağılımının momentine yakınsar. X ve bir bernolli değişkeninin ikisinin de uzayları sınırlıdır. Bu limit dağılımları, beta dağılımının limit dağılımlarına denktir (Van Dorp ve Mazzuchi, 2000). Bir başka ifadeyle, $STSP(m, n)$ dağılım sınıfının esnekliği beta dağılım ailesi ile karşılaştırılabilir.

Bir başka ilginç limit dağılımı bölümün başındaki örnekle ilgili, A rastgele bir sabit ve $A > 0$ olmak üzere,

$$Y = (n - 1)A(\tfrac{X-m}{m}) \qquad (3.15.)$$

lineer dönüşümü kullanılarak elde edilebilir. (3.1.) ve (3.15.) numaralı eşitlik ve $n > 1$ için, aşağıdaki şekilde devam edilir;

$$f(y|\ m,n,A) = \begin{cases} \frac{nm}{(n-1)A}\left(1+\frac{1}{(n-1)}\frac{Y}{A}\right)^{n-1}, & -(n-1)A < Y \leq 0 \\ \frac{nm}{(n-1)A}\left(1-\frac{1}{n-1}\frac{mY}{(1-m)A}\right)^{n-1}, & 0 \leq Y < \frac{(1-m)(n-1)A}{m} \end{cases} \quad (3.16.)$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken,

$$f(y|\ m,n,A) \to f(y|\ m,A) = \begin{cases} \frac{m}{A}\exp\left(\frac{Y}{A}\right), & Y \leq 0 \\ \frac{m}{A}\exp\left(-\frac{m}{1-m}\frac{Y}{A}\right), & Y \geq 0 \end{cases} \quad (3.17.)$$

oyf si elde edilir. Böylece $f(y|\ m,n,A)$, oyf si $f(y|\ m,A)$ olan bir "Asimetrik Laplace" dağılımına yakınsar (Johnson ve ark. 1994). Burada oyf si m ve $1-m$ içinde A parametresi ne olursa olsun sıfırda bölünmüştür. Asimetrik Laplace dağılımı, $\mu = 0,\ \sigma = \frac{1}{A}\sqrt{(1-m)/m}$ ve $\kappa = \sqrt{(1-m)/m}$ durumlarında, Kozubowski ve Podgorski (1999) tarafından incelenmiştir.

3.6. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri

İlk olarak $STSP$ dağılımının parametreleri en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile elde edilecek akabinde ise momentler yöntemiyle parametre tahminleri bulunacaktır.

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$ örneklemi için $X_1 < X_2 < \cdots < X_s$ sıra istatistikleri olsun. $\underline{X}$ örneklemi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\underline{X}; m, n\right) = n^s \left\{\frac{\prod_{i=1}^{r} X_{(i)} \prod_{i=r+1}^{s}\left(1-X_{(i)}\right)}{m^r (1-m)^{s-r}}\right\}^{n-1} \quad (3.18.)$$

biçiminde olup, burada, $X_{(r)} \leq m \leq X_{(r+1)}$, $X_{(0)} \equiv 0,\ X_{(s+1)} \equiv 1$ dir. m ve n nin en çok olabilirlik tahmin edicileri, ispatı Van Dorp ve Kotz (2002b) da bulunan aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)$ örneklemi $STSP(m,n)$ dağılımından alınmış bağımsız ve aynı dağılımlı n hacimli örneklem olsun. (3.19.)'i maksimize eden en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\begin{cases} \hat{m} = X_{(\hat{r})} \\ \hat{n} = -\frac{s}{logM(\hat{r})} \end{cases} \tag{3.19.}$$

dır. Burada $\hat{r} = argmax\, r \in (1,2,\dots s).M(r)$ ve

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^{s} \frac{1-X_{(i)}}{1-X_{(r)}} \tag{3.20.}$$

3.7. Rastgele Sayı Üretimi

Olasılık integral dönüşümü yardımıyla, $STSP$ dağılımından rastgele sayı üretilebilir. (3.2.) numaralı eşitlikte yer alan kdf yardımıyla kantil fonksiyonu (3.21.) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} m\left(\frac{y}{m}\right)^{1/n}, & y < m \\ 1-(1-m)\left(\frac{1-y}{1-m}\right)^{\frac{1}{n}}, & y > m \end{cases} \tag{3.21.}$$

$U \sim Unif(0,1)$ ve aynı şekilde $(1-U) \sim Unif(0,1)$ olduğundan kantil fonksiyonu kullanılarak, X aşağıdaki gibi elde edilir ve böylece rastgele sayı üretilmiş olur.

$$X = \begin{cases} m\left(\frac{U}{m}\right)^{1/n}, & U < m \\ 1-(1-m)\left(\frac{1-U}{1-m}\right)^{\frac{1}{n}}, & U > m \end{cases} \tag{3.22.}$$

4. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

Bu bölümde ilk olarak, özellikle risk ve belirsizlik problemlerinde yararlanılan beta dağılımına alternatif olarak kullanılması için, bir önceki bölümde verilen $STSP$ dağılımının genelleştirilmişi olan $[a,b]$ aralığında tanımlı TSP dağılımı tanıtılacaktır. Johnson (1997) ve Johnson ve Kotz (1999), bir uygulama yardımıyla dört parametreli beta dağılımına alternatif olarak üç parametreli üçgensel dağılımın kullanılmasını önermişlerdir. Ancak üçgensel dağılım, düzgün dağılıma, U biçimli dağılıma veya J biçimli bir dağılıma makul bir şekilde dönüşemediğinden dolayı, Van dorp ve Kotz (2002b) tarafından bu dağılım genişletilerek dört parametreli TSP dağılımı tanımlanmıştır.

İkinci olarak ise, TSP dağılımlı bağımsız iki rastgele değişkenin sırasıyla, konvolüsyonu, çarpımı ve bölümünün tam dağılımları elde edilecektir.

4.1. İki Yönlü Kuvvet Dağılımının Özellikleri

Bu kısımda, [0,1] aralığına kısıtlanmış olan $STSP$ dağılımının, genel $[a,b]$ aralığına genişletilmişi olan formunun belli başlı özellikleri verilecektir.

4.1.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

TSP dağılımının oyf si (4.1.) numaralı eşitlikle tanımlanmıştır (Van dorp ve Kotz, 2002b).

$$h(x) = \begin{cases} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1}, & a \le x \le m \\ \frac{n}{b-a}\left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n-1}, & m \le x \le b \end{cases} \qquad (4.1.)$$

TSP dağılımında bulunan parametrelerden a ve b parametreleri tanım uzayının sınır noktaları, n şekil parametresi ve m ise eşik parametresi olarak tanımlanabilir.

Y, $STSP$ dağılımına sahip bir rastgele değişken olmak üzere, X rastgele değişkeninin (4.1.) numaralı eşitlikteki oyf si, eşitlik (3.1.) kullanılarak, $X = (b-a)Y + a$ lineer dönüşümü ile elde edilmiştir.

Böylece, TSP dağılımının oyf sinin yapısal formu, $STSP$ dağılımınınki ile benzer yapıda olup, U ve J biçimli dağılımlara dönüşümü mümkün olmaktadır.

$TSP(a,m,b,n)$ dağılımının kdf si ise (4.2.) numaralı eşitlikteki gibi ifade edilir.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{m-a}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^n, & a \le x \le m \\ 1 - \frac{b-m}{b-a}\left(\frac{b-x}{b-m}\right)^n, & m \le x \le b. \end{cases} \quad (4.2.)$$

4.1.2. Momentler

(4.1.) numaralı eşitlik kullanılarak $TSP(a,m,b,n)$ dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$E[X] = \frac{a+(n-1)m+b}{n+1} \quad (4.3.)$$

$$Var(X) = (b-a)^2\left[\frac{\left(n-2(n-1)\frac{m-ab-m}{b-a\ b-a}\right)}{(n+2)(n+1)^2}\right] \quad (4.4.)$$

4.1.3. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahminleri

Bu kısımda, üç parametreli üçgensel dağılımın parametrelerinin en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmesine benzer olarak, dört parametreli TSP dağılımının parametreleri de tahmin edilecektir.

X, oyf si (4.1.) numaralı eşitlikle verilen TSP dağılımına sahip bir rastgele değişken olsun. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)$, $TSP(a,m,b,n)$ dağılımından alınmış s birimlik rastgele bir örneklem olmak üzere, sıra istatistikleri $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(s)}$ dir.

Eşitlik (4.1.) den yararlanılarak, $\underline{X}$ için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$L(\underline{X}; a, m, b, n) = (\frac{n}{b-a})^s \left\{\frac{\prod_{i=1}^{r}(X_{(i)}-a)\prod_{i=r+1}^{s}(b-X_{(i)})}{(m-a)^r(b-m)^{s-r}}\right\}^{n-1} \quad (4.5.)$$

$X_{(0)} \equiv a, X_{(s+1)} \equiv b$ ve r'nin anlamı ise tam olarak $X_{(r)} \leq m < X_{(r+1)}$ eşitsizliğince tanımlanan anlam kadardır. Böylece $[a, b]$ aralığında tanımlı üçgensel dağılımın olabilirlik fonksiyonunun elde edilişine benzer olarak $a\ ve\ b$ sabit değerleri $a < X_{(1)}\ ve\ b > X_{(s)}$ olarak tanımlanır ve sonrasında ise,

$$\underbrace{max}_{n>1, a\leq m\leq b} L(\underline{X}; a, m, b, n) = \underbrace{max}_{n>1} [(\frac{n}{b-a})^s . (M(a, b, \hat{r}(a, b)))^{n-1}] \quad (4.6.)$$

eşitliği elde edilir. (4.6.) numaralı eşitlikte yer alan $\hat{r}(a, b)$ ve $M(a, b, r)$ ise aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{r}(a, b) = \underbrace{arg\ max}_{r\ \in\ \{1,\ldots,s\}} M(a, b, r) \quad (4.7.)$$

$$M(a, b, r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}-a}{X_{(r)}-a} \prod_{i=r+1}^{s} \frac{b-X_{(i)}}{b-X_{(r)}}. \quad (4.8.)$$

$STSP$ dağılımında gösterilen yöntemlerle (4.5.) numaralı eşitlikteki olabilirlik fonksiyonu maksimize edilmeye çalışılır. Bunun neticesinde de,

$$\hat{a} = X_{(1)},\ \hat{b} = X_{(s)},\ \hat{m}(a, b) = X_{\hat{r}(a,b)}\ ve\ \hat{n}(a, b) = -\frac{s}{Log(M(a,b,\hat{r}(a,b)))} \quad (4.9.)$$

tahminleri elde edilmiş olur.

4.1.4. Rastgele Sayı Üretimi

(4.2.) numaralı eşitlikte yer alan kdf yardımıyla kantil fonksiyonu (4.10) eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Kantil fonksiyonunu kullanarak olasılık integral dönüşümü ile dört parametreli TSP dağılımından rastgele sayı üretilebilir.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + \sqrt[n]{y(m-a)^{n-1}(b-a)} & , \ 0 \leq y \leq \frac{m-a}{b-a} \\ b - \sqrt[n]{(1-y)(b-m)^{n-1}(b-a)}, & \frac{m-a}{b-a} \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (4.10.)$$

$U \sim Unif(0,1)$ ve aynı şekilde $(1-U) \sim Unif(0,1)$ olduğundan kantil fonksiyonu kullanılarak X değeri aşağıdaki gibi elde edilir ve böylece rastgele sayı üretilmiş olur.

$$X = \begin{cases} a + \sqrt[n]{u(m-a)^{n-1}(b-a)} & , \ U \leq \frac{m-a}{b-a} \\ b - \sqrt[n]{(1-u)(b-m)^{n-1}(b-a)}, & U > \frac{m-a}{b-a} \end{cases}$$

4.2. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı Rastgele Değişkenlerin Konvolüsyonlarının Dağılımı

Öncelikle, ikinci bölümde verilen, $[0,1]$ aralığında tanımlanmış iki yönlü dağılımlar ailesinden olan STSP dağılımlı iki rastgele değişkenin konvolüsyonunun oyf si elde edilecek, farklı parametre değerleri için grafikleri çizdirilecek, momentleri hesaplanacak, yüzdelik tablosu sunulacak ve simülasyon uygulaması yapılacaktır.

Akabinde, yine $[0,1]$ aralığında tanımlı olan $STSP$ dağılımına sahip özdeş ve bağımsız iki rastgele değişkenin toplamının oyf si elde edilecek ve farklı parametre değerlerine göre grafikleri verilecektir. Son olarak ise, $[a, b]$ aralığında tanımlı TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin oyf si elde edilecek ve farklı parametre değerleri için grafikleri çizdirilip, momentleri hesaplanacaktır.

4.2.1. Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu

$X \sim STSP(\theta_x, n)$ ve $Y \sim STSP(\theta_y, l)$ iki rastgele değişken olmak üzere, $Z = X + Y$ toplamının dağılımı bulunacaktır. Sadelik sağlaması için X ve Y rastgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve pozitif olduğu varsayılacaktır. $\theta_x \leq \theta_y$ genel kabulü üzerine, ilk olarak $\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulu, ardından da $\theta_x + \theta_y > 1$ koşulu altında, Z'nin kapalı formda oyf leri elde edilecek, sonrasında ise bu dağılımın farklı parametre değerlerine göre grafikleri çizdirilip, momentleri ve yüzdelik değerleri tablolar halinde sunulacaktır.

Z'nin oyf si (2.45.) numaralı eşitlik kullanılarak elde edilecektir. Oyf lerinin parçalı tanımlı olmalarından ötürü bu eşitlikte verilen integralin hesaplanmasında farklı durum ve her bir duruma ait farklı alt aralıklar ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt aralıklar Tablo 2.1. ve Tablo 2.2. den yararlanılarak elde edilecektir.

4.2.1.1. Yansıma Parametreleri Toplamının 1'den Küçük Ya da Eşit Olması Durumu

$\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımı altında Z'nin oyf si, (2.45.) numaralı eşitlik yardımıyla ve (2.46.) eşitliğinde ifade edildiği gibi dört farklı integralin çözülmesiyle elde edilecektir. Aşağıda bu dört farklı integralin çözümü için gerekli adımlar verilecektir.

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $0 \leq x \leq \theta_x$, $0 \leq y \leq \theta_y$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_1(z \mid \Theta) = \frac{nl}{\theta_x^{n-1}\theta_y^{l-1}} \int_{x \epsilon A_1(z)} x^{n-1}(z-x)^{l-1} dx \qquad (4.11.)$$

olarak verilir. Dağılımın ilk parçası olan (4.11.) eşitliği, alt aralıklar göz önünde bulundurularak (4.12.), (4.13.) ve (4.14.) eşitlikleri ile verilen $I_{1i}(z)$ fonksiyonları yardımıyla elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlanması amacıyla, $k_1 = nl/(\theta_x^{n-1}\theta_y^{l-1})$ olarak tanımlanmıştır.

$$I_{11}(z) = k_1 \int_0^z x^{n-1}(z-x)^{l-1}dx = k_1 z^{n+l-1}B(l,n) \quad (4.12.)$$

$$I_{12}(z) = k_1 \int_0^{\theta_x} x^{n-1}(z-x)^{l-1}dx$$
$$= k_1 \theta_x^n z^{l-1} B(n,1)\,{}_2F_1(1-l,n,1+n;\frac{\theta_x}{z}) \quad (4.13.)$$

$$I_{13}(z) = k_1 \int_{z-\theta_y}^{\theta_x} x^{n-1}(z-x)^{l-1}dx$$
$$= k_1\big(\theta_x + \theta_y - z\big)\big(z-\theta_y\big)^{n-1}\theta_y^{l-1}F_1(1,1-n,1-l,2;\frac{z-\theta_x-\theta_y}{z-\theta_y},\frac{\theta_x+\theta_y-z}{\theta_y}) \quad (4.14.)$$

$I_{1i}(z)$ eşitlikleri incelendiğinde görüldüğü gibi $STSP$ dağılımına sahip iki rastgele değişkenin konvülüsyonunun dağılımının kapalı formdaki ifadesini elde etmek için bazı integral sonuçlarından yararlanılmıştır. Diğer durumlarda da karşılaşılabilecek olan bu integral sonuçları aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

İlk olarak $I_{11}(z)$ eşitliğinde karşılaşılan integralin çözümünde, Gradshteyn ve Ryzhik (2000) de yer alan (3.191.1) ifadesi referans alınmakta ve aşağıdaki eşitlikle gösterilmektedir.

$$\int_0^u x^{v-1}(u-x)^{\mu-1}dx = u^{\mu+v-1}\mathrm{B}(\mu,v) \quad (4.15.)$$

İkinci olarak $I_{12}(z)$ eşitliğinde karşımıza çıkan integral çözümü için Gradshteyn ve Ryzhik (2000) de yer alan (3.197.3) ifadesi referans alınmakta ve eşitlik (4.16.) ile ifade edilmektedir.

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-\beta x)^{-v}dx = B(\lambda,\mu)\,{}_2F_1(v,\lambda;\lambda+\mu;\beta) \quad (4.16.)$$

Bu eşitlikte $\lambda > 0, \mu > 0, |\beta| < 1, v \in \mathbb{R}$ olup $B(\cdot,\cdot)$, beta fonksiyonunu ve ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot)$ ise Gauss hipergeometrik fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca Gauss hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki seri açılımı ile elde edilmektedir.

$$ {}_2F_1(a,b\,;\,c\,;\,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!} \tag{4.17.} $$

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda yer alan pochhammer değeri ise aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanır.

$$ (\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), & n \geq 1 \\ 1 \quad , & n = 0 \end{cases} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \tag{4.18.} $$

Son olarak $I_{13}(z)$ eşitliğinde karşımıza çıkan integral çözümü için Gradshteyn ve Ryzhik (2000) de yer alan (3.211) ifadesi referans alınmakta ve eşitlik (4.19.) ile gösterilmektedir.

$$ \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-ux)^{-\rho}(1-vx)^{-\sigma}dx $$
$$ = B(\mu,\lambda)F_1(\lambda,\rho,\sigma,\lambda+\mu;u,v) \tag{4.19.} $$

Yukarıdaki eşitlikte $\lambda > 0$ şeklindedir. $F_1(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\,;\cdot,\cdot)$ ise iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonu veya bir başka ismiyle $Apell$ fonksiyonunu ifade etmektedir. $Apell$ fonksiyonunun seri açılımı ise aşağıdaki gibidir.

$$ F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m!n!} x^m y^n, \quad (|x|,|y| < 1) \tag{4.20.} $$

Bahsedilen integral sonuçları yardımıyla elde edilen $I_{1i}(z)$ fonksiyonları kullanılarak Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan birinci integralin kapalı formdaki gösterimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ I_1(z) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0,\theta_x) \\ I_{12}(z), & z \in [\theta_x,\theta_y) \\ I_{13}(z), & z \in [\theta_y,\theta_x+\theta_y) \end{cases} \tag{4.21.} $$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le \theta_x,\ \theta_y \le y \le 1$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_2(z\,|\Theta) = (nl)/(\theta_x^{n-1}\left(1-\theta_y\right)^{l-1}) \int_{x\epsilon A_2(z)} x^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \qquad (4.22.)$$

olarak verilir. Dağılımın ikinci parçası olan (4.22.) eşitliği, alt aralıklar göz önünde bulundurularak (4.23.), (4.24.) ve (4.25.) eşitlikleri ile verilen $I_{2i}(z)$ fonksiyonları yardımıyla elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlanması amacıyla, $k_2 = (nl)/(\theta_x^{n-1}\left(1-\theta_y\right)^{l-1})$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} I_{21}(z) &= k_2 \int_0^{z-\theta_y} x^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_2\left(z-\theta_y\right)^n (1-z)^{l-1} B(n,1)\,{}_2F_1(1-l,n,n+1;\tfrac{\theta_y-z}{1-z}) \end{aligned} \qquad (4.23.)$$

$$\begin{aligned} I_{22}(z) &= k_2 \int_0^{\theta_x} x^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_2\theta_x^n (1-z)^{l-1} B(n,1)\,{}_2F_1(1-l,n,n+1;\tfrac{\theta_x}{z-1}) \end{aligned} \qquad (4.24.)$$

$$\begin{aligned} I_{23}(z) &= k_2 \int_{z-1}^{\theta_x} x^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_2(z-1)^{n-1}(\theta_x-z+1)^l B(l,1)\,{}_2F_1(1-n,l,l+1;\tfrac{z-\theta_x-1}{z-1}) \end{aligned} \qquad (4.25.)$$

$I_{2j}(z)$ fonksiyonları kullanılarak Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan ikinci integralin kapalı formdaki gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$I_2(z\,|\Theta) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in [\theta_y, \theta_x+\theta_y) \\ I_{22}(z), & z \in [\theta_x+\theta_y, 1) \\ I_{23}(z), & z \in [1, \theta_x+1) \end{cases} \qquad (4.26.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $\theta_x \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \theta_y$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_3(z\mid\Theta) = (nl)/((1-\theta_x)^{n-1}\theta_y^{l-1}) \int_{x\epsilon A_3(z)} (1-x)^{n-1}(z-x)^{l-1}dx \quad (4.27.)$$

olarak verilir. Dağılımın üçüncü parçası olan (4.27.) eşitliği, alt aralıklar göz önünde bulundurularak (4.28.), (4.29.) ve (4.30.) eşitlikleri ile verilen $I_{3i}(z)$ fonksiyonları yardımıyla elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlanması amacıyla, $k_3 = nl/((1-\theta_x)^{n-1}\ \theta_y^{l-1})$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} I_{31}(z) &= k_3 \int_{\theta_x}^{z} (1-x)^{n-1}(z-x)^{l-1}dx \\ &= k_3(1-\theta_x)^{n-1}(z-\theta_x)^{l} B(1,l)\,{}_2F_1(1-n,1,1+l;\tfrac{z-\theta_x}{1-\theta_x}) \end{aligned} \quad (4.28.)$$

$$\begin{aligned} I_{32}(z) &= k_3 \int_{z-\theta_y}^{z} (1-x)^{n-1}(z-x)^{l-1}dx \\ &= k_3\left(1-z+\theta_y\right)^{n-1}\theta_y^{l} B(1,l)\,{}_2F_1(1-n,1,l+1;\tfrac{\theta_y}{1-z+\theta_y}) \end{aligned} \quad (4.29.)$$

$$\begin{aligned} I_{33}(z) &= k_3 \int_{z-\theta_y}^{1} (1-x)^{n-1}(z-x)^{l-1}dx \\ &= k_3\left(1-z+\theta_y\right)^{n}\theta_y^{l-1} B(1,n)\,{}_2F_1(1-l,1,n+1;\tfrac{1-z+\theta_y}{\theta_y}) \end{aligned} \quad (4.30.)$$

$I_{3j}(z)$ fonksiyonları kullanılarak Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan üçüncü integralin kapalı formdaki gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$I_3(z\mid\Theta) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in [\theta_x, \theta_x+\theta_y) \\ I_{32}(z), & z \in [\theta_x+\theta_y, 1) \\ I_{33}(z), & z \in [1, \theta_y+1) \end{cases} \quad (4.31.)$$

Durum 4: Son durumda ise x ve y için aralık değerleri $\theta_x \leq x \leq 1,\ \theta_y \leq y \leq 1$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_4(z\,|\Theta) = nl/((1-\theta_x)^{n-1}\left(1-\theta_y\right)^{l-1}) \times \int_{x\epsilon A_4(z)}(1-x)^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \quad (4.32.)$$

olarak verilir. Dağılımın son parçası olan (4.32.) eşitliği, alt aralıklar göz önünde bulundurularak (4.33.), (4.34.) ve (4.35.) eşitlikleri ile verilen $I_{4i}(z)$ fonksiyonları yardımıyla elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlanması amacıyla, $k_4 = nl/((1-\theta_x)^{n-1}\left(1-\theta_y\right)^{l-1})$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} I_{41}(z) &= k_4 \int_{\theta_x}^{z-\theta_y}(1-x)^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_4(1-\theta_x)^{n-1}\left(z-\theta_y-\theta_x\right)(1-z+\theta_x)^{l-1} \\ &\quad \times F_1(1,1-n,1-l,2;\tfrac{z-\theta_y-\theta_x}{1-\theta_x},\tfrac{\theta_x+\theta_y-z}{1-z+\theta_x}) \end{aligned} \quad (4.33.)$$

$$\begin{aligned} I_{42}(z) &= k_4 \int_{z-1}^{z-\theta_y}(1-x)^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_4\left(1-\theta_y\right)^{l}(2-z)^{n-1}B(l,1)_2F_1(1-n,l,1+l;\tfrac{1-\theta_y}{2-z}) \end{aligned} \quad (4.34.)$$

$$\begin{aligned} I_{43}(z) &= k_4 \int_{z-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx \\ &= k_4(2-z)^{l+n-1}B(l,n) \end{aligned} \quad (4.35.)$$

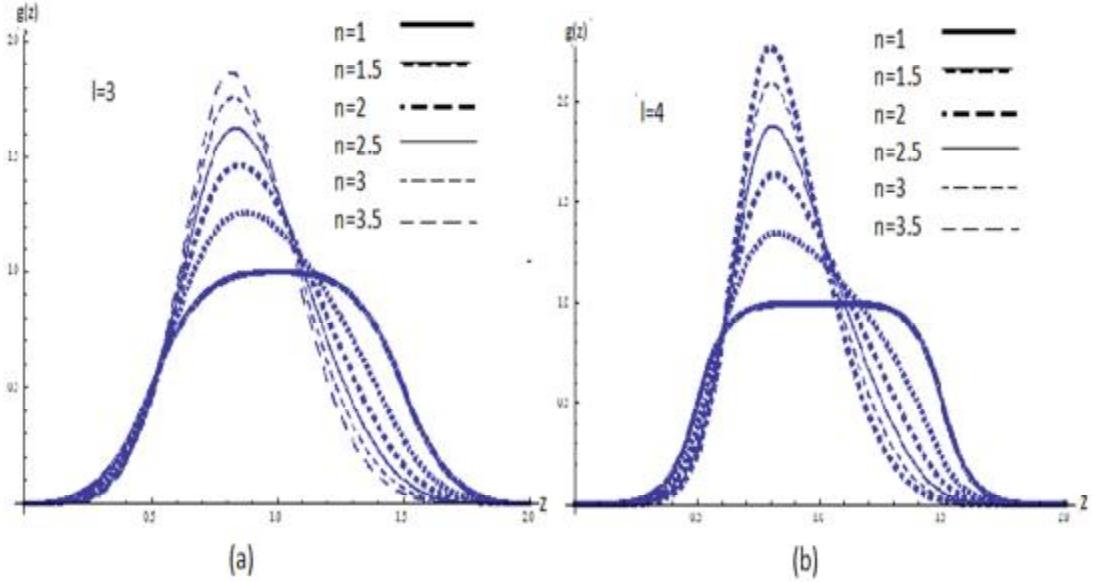
$I_{4j}(z)$ fonksiyonları kullanılarak Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan son integralin kapalı formdaki gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$I_4(z\,|\Theta) = \begin{cases} I_{41}(z), & z \in [\theta_x+\theta_y, \theta_x+1) \\ I_{42}(z), & z \in [\theta_x+1, \theta_y+1) \\ I_{43}(z), & z \in [\theta_y+1, 2] \end{cases} \quad (4.36.)$$

Böylece $z \in [0,2]$ için Z'nin oyf si (4.37.) numaralı eşitlik ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_Z(z \mid \theta_x, \theta_y) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0, \theta_x) \\ I_{12}(z) + I_{31}(z), & z \in [\theta_x, \theta_y) \\ I_{13}(z) + I_{21}(z) + I_{31}(z), & z \in [\theta_y, \theta_x + \theta_y) \\ I_{22}(z) + I_{32}(z) + I_{41}(z), & z \in [\theta_x + \theta_y, 1) \\ I_{23}(z) + I_{33}(z) + I_{41}(z), & z \in [1, \theta_x + 1) \\ I_{33}(z) + I_{42}(z), & z \in [\theta_x + 1, \theta_y + 1) \\ I_{43}(z), & z \in [\theta_y + 1, 2) \end{cases} \quad (4.37.)$$

$\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulu altında, $STSP$ dağılımına sahip iki rastgele değişkenin toplamının oyf nun elde edilmesinden sonra, Şekil 4.1.(a) da, $l = 3$ ve n için $1, 1.5, 2, 2.5, 3$ ve 3.5 değerleri verilerek, $X \sim STSP(1/4, n)$ ve $Y \sim TSP(1/2, l)$ olmak üzere $g(z)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Şekil 4.1.(b) de ise $l = 4$ e yükseltilmiş ve n için yine aynı değerler verilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değer ve varyansının azaldığı, çarpıklık ve sivriliğin ise arttığı görülmektedir. l deki artışın ise dağılımın beklenen değerini değiştirmediği ama varyansını azaltıp, çarpıklığının ve basıklığının artmasına etki ettiği sonucuna varılmıştır.



Şekil 4.1. Belirli n ve l değerleri için $g(z)$ fonksiyonunun grafikleri ($\theta_x = 0.25$, $\theta_y = 0.5$)

Şekil 4.1 de, n ve l nin farklı değerleri için oyf leri incelenen bu dağılımların momentlerinin değerleri Tablo 4.1. ile verilmiştir.

Tablo 4.1. Belirli n ve l değerleri için Z dağılımının momentleri ($\theta_x = 0.25,\ \theta_y = 0.5$)

n	l	$E(z)$	$V(z)$	α_3	α_4
1	3	1.0000	0.1083	0.0000	2.2823
1.5	3	0.9500	0.0850	0.1460	2.5325
2	3	0.9167	0.0701	0.2181	2.7334
2.5	3	0.8929	0.0601	0.2486	2.8745
3	3	0.8750	0.0531	0.2552	2.9654
3.5	3	0.8611	0.0480	0.2685	3.0190
1	4	1.0000	0.1000	0.0000	2.1726
1.5	4	0.9500	0.0767	0.1705	2.4507
2	4	0.9167	0.0618	0.2636	2.6956
2.5	4	0.8929	0.0518	0.3109	2.8863
3	4	0.8750	0.0448	0.3297	3.0255
3.5	4	0.8611	0.0397	0.3308	3.1224
1	5	1.0000	0.0952	0.0000	2.0891
2	5	0.9167	0.0570	0.2973	2.6461
3	5	0.8750	0.0400	0.3902	3.0390
4	6	0.8500	0.0281	0.4626	3.3027
5	6	0.8333	0.0228	0.4437	3.4497
6	6	0.8214	0.0195	0.4058	3.5239
7	7	0.8125	0.0152	0.4347	3.6534
8	8	0.8056	0.0122	0.4580	3.7639
9	9	0.8000	0.0100	0.4773	3.8591
10	10	0.7955	0.0084	0.4935	3.9420

Ayrıca Z'nin dağılımının yüzdelikleri, $\int_0^{v_p} g_Z(z)dz = p$ eşitliğinin çözümü ile hesaplanabilir. Toplamın oyf sinin kompleks yapıda olmasından ötürü bu eşitlik için analitik çözüm mevcut değildir. Ama bilgisayar programı kullanarak yüzdelik değerleri nümerik olarak hesaplanabilir. Yukarıdaki integralin çözümü için de Mathematica (Wolfram Research, Inc. 2012) programı kullanılmış ve farklı parametre değerleri için yüzdelikler hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar $p = 0.9, 0.95, 0975\ ve\ 0.99$ için Tablo 4.2. de verilmiştir.

Tablo 4.2. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri ($p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99$)

θ_x	n	θ_y	l	0.90	0.95	0.975	0.99
1/3	3	1/2	3	1.2151	1.3049	1.3820	1.4698
			4	1.1926	1.2772	1.3339	1.4303
			5	1.1793	1.2545	1.2975	1.4052
	4		3	1.1700	1.2517	1.3232	1.4065
			4	1.1433	1.2203	1.2805	1.3663
			5	1.1030	1.2014	1.2660	1.3264
	5		3	1.1282	1.2165	1.2607	1.3590
			4	1.1121	1.1830	1.2272	1.3086
			5	1.0887	1.2286	1.2215	1.2921
1/4	3	1/2	3	1.1814	1.2760	1.3570	1.4485
			4	1.1601	1.2501	1.2953	1.4102
			5	1.1478	1.2348	1.3071	1.3614
	4		3	1.1260	1.2121	1.2878	1.3758
			4	1.1007	1.1827	1.2545	1.3374
			5	1.0857	1.1651	1.2297	1.3129
	5		3	1.0910	1.1661	1.2398	1.3226
			4	1.0624	1.1360	1.2040	1.2057
			5	1.0447	1.1173	1.1815	1.2545
1/5	3	1/3	3	1.0869	1.1887	1.2775	1.3798
			4	1.0474	1.1435	1.2252	1.1598
			5	0.9742	1.1126	1.1933	1.2818
	4		3	1.0288	1.0970	1.2059	1.2709
			4	0.9848	1.0738	1.1520	1.2321
			5	0.9572	1.0425	1.0762	1.2043
	5		3	0.9917	1.0799	1.1570	1.2442
			4	0.9443	1.0272	1.1009	1.1883
			5	0.9141	0.9930	1.0623	1.1467

4.2.1.2. Yansıma Parametreleri Toplamının 1'den Büyük Olması Durumu

$\theta_x + \theta_y > 1$ varsayımı altında Z'nin oyf si, $\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulu altındaki adımlara benzer olarak aşağıdaki gibi elde edilecektir.

Durum 1: Bu durumda, $\theta_x + \theta_y \leq 1$ varsayımında verilen (4.11.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın ilk parçası, (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitlikleri yardımıyla ifade edilecektir. Ayrıca bu durum için alt aralıklar da değişiklik göstermediğinden dolayı, Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan birinci integralin kapalı formdaki gösterimi, (4.21.) eşitliğinin aynısı olacaktır.

Durum 2: $\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulu ile verilen (4.22.) eşitliği kullanılarak dağılımın ikinci parçası, (4.23.), (4.25.) ve aşağıda verilen (4.38.) eşitlikleri yardımıyla ve yeni alt aralıklar göz önünde bulundurularak (4.39.) eşitliğindeki gibi elde edilecektir.

$$I_{22}^{*}(z) = k_2 \int_{z-1}^{z-\theta_y} x^{n-1}(1-z+x)^{l-1}dx$$
$$= k_2\left(1-\theta_y\right)^{l}(z-1)^{n-1}B(l,1)_2F_1(1-n,l,l+1;\tfrac{\theta_y-1}{z-1}) \qquad (4.38.)$$

Böylece, Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan ikinci integralin kapalı formdaki gösterimi de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$I_2(z\mid\Theta) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in [\theta_y, 1) \\ I_{22}^{*}(z), & z \in [1, \theta_x+\theta_y) \\ I_{23}(z), & z \in [\theta_x+\theta_y, \theta_x+1) \end{cases} \qquad (4.39.)$$

Durum 3: Önceki duruma benzer olarak, $\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulunda verilen (4.27.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın üçüncü parçası, (4.28.), (4.30.) ve (4.40.) eşitlikleri yardımıyla ve yeni alt aralıklar göz önünde bulundurularak elde edilecektir.

$$I_{32}^{*}(z) = k_3 \int_{\theta_x}^{1}(1-x)^{n-1}(z-x)^{l-1}dx$$
$$= k_3(1-\theta_x)^{n}(z-\theta_x)^{l-1}B(1,n)_2F_1(1-l,1,n+1;\tfrac{1-\theta_x}{z-\theta_x}) \qquad (4.40.)$$

Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan üçüncü integralin kapalı formdaki gösterimi de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$I_3(z\mid\Theta) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in [\theta_x, 1) \\ I_{32}^{*}(z), & z \in [1, \theta_x+\theta_y) \\ I_{33}(z), & z \in [\theta_x+\theta_y, \theta_y+1) \end{cases} \qquad (4.41.)$$

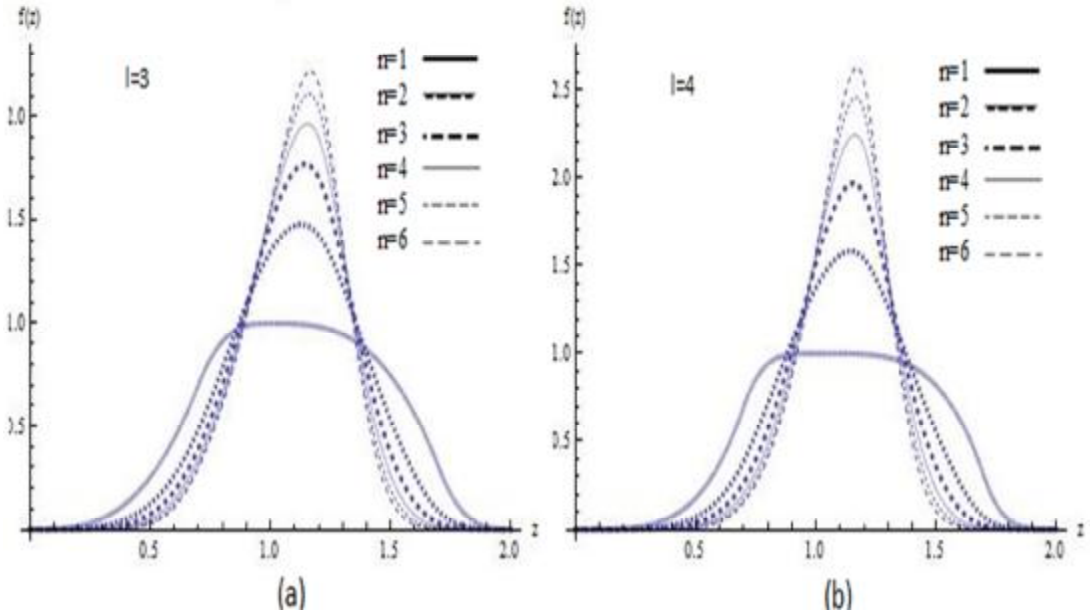
Durum 4: Son durumda da, $\theta_x + \theta_y \leq 1$ koşulunda verilen (4.32.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın son parçası, önceden tanımlanmış olan (4.33), (4.34) ve

(4.35) eşitlikleri yardımıyla ifade edilecektir. Ayrıca bu durum için alt aralıklar da değişiklik göstermediğinden dolayı, Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan dördüncü integralin kapalı formdaki gösterimi, (4.36.) eşitliğinin aynısı olacaktır.

Böylece z $\in [0,2]$ için Z'nin oyf si (4.42.) numaralı eşitlik ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_Z(z \mid \theta_x, \theta_y) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0, \theta_x) \\ I_{12}(z) + I_{31}(z), & z \in [\theta_x, \theta_y) \\ I_{13}(z) + I_{21}(z) + I_{31}(z), & z \in [\theta_y, 1) \\ I_{13}(z) + I_{22}^{*}(z) + I_{32}^{*}(z), & z \in [1, \theta_x + \theta_y) \\ I_{23}(z) + I_{33}(z) + I_{41}(z), & z \in [\theta_x + \theta_y, \theta_x + 1) \\ I_{33}(z) + I_{42}(z), & z \in [\theta_x + 1, \theta_y + 1) \\ I_{43}(z), & z \in [\theta_y + 1, 2] \end{cases} \quad (4.42.)$$

(4.42.) eşitliğinin elde edilmesinden sonra, Şekil 4.2.(a) da, $l = 3$ ve n için $1, 2, 3, 4, 5$ ve 6 değerleri verilerek, $X \sim STSP(0.7, n)$ ve $Y \sim STSP(0.9, l)$ olmak üzere $g(z)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Şekil 4.2.(b) de ise $l = 4$ e yükseltilmiş ve n için yine aynı değerler verilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değerinin değişmediği, varyansının azaldığı, çarpıklığının ile sivriliğinin ise arttığı görülmektedir. l deki artışın ise dağılımın beklenen değerinin artmasına, varyansı ile çarpıklığının ise azalmasına etki ettiği sonucuna varılmaktadır.



Şekil 4.2. Belirli n ve l değerleri için $g(z)$ fonksiyonunun grafikleri $\theta_x = 0.7$, $\theta_y = 0.9$)

Farklı n ve l değerleri için oyf lerinin grafikleri Şekil 4.2. de verilen bu dağılımların momentlerinin değerleri Tablo 4.3. ile verilmiştir. Ayrıca Tablo 4.4. de ise $p = 0.9, 0.95, 0975$ ve 0.99 değerleri için hesaplanan dağılımın bazı yüzdelik değerleri sunulmuştur.

Tablo 4.3. Belirli n ve l değerleri için Z dağılımının momentleri ($\theta_x = 0.7, \theta_y = 0.9$)

n	l	$E(Z)$	$V(z)$	α_3	α_4
1	3	1.10	0.1103	-0.0680	2.3125
2	3	1.10	0.0687	-0.1389	2.7715
3	3	1.10	0.0520	-0.2108	2.9538
4	3	1.10	0.0437	-0.2740	3.0126
5	3	1.10	0.0389	-0.3258	3.0233
6	3	1.10	0.0359	-0.3671	3.0277
1	4	1.12	0.1016	-0.0535	2.2061
2	4	1.12	0.0599	-0.1181	2.7484
3	4	1.12	0.0433	-0.1925	3.0260
4	4	1.12	0.0349	-0.2654	3.1618
5	4	1.12	0.0302	-0.3306	3.2293
6	4	1.12	0.0272	-0.3863	3.2655

Tablo 4.4. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri $(p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)$

θ_x	n	θ_y	l	0.90	0.95	0.975	0.99
0.5	3	0.7	1	1.4362	1.5713	1.6024	1.6838
			2	1.3979	1.4794	1.5480	1.6241
			3	1.3856	1.4604	1.5234	1.5931
	4		1	1.4003	1.5000	1.5414	1.6242
			2	1.3747	1.4471	1.5083	1.5782
			3	1.3348	1.4131	1.4732	1.5428
0.6	3	0.8	1	1.4901	1.5769	1.6443	1.7172
			2	1.4841	1.5570	1.6169	1.6825
			3	1.4867	1.5528	1.6078	1.6677
	4		1	1.4848	1.5618	1.6114	1.6830
			2	1.4708	1.5101	1.5877	1.6470
			3	1.4691	1.5266	1.5753	1.6301
0.7	3	0.9	1	1.5450	1.6308	1.6920	1.7551
			2	1.5785	1.6435	1.6946	1.7495
			3	1.5963	1.6537	1.7003	1.7506
	4		1	1.5242	1.6261	1.6788	1.6970
			2	1.5754	1.6321	1.6762	1.6875
			3	1.5840	1.6736	1.6787	1.7232

4.2.2. Özdeş Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu

X_1 ve X_2, θ yansıma parametreli ve n şekil parametreli $STSP$ dağılımına sahip özdeş ve bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, $Z = X_1 + X_2$ toplamının dağılımı bulunacaktır. İlk olarak $\theta \leq 1/2$ varsayımı, ardından da $\theta > 1/2$ varsayımı altında, Z'nin kapalı formda oyf leri elde edilecektir.

Z'nin oyf si (2.45.) numaralı eşitlik kullanılarak elde edilecektir. Oyf lerinin parçalı tanımlı olmalarından ötürü bu eşitlikte verilen integralin hesaplanmasında farklı durum ve her bir duruma ait farklı alt aralıklar ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt aralıklar Tablo 4.5. ve Tablo 4.6. den yararlanılarak elde edilecektir.

Tablo 4.5. $\theta \leq 1/2$ varsayımı altında Z'nin [0,2] aralığındaki beş durumu için belirlenen $A_i(z \mid \theta),\ i = 1,\ldots,4$ aralıkları

Durumlar	$\mathbf{A_1(z)}$	$\mathbf{A_2(z)}$	$\mathbf{A_3(z)}$	$\mathbf{A_4(z)}$
$z \in [0, \theta)$	$[0, z)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$z \in [\theta, 2\theta)$	$[z-\theta, \theta)$	$[0, z-\theta)$	$[\theta, z)$	$\emptyset$
$z \in [2\theta, 1)$	$\emptyset$	$[0, \theta)$	$[z-\theta, z)$	$[\theta, z-\theta)$
$z \in [1, \theta+1)$	$\emptyset$	$[z-1, \theta)$	$[z-\theta, 1)$	$[\theta, z-\theta)$
$z \in [\theta+1, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[z-1, 1)$

Tablo 4.6. $\theta > 1/2$ varsayımı altında Z'nin [0,2] aralığındaki beş durumu için belirlenen $A_i(z \mid \theta), i = 1,\ldots,4$ aralıkları

Durumlar	$\mathbf{A_1(z)}$	$\mathbf{A_2(z)}$	$\mathbf{A_3(z)}$	$\mathbf{A_4(z)}$
$z \in [0, \theta)$	$[0, z)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$z \in [\theta, 1)$	$[z-\theta, \theta)$	$[0, z-\theta)$	$[\theta, z)$	$\emptyset$
$z \in [1, 2\theta)$	$[z-\theta, \theta)$	$[z-1, z-\theta)$	$[\theta, 1)$	$\emptyset$
$z \in [2\theta, \theta+1)$	$\emptyset$	$[z-1, \theta)$	$[z-\theta, 1)$	$[\theta, z-\theta)$
$z \in [\theta+1, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[z-1, 1)$

4.2.2.1. Yansıma Parametresinin $1/2$ den Küçük Ya da Eşit Olması Durumu

$\theta \leq 1/2$ koşulu altında Z'nin oyf si, (2.45.) numaralı eşitlik yardımıyla ve (2.46.) eşitliğinde ifade edildiği gibi dört farklı integralin çözülmesiyle elde edilecektir. Aşağıda bu dört farklı integralin çözümü için gerekli adımlar verilecektir.

Durum 1: İlk durumda x_1 ve x_2 için aralık değerleri $0 \leq x_1 \leq \theta,\ 0 \leq x_2 \leq \theta$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_1(z \mid \Theta) = n^2/\theta^{2(n-1)} \int_{x_1 \epsilon A_1(z)} x_1^{n-1}(z-x_1)^{n-1} dx_1 \qquad (4.43.)$$

olarak verilir. Hesaplamalarda kolaylık sağlanması açısından integral sabiti, $k_1 = n^2/\theta^{2(n-1)}$ olarak alınacaktır. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{1i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{11}(z) = k_1 z^{2n-1} B(n,n) \qquad (4.44.)$$

$$I_{12}(z) = k_1\big((z-\theta)\theta\big)^{n-1}(2\theta - z)F_1(1,1-n,1-n,2,\tfrac{z-2\theta}{z-\theta},\tfrac{2\theta-z}{\theta}) \qquad (4.45.)$$

Hesaplanan $I_{1i}(z)$ eşitlikleri yardımıyla Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan ilk parçası elde edilmiştir.

$$I_1(z) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0, \theta) \\ I_{12}(z), & z \in [\theta, 2\theta) \end{cases} \quad (4.46.)$$

Durum 2: İkinci durumda x_1 ve x_2 için aralık değerleri $0 \leq x_1 \leq \theta,\ \theta \leq x_2 \leq 1$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_2(z\ |\Theta) = n^2/((1-\theta)\theta)^{(n-1)} \int_{x_1 \epsilon A_2(z)} x_1^{n-1}(1 - z + x_1)^{n-1} dx_1 \quad (4.47.)$$

olarak verilir. Hesaplamalarda kolaylık sağlanması açısından integral sabiti, $k_2 = n^2/((1-\theta)\theta)^{(n-1)}$ olarak alınacaktır. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve aşağıdaki gibi $I_{2i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{21}(z) = k_2(z-\theta)^n(1-z)^{n-1}B(n,1)\ {}_2F_1(1-n, n; n+1; \tfrac{\theta-2}{1-z}) \quad (4.48.)$$

$$I_{22}(z) = k_2(-1)^{n-1}\theta^n(z-1)^{n-1}B(n,1)\ {}_2F_1(1-n, n; n+1; \tfrac{\theta}{z-1}) \quad (4.49.)$$

$$I_{23}(z) = k_2(\theta - z + 1)^n(z-1)^{n-1}B(n,1)\ {}_2F_1(1-n, n; n+1; \tfrac{z-\theta-1}{z-1}) \quad (4.50.)$$

Hesaplanan $I_{2i}(z)$ eşitlikleri yardımıyla Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan ikinci parçası elde edilmiştir.

$$I_2(z) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in [\theta, 2\theta) \\ I_{22}(z), & z \in [2\theta, 1) \\ I_{23}(z), & z \in [1, \theta + 1) \end{cases} \quad (4.51.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x_1 ve x_2 için aralık değerleri $\theta \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq \theta$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral aşağıdaki gibi verilir.

$$I_3(z\ |\Theta) = n^2/((1-\theta)\theta)^{n-1} \int_{x_1 \epsilon A_3(z)} (1-x_1)^{n-1}(z-x_1)^{n-1} dx_1 \quad (4.52.)$$

İntegral sabiti, $k_3 = n^2/((1-\theta)\theta)^{n-1}$ olarak alınacak ve integralin parçaları ayrı ayrı elde edilerek ve $I_{3j}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{31}(z) = k_3(1-\theta)^{n-1}(z-\theta)^n B(1,n)\ {}_2F_1(1-n,1;n+1;\tfrac{z-\theta}{1-\theta}) \quad (4.53.)$$

$$I_{32}(z) = k_3(1+\theta-z)^{n-1}\theta^n B(1,n)\ {}_2F_1(1-n,1;n+1;\tfrac{\theta}{1+\theta-z}) \quad (4.54.)$$

$$I_{33}(z) = k_3(1-z+\theta)^n\theta^{n-1} B(1,n)\ {}_2F_1(1-n,1;n+1;\tfrac{1-z+\theta}{\theta}) \quad (4.55.)$$

$I_{3i}(z)$ eşitlikleri yardımıyla *Z*'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan üçüncü parça aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$I_3(z) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in [\theta, 2\theta) \\ I_{32}(z), & z \in [2\theta, 1) \\ I_{33}(z), & z \in [1, \theta+1) \end{cases} \quad (4.56.)$$

Durum 4: Son durumda ise x_1 ve y_1 için aralık değerleri $\theta \leq x_1 \leq 1,\ \theta \leq x_2 \leq 1$ şeklindedir. Bu durumda hesaplanacak olan integral,

$$I_4(z\ |\Theta) = n^2/(1-\theta)^{2(n-1)} \int_{x_1 \epsilon A_4(z)} (1-x_1)^{n-1}(1-z+x_1)^{n-1} dx_1 \quad (4.57.)$$

olarak verilir. Diğer durumlardaki gibi, hesaplamalarda kolaylık sağlanması açısından integral sabiti, $k_4 = n^2/(1-\theta)^{2(n-1)}$ olarak alınacak ve integralin parçaları ayrı ayrı elde edilerek $I_{4i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{41}(z) = k_4(1-\theta)^{n-1}(1-z+\theta)^{n-1}(z-2\theta) \times F_1(1,1-n,1-n;2;\frac{z-2\theta}{1-\theta},\frac{2\theta-z}{1-z+\theta} \quad (4.58.)$$

$$I_{42}(z) = k_4(2-z)^{2n-1}B(n,n) \quad (4.59.)$$

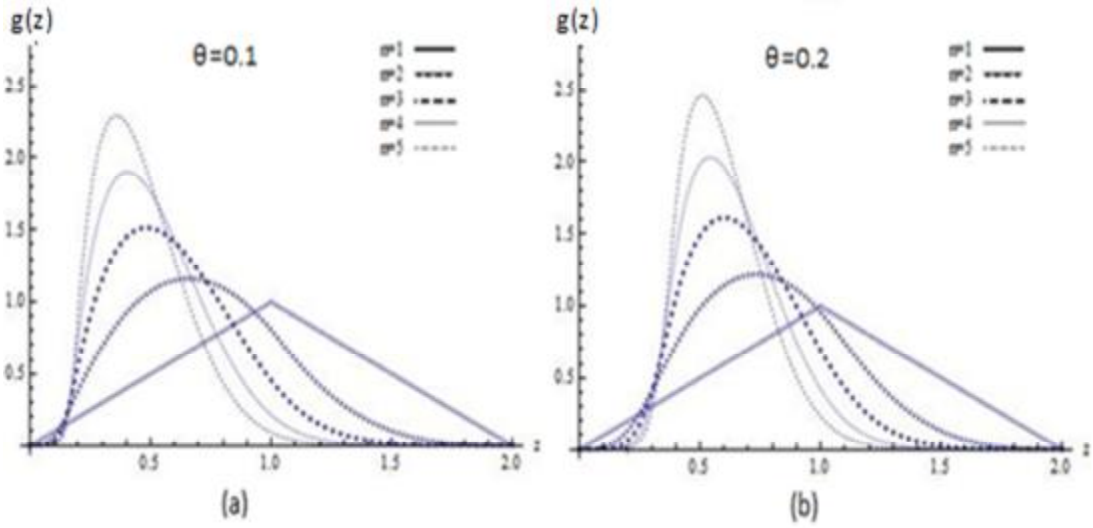
Hesaplanan $I_{4i}(z)$ eşitlikleri yardımıyla Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan dördüncü parçası elde edilmiştir.

$$I_4(z) = \begin{cases} I_{41}(z), & z \in [2\theta, \theta+1) \\ I_{42}(z), & z \in [\theta+1,2] \end{cases} \quad (4.60.)$$

Böylece $z \in [0,2]$ için Z'nin oyf si aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_Z(z\,|\theta) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0,\theta) \\ I_{12}(z)+I_{21}(z)+I_{31}(z & z \in [\theta,2\theta) \\ I_{22}(z)+I_{32}(z)+I_{41}(z) & z \in [2\theta,1) \\ I_{23}(z)+I_{33}(z)+I_{41}(z), & z[1,\theta+1) \\ I_{42}(z), & z \in (\theta+1,2] \end{cases} \quad (4.61.)$$

Eşitlik (4.61.) nın elde edilmesinin ardından, ilk olarak Şekil 4.3.(a) da $\theta = 0.1$ alınarak, n için $1,2,3,4$ ve 5 değerleri verilip, ardından Şekil 4.3.(b) ile $\theta = 0.2$ değerine yükseltilerek aynı n değerleri için, $X_1, X_2 \sim STSP(\theta, n)$ olmak üzere $g(z)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değer ve varyansının azaldığı, çarpıklık ve sivriliğin ise arttığı görülürken, θ değeri arttığında, dağılımın beklenen değerinin ve sivriliğinin nispeten arttığı, varyans ve çarpıklığının ise azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.3. Belirli θ ve n değerleri için $g(z)$ fonksiyonunun grafikleri

Şekil 4.3 de, θ ve n'nin farklı değerleri için oyf leri incelenilen bu dağılımların momentlerinin değerleri Tablo 4.7. ile verilmiştir.

Tablo 4.7. Belirli θ ve n değerleri için Z dağılımının momentleri

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{V(X)}$	$\boldsymbol{\alpha_3}$	$\boldsymbol{\alpha_4}$
0.1	1	1.0000	0.1667	0.0000	2.4000
	2	0.7333	0.1011	0.3849	2.7005
	3	0.6000	0.0660	0.5897	3.0389
	4	0.5200	0.0461	0.7215	3.3319
	5	0.4667	0.0340	0.8147	3.5777
0.2	1	1.0000	0.1667	0.0000	2.4000
	2	0.7995	0.0936	0.3311	2.7092
	3	0.6999	0.0590	0.5211	3.0169
	4	0.6400	0.0405	0.6445	3.2829
	5	0.6000	0.0295	0.7319	3.5072

4.2.2.2. Yansıma Parametresinin $1/2$ den Büyük Olması Durumu

$\theta > 1/2$ koşulu altında Z'nin oyf si, $\theta \leq 1/2$ koşulu altındaki adımlara benzer olarak aşağıdaki gibi elde edilecektir.

Durum 1: Bu durumda, $\theta \leq 1/2$ koşulunda verilen (4.43.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın ilk parçası, (4.44) ve (4.45) eşitlikleri yardımıyla ifade edilecektir. Ayrıca bu durum için alt aralıklar da değişiklik göstermediğinden dolayı, Z'nin oyf sinin

elde edilmesini sağlayan birinci integralin kapalı formdaki gösterimi, (4.46.) eşitliğinin aynısı olacaktır.

Durum 2: İkinci durumda x_1 ve x_2 için aralık değerleri $0 \leq x_1 \leq \theta,\ \theta \leq x_2 \leq 1$ şeklindedir. Bu durumda, $\theta \leq 1/2$ koşulu ile verilen (4.47.) eşitliği kullanılarak dağılımın ikinci parçası, (4.48.), (4.50.) ve aşağıda verilen (4.62.) eşitlikleri yardımıyla ve yeni alt aralıklar göz önünde bulundurularak elde edilecektir.

$$I_{22}^{*}(z) = k_2(z-1)^{n-1}(1-\theta)^{n}B(n,1)\ {}_2F_1(1-n,n;n+1;\tfrac{\theta-1}{z-1}) \qquad (4.62.)$$

Böylelikle, Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan ikinci integralin kapalı formdaki gösterimi de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$I_2(z\mid\Theta) = \begin{cases} I_{21}(z) & z \in [\theta,1) \\ I_{22}^{*}(z), & z \in [1,2\,\theta) \\ I_{23}(z), & z \in [2\theta,\theta+1) \end{cases} \qquad (4.63.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x_1 ve x_2 için aralık değerleri $\theta \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq \theta$ şeklindedir. Bu durumda, $\theta \leq 1/2$ koşulunda verilen (4.52.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın üçüncü parçası, (4.53.), (4.55.) ve (4.64.) eşitlikleri yardımıyla ve yeni alt aralıklar göz önünde bulundurularak elde edilecektir.

$$I_{32}^{*}(z) = k_3(z-\theta)^{n-1}(1-\theta)^{n}B(1,n)\ {}_2F_1(1-n,1;n+1;\tfrac{1-\theta}{z-\theta}) \qquad (4.64.)$$

Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan üçüncü integralin kapalı formdaki gösterimi de aşağıdaki gibi ifade edilir.

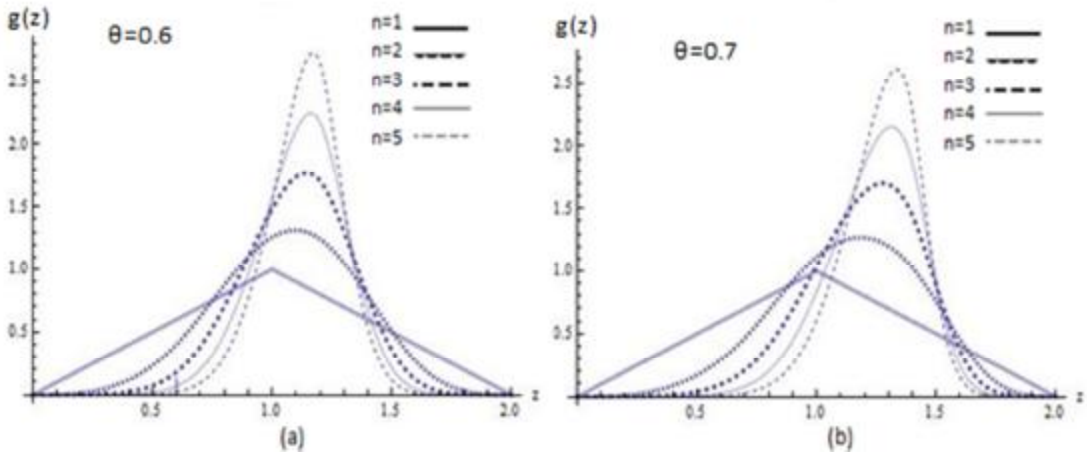
$$I_3(z\mid\Theta) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in [\theta,1) \\ I_{32}^{*}(z), & z \in [1,2\theta) \\ I_{33}(z), & z \in [2\theta,\theta+1) \end{cases} \qquad (4.65.)$$

Durum 4: Benzer şekilde bu durumda da, $\theta \leq 1/2$ koşulunda verilen (4.57.) eşitliği kullanılacak ve dağılımın son parçası, önceden tanımlanmış olan (4.58) ve (4.59) eşitlikleri yardımıyla ifade edilecektir. Ayrıca bu durum için alt aralıklar da değişiklik göstermediğinden dolayı, Z'nin oyf sinin elde edilmesini sağlayan dördüncü integralin kapalı formdaki gösterimi, (4.60.) eşitliğinin aynısı olacaktır.

Böylece z ∈ [0,2] için Z'nin oyf si (4.66.) numaralı eşitlik ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_Z(z\,|\theta) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in [0,\theta) \\ I_{12}(z) + I_{21}(z) + I_{31}(z\,), & z \in [\theta,1) \\ I_{12}(z) + I_{22}(z) + I_{32}(z), & z \in [1,2\theta) \\ I_{23}(z) + I_{33}(z) + I_{41}(z), & z \in [2\theta,\theta+1) \\ I_{42}(z), & z \in (\theta+1,2] \end{cases} \qquad (4.66.)$$

Eşitlik (4.66.) nın elde edilmesinden sonra, Şekil 4.4.(a) da, $m = 0.6$ ve n 1,2,3, 4 ve 5 değerleri için, Şekil 4.4.(b) de ise $m = 0.7$ değerine yükseltilerek aynı n değerleri ile $X_1, X_2 \sim STSP(m,n)$ olmak üzere $g(z)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değer, çarpıklık ve sivriliğinin arttığı, varyansının ise azaldığı görülürken, m arttığında ise beklenen değer, varyans ve çarpıklığın arttığı, sivriliğin ise azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.4. Belirli θ ve n değerleri için $g(z)$ fonksiyonun grafikleri

Şekil 4.4 de, θ ve n parametrelerinin farklı değerleri için oyf leri incelenilen bu dağılımların momentlerinin değerleri Tablo 4.8. ile verilmiştir.

Tablo 4.8. Belirli θ ve n değerleri için Z dağılımının momentleri

m	n	$E(X)$	$V(X)$	α_3	α_4
0.6	1	1.0000	0.1667	0.0000	2.4000
	2	1.0502	0.0974	-0.4565	3.6017
	3	1.0791	0.0693	-1.0817	3.6138
	4	1.0980	0.0546	-1.7458	3.7609
	5	1.1112	0.0460	-2.3931	3.7817
0.7	1	1.0000	0.1667	0.0000	2.4000
	2	1.1203	0.0978	-0.5216	3.5800
	3	1.1810	0.0714	-1.2392	3.5884
	4	1.2185	0.0581	-2.0049	3.7522
	5	1.3240	0.0495	-2.6922	3.7730

4.2.3. n Özdeş Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu

Ayrıca $STSP$ dağılımına sahip özdeş ve bağımsız iki rastgele değişkenin toplamının dağılımından yola çıkılarak, yine her biri özdeş dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler olan $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ toplamının tam dağılımı elde edinilmek istenmiş ancak daha $X_1 + X_2 + X_3$ toplamının dağılımı hesaplanırken, gerek çok sayıda farklı durum ile karşılaşılması gerekse içerisinde $Appell, Hipergeometrik$ vb. karmaşık ifadelerin bulunduğu integrallerin alınmasının zorluklarından dolayı genel toplamın dağılımı bulunamamıştır.

4.2.4. İki Yönlü Kuvvet Dağılımı Durumu

$X \sim TSP(a, m, b, n)$ ve $Y \sim TSP(c, k, d, l)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $Z = X + Y$ olsun. Z'nin oyf si,

$$f_Z(z) = \int_{x_1}^{x_2} h(x)g(z-x)dx \qquad (4.67.)$$

eşitliği ile elde edilecektir ve bu eşitlikteki $h(x)$, X'in oyf sini, $g(z-x)$ ise Y'nin oyf sini ifade etmektedir. Bu dağılımların parçalı tanımlı olmalarından ötürü de

(4.67.) numaralı eşitlikte verilen integralin hesaplanmasında dört farklı durum ve her bir duruma ait üç farklı alt durum ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt durumlar Tablo 4.9. daki gibi verilir.

Tablo 4.9. İki rastgele değişkenin toplamının oyf sini belirlemedeki durumlar

Durumlar	Alt Durumlar
$a \le x \le m,\ c \le y \le k$	$a + k < m + c,\ a + k = m + c,\ a + k > m + c$
$a \le x \le m,\ k \le y \le d$	$a + d < m + k,\ a + d = m + k,\ a + d > m + k$
$m \le x \le b,\ c \le y \le k$	$m + k < b + c,\ m + k = b + c,\ m + k > b + c$
$m \le x \le b,\ k \le y \le d$	$m + d < b + k,\ m + d = b + k,\ m + d > b + k$

Birinci durumun ilk alt durumu olan $f_{11}(v)$, (4.68.) numaralı eşitlikteki integrallerin çözülmesiyle kapalı formda elde edilir.

$$f_{11}(z) = \begin{cases} \int_a^{z-c} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{z-x-c}{k-c}\right)^{l-1} dx, & z \in (a+c, a+k) \\ \int_{z-k}^{z-c} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{z-x-c}{k-c}\right)^{l-1} dx, & z \in (a+k, m+c) \\ \int_{z-k}^{m} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{z-x-c}{k-c}\right)^{l-1} dx, & z \in (m+c, m+k) \end{cases} \quad (4.68.)$$

Dört durumun tüm alt durumlarının kapalı formdaki fonksiyonları da buna benzer şekilde elde edilerek sonuçlar aşağıdaki gibi verilir.

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $a \le x \le m,\ c \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_1 = (nl(m-a)^{1-n}(k-c)^{1-l}) / ((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Yukarıda bahsedildiği gibi bu durumda, $a + k < c + m$, $a + k = c + m$ ve $a + k > c + m$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur ve (4.67.) numaralı eşitliğin çözümünde bu alt durumlar değerlendirilmelidir. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{1i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{11}(z) = k_1 \int_a^{z-c} (x-a)^{n-1}(z-x-c)^{l-1} dx$$

$$= k_1(z-c-a)^{n+l-1}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{l-1}dt = k_1(z-c-a)^{n+l-1}B(n,l) \quad (4.69.)$$

$$I_{12}(z) = k_1\int_{z-k}^{z-c}(x-a)^{n-1}(z-x-c)^{l-1}dx$$
$$= k_1(z-k-a)^{n-1}(k-c)^l\int_0^1\left(1-\frac{c-k}{z-k-z}t\right)^{(n-1)}(1-t)^{l-1}dt$$
$$= k_1(z-k-a)^{n-1}(k-c)^l B(1,l)\ {}_2F_1(1-n,1;l+1;\frac{c-k}{z-k-a}) \quad (4.70.)$$

$$I_{13}(z) = k_1\int_{z-k}^{m}(x-a)^{n-1}(z-x-c)^{l-1}dx$$
$$= k_1(z-k-a)^{n-1}(k-c)^{l-1}(m-z+k)$$
$$\times\int_0^1(1-\frac{z-m-k}{z-k-a}t)^{n-1}\left(1-\frac{m-z+k}{k-c}t\right)^{l-1}dt$$
$$= k_1(z-k-a)^{n-1}(k-c)^{l-1}(m-z+k)$$
$$\times F_1(1,1-n,1-l;2;\frac{z-m-k}{z-k-a},\frac{m-z+k}{k-c}) \quad (4.71.)$$

$$I^*{}_{12}(z) = k_1\int_a^m(x-a)^{n-1}(z-x-c)^{l-1}dx$$
$$= k_1(m-a)^{n-1}(z-c-a)^{l-1}\int_0^1 t^{n-1}\left(1-\frac{m-a}{z-c-a}t\right)^{l-1}dt$$
$$= k_1(m-a)^{n-1}(z-c-a)^{l-1}B(n,1)\ {}_2F_1(1-l,n;n+1;\frac{m-a}{z-c-a}) \quad (4.72.)$$

Sırasıyla (4.16.) ve (4.19.) eşitlikleri ile verilen integral sonuçları yardımıyla elde edilen $I_{1i}(z)$ fonksiyonları ve integral sabiti kullanılarak birinci durumun alt durumları kapalı formda aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu integral sonuçları diğer durumlarda da kullanılacaktır.

İlk alt durum olan $a + k < m + c$ durumu;

$$f_{11}(z) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in (a+c, a+k) \\ I_{12}(z), & z \in (a+k, m+c) \\ I_{13}(z), & z \in (m+c, m+k) \end{cases} \quad (4.73)$$

İkinci alt durum olan $a + k = m + c$ durumu;

$$f_{12}(z) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in (a + c, a + k) \\ I_{13}(z), & z \in (a + k, m + k) \end{cases} \quad (4.74)$$

Üçüncü alt durum olan $a + k > m + c$ durumu;

$$f_{13}(z) = \begin{cases} I_{11}(z), & z \in (a + c, m + c) \\ I^*{}_{12}(z), & z \in (m + c, a + k) \\ I_{13}(z), & z \in (a + k, m + k) \end{cases} \quad (4.75)$$

Durum 2: İkinci durum için rastgele değişkenlerin tanım aralıkları, $a \leq x \leq m$, $k \leq y \leq d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_2 = (nl(m-a)^{1-n}\,(d-k)^{1-l})\,/\,((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Birinci duruma benzer olarak, $a + d < k + m$, $a + d = k + m$ ve $a + d > k + m$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{2i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{21}(z) = k_2(z-k-a)^n(d-z+a)^{l-1}B(n,1)\;{}_2F_1(1-l,n;n+1;\tfrac{a+k-z}{d-z+a}) \quad (4.76.)$$

$$I_{22}(z) = k_2(z-d-a)^{n-1}(d-k)^l B(l,1)\;{}_2F_1(1-n,l;l+1;\tfrac{k-d}{z-d-a}) \quad (4.77.)$$

$$I_{23}(z) = k_2(z-d-a)^{n-1}(m-z+d)^l B(l,1)\;{}_2F_1(1-n,l;l+1;\tfrac{z-m-d}{z-d-a}) \quad (4.78.)$$

$$I^*{}_{22}(z) = k_2(m-a)^n(d-z+a)^{l-1}B(n,1)\;{}_2F_1(1-l,n;n+1;\tfrac{a-m}{d-z+a}) \quad (4.79.)$$

Birinci alt durum olan $a + d < m + k$ durumu;

$$f_{21}(z) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in (a+k, a+d) \\ I_{22}(z), & z \in (a+d, m+k) \\ I_{23}(z), & z \in (m+k, m+d) \end{cases} \quad (4.80.)$$

İkinci alt durum olan $a + d = m + k$ durumu;

$$f_{22}(z) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in (a+k, a+d) \\ I_{23}(z), & z \in (a+d, m+d) \end{cases} \quad (4.81.)$$

Üçüncü alt durum olan $a + d > m + k$ durumu;

$$f_{23}(z) = \begin{cases} I_{21}(z), & z \in (a+k, m+k) \\ I^*{}_{22}(z), & z \in (m+k, a+d) \\ I_{23}(z), & z \in (a+d, m+d) \end{cases} \quad (4.82.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ c \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = nl(b-m)^{1-n}(k-c)^{1-l}/((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Bu durumda da, $k + m < c + b,\ k + m = c + b$ ve $k + m > c + b$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{3i}(z)$ eşitlikleri ile aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$I_{31}(z) = k_3(b-m)^{n-1}(z-c-m)^l B(1,l)\ {}_2F_1(1-n, 1; l+1; \tfrac{z-c-m}{b-m}) \quad (4.83.)$$

$$I_{32}(z) = k_3(b+k-z^{n-1}(k-c)^l B(1,l)\ {}_2F_1(1-n, 1; l+1; \tfrac{k-c}{b+k-z}) \quad (4.84.)$$

$$I_{33}(z) = k_3(b+k-z)^n(k-c)^{l-1} B(1,n)\ {}_2F_1(1-l, 1; n+1; \tfrac{b+k-z}{k-c}) \quad (4.85.)$$

$$I^*{}_{32}(z) = k_3(b-m)^n(z-c-m)^{l-1} B(1,n)\ {}_2F_1(1-l, 1; n+1; \tfrac{b-m}{z-c-m}) \quad (4.86.)$$

Birinci alt durum olan $m + k < b + c$ durumu;

$$f_{31}(z) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in (m + c, m + k) \\ I_{32}(z), & z \in (m + k, b + c) \\ I_{33}(z), & z \in (b + c, b + k) \end{cases} \quad (4.87.)$$

İkinci alt durum olan $m + k = b + c$ durumu;

$$f_{32}(z) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in (m + c, m + k) \\ I_{33}(z), & z \in (m + k, b + k) \end{cases} \quad (4.88.)$$

Üçüncü alt durum olan $m + k > b + c$ durumu;

$$f_{33}(z) = \begin{cases} I_{31}(z), & z \in (m + c, b + c) \\ I^*{}_{32}(z), & z \in (b + c, m + k) \\ I_{33}(z), & z \in (m + k, b + k) \end{cases} \quad (4.89.)$$

Durum 4: Son durumda ise tanım aralıkları, $m \le x \le b,\ k \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = (nl(b-m)^{1-n}(d-k)^{1-l}) \,/\, ((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Bu durum için de $m + d < k + b,\ m + d = k + b$ ve $m + d > k + b$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{4i}(z)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{41}(z) = k_4(b-m)^{n-1}(d-z+m)^{l-1}(z-k-m) \times F_1\left(1,1-n,1-l;2;\frac{z-k-m}{b-m},\frac{m+k-z}{d-z+m}\right) \quad (4.90.)$$

$$I_{42}(z) = k_4(b+d-z)^{n-1}(d-k)^l B(l,1)\ {}_2F_1\left(1-n,l;l+1;\frac{d-k}{b+d-z}\right) \quad (4.91.)$$

$$I_{43}(z) = k_4(b+d-z)^{n+l-1}B(l,n) \quad (4.92.)$$

$$I^*{}_{42}(z) = k_4(b-m)^n(d-z+m)^{l-1}B(1,n)\ {}_2F_1(1-l,1;n+1;\frac{m-b}{d-z+m}) \tag{4.93.}$$

Birinci alt durum olan $m + d < b + k$ durumu;

$$f_{41}(z) = \begin{cases} I_{41}(z), & z \in (m+k, m+d) \\ I_{42}(z), & z \in (m+d, b+k) \\ I_{43}(z), & z \in (b+k, b+d) \end{cases} \tag{4.94.}$$

İkinci alt durum olan $m + d = b + k$ durumu;

$$f_{42}(z) = \begin{cases} I_{41}(z), & z \in (m+k, m+d) \\ I_{43}(z), & z \in (m+d, b+d) \end{cases} \tag{4.95.}$$

Üçüncü alt durum olan $m + d > b + k$ durumu;

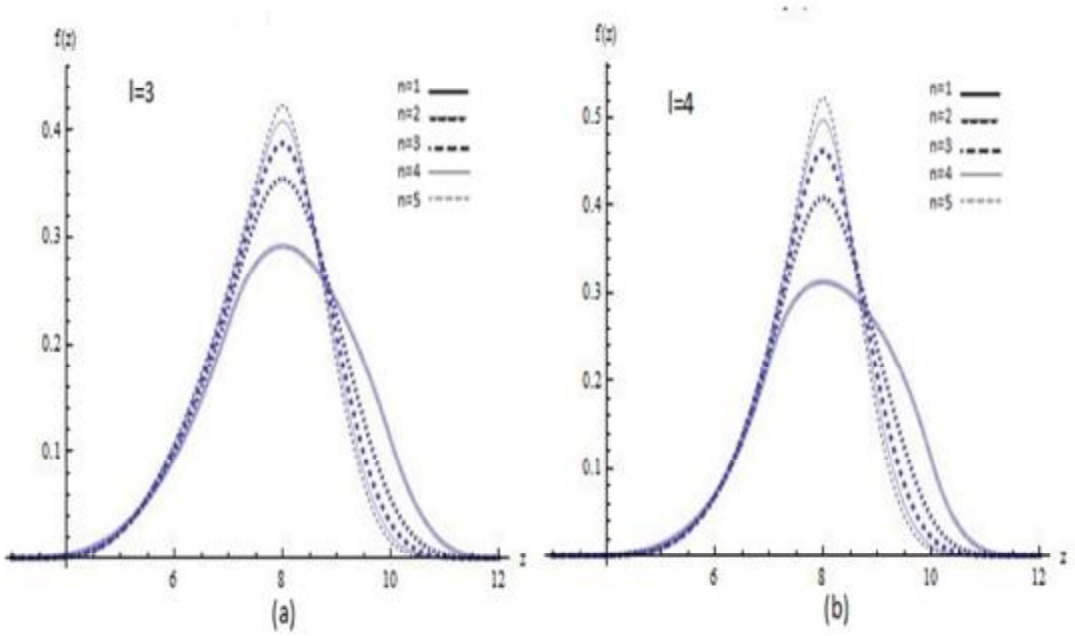
$$f_{43}(z) = \begin{cases} I_{41}(z), & z \in (m+k, b+k) \\ I^*{}_{42}(z), & z \in (b+k, m+d) \\ I_{43}(z), & z \in (m+d, b+d) \end{cases} \tag{4.96.}$$

Toplamın oyf sinin belirlenmesinde $a + k$, $m + c$, $a + d$, $m + k$, $b + c$, $m + d$ ve $b + k$ çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Örneğin, Durum 4'te $m + d$ ile $b + k$ karşılaştırılarak $f_{4i}(z)$ lerden biri alınır. Böylece $z \in (a + c, b + d)$ için Z'nin oyf si (2.63.) numaralı eşitlikte verilen $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_z(z) = f_{1U(a+k-(m+c))}(z) + f_{2U(a+d-(m+k))}(z) + f_{3U(m+k-(b+c))}(z) + f_{4U(m+d-(b+k))}(z) \tag{4.97.}$$

Eşitlik (4.97.) nın elde edilmesinden sonra $X \sim TSP(2,3,4,n)$ ve $Y \sim TSP(4,5,7,l)$ olmak üzere, Şekil 4.5.(a) da $l = 3$ ve n için 1,2,3, 4 ve 5 değerleri

verilerek, Şekil 4.5.(b) de ise n parametre değerleri aynı kalmak üzere $l = 4$ değeri için $f(z)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değerinin sabit kaldığı, varyansının azaldığı, çarpıklık ve sivriliğin ise arttığı görülürken, l arttığında ise beklenen değerin ve varyansın azaldığı, çarpıklık ve sivriliğin ise arttığı görülmektedir.



Şekil 4.5. Farklı l ve n değerleri için Z dağılımının grafikleri ($a = 2$, $m = 3$, $c = b = 4$, $k = 5$, $d = 7$)

Şekil 4.5 de, farklı n ve l değerleri için oyf lerinın grafikleri incelenilen bu dağılımların momentlerinin değerleri Tablo 4.10. ile $p = 0.9, 0.95, 0975$ ve 0.99 değerleri için hesaplanan dağılımın bazı yüzdelik değerleri ise Tablo 4.11 ile sunulmuştur.

Tablo 4.10. Farklı m ve n değerleri için Z dağılımının momentleri ($a = 2,\ m = 3,\ c = b = 4,\ k = 5,\ d = 7$)

n	l	$E(Z)$	$V(Z)$	α_3	α_4
1	3	8.25	0.5708	0.1304	2.5781
2	3	8.25	0.4042	0.2189	2.8726
3	3	8.25	0.3375	0.2869	2.9510
4	3	8.25	0.3042	0.3353	2.9654
5	3	8.25	0.2851	0.3695	2.9665
1	4	8.20	0.4933	0.1121	2.5902
2	4	8.20	0.3267	0.2081	2.9306
3	4	8.20	0.2600	0.2931	3.1158
4	4	8.20	0.2267	0.3601	3.1987
5	4	8.20	0.2076	0.4107	3.2413

Tablo 4.11. Farklı parametre değerleri için Z dağılımının yüzdelikleri (p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99)

a	m	b	n	c	k	d	l	0.90	0.95	0.975	0.99
1	2	3	1	1	2	3	1	5.1056	5.3675	5.5528	5.7172
			2				2	4.7534	4.9534	5.1199	5.3001
			3				3	4.5763	4.7385	4.8775	5.0365
		4	1			4	1	6.6584	7.0513	7.3292	7.5757
			2				2	5.8441	6.1872	6.4756	6.7877
			3				3	5.4238	5.7102	5.9604	6.2492
		5	1			5	1	8.2112	8.7351	9.1056	9.4343
			2				2	6.9512	7.4363	7.8442	8.2855
			3				3	6.2880	6.6979	7.0583	7.4749
	3	4	1		3	4	1	6.6584	7.0513	7.3292	7.5757
			2				2	6.4576	6.7158	6.9221	7.1428
			3				3	6.3496	6.5485	6.7134	6.8971
		5	1			5	1	8.2112	8.7351	9.1056	9.4343
			2				2	7.5068	7.9067	8.2298	8.6002
			3				3	7.1526	7.4771	7.7550	8.0730
	4	5	1		4	5	1	8.2112	8.7351	9.1056	9.4344
			2				2	8.1892	8.5079	8.7541	9.0102
			3				3	8.1538	8.3895	8.5794	8.7856
2	3	4	1	4	5	7	3	9.2398	9.5198	9.7553	10.0102
			2				3	9.0929	9.3499	9.5676	9.8086
			3				3	9.0312	9.2743	9.4772	9.6999
			4				3	9.0000	9.2255	9.4294	9.6388
			5				3	8.9821	9.1144	9.1730	9.2276
			1				4	9.0384	9.1488	9.4924	9.7498
			2				4	8.9477	9.1777	9.3794	9.6102
			3				4	8.8735	9.0927	9.2836	9.5009
			4				4	8.8349	9.0476	9.2312	9.4214
			5				4	8.7274	8.9185	9.0883	9.2815

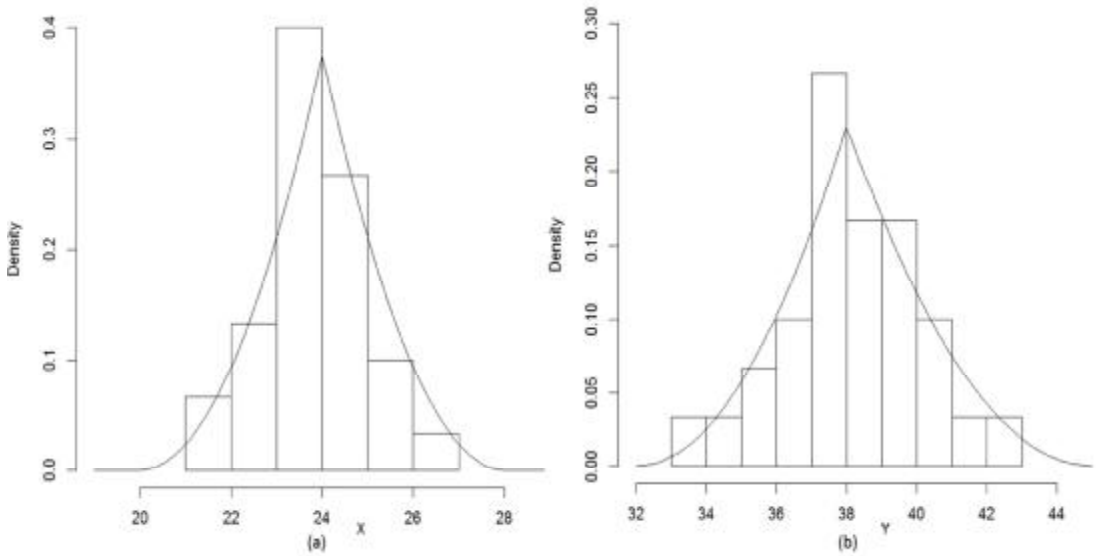
4.2.5. Uygulama

TSP dağılımlı iki rastgele değişkenin toplamının dağılımı ile ilgili simülasyon verileri kullanılarak bir çalışma yapılmıştır. $X \sim TSP(20,24,28,3)$ ve $Y \sim TSP(32,38,45,3)$ olacak şekilde Tablo 4.12 ile verilen veri setleri rastgele olarak türetilmiştir. Veri kümesinin tanımlayıcı istatistiklerini içeren değerler de X ve Y için sırasıyla Tablo 4.13 ve Tablo 4.14 ile verilmiştir.

Tablo 4.12. Uygulamada kullanılacak X ve Y değişkenlerine ait veri kümeleri

X	Y
24.4	37.9
24.5	37.7
25.1	38.1
23.2	41.3
24.9	40.4
21.4	38.3
26.2	37.9
23.8	37.4
22.3	33.9
23.6	35.8
23.3	39.2
24.3	37.0
24.1	36.7
21.9	37.4
22.1	39.8
23.8	40.4
24.2	39.8
22.4	37.7
24.0	36.0
22.8	41.0
23.4	38.5
23.4	34.7
23.5	38.1
25.1	37.5
24.5	42.3
23.3	39.9
25.9	38.6
25.0	37.5
24.0	39.6
23.8	37.0

Tablo 4.12 ile verilen veri kümesinin, TSP dağılımına ait oyf leri ile fit edilmiş histogram grafiği Şekil 4.6 da sunulmuş, parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri $L-BFGS-B$ optimizasyon yönteminde (Byrd ve ark., 1995) optim fonksiyonu yardımıyla R programı kullanılarak hesaplanarak Tablo 4.15. de verilmiştir.



Şekil 4.6. a) X verisinin histogram grafiği, b) Y verisinin histogram grafiği

Tablo 4.13. X veri seti tanımlayıcı istatistikler

Ar.Ort.	Medyan	St.sapma	Aralık	Çarpıklık	Basıklık	Min	Maks	n
23.81	23.80	1.1280	4.80	-0.0589	2.8076	21.40	26.20	30

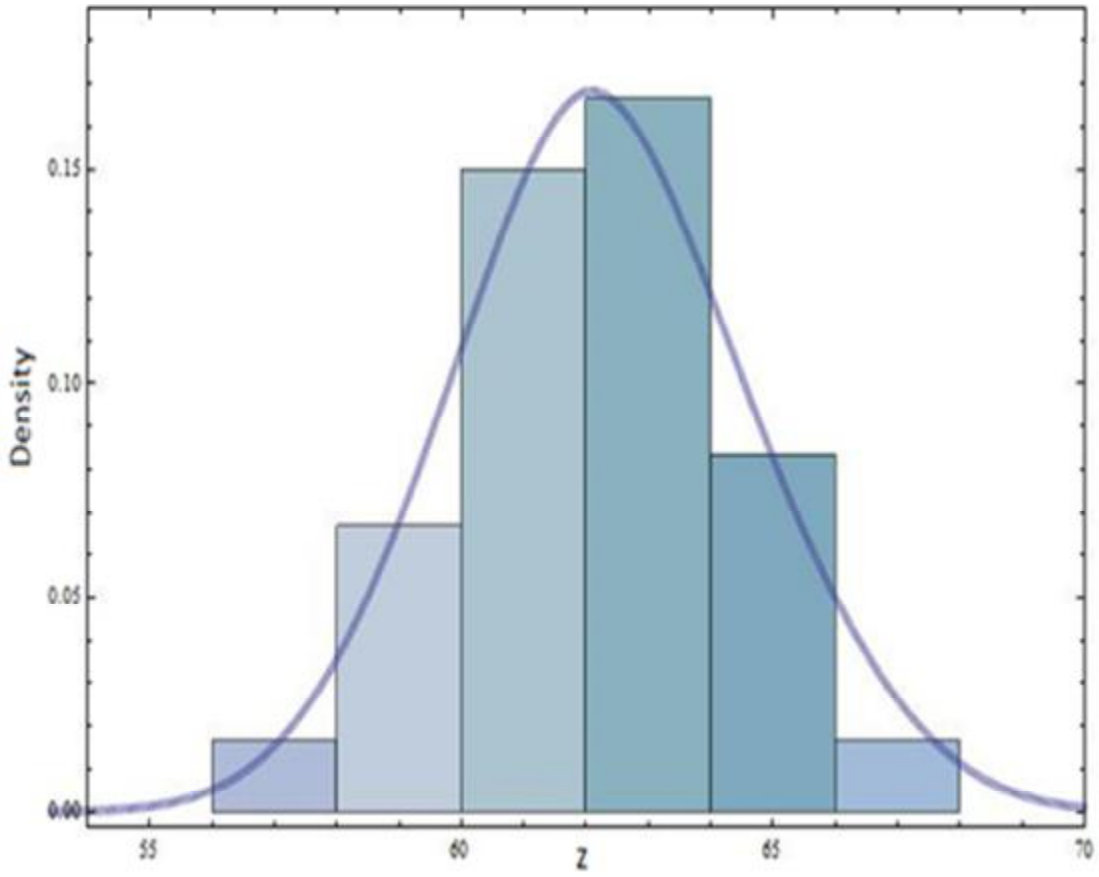
Tablo 4.14. Y veri seti tanımlayıcı istatistikler

Ar.Ort.	Medyan	St.sapma	Aralık	Çarpıklık	Basıklık	Min	Maks	n
38.25	38.00	1.8986	8.40	-0.0586	2.9363	33.90	42.30	30

Tablo 4.15. Mevcut veri seti için *TSP* dağılımının parametre tahminleri

$TSP(a,m,b,n)$				
a	m	b	n	$log-olabilirlik$
19.1788	23.8000	28.5468	4.5108	-45.3318
(1.2152)	(14.9627)	(1.314)	(1.2142)	
$TSP(c,k,d,l)$				
c	k	d	l	$log-olabilirlik$
32.4087	37.9000	44.4253	3.1630	-60.5646
(1.1908)	(2.4880)	(0.9762)	(1.7316)	

TSP dağılımına sahip bağımsız iki rastgele değişkenin toplamının tam dağılımı bir önceki kısımda bulunmuştur. Elde edilen bu tam dağılım kullanılarak, mevcut veri setleri için olasılık değerleri kesin olarak elde edilebilir. Örnek olması açısından bazı olasılık değerlerinin sonuçları şu şekilde hesaplanmıştır; $Z = X + Y$ olmak üzere, $P(Z > \bar{z}) = P(Z > 62.05) = 0.4757$, $P(Z > z_{med}) = P(Z > 62.26) = 0.4203$, $P(60 < Z < 62) = 0.4070$, $P(Z < 58) = 0.0045$ ve $P(Z > 60) = 0.8961$. İstenilen tüm olasılık değerleri, dağılım fonksiyonu kullanılarak benzer şekilde elde edilebilir.



Şekil 4.7. $Z = X + Y$ veri kümesinin histogram ve dağılım fonksiyonunun grafiği

4.3. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı İki Rastgele Değişkenin Çarpımının Dağılımı

Bu kısımda, TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin çarpımının dağılımı bulunacaktır. Sadelik sağlaması açısından ve yeterli olduğu düşünüldüğünden, bu rastgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve pozitif olduğu varsayılacaktır. İlk olarak sınır parametrelerinin sıfırdan büyük olma durumu, sonrasında ise bu parametrelerin sıfır olması durumuna göre rastgele değişkenlerin çarpımının kapalı formda oyf leri elde edilecektir.

4.3.1. Alt Sınırların Pozitif Olması Durumu

$X \sim TSP(a,m,b,n)$ ve $Y \sim TSP(c,k,d,l)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $V = XY$ olsun. V'nin oyf si,

$$f_V(v) = \int_{x_1}^{x_2} h(x) g(\tfrac{v}{x}) \tfrac{1}{x} dx \qquad (4.98.)$$

eşitliği ile elde edilecektir ve bu eşitlikteki $h(x)$, X'in oyf sini, $g(y)$ ise Y'nin oyf sini ifade etmektedir. Bu oyf lerin parçalı tanımlı olmalarından ötürü de (4.98.) numaralı eşitlikte verilen integralin hesaplanmasında dört farklı durum ve her bir duruma ait üç farklı alt durum ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt durumlar Tablo 4.16. daki gibi verilir.

Tablo 4.16. İki rastgele değişkenin çarpımının oyf sini belirlemedeki durumlar

Durumlar	Alt Durumlar
$a \le x \le m,\ c \le y \le k$	$ak < mc,\ ak = mc,\ ak > mc$
$a \le x \le m,\ k \le y \le d$	$ad < mk,\ ad = mk,\ ad > mk$
$m \le x \le b,\ c \le y \le k$	$mk < bc,\ mk = bc,\ mk > bc$
$m \le x \le b,\ k \le y \le d$	$md < bk,\ md = bk,\ md > bk$

Birinci durumun ilk alt durumu olan $f_{11}(v)$, (4.99.) numaralı eşitlikteki integrallerin çözülmesiyle kapalı formda elde edilir.

$$f_{11}(v) = \begin{cases} \int_a^{v/c} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{\frac{v}{x}-c}{k-c}\right)^{l-1} \frac{1}{x}\, dx, & v \in (ac, ak) \\ \int_{v/k}^{v/c} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{\frac{v}{x}-c}{k-c}\right)^{l-1} \frac{1}{x} dx, & v \in (ak, mc) \\ \int_{v/k}^{m} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{\frac{v}{x}-c}{k-c}\right)^{l-1} \frac{1}{x} dx, & v \in (mc, mk) \end{cases} \quad (4.99.)$$

Dört durumun tüm alt durumlarının kapalı formdaki fonksiyonları da buna benzer şekilde elde edilerek sonuçlar aşağıdaki gibi verilir.

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $a \le x \le m,\ c \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti, $k_1 = (nl(m-a)^{1-n}(k-c)^{1-l})/((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Yukarıda bahsedildiği gibi bu durumda, $ak < cm$, $ak = cm$ ve $ak > cm$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur ve (4.98.) numaralı eşitliğin çözümünde bu alt durumlar değerlendirilmelidir. Dağılımın daha sade ifade edilebilmesi için integralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{1j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$\begin{aligned} I_{11}(v) &= \int_a^{\frac{v}{c}} \frac{1}{x}(x-a)^{n-1}\left(\frac{v}{x}-c\right)^{l-1} dx \\ &= \frac{(v-ac)^{l+n-1}}{c^n a^l} \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{l-1}\left[1-\left(1-\frac{v}{ac}\right)t\right]^{-l} dt \\ &= \frac{(v-ac)^{n+l-1}}{c^n a^l}\, B(n,l)\ {}_2F_1\left(l, n; n+l; \frac{ac-v}{ac}\right) \end{aligned} \quad (4.100.)$$

$$\begin{aligned} I_{12}(v) &= \int_{\frac{v}{k}}^{\frac{v}{c}} \frac{1}{x}(x-a)^{n-1}\left(\frac{v}{x}-c\right)^{l-1} dx \\ &= \frac{(v-ak)^{n-1}(k-c)^l}{k^n} \int_0^1 \left(1-\frac{a(c-k)}{v-ak}t\right)^{n-1}\left[1-\left(1-\frac{c}{k}\right)t\right]^{-n}(1-t)^{l-1} dt \\ &= \frac{(v-ak)^{n-1}(k-c)^l}{k^n l} F_1\left(1, 1-n, n, 1+l; \frac{a(c-k)}{v-ak}, 1-\frac{c}{k}\right) \end{aligned} \quad (4.101.)$$

$$\begin{aligned} I_{13}(v) &= \int_{\frac{v}{k}}^{m} \frac{1}{x}(x-a)^{n-1}\left(\frac{v}{x}-c\right)^{l-1} dx \\ &= (v-ak)^{n-1}(k-c)^{l-1}\left(k-\frac{v}{m}\right)/k^n \end{aligned}$$

$$\times \int_0^1 (1-\frac{a\left(\frac{v}{m}-k\right)}{v-ak}t)^{n-1}\left[1-\left(1-\frac{v}{km}\right)t\right]^{-n}\left(1-\frac{k-\frac{v}{m}}{k-c}t\right)^{l-1}dt$$

$$= \frac{(v-ak)^{n-1}(mk-v)}{(k-c)^{l-1}k^n m} f_D(1,1-n,1-l,n;2;\frac{a(v-mk)}{m(v-ak)},\frac{km-v}{m(k-c)},1-\frac{v}{km}) \quad (4.102.)$$

$$I^*_{12}(v) = \int_a^m \frac{1}{x}(x-a)^{n-1}\left(\frac{v}{x}-c\right)^{l-1}dx$$

$$= \frac{(m-a)^n(v-ac)^{l-1}}{a^l} B(1,n) F_1(n,1-l,l,n+1;\frac{c(m-a)}{v-ac},1-\frac{m}{a}) \quad (4.103.)$$

$I_{1j}(v)$ eşitlikleri incelendiğinde görüldüğü gibi TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin toplamının oyf sinin kapalı formdaki ifadesini elde etmek için gerekli olan (4.16.) ve (4.19.) eşitliklerinde verilen integral sonuçlarına, çarpımın oyf sinin elde edilmesinde de ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca, bu integral sonuçlarına ek olarak $I_{13}(v)$ eşitliğinde karşılaşılan integral çözümü için Mathai ve Haubold (2008) syf. 59 daki ifade referans alınmakta ve aşağıdaki eşitlikle gösterilmektedir.

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{(c-a-1)}(1-ux_1)^{-b_1}\dots(1-ux_n)^{-b_n}dx$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \times f_D(\alpha,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n) \quad (4.104.)$$

Eşitlikte yer alan f_D ise üç değişkenli Lauricella fonksiyonudur ve genel n değişkenlisi aşağıdaki seri açılımına sahiptir.

$$f_D(\alpha,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n)$$

$$= \sum_{m_1=\dots=m_n=0} \frac{(\alpha)_{\sum_{i=1}^n m_i}(b_1)_{m_1}\dots(b_n)_{m_n}}{(c)_{\sum_{i=1}^n m_i}} \frac{{x_1}^{m_1}\dots{x_n}^{m_n}}{m_1!\dots m_n!} \quad (4.105.)$$

$(|x_1|<1,|x_2|<1,\dots,|x_n|<1)$ açılımı ile ifade edilir.

Bahsedilen integral sonuçları yardımıyla elde edilen $I_{1j}(v)$ fonksiyonları ve integral sabiti kullanılarak birinci durumun alt durumları kapalı formda aşağıdaki gibi ifade edilir.

İlk alt durum olan $ak < mc$ durumu;

$$f_{11}(v) = \begin{cases} k_1 I_{11}(v), & v \in (ac, ak) \\ k_1 I_{12}(v), & v \in (ak, mc) \\ k_1 I_{13}(v), & v \in (mc, mk) \end{cases} \quad (4.106)$$

İkinci alt durum olan $ak = mc$ durumu;

$$f_{12}(v) = \begin{cases} k_1 I_{11}(v), & v \in (ac, ak) \\ k_1 I_{13}(v), & v \in (ak, mk) \end{cases} \quad (4.107)$$

Üçüncü alt durum olan $ak > mc$ durumu;

$$f_{13}(v) = \begin{cases} k_1 I_{11}(v), & v \in (ac, mc) \\ k_1 I^*{}_{12}(v), & v \in (mc, ak) \\ k_1 I_{13}(v), & v \in (ak, mk) \end{cases} \quad (4.108)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $a \le x \le m,\ k \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_2 = (nl(m-a)^{1-n}(d-k)^{1-l})/((b-a)(d-c))$ olarak verilir.

Birinci duruma benzer olarak bu durumda da, $ad < km$, $ad = km$ ve $ad > km$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve I_{2j} eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{21}(v) = \frac{(v-ak)^n (ad-v)^{l-1}}{a^l k^n} B(1,l) F_1(n, 1-l, l, n+1; \frac{d(ak-v)}{k(ad-v)}, 1-\frac{v}{ak}) \quad (4.109.)$$

$$I_{22}(v) = \frac{(v-ad)^{n-1}(d-k)^l}{d^n} B(1,l) F_1(l, 1-n, n, l+1; \frac{a(k-d)}{v-ad}, 1-\frac{k}{d}) \quad (4.110.)$$

$$I_{23}(v) = \frac{(v-ad)^{n-1}(md-v)^{l}}{m^{l}d^{n}} B(1,l) F_1(l, 1-n, n, l+1; \frac{a(v-md)}{m(v-ad)}, 1-\frac{v}{md}) \quad (4.111.)$$

$$I^*{}_{22} = \frac{(m-a)^{n}(ad-v)^{l-1}}{a^{l}} B(1,n) F_1(n, 1-l, l, n+1; \frac{d(a-m)}{ad-v}, 1-\frac{m}{a}) \quad (4.112.)$$

Birinci alt durum olan $ad < mk$ durumu;

$$f_{21}(v) = \begin{cases} k_2 I_{21}(v), & v \in (ak, ad) \\ k_2 I_{22}(v), & v \in (ad, mk) \\ k_2 I_{23}(v), & v \in (mk, md) \end{cases} \quad (4.113.)$$

İkinci alt durum olan $ad = mk$ durumu;

$$f_{22}(v) = \begin{cases} k_2 I_{21}(v), & v \in (ak, ad) \\ k_2 I_{23}(v), & v \in (ad, md) \end{cases} \quad (4.114)$$

Üçüncü alt durum olan $ad > mk$ durumu;

$$f_{23}(v) = \begin{cases} k_2 I_{21}(v), & v \in (ak, mk) \\ k_2 I^*{}_{22}(v), & v \in (mk, ad) \\ k_2 I_{23}(v), & v \in (ad, md) \end{cases} \quad (4.115.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ c \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = nl(b-m)^{1-n}(k-c)^{1-l}/(b-a)(d-c)$ olarak verilir.

Birinci duruma benzer olarak bu durumda da, $km < cb$, $km = cb$ ve $km > cb$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{3j}(v)$ eşitlikleri ile aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$I_{31}(v) = \frac{(b-m)^{n-1}(v-cm)^{l}}{m^{l}c} B(l,1) F_1(1, 1-n, l, 1+l; \frac{v-cm}{c(b-m)}, 1-\frac{v}{cm}) \quad (4.116.)$$

$$I_{32}(v) = \frac{(bk-v)^{n-1}(k-c)^{l}}{k^{n}} B(l,1) F_1(1,1-n,n,1+l;\frac{b(k-c)}{bk-v},1-\frac{c}{k}) \quad (4.117.)$$

$$I_{33}(v) = \frac{(bk-v)^{n-1}(k-c)^{l-1}}{bk^{n}} B(n,1) F_1(1,n,1-l,1+n;\frac{bk-v}{bk},\frac{bk-v}{b(k-c)}) \quad (4.118.)$$

$$I^{*}{}_{32} = \frac{(b-m)^{n}(v-mc)^{l-1}}{m^{l}} B(n,1) F_1(1,1-l,l,1+n;\frac{c(b-m)}{v-mc},1-\frac{b}{m}) \quad (4.119.)$$

Birinci alt durum olan $mk < bc$ durumu;

$$f_{31}(v) = \begin{cases} k_3 I_{31}(v), & v \in (mc, mk) \\ k_3 I_{32}(v), & v \in (mk, bc) \\ k_3 I_{33}(v), & v \in (bc, bk) \end{cases} \quad (4.120.)$$

İkinci alt durum olan $mk = bc$ durumu;

$$f_{32}(v) = \begin{cases} k_3 I_{31}(v), & v \in (mc, mk) \\ k_3 I_{33}(v), & v \in (mk, bk) \end{cases} \quad (4.121.)$$

Üçüncü alt durum olan $mk > bc$ durumu;

$$f_{33}(v) = \begin{cases} k_3 I_{31}(v), & v \in (mc, bc) \\ k_3 I^{*}{}_{32}(v), & v \in (bc, mk) \\ k_3 I_{33}(v), & v \in (mk, bk) \end{cases} \quad (4.122.)$$

Durum 4: Son durumda ise x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ k \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = (nl(b-m)^{1-n}(d-k)^{1-l})/(b-a)(d-c)$ olarak verilir.

Birinci duruma benzer olarak bu durumda da, $md < kb$, $md = kb$ ve $md > kb$ olmak üzere üç alt durum mevcuttur. İntegralin parçaları ayrı ayrı elde edilecek ve $I_{4j}(v)$ eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

$$I_{41}(v) = (v-mk)(b-m)^{n-1}(dm-v)^{l-1}/km^{l} \times f_D(1,1-n,1-l,l;2;\frac{v-mk}{k(b-m)},\frac{d(mk-v)}{k(dm-v)},1-\frac{v}{mk}) \quad (4.123.)$$

$$I_{42}(v) = \frac{(bd-v)^{n-1}(d-k)^{l}}{k^{l}d^{n-l}} B(1,l) F_1(l,1-n,l,l+1;\frac{v(d-k)}{k(bd-v)},1-\frac{d}{k}) \quad (4.124.)$$

$$I_{43}(v) = \frac{(bd-v)^{n+l-1}d^{l-n}}{v^{l}} B(l,n)\ {}_2F_1(l,l;l+n;1-\frac{bd}{v}) \quad (4.125.)$$

$$I^{*}{}_{42}(v) = \frac{(b-m)^{n}(dm-v)^{l-1}}{m^{l}} B(n,1) F_1(1,1-l,l,1+n;\frac{d(m-b)}{dm-v},1-\frac{b}{m}) \quad (4.126.)$$

Birinci alt durum olan $md < bk$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, md) \\ k_4 I_{42}(v), & v \in (md, bk) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (bk, bd) \end{cases} \quad (4.127.)$$

İkinci alt durum olan $md = bk$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, md) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (md, bd) \end{cases} \quad (4.128.)$$

Üçüncü alt durum olan $md > bk$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, bk) \\ k_4 I^{*}{}_{42}(v), & v \in (bk, md) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (md, bd) \end{cases} \quad (4.129.)$$

Çarpımın oyf sinin belirlemede ak, mc, ad, mk, bc, md ve bk çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Örneğin, Durum 4'te md ile bk karşılaştırılır. Buna göre $f_{4i}(v)$ lerden biri alınır. Böylece $v \in (ac, bd)$ için V'nin oyf

si (2.63.) numaralı eşitlikte verilen $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_V(v) = f_{1U(ak-mc)}(v) + f_{2U(ad-mk)}(v) + f_{3U(mk-bc)}(v) + f_{4U(md-bk)}(v) \quad (4.130.)$$

4.3.2. Alt Sınırların Sıfır Olması Durumu

Özel bir durum olarak ele alınan $a = c = 0$ durumu için $X \sim TSP(0, m, b, n)$ ve $Y \sim TSP(0, k, d, l)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $V = XY$ olarak tanımlanır. $a = c = 0$ durumu için de V'nin oyf si $a > 0$, $c > 0$ durumunda olduğu gibi (4.98) numaralı eşitlik kullanılarak elde edilecektir.

$a > 0, c > 0$ durumunda olduğu gibi oyf lerinin parçalı tanımlı olmalarından ötürü dört farklı durum ve son duruma ait üç alt durum ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt durumlar Tablo 4.17 deki gibi verilir.

Tablo 4.17. ($a = c = 0$) özel durumu için iki rastgele değişkenin çarpımının oyf sini belirlemedeki durumlar

Durumlar	Alt Durumlar
$0 \le x \le m,\ 0 \le y \le k$	$0 < mk$
$0 \le x \le m,\ k \le y \le d$	$mk < md$
$m \le x \le b,\ 0 \le y \le k$	$mk < bk$
$m \le x \le b,\ k \le y \le d$	$md < bk,\ md = bk,\ md > bk$

Durum 1: İlk durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ 0 \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_1 = nlm^{1-n}v^{l-1}/bdk^{l-1}$ olarak verilir ve dağılımın ilk parçası aşağıdaki eşitlikteki gibi elde edilir.

$$f_1(v) = \begin{cases} \frac{k_1}{n-l}\left(m^{n-l} - \left(\frac{v}{k}\right)^{n-l}\right), & v \in (0, mk) \quad n \neq l \\ k_1 \ln\left(\frac{km}{v}\right), & v \in (0, mk) \quad n = l \end{cases} \quad (4.131.)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve y için aralık değerleri $0 \le x \le m,\ k \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_2 = nlm^{1-n}/bd(d-k)^{l-1}$ olarak verilir ve dağılımın ikinci parçası $I_{21}(v)$ ve $I_{22}(v)$ eşitlikleri yardımıyla eşitlik (4.134.) deki gibi elde edilir.

$$I_{21}(v) = \frac{v^{n-1}(d-k)^l}{d^n} B(l,1)\ {}_2F_1(n,l;l+1;1-\frac{k}{d}) \tag{4.132.}$$

$$I_{22}(v) = \frac{(dm-v)^l v^{n-1}}{d^n m^l} B(l,1)\ {}_2F_1(n,l;l+1;1-\frac{v}{dm}) \tag{4.133.}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} k_2 I_{21}(v), & v \in (0,mk) \\ k_2 I_{22}(v), & v \in (mk,md) \end{cases} \tag{4.134.}$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ 0 \le y \le k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_3 = nlv^{l-1}/(bd(b-m)^{n-1}k^{l-1})$ olarak verilir ve dağılımın üçüncü parçası $I_{31}(v)$ ve $I_{32}(v)$ eşitlikleri yardımıyla eşitlik (4.137.) daki gibi elde edilir.

$$I_{31}(v) = \frac{(b-m)^n}{m^l} B(1,n)\ {}_2F_1(l,1;1+n;1-\frac{b}{m}) \tag{4.135.}$$

$$I_{32}(v) = \frac{(bk-v)^n k^{l-n-1}}{bv^{l-1}} B(1,n)\ {}_2F_1(n-l+1,1;1+n;1-\frac{v}{bk}) \tag{4.136.}$$

$$f_3(v) = \begin{cases} k_3 I_{31}(v), & v \in (0,mk) \\ k_3 I_{32}(v), & v \in (mk,bk) \end{cases} \tag{4.137.}$$

Durum 4: Son durumda ise x ve y için aralık değerleri $m \le x \le b,\ k \le y \le d$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $k_4 = nl(b-m)^{1-n}(d-k)^{1-l}/((b-a)(d-c))$ olarak verilir. $a > 0$ ve $c > 0$ genel durumundaki ile aynı şekilde üç farklı alt durum söz konusudur. Genel

durumla aynı olan, dağılımın dördüncü parçası $I_{4i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla (4.142.), (4.143.) ve (4.144.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$I_{41}(v) = (v-mk)(b-m)^{n-1}(dm-v)^{l-1}/km^{l} \times f_D(1,1-n,1-l,l;2;\frac{v-mk}{k(b-m)},\frac{d(mk-v)}{k(dm-v)},1-\frac{v}{mk}) \quad (4.138.)$$

$$I_{42}(v) = \frac{(bd-v)^{n-1}(d-k)^{l}}{k^{l}d^{n-l}} B(1,l) F_1(l,1-n,l,l+1;\frac{v(d-k)}{k(bd-v)},1-\frac{d}{k}) \quad (4.139.)$$

$$I_{43}(v) = \frac{(bd-v)^{n+l-1}d^{l-n}}{v^{l}} B(l,n)\ {}_2F_1(l,l;l+n;1-\frac{bd}{v}) \quad (4.140.)$$

$$I^{*}{}_{42}(v) = \frac{(b-m)^{n}(dm-v)^{l-1}}{m^{l}} B(n,1) F_1(1,1-l,l,1+n;\frac{d(m-b)}{dm-v},1-\frac{b}{m}) \quad (4.141.)$$

Birinci alt durum olan $md < bk$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, md) \\ k_4 I_{42}(v), & v \in (md, bk) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (bk, bd) \end{cases} \quad (4.142.)$$

İkinci alt durum olan $md = bk$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, md) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (md, bd) \end{cases} \quad (4.143.)$$

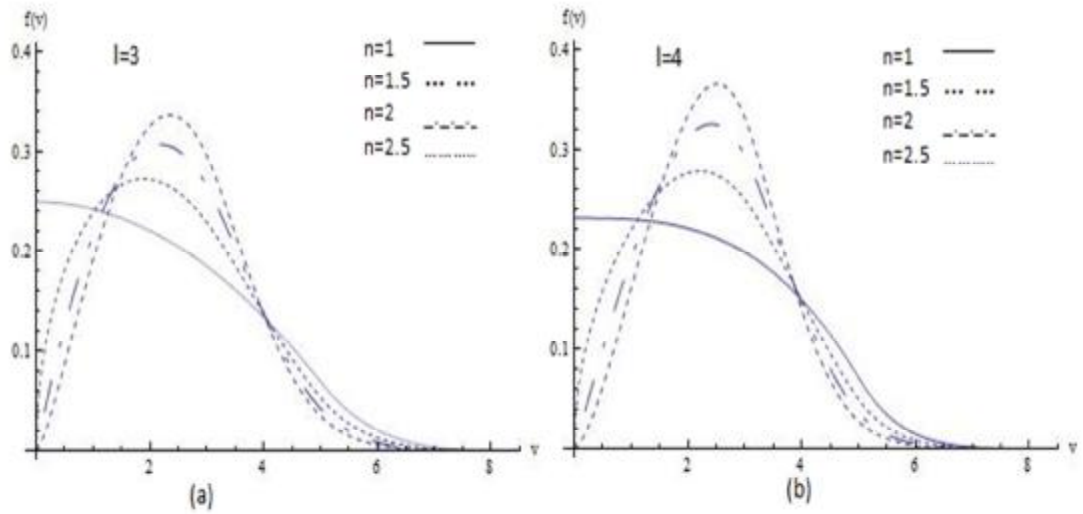
Üçüncü alt durum olan $md > bk$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} k_4 I_{41}(v), & v \in (mk, bk) \\ k_4 I^{*}{}_{42}(v), & v \in (bk, md) \\ k_4 I_{43}(v), & v \in (md, bd) \end{cases} \quad (4.144.)$$

$a = 0,\ c = 0$ özel durumu için çarpımın oyf sinin belirlemede sadece md ve bk çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. md ile bk karşılaştırılır ve buna göre $f_{4i}(v)$ lerden biri alınır. Böylece $v \in (0, bd)$ için V'nin oyf si eşitlik (2.63.) deki $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_V(v) = f_1(v) + f_2(v) + f_3(v) + f_{4U(md-bk)}(v) \qquad (4.145.)$$

Şekil 4.8.(a) da, $l = 3$ ve n için $1, 1.5, 2$ ve 2.5 değerleri verilerek, $X \sim TSP(0, 1, 5/3, n)$ ve $Y \sim TSP(0,3,5, l)$ olmak üzere $f(v)$ oyf sinin grafikleri çizdirilmiştir. Şekil 4.8.(b) de ise $l = 4$ e yükseltilmiş ve n için yine $1, 1.5, 2$ ve 2.5 değerleri verilmiştir. Grafiklere göre, n arttıkça dağılımın beklenen değeri ve sivriliğinin arttığı, varyans ve çarpıklığının ise azaldığı görülürken, l deki artışın ise dağılımın beklenen değerinin artmasına, çarpıklığının ve varyansının azalmasına etki ettiği görülmektedir.



Şekil 4.8. Belirli n ve l değerleri için $f(v)$ fonksiyonunun grafikleri ($a = c = 0$, $m = 1,\ b = 5/3,\ k = 3,\ d = 5$)

Yukarıdaki şekilde, l ve n nin farklı değerleri için oyf lerini incelediğimiz bu dağılımın momentlerinin değerleri Tablo 4.18. ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tablo 4.18. Belirli n ve l değerleri için V dağılımının momentleri ($a = c = 0$, $m = 1,\ b = 5/3,\ k = 3,\ d = 5$)

n	l	$E(v)$	$V(v)$	α_3	α_4
1	3	2.2917	2.3409	0.5161	2.5130
1.5	3	2.3834	1.7908	0.4634	2.6964
2	3	2.4444	1.4654	0.4167	2.8030
2.5	3	2.4881	1.2574	0.3704	2.8587
1	4	2.3333	2.2099	0.3831	2.3167
1.5	4	2.4267	1.6431	0.3330	2.5515
2	4	2.4889	1.3067	0.2965	2.7145
2.5	4	2.5333	1.0908	0.2647	2.8225

Ayrıca V'nin dağılımının yüzdelikleri $\int_{ac}^{v_p} f_V(v)dv = p$ eşitliğinin çözümü ile hesaplanabilir. Çarpımın oyf sinin farklı parametre değerleri için yüzdelikleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar $p = 0.9, 0.95, 0975\ ve\ 0.99$ için Tablo 4.19. da verilmiştir.

Tablo 4.19. Farklı parametre değerleri için $V = XY$ dağılımının yüzdelik değerleri

a	m	b	n	c	k	d	l	0.90	0.95	0.975	0.99
1	2	3	1	1	2	3	1	6.4537	7.1705	7.6921	8.1650
1	2	3	2	1	2	3	2	5.5818	6.0834	6.5170	6.9994
1	2	3	3	1	2	3	3	5.1843	5.5653	5.9066	6.3109
1	2	3	4	1	2	3	4	4.9492	5.2592	5.5396	5.8787
1	2	3	5	1	2	3	5	4.7925	5.0548	5.2936	5.5846
1	2	4	1	1	2	4	1	10.9427	12.3556	13.3887	14.3266
1	2	4	2	1	2	4	2	8.3350	9.3874	10.3198	11.3264
1	4	5	1	3	4	6	1	21.9249	24.2035	25.8586	27.3570
1	4	5	2	3	4	6	1	21.6900	23.3977	24.7169	26.0743
1	4	5	3	3	4	6	2	19.9455	21.3099	22.4316	23.6528
1	4	5	4	3	4	6	3	19.0223	20.1392	21.0982	22.1772
2	3	4	1	1	2	4	2	10.2776	11.3890	12.2970	13.2404
2	3	4	2	1	2	4	3	9.1230	9.9616	10.6915	11.5235
2	3	4	4	1	2	4	4	8.4080	9.0683	9.6469	10.3124
2	3	4	5	1	2	4	5	8.0114	8.5870	9.1012	9.7028
3	4	5	3	3	4	5	3	18.3354	19.0408	19.6599	20.3829
3	4	6	3	3	4	6	3	22.0128	23.4033	24.6653	26.1595

4.3.3. Uygulama

Bu bölümde yukarıda bulunan sonuçların bir uygulaması verilecektir. Hanehalkı harcamalarının temel kalemlerinden birinin yiyecek olduğu herkes tarafından bilinmektedir. Yiyecek harcamaları üzerine yapılan araştırmaların, ülkelerin veya insanların yaşam tarzları, sağlık kalitesi ve gelir düzeylerini yansıttığı da genel kabul görmüş bir yargıdır. Buradan yola çıkılarak, Birleşmiş Milletler Tarım Ekonomisi Araştırma Servisi Departmanının 2012 yılında yayımladığı verilerden seçilen 84 ülkenin, evde yiyeceğe harcanan paranın, tüketici harcamalarındaki yüzdesi ele alınarak bir uygulama yapılacaktır. Orijinal veri setine http://www.ers.usda.gov/data-products/food-expenditures.aspx. web sayfasından ulaşılabilir.

Nispeten daha fakir ve gelişmekte olan ülkelerde, eşya ve hizmet alımlarına yapılan tüketici harcamaları doğal olarak daha düşük, yiyecek harcamalarına ayrılan pay ise daha fazla olmaktadır. Yani tüketici harcamalarının düşük olduğu ülkelerde yiyeceğe ayrılan bütçenin yüzdesinin daha fazla olması beklenir. Bunun neticesinde de tüketici harcamaları ile yiyecek harcamaları arasında negatif bir ilişki olduğunu söylemek mümkündür. Bu yüzden de veri setindeki eşleştirilmiş çiftler alınamaz, çünkü aksi durumda bağımsızlık varsayımı sağlanmamış olur. Değişkenlerin bağımsızlığının sağlanması için, tüm veri setindeki her iki değişkenden rastgele olarak 30 veri seçilir ve sonuçta korelasyon katsayısı -0.0907 olarak bulunur.

X, 2012 yılında evde tüketilen alkolsüz içecekler dahil yiyeceğe ayrılan tüketici harcamalarının yüzdesini göstersin. Y ise kişi başına ABD doları cinsinden verilen eşya ve hizmet alımlarından oluşan tüketici harcamalarına karşılık gelsin. Böylece $V = XY$ çarpımı kişi başı ABD doları cinsinden yiyecek harcamalarını verir. Veri seti Tablo 4.20 de verilmiştir.

Yüzdeliklerin belirtildiği X değişkeninin sınırlı bir aralıkta tanımlı olduğu açıktır. Harcamaları ifade eden Y değişkenin de bir alt sınır ile üst sınıra sahip olduğu varsayılabilir. Böylece veri setinin yapısının, TSP dağılımı gibi sınırlı aralıklı bir dağılımla modellenmeye uygun olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bundan dolayı bu veri seti TSP dağılımı ile modellenmiş ve parametrelerin en çok olabilirlik tahmin

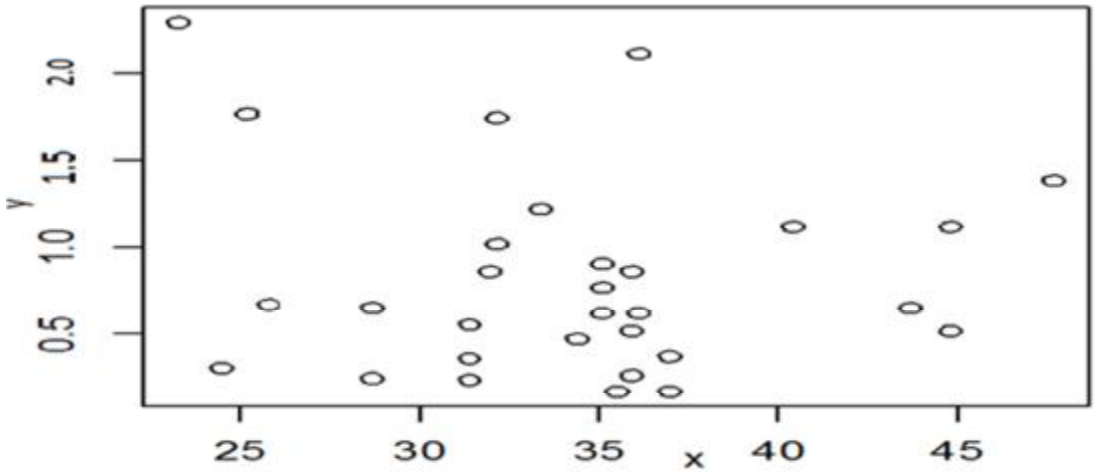
edicileri $L-BFGS-B$ optimizasyon yönteminde (Byrd ve ark., 1995) optim fonksiyonu yardımıyla R programı kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca uyum iyiliği testlerinden Cramer-Von Mises testi ile Anderson-Darling testi veri kümelerine uygulanmıştır. Sonuçlar Tablo 4.21 de sunulmuştur. Uyum iyiliği test sonuçlarının p-değerlerine bakıldığında veri kümelerinin TSP dağılımından geldiğini belirten sıfır hipotezinin reddedilemeyeceği açıkça görülmektedir. Veri setinde yer alan değişkenlerin histogram grafiği ve üstüne çizdirilmiş oyf si Şekil 4.9 de verilmiştir. Bu grafikler de modellemelerin uygunluğunu desteklemektedir. Ayrıca istenirse çarpımla ilgili olayların olasılıkları da tam olarak hesaplanabilir. Örneğin, V nin örneklem ortalamasından büyük olması olasılığı; $P(V > 27.9280) = 0.4322$ şeklinde tam olarak hesaplanır. Bir diğer örnekte de, yiyecek masraflarının \$3000 ile \$4000 arasında olması olasılığının, $P(30 < V < 40) = 0.1462$ olarak hesaplandığı görülür. Şekil 4.10 te ise çarpımın dağılımının veriyi iyi bir şekilde modellediği ve dağılımın sağa çarpık olduğu görülür.

Tablo 4.20: 2012 yılında evde tüketilen alkolsüz içecekler dahil yiyeceğe ayrılan tüketici harcamalarının yüzdesi, kişi başına ABD doları cinsinden verilen eşya ve hizmet alımlarından oluşan tüketici harcamaları ve bunların çarpımı ile elde edilen kişi başı ABD doları cinsinden yiyecek harcamaları

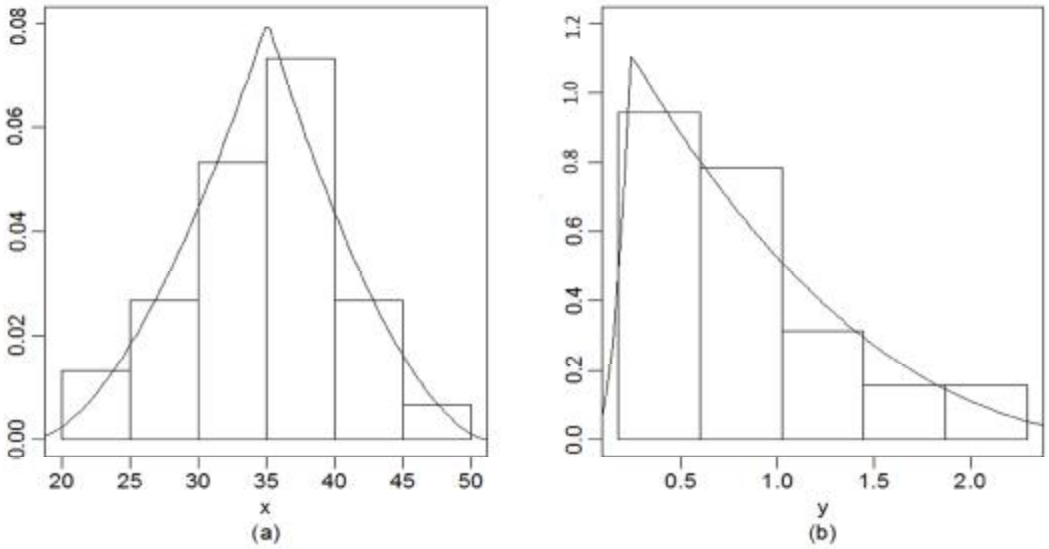
Yüzdelikler (X)	**Tüketici Harcamaları ($\$10^4$) ($Y$)**	**Yiyecek Harcamaları ($\$10^2$)**
35.9	0.5192	18.62928
35.9	0.8612	30.91708
43.7	0.5618	28.48366
35.9	0.2663	9.56017
37.0	0.1749	6.47130
33.4	1.2247	40.90498
37.0	0.3743	13.84910
32.2	1.0200	32.84400
23.3	2.2945	53.46185
25.8	0.6709	17.30922
35.1	0.6220	21.83220
40.4	1.1199	45.24396
35.1	0.9067	31.82517
32.0	0.8612	27.55840
36.1	2.1206	76.55366
32.2	1.7491	56.32102
35.1	0.7705	27.04455
28.7	0.6518	18.70666
31.4	0.2410	7.56740
25.2	1.7713	44.63676
24.5	0.3091	7.57295
47.7	1.3858	66.10266
35.5	0.1749	6.20895
44.8	0.5192	23.26016
28.7	0.2503	7.18361
31.4	0.3626	11.38564
34.4	0.4744	16.31936
44.8	1.1199	50.17152
36.1	0.6220	22.45420
31.4	0.5557	17.44898

Tablo 4.21**:** Yiyecek harcamaları verisi için TSP dağılımının parametre tahminleri ve uyum iyiliği test sonuçları

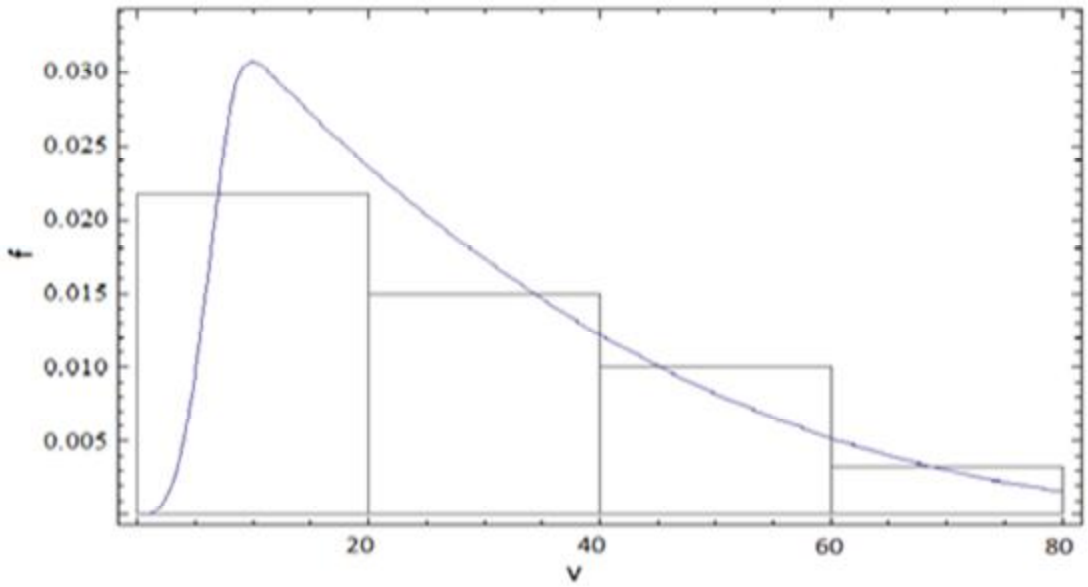
$TSP(a,m,b,n)$								
a	m	b	n	$loglik$	CVM	p-değeri	AD	p-değeri
17.8280	35.1	51.3691	2.7040	-94.431	0.13	0.459	0.716	0.544
(11.606)	(0.0574	(8.815)	(2.623)					
$TSP(c,k,d,l)$								
c	k	d	l	$loglik$	CVM	p-değeri	AD	p-değeri
0.0201	0.2402	3.1554	3.4944	-18.161	0.034	0.965	0.282	0.951
(0.170)	(0.017)	(1.422)	(2.517)					



Şekil 4.9. X ve Y için saçılım grafiği



Şekil 4.10. (a) X in histogramı ve fit edilmiş *TSP* oyf si (b) Y nin histogramı ve fit edilmiş TSP oyf si



Şekil 4.11. Yiyecek masrafları ve çarpımın dağılımın oyf si

4.4. İki Yönlü Kuvvet Dağılımlı X ve Y Rastgele Değişkenlerinin Bölümünün Dağılımı

Bu kısımda, TSP dağılımına sahip iki bağımsız rastgele değişkenin bölümünün dağılımı bulunacaktır. Hem kolaylık olması açısından hem de yeterli olduğu düşünüldüğünden, bu rastgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve pozitif olduğu varsayılacaktır. İlk olarak X/Y oranının, sonrasında ise $Y/(X+Y)$ oranının kapalı formda oyf leri elde edilecektir.

4.4.1. X/Y'nin Dağılımı

$X \sim TSP(a,m,b,n)$ ve $Y \sim TSP(c,k,d,l)$ bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere, $Z = 1/Y$ dönüşümü ile $V = XZ$ olarak tanımlanır. V'nin oyf si aşağıdaki eşitlik kullanılarak elde edilecektir;

$$f_V(v) = \int_{x_1}^{x_2} h(x) g\left(\frac{v}{x}\right) \frac{1}{x} dx \qquad (4.146.)$$

Oyf lerının parçalı tanımlı olmalarından ötürü (4.146.) numaralı eşitlikte verilen integralin hesaplanmasında dört farklı durum ve her bir duruma ait üç farklı alt durum ortaya çıkmaktadır. Tüm durum ve alt durumlar Tablo 4.22. daki gibi verilir.

Tablo 4.22. TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin bölümünün oyf nu belirlemedeki durumlar

Durumlar	Alt Durumlar
$a \le x \le m,\ 1/d \le z \le 1/k$	$a/k < m/d,\ a/k = m/d,\ a/k > m/d$
$a \le x \le m,\ 1/k \le z \le 1/c$	$a/c < m/k,\ a/c = m/k,\ a/c > m/k$
$m \le x \le b,\ 1/d \le z \le 1/k$	$m/k < b/d,\ m/k < b/d,\ m/k < b/d$
$m \le x \le b,\ 1/k \le z \le 1/c$	$m/c < b/k,\ m/c < b/k,\ m/c < b/k$

Birinci durumun ilk alt durumu olan $f_{11}(v)$, (4.147.) numaralı eşitlikteki integrallerin çözülmesiyle kapalı formda elde edilir.

$$f_{11}(v) = \begin{cases} \int_a^{dv} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{d-\frac{x}{v}}{d-k}\right)^{l-1} \frac{x}{v^2}\ dx, & v \in (a/d, a/k) \\ \int_{vk}^{dv} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{d-\frac{x}{v}}{d-k}\right)^{l-1} \frac{x}{v^2} dx, & v \in (a/k, m/d) \\ \int_{vk}^{m} \frac{n}{b-a}\left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} \frac{l}{d-c}\left(\frac{d-\frac{x}{v}}{d-k}\right)^{l-1} \frac{x}{v^2} dx, & v \in (m/d, m/k) \end{cases} \quad (4.147.)$$

Dört durumun tüm alt durumlarının kapalı formdaki fonksiyonları da benzer şekilde elde edilerek sonuçlar aşağıdaki gibi verilir.

Durum 1: İlk durumda x ve z için aralık değerleri $a \le x \le m,\ 1/d \le z \le 1/k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $t_1 = nl((m-a)^{1-n})(d-k)^{1-l} / ((b-a)(d-c))$ olarak verilir. Dağılımın ilk parçası $I_{1i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.152.), (4.153.) ve (4.154.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$I_{11}(v) = \frac{(dv-a)^{n+l-1}a}{v^{l-1}}\ B(n,l)\ {}_2F_1(-1, n; n+l; \frac{a-dv}{a}) \quad (4.148.)$$

$$I_{12}(v) = (vk-a)^{n-1}(d-k)^l v^2 k\ B(l,1)$$

$$\times F_1(1{,}1-n,-1{,}1+l;\frac{v(k-d)}{vk-a},1-\frac{d}{k}) \quad (4.149.)$$

$$I_{13}(v) = (vk-a)^{n-1}(d-k)^{l-1}vk(m-vk) \times f_D(1{,}1-n,1-l,-1;2;\frac{vk-m}{vk-a},\frac{m-vk}{v(d-k)},\frac{vk-m}{vk}) \quad (4.150.)$$

$$I^*{}_{12}(v) = (m-a)^n(dv-a)^{l-1}av^{1-l}B(1,n) \times F_1(n,1-l,-1,n+1;\frac{(m-a)}{dv-a},\frac{a-m}{a}) \quad (4.151.)$$

$I_{1i}(v)$ eşitlikleri incelendiğinde görüldüğü gibi TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin bölümünün dağılımının kapalı formdaki ifadesini elde etmek için (4.16.), (4.19.) ve (4.104.) eşitlikleri ile verilen integral sonuçlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer durumlarda da karşımıza çıkabilecek olan bu integral sonuçları çarpımın dağılımı elde edilirken kullanılan integral sonuçları ile aynıdır.

Birinci alt durum olan $a/k < m/d$ durumu;

$$f_{11}(v) = \begin{cases} t_1 I_{11}(v), & v \in (a/d, a/k) \\ t_1 I_{12}(v), & v \in (a/k, m/d) \\ t_1 I_{13}(v), & v \in (m/d, m/k) \end{cases} \quad (4.152.)$$

İkinci alt durum olan $a/k = m/d$ durumu;

$$f_{12}(v) = \begin{cases} t_1 I_{11}(v), & v \in (a/d, a/k) \\ t_1 I_{13}(v), & v \in (a/k, m/k) \end{cases} \quad (4.153.)$$

Üçüncü alt durum olan $a/k > m/d$ durumu;

$$f_{13}(v) = \begin{cases} t_1 I_{11}(v), & v \in (a/d, m/d) \\ t_1 I^*{}_{12}(v), & v \in (m/d, a/k) \\ t_1 I_{13}(v), & v \in (a/k, m/k) \end{cases} \quad (4.154.)$$

Durum 2: İkinci durumda x ve z için aralık değerleri $a \le x \le m,\ 1/k \le z \le 1/c$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $t_2 = nl((m-a)^{1-n})\,((k-c)^{1-l})/((b-a)(d-c))$ olarak verilir. Dağılımın ikinci parçası $I_{2i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.159.), (4.160.) ve (4.161.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$I_{21}(v) = \frac{(vk-a)^n(a-vc)^{l-1}a}{v^{l-1}} B(1,n) F_1(n, 1-l, -1, n+1; \frac{a-vk}{a-vc}, 1-\frac{vk}{a}) \quad (4.155.)$$

$$I_{22}(v) = (vc-a)^{n-1}(k-c)^l v^2 c\, B(1,l) \times F_1(l, 1-n, -1, l+1; \frac{v(c-k)}{vc-a}, 1-\frac{k}{c}) \quad (4.156.)$$

$$I_{23}(v) = \frac{(vc-a)^{n-1}(m-vc)^l c}{v^{l-2}} B(1,l) F_1(l, 1-n, -1, l+1; \frac{vc-m}{vc-a}, 1-\frac{m}{vc}) \quad (4.157.)$$

$$I^*{}_{22} = \frac{(m-a)^n(a-vc)^{l-1}a}{v^{l-1}} B(1,n) F_1(n, 1-l, -1, n+1; \frac{(a-m)}{a-vc}, 1-\frac{m}{a}) \quad (4.158.)$$

Birinci alt durum olan $a/c < m/k$ durumu;

$$f_{21}(v) = \begin{cases} t_2 I_{21}(v), & v \in (a/k, a/c) \\ t_2 I_{22}(v), & v \in (a/c, m/k) \\ t_2 I_{23}(v), & v \in (m/k, m/c) \end{cases} \quad (4.159.)$$

İkinci alt durum olan $a/c = m/k$ durumu;

$$f_{22}(v) = \begin{cases} t_2 I_{21}(v), & v \in (a/k, a/c) \\ t_2 I_{23}(v), & v \in (a/c, m/c) \end{cases} \quad (4.160.)$$

Üçüncü alt durum olan $a/c > m/k$ durumu;

$$f_{23}(v) = \begin{cases} t_2 I_{21}(v), & v \in (a/k, m/k) \\ t_2 I^*{}_{22}(v), & v \in (m/k, a/c) \\ t_2 I_{23}(v), & v \in (a/c, m/c) \end{cases} \quad (4.161.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve z için aralık değerleri $m \le x \le b,\ 1/d \le z \le 1/k$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $t_3 = nl((b-m)^{1-n})\,((d-k)^{1-l})/((b-a)(d-c))$ olarak verilir. Dağılımın üçüncü parçası $I_{3i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.166.), (4.167.) ve (4.168.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$I_{31}(v) = \frac{(b-m)^{n-1}(vd-m)^l m}{v^{l-1}} B(l,1) F_1\left(1,1-n,-1,1+l; \frac{vd-m}{b-m}, 1-\frac{vd}{m}\right) \quad (4.162.)$$

$$I_{32}(v) = (b-vk)^{n-1}(d-k)^l v^2 k\, B(l,1) \times F_1\left(1,1-n,-1,1+l; \frac{v(d-k)}{b-vk}, 1-\frac{d}{k}\right) \quad (4.163.)$$

$$I_{33}(v) = (b-vk)^n (d-k)^{l-1} vk\, B(n,1) F_1\left(1,1-l,-1,1+n; \frac{b-vk}{v(d-k)}, \frac{vk-b}{vk}\right) \quad (4.164.)$$

$$I^*{}_{32} = \frac{(b-m)^n (dv-m)^{l-1} m}{v^{l-1}} B(n,1) F_1\left(1,1-l,-1,1+n; \frac{(b-m)}{dv-m}, 1-\frac{b}{m}\right) \quad (4.165.)$$

Birinci alt durum olan $m/k < b/d$ durumu;

$$f_{31}(v) = \begin{cases} t_3 I_{31}(v), & v \in (m/d, m/k) \\ t_3 I_{32}(v), & v \in (m/k, b/d) \\ t_3 I_{33}(v), & v \in (b/d, b/k) \end{cases} \quad (4.166.)$$

İkinci alt durum olan $m/k = b/d$ durumu;

$$f_{32}(v) = \begin{cases} t_3 I_{31}(v), & v \in (m/d, m/k) \\ t_3 I_{33}(v), & v \in (m/k, b/k) \end{cases} \quad (4.167.)$$

Üçüncü alt durum olan $m/k > b/d$ durumu;

$$f_{33}(v) = \begin{cases} t_3 I_{31}(v), & v \in (m/d, b/d) \\ t_3 I^*{}_{32}(v), & v \in (b/d, m/k) \\ t_3 I_{33}(v), & v \in (m/k, b/k) \end{cases} \quad (4.168.)$$

Durum 4: Son durumda ise x ve z için aralık değerleri $m \le x \le b,\ 1/k \le z \le 1/c$ şeklindedir. Bu durumda kullanılacak olan integral sabiti ise $t_4 = nl((b-m)^{1-n})\,((k-c)^{1-l})/((b-a)(d-c))$ olarak verilir. Dağılımın dördüncü parçası $I_{4i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.173.), (4.174.) ve (4.175.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$I_{41}(v) = (b-m)^{n-1}(m-vc)^{l-1} m(vk-m)/v^{l-1} \times f_D(1,1-n,1-l,-1;2;\tfrac{vk-m}{b-m},\tfrac{m-vk}{m-vc},1-\tfrac{vk}{m}) \quad (4.169.)$$

$$I_{42}(v) = (b-vc)^{n-1}(k-c)^l v^2 c\, B(1,l) \times F_1(l,1-n,-1,l+1;\tfrac{v(k-c)}{b-vc},1-\tfrac{k}{c}) \quad (4.170.)$$

$$I_{43}(v) = \frac{(b-vc)^{n+l-1}c}{v^{l-2}} B(l,n)\ {}_2F_1(-1,l;l+n;1-\tfrac{b}{vc}) \quad (4.171.)$$

$$I^*{}_{42}(v) = \frac{(b-m)^n (m-vc)^{l-1} m}{v^{l-1}} B(n,1) F_1(1,1-l,-1,1+n;\tfrac{m-b}{v},1-\tfrac{b}{m}) \quad (4.172.)$$

Birinci alt durum olan $m/c < b/k$ durumu;

$$f_{41}(v) = \begin{cases} t_4 I_{41}(v), & v \in (m/k, m/c) \\ t_4 I_{42}(v), & v \in (m/c, b/k) \\ t_4 I_{43}(v), & v \in (b/k, b/c) \end{cases} \quad (4.173.)$$

İkinci alt durum olan $m/c = b/k$ durumu;

$$f_{42}(v) = \begin{cases} t_4 I_{41}(v), & v \in (m/k, m/c) \\ t_4 I_{43}(v), & v \in (m/c, b/c) \end{cases} \quad (4.174.)$$

Üçüncü alt durum olan $m/c > b/k$ durumu;

$$f_{43}(v) = \begin{cases} t_4 I_{41}(v), & v \in (m/k, b/k) \\ t_4 I^*{}_{42}(v), & v \in (b/k, m/c) \\ t_4 I_{43}(v), & v \in (m/c, b/c) \end{cases} \quad (4.175.)$$

Bölümün oyf sinin belirlemede $a/k, m/d, a/c, m/k, b/d, m/c$ ve b/k çokluklarının birbirlerine göre sıralaması rol oynar. Örneğin, Durum 4'te m/c ile b/k karşılaştırılır. Buna göre $f_{4i}(v)$ lerden biri alınır. Böylece $v \in (a/d, b/c)$ için V nin oyf si eşitlik (2.63.) ile verilmiş $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_V(v) = f_{1U(a/k-m/d)}(v) + f_{2U(a/c-m/k)}(v) + f_{3U(m/k-b/d)}(v) + f_{4U(m/c-b/k)}(v) \quad (4.176.)$$

4.4.2. $Y/(X+Y)$'nin Dağılımı

Bu kısımda $V = X/Y$ nin dağılımı kullanılarak, $W = Y/(X+Y)$ nin dağılımı elde edilecektir. $V = X/Y$ nin dağılımına benzer olarak W'nun dağılımıda dört durum altında irdelenecek ve oyf si aşağıdaki eşitlik kullanılarak tanımlanacaktır.

$$g(w) = \int_{\frac{1}{w}-1}^{v^*} f_V(v)dv \quad (4.177.)$$

v^*, $f_V(v)$ oyf sinin aralıklarına bağlıdır.

Durum 1: İlk durumda x ve z için aralık değerleri $a \le x \le m,\ 1/d \le z \le 1/k$ şeklindedir. Dağılımın ilk parçası $I_{1i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.178.), (4.179.) ve (4.180.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

Birinci alt durum olan $d/(m+d) < k/(a+k)$ durumu;

$$g_{11}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{d}{m+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{12}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{m+d}, \frac{k}{a+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{11}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{a+k}, \frac{d}{a+d}\right) \end{cases} \tag{4.178.}$$

İkinci alt durum olan $d/(m+d) = k/(a+k)$ durumu;

$$g_{12}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{d}{m+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{11}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{m+d}, \frac{d}{a+d}\right) \end{cases} \tag{4.179.}$$

Üçüncü alt durum olan $d/(m+d) > k/(a+k)$ durumu;

$$g_{13}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{13}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{k}{a+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I^*{}_{12}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{a+k}, \frac{d}{m+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{11}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{m+d}, \frac{d}{a+d}\right) \end{cases} \tag{4.180.}$$

Durum 2: İkinci durumda x ve z için aralık değerleri $a \le x \le m,\ 1/k \le z \le 1/c$ şeklindedir. Dağılımın ikinci parçası $I_{2i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.181.), (4.182.) ve (4.183.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

Birinci alt durum olan $k/(m+k) < c/(a+c)$ durumu;

$$g_{21}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{m+c}, \frac{k}{m+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{22}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{c}{a+c}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{a+c}, \frac{k}{a+k}\right) \end{cases} \tag{4.181.}$$

İkinci alt durum olan $k/(m+k) = c/(a+c)$ durumu;

$$g_{22}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{m+c}, \frac{k}{m+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{k}{a+k}\right) \end{cases} \quad (4.182.)$$

Üçüncü alt durum olan $k/(m+k) > c/(a+c)$ durumu;

$$g_{23}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{23}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{m+c}, \frac{c}{a+c}\right) \\ \frac{1}{w^2} I^*{}_{22}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{a+c}, \frac{k}{m+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{21}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{k}{a+k}\right) \end{cases} \quad (4.183.)$$

Durum 3: Üçüncü durumda x ve z için aralık değerleri $m \leq x \leq b,\ 1/d \leq z \leq 1/k$ şeklindedir. Dağılımın üçüncü parçası $I_{3i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.184.), (4.185.) ve (4.186.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

Birinci alt durum olan $d/(b+d) < k/(m+k)$ durumu;

$$g_{31}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{d}{b+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{32}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{b+d}, \frac{k}{m+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{d}{m+d}\right) \end{cases} \quad (4.184.)$$

İkinci alt durum olan $d/(b+d) = k/(m+k)$ durumu;

$$g_{32}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{d}{b+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{b+d}, \frac{d}{m+d}\right) \end{cases} \quad (4.185.)$$

Üçüncü alt durum olan $d/(b+d) > k/(m+k)$ durumu;

$$g_{33}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{33}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{k}{m+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I^*{}_{32}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{m+k}, \frac{d}{b+d}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{31}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{d}{b+d}, \frac{d}{m+d}\right) \end{cases} \quad (4.186.)$$

Durum 4: Son durumda x ve z için aralık değerleri $m \leq x \leq b,\ 1/k \leq z \leq 1/c$ şeklindedir. Dağılımın son parçası $I_{4i}(v)$ eşitlikleri yardımıyla ve alt durumlar göz önünde bulundurularak (4.187.), (4.188.) ve (4.189.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

Birinci alt durum olan $k/(b + k) < c/(m + c)$ durumu;

$$g_{41}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{b+c}, \frac{k}{b+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{42}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{c}{m+c}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{m+c}, \frac{k}{m+k}\right) \end{cases} \quad (4.187.)$$

İkinci alt durum olan $k/(b + k) = c/(m + c)$ durumu;

$$g_{42}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{b+c}, \frac{k}{b+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{k}{m+k}\right) \end{cases} \quad (4.188.)$$

Üçüncü alt durum olan $k/(b + k) > c/(m + c)$ durumu;

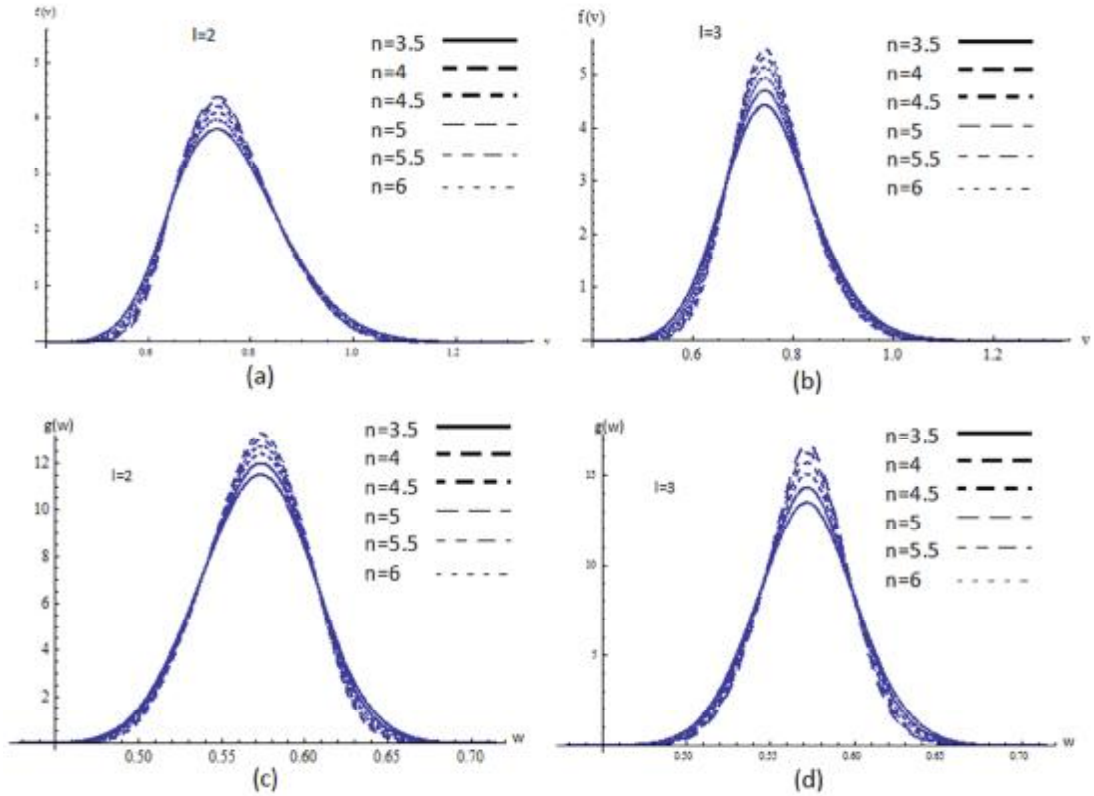
$$g_{43}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2} I_{43}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{b+c}, \frac{c}{m+c}\right) \\ \frac{1}{w^2} I^*{}_{42}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{c}{m+c}, \frac{k}{b+k}\right) \\ \frac{1}{w^2} I_{41}\left(\frac{1}{w} - 1\right), & w \in \left(\frac{k}{b+k}, \frac{k}{m+k}\right) \end{cases} \quad (4.189.)$$

Böylece $w \in (c/(b + c), d/(a + d))$ için W nun oyf si (2.63.) numaralı eşitlikteki $U(x)$ gösterge fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_W(w) = g_{1U\left(\frac{d}{m+d}-\frac{k}{a+k}\right)}(v) + g_{2U\left(\frac{k}{m+k}-\frac{c}{a+c}\right)}(v) + g_{3U\left(\frac{d}{b+d}-\frac{k}{m+k}\right)}(v) + g_{4U\left(\frac{k}{b+k}-\frac{c}{m+c}\right)}(v) \quad (4.190.)$$

X/Y bölümü durumunda sınır değerlerinin sıfır olması tek ihtimali açıkça paydaki rastgele değişkene özgüdür. $Y\ /\ (X+Y)$ bölümü durumunda ise alt sınır değerlerinden yalnız birinin sıfır olması özel durumu ortaya çıkabilir. Bu özel durumlar da çarpım durumundakine benzer bir şekilde çalışılabilir.

$a = 2,\ m = c = 3,\ b = k = 4,\ d = 5$ parametre değerleri sabit tutularak $n\ ve\ l$ parametrelerinin değerleri değiştirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.12. de sunulmuştur. Şekil 4.12.(a) da $l = 2$ iken n parametresinin değeri arttıkça V'nin dağılımının beklenen değerinin sabit kaldığı, varyansının azaldığı sivriliğinin ise arttığı gözlenmektedir. Şekil 4.12.(b) de $l = 3$ değerine yükseldiğinde V'nin dağılımının beklenen değer ve varyansının azaldığı, sivriliğinin ise arttığı görülürken, n parametresinin değeri arttığında ise V'nin dağılımının beklenen değerinin sabit kaldığı, varyansının ve çarpıklığının azaldığı, sivriliğinin ise arttığı görülmektedir. Şekil 4.12.(c) de yer alan W'nun dağılımında ise, $l = 2$ için n parametresinin değeri artığında beklenen değer ve varyansın azaldığı, sivriliğin ise arttığı gözlemlenmektedir. Son olarak Şekil 4.12.(d) de ise $l = 3$ değerine yükseldiğinde W'nun dağılımının beklenen değerinin ve sivriliğinin arttığı, varyansının ise azaldığı gözlemlenirken, n parametresinin değeri arttığında ise W'nun dağılımının beklenen değer ve varyansının azaldığı, sivriliğininse arttığı görülmektedir.



Şekil 4.12. Belirli n ve l değerleri için $f(v)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının grafikleri $(a = 2,\ m = c = 3,\ b = k = 4,\ d = 5)$

Tablo 4.23. Belirli $n\ ve\ l$ değerleri için $V\ ve\ W$ dağılımlarının momentleri $(a = 2,\ m = c = 3,\ b = k = 4,\ d = 5)$

n	l	$E(v)$	$V(v)$	$E(w)$	$V(w)$
3.5	2	0.7580	0.0116	0.5707	0.0013
4	2	0.7580	0.0106	0.5707	0.0011
4.5	2	0.7580	0.0099	0.5706	0.0010
5	2	0.7580	0.0093	0.5705	0.0010
5.5	2	0.7580	0.0089	0.5704	0.0009
6	2	0.7580	0.0086	0.5704	0.0009
6.5	2	0.7580	0.0083	0.5703	0.0008
7	2	0.7580	0.0081	0.5703	0.0008
3.5	3	0.7548	0.0088	0.5715	0.0009
4	3	0.7548	0.0079	0.5713	0.0008
4.5	3	0.7548	0.0072	0.5712	0.0008
5	3	0.7548	0.0067	0.5711	0.0007
5.5	3	0.7548	0.0063	0.5710	0.0007
6	3	0.7548	0.0060	0.5709	0.0006
6.5	3	0.7548	0.0057	0.5709	0.0006
7	3	0.7548	0.0055	0.5709	0.0006

Ayrıca V'nin dağılımının yüzdelikleri $\int_{a/d}^{v_p} f_V(v)dv = p$ eşitliğinin çözümü ile hesaplanabilir. Bölümün oyf sinin farklı parametre değerleri için yüzdelikleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar $p = 0.9, 0.95, 0975\ ve\ 0.99$ için Tablo 4.24 de verilmiştir.

Tablo 4.24. Farklı n ve l değerleri için V dağılımının yüzdelikleri ($p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99$)

a	m	b	n	c	k	d	l	0.90	0.95	0.975	0.99
1	2	3	1	1	2	3	1	1.800	2.0865	2.3190	2.5485
			2				2	1.4768	1.6518	1.8142	2.0081
			3				3	1.3411	1.4647	1.5832	1.7318
		4	1			4	1	2.0698	2.500	2.8646	3.2363
			2				2	1.6583	1.8992	2.1294	2.4156
			3				3	1.4846	1.6558	1.8173	2.0234
		5	1			5	1	2.2919	2.8606	3.3604	3.8850
			2				2	1.8311	2.1440	2.4408	2.8145
			3				3	1.6257	1.8520	2.0634	2.3284
	3	4	1		3	4	1	2.0698	2.500	2.8646	3.2363
			2				2	1.5968	1.8552	2.1041	2.4069
			3				3	1.4055	1.5814	1.7576	1.9855
		5	1			5	1	2.2919	2.8606	3.3604	3.8850
			2				2	1.7074	2.0125	2.3157	2.6996
			3				3	1.4877	1.6869	1.8901	2.1593
	4	5	1		4	5	1	2.2919	2.8606	3.3604	3.8850
			2				2	1.6890	2.0168	2.3461	2.7617
			3				3	1.4557	1.6706	1.8938	2.1934
1	2	3	1	4	5	6	2	0.5666	0.600	0.6274	0.6568
			2				3	0.5167	0.5468	0.5709	0.5972
			3				4	0.4885	0.5148	0.5367	0.5608
		4	1			7	2	0.7141	0.7677	0.8095	0.8545
			2				3	0.6263	0.6774	0.7180	0.7608
			3				4	0.5740	0.6201	0.6585	0.7001
		5	1			8	2	0.8524	0.9284	0.9867	1.0480
			2				3	0.7307	0.8029	0.8608	0.9216
			3				4	0.6570	0.7225	0.7773	0.8370

Benzer şekilde W'nun dağılımının yüzdelikleri de farklı parametre değerleri için hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar $p = 0.9, 0.95, 0975$ ve 0.99 için Tablo 4.25 de verilmiştir.

Tablo 4.25. Farklı n ve l değerleri için W dağılımının yüzdelikleri ($p = 0.90,\ 0.95,\ 0.975, 0.99$)

a	m	b	n	c	k	d	l	0.90	0.95	0.975	0.99
1	2	3	1	1	2	3	1	0.6429	0.6760	0.6987	0.7182
			2				2	0.5962	0.6229	0.6447	0.6676
			3				3	0.5729	0.5943	0.6129	0.6339
		4	1			4	1	0.6742	0.7143	0.7412	0.7640
			2				2	0.6238	0.6551	0.6805	0.7072
			3				3	0.5975	0.6235	0.6450	0.6692
		5	1			5	1	0.6962	0.7410	0.7707	0.7953
			2				2	0.6468	0.6819	0.7094	0.7378
			3				3	0.6192	0.6494	0.6736	0.6996
	3	4	1		3	4	1	0.6742	0.7143	0.7412	0.7640
			2				2	0.6149	0.6498	0.6778	0.7065
			3				3	0.5843	0.6126	0.6374	0.6650
		5	1			5	1	0.6962	0.7410	0.7707	0.7953
			2				2	0.6306	0.6680	0.6984	0.7297
			3				3	0.5980	0.6278	0.6540	0.6835
	4	5	1		4	5	1	0.6962	0.7410	0.7707	0.7953
			2				2	0.6281	0.6685	0.7011	0.7342
			3				3	0.5928	0.6256	0.6544	0.6869
1	2	3	1	4	5	6	2	0.8065	0.8206	0.8295	0.8374
			2				3	0.7767	0.7930	0.8051	0.8374
			3				4	0.7606	0.7749	0.7868	0.7992
		4	1			7	2	0.8040	0.8235	0.8360	0.8475
			2				3	0.7744	0.7935	0.8079	0.8219
			3				4	0.7597	0.7755	0.7887	0.8028
		5	1			8	2	0.8019	0.8261	0.8419	0.8562
			2				3	0.7744	0.7956	0.8118	0.8278
			3				4	0.7610	0.7782	0.7924	0.8077

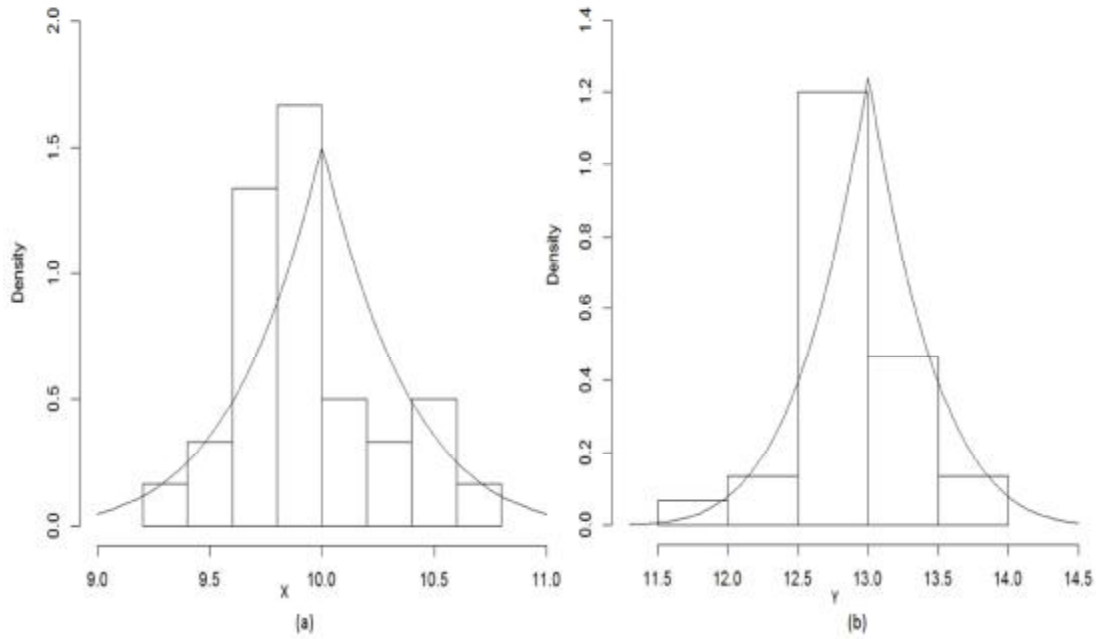
4.4.3. Uygulama

Bu kısımda TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkenin bölümünün dağılımı ile ilgili simülasyon uygulaması yapılmıştır. Uygulamada R programı kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. $X \sim TSP(8,10,12,6)$ ve $Y \sim TSP(11,13,15,5)$ olacak şekilde Tablo 4.26 ile verilen veri setleri rastgele olarak türetilmiştir.

Tablo 4.26. Uygulamada kullanılacak X ve Y değişkenlerine ait veri kümesi

X	Y
9.5	13.1
10.0	12.8
9.9	12.7
9.9	12.9
9.8	12.9
9.6	12.8
10.5	12.7
9.7	13.0
10.7	12.6
9.6	11.8
9.4	12.9
9.9	13.5
10.0	12.8
10.4	13.0
9.7	12.9
10.5	12.9
9.8	13.8
10.3	12.6
10.1	12.9
10.0	12.7
9.6	12.5
10.1	12.8
9.3	13.1
9.9	13.2
9.8	13.5
9.8	12.3
10.0	13.7
9.8	13.3
10.3	13.1
10.0	12.7

Tablo 4.26 ile verilen veri kümesinin, TSP dağılımına ait oyf leri ile fit edilmiş histogram grafikleri aşağıdaki Şekil 4.13 de sunulmuş, tanımlayıcı istatistiklerini içeren değerler ise X ve Y için sırasıyla Tablo 4.27 ve Tablo 4.28 ile verilmiştir.



Şekil 4.13. a) X verisinin histogram grafiği, b) Y verisinin histogram grafiği

Tablo 4.27. X veri kümesinin tanımlayıcı istatistikler

Ar.Ort.	Medyan	St.sapma	Aralık	Çarpıklık	Basıklık	Min	Maks	n
9.93	9.90	0.3323	1.40	0.4031	2.8188	9.30	10.70	30

Tablo 4.28. Y veri kümesinin tanımlayıcı istatistikler

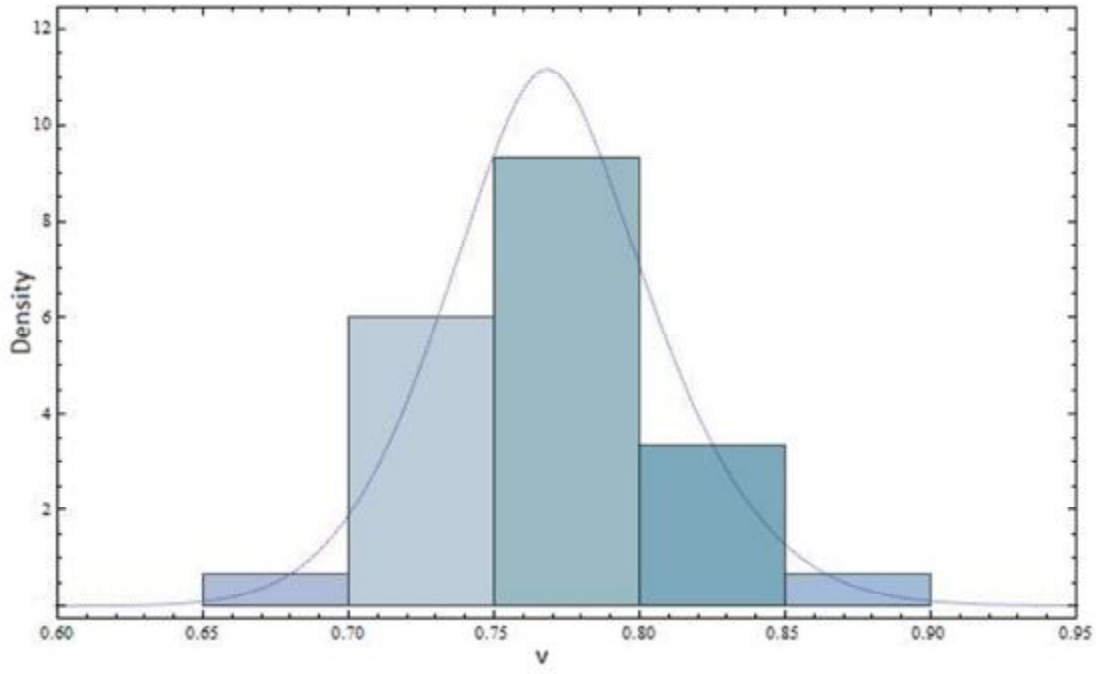
Ar.Ort.	Medyan	St.sapma	Aralık	Çarpıklık	Basıklık	Min	Maks	n
12.92	12.90	0.4009	2.00	-0.0785	4.1522	11.80	13.80	30

Tablo 4.26 ile verilen veri kümesinin parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $L-BFGS-B$ optimizasyon yönteminde (Byrd ve ark., 1995) optim fonksiyonu yardımıyla R programı (R Development Core Team, 2011) kullanılarak hesaplanmış ve Tablo 4.29 ile verilmiştir.

Tablo 4.29. Mevcut veri kümesi için TSP dağılımının parametre tahminleri

$TSP(a,m,b,n)$				
a	m	b	n	$log-olabilirlik$
8.5936	9.8000	11.8644	5.7971	-8.0728
(3.9632)	(13.9153)	(2.8042)	(0.8448)	
$TSP(c,k,d,l)$				
c	k	d	l	$log-olabilirlik$
11.1742	12.8996	14.6861	4.9776	-12.7738
(3.5389)	(1.0400)	(3.1760)	(1.1004)	

TSP dağılımına sahip iki bağımsız rastgele değişkenin bölümünün tam dağılımı bir önceki bölümde bulunmuştur. Elde edilen bu tam dağılım kullanılarak, mevcut veri setleri için olasılık değerleri kesin olarak elde edilebilir. Örnek olması açısından bazı olasılık değerlerinin sonuçları şu şekilde hesaplanmıştır; $V = X/Y$ olmak üzere, $P(V > \bar{v}) = P(V > 0.7682) = 0.5946$, $P(V > v_{med}) = P(V > 0.7670) = 0.6253$, $P(Z > 0.8) = 0.0601$, $P(0.7 < V < 0.8) = 0.9399$ ve $P(V < 0.9) = 0.8530$. İstenilen tüm olasılık değerleri dağılım fonksiyonu kullanılarak benzer şekilde elde edilebilir.



Şekil 4.14. $V = X/Y$ veri kümesinin histogram ve dağılım fonksiyonunun grafiği

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

TSP dağılımlı rastgele değişkenlerin fonksiyonları adı altındaki bu tez çalışmasında, beta tipi olarak sınıflandırılan dağılımlardan olan, üçgensel dağılım ve TSP dağılımı tanıtılmış ve bu dağılımların beta dağılımına alternatif olarak önerilmesindeki nedenlerden bahsedilmiştir. Bunlara ek olarak, dağılımların çeşitli özellikleri verilmiş, diğer dağılımlarla olan ilişkilerine değinilmiş, bu dağılımlardan rastgele sayı üretimin nasıl uygulanacağı anlatılmış, momentleri hesaplanmış ve parametre tahminleri yapılmıştır.

Ayrıca X ve Y, TSP dağılımına sahip bağımsız iki rastgele değişken olmak üzere $X + Y$, XY, X/Y ve $Y/(X + Y)$ nin tam dağılımları elde edilmiş, bulunan bu dağılımların farklı parametre değerlerine göre grafikleri çizdirilmiş, momentleri hesaplanmış, yüzdelik tabloları oluşturulmuş ve en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile parametreleri tahmin edilmiştir.

Bu çalışmanın neticesinde elde edilen TSP dağılımına sahip iki rastgele değişkeninin fonksiyonlarının dağılımı kullanılarak ulaşılacak sonuçlarla çalışmak, simülasyon yoluyla elde edilen sonuçlarla çalışmaya nazaran kesinlik elde edilmesi açısından çok daha iyidir. Özellikle çok büyük maliyetli işlerde veya çok hassas deneylerde tam dağılımla elde edilen sonuçların kullanılması hesaplama yoluyla oluşabilecek zararları ortadan kaldırmaktadır.

Bu nedenle, literatürde yer alan çeşitli dağılımlardan gelen ve hala tanımlanmamış, ancak pek çok bilim alanında gerek teorik, gerekse uygulama alanlarında kullanılan rastgele değişkenlerin fonksiyonlarının tam dağılımlarının bulunması ve bu eksikliğin en kısa sürede giderilmesi büyük önem arz etmektedir.

Tezde elde edilen tam dağılımların mühendislik gibi uygulamalı alanlarda TSP ile modelleme yapan araştırmacıların fonksiyonlarıyla ilgili sonuç çıkarsamada kullanışlı olacağı umulmaktadır.

Tezde sadece iki rastgele değişkenin yer aldığı fonksiyonlar üzerinde durulmuştur. İkiden fazla rastgele değişken olması durumunda tam dağılımı bulma probleminin bir hayli karmaşık olduğu konvolüsyonda gösterilmiş olmasına rağmen sorunun çarpım ve bölüm için de geçerli olacağını tahmin etmek zor değildir.

Tezde ayrıca rastgele değişkenlerin bağımsız olduğu varsayılmıştır. Bununla birlikte gerçek veri uygulamalarında bazen bağımlı rastgele değişkenlerle çalışılır. Örneğin, işleyişleri birbirine bağımlı olan iki bileşenin ömürlerinin bir fonksiyonu o sistemin kalitesinin ölçülmesinde kullanılabilir. Bu nedenle X ve Y nin TSP dağılımlı olarak bağımlı olması durumunda $X+Y$, XY, X/Y ve $Y/(X+Y)$ nin tam dağılımlarının elde edilişleri çözülmeyi bekleyen sorular arasındadır.

KAYNAKLAR

ABU-SALIH, M.S. 1983. Distributions of the product and the quotient of power-function random variables. Arab Journal of Mathematics, 4, 77-90.

ALBERT J. 2002. Sums of uniformly distributed variables: a combinatorial approach. Coll Math J 33:201–206

ALI M.M. 1982. Distribution of linear combinations of exponential variates. Commun Stat Theory Methods 11:1453–1463

AYYANGAR, A.S.K. 1941. The triangular distribution. Mathematics Student, 85-97

BASU A.P., LOCHNER R.H. 1971. On the distribution of the ratio of two random variables having generalized life distributions. Technometrics 13:281–287

BHARGAVA R.P., KHATRI C.G. 1981. The distribution of product of independent beta random variables with application to multivariate analysis. Ann Inst Stat Math 33:287–296

BOWMAN, K. O., SHENTON, L. R., GAILEY, P. C. 1998. Distribution of the ratio of gamma variates. Comm. Statist. Simulation Comput., 27, 1-19

BYRD, R.H., LU, P., NOCEDAL, J. 1995. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing , 16, 5, pp. 1190-1208

CHAPMAN DG. 1950. Some two-sample tests. Ann Math Stat 21:601–606

CHRISTOPEIT N, HELMES K. 1979. A convergence theorem for random linear combinations of independent normal random variables. Ann Stat 7:795–800

CLARK, C.E. 1962. The PERT model for the distribution of an activity. Operations Research, 10, pp. 405-406.

DAVIES R.B. 1980. Algorithm AS 155: the distribution of a linear combination of chi-squared random variables. Appl Stat 29:323–333

DOBSON AJ, KULASMAA K, SCHERER J. 1991. Confidence intervals for weighted sums of Poisson parameters. Stat Med 10:457–462

DONAHUE, J.D. 1964. Products and Quotients of Random Variables and Their Applications. ARL 64-115. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

FAREBROTHER R.W. 1984. Algorithm AS 204: The distribution of a positive linear combination of chisquared random variables. Appl Stat 33:332–339

FISHER R.A. 1935. The fiducial argument in statistical inference. Annals Eugenics 6:391–398

FULLMAN, R.L. 1953. Measurement of particle size in opaque bodies. Journal of Metals, 5: 447-452.

GLICKMAN, T.S., XU, F. 2008. The distribution of the product of two triangular random variables, Statist. and Probab. Letters, 2821-2826.

GUNDUZ S., GENÇ A.I. 2015a. The distribution of the quotient of two triangularly distributed random variables, Statistical Papers.Vol:56, 291-310.

GUNDUZ S., GENÇ A.I. 2015b. Distribution of the Product of a Pair of Independent Two-Sided Power Variates, Communications in Statistics - Theory and Method, DOI:10.1080/03610926.2014.957861

GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M. 2000. Table of Integrals, Series, and Products, sixth ed. San Diego: Academic Press.

GRUBBS, F.E. 1962. Attempts to validate certain PERT statistics or a 'Picking on PERT'. Operations Research, 1962, 10, pp. 912-915

HARTER H.L. 1951. On the distribution of Wald’s classification statistic. Ann Math Stat 22:58–67

HAWKINS D.L., HAN C-P. 1986. Bivariate distributions of some ratios of independent noncentral chisquare random variables. Commun Stat Theory Methods 15:261–277

HERRERIAS-VELASCO, J. M., HERRERIAS-PLEGUEZUEL, R., VAN DORP, J. R. 2009. The generalized two-sided power distribution. Journal of Applied Statistics, 36, 573-587.

HITEZENKO P. 1998. A note on a distribution of weighted sums of iid Rayleigh random variables. Sankhya A 60:171–175

HU C-Y, LIN G.D. 2001. An inequality for the weighted sums of pairwise iid generalized Rayleigh random variables. J Stat Plan Inference 92:1–5

JOHNSON, N.L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N., 1994. Continuous Univariate Distributions Volume 1, John Wiley & Sons, New York, 756p.

JOHNSON, D. 1997. The triangular distribution as a proxy for the beta distribution in risk analysis. The Statistician 46, 387–398.

JOHNSON, N.L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. 1995. Continuous Univariate Distributions, 2nd edn, vol. 2. New York: Wiley

JOHNSON, N.L., KOTZ, S. 1999. Non-smooth sailing or triangular distributions revisited after some 50 years. The Statistician 48, 179-187.

KAMGAR-PARSI B, KAMGAR-PARSI B, BROSH M. 1995. Distribution and moments of weighted sum of uniform random variables with applications in reducing Monte Carlo simulations. J Stat Comput Simul 52:399–414

KORHONEN P.J., NARULA S.C. 1989. The probability distribution of the ratio of the absolute values of two normal variables. J Stat Comput Simul 33:173–182

KOTZ, S., VAN DORP, J.R. 2004a. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications. World Scientific, Singapore

KOTZ, S., VAN DORP, J.R. 2004b. Uneven two-sided power distributions with applications in econometric models, Statistical Methods and Applications, 13, 285-313.

KOZUBOWSKI, T., J., PODORSKI, K., 1999. A Class of Assymetric Distributions, in Actuarial Research Clearing House, 1:113-134

MAC CRIMMON, K.R., RYAVEC, C.A. 1964. An analytic study of the PERT assumptions. Operations Research, 12: 16-38

MALIK H.I., TRUDEL R. 1986. Probability density function of the product and quotient of two correlated exponential random variables. Can Math Bull 29:413–418

MARSAGLIA G. 1965. Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables. J Am Stat Assoc 60:193–204

MATHAI, A. M., HAUBOLD, H. J. 2008. Special Functions for Applied Scientist, New York: Springer.

MOSCHOPOULOS P.G. 1985. The distribution of the sum of independent gamma random variables. Ann Inst Stat Math 37:541–544

NADARAJAH, S. 2006. Sums, products, and ratios of generalized beta variables. Statist. Papers, 47, 69-90.

NADARAJAH S. 2009a. The Pareto optimality distribution. Qual Quant 43:993–998

NADARAJAH S. 2009b. Laplace random variables with application to price indices. Adv Stat Anal 93:345–369

NADARAJAH, S., KOTZ, S. 2005. On the product and ratio of gamma and beta random variables, Allgemeines Statist. Archiv, 89, 435-449.

NADARAJAH S, KOTZ S. 2006. On the ratio of Fréchet random variables. Qual Quant 40:861–868

NADARAJAH, S., ALI, M. M. 2008. Pareto random variables for hydrological modeling. Water Resour Manage, 22, 1381-1393.

NADARAJAH, S., GUPTA, A.K. 2008. A Product Pareto Distribution, Metrika, 68, 2, 199-208.

NAGARAJA H.N. 2013. Moments of order statistics and L-moments for the symmetric triangular distribution. Stat Probab Lett 83:2357–2363

OLIVARES- PACHECO JF, ELAL-OLIVERO D, GÓMEZ HW, BOLFARINE H. 2009. A reparametrization of triangular distribution based on the skew-symmetric distributions. Revista Colombiana de Estadistíca 32:145–156

ORUÇ, O. E., BAIRAMOV, I. 2005. On the general class of two-sided power distribution. Communications in Statistics- Theory and Methods,34, 1009-1017.

OSTLE, B., PRAIRIE, R.R, WIESEN, J.M. 1961. Distribution of the range and midrange when sampling from a negatively skewed, right triangle population. Industrial Quality Control, 17 (9):13-15.

PEREZ, J. G., RAMBAUD, S. C., GARCIA, L. B.G. 2005. The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT, Statistical Methods and Applications, 14, 209-222.

PHAM-GIA, TURKKAN N. 1994. Reliability of a standby system with beta-distributed component lives. IEEE Trans Reliab 43:71–75

PHAM-GIA T. 2000. Distributions of the ratios of independent beta variables and applications.Commun Stat Theory Methods 29:2693–2715.

PHAM-GIA T, TURKKAN N. 1993. Bayesian analysis of the difference of two proportions. Commun Stat Theory Methods 22:1755–1771

PODOLSKI H. 1972. The distribution of a product of n independent random variables with generalized gamma distribution. Demonstr Math 4:119–123

PRESS S.J. 1969. The t ratio distribution. J Am Stat Assoc 64:242–252

PROVOST S.B. 1989a. On sums of independent gamma random variables. Statistics 20:583–591

PROVOST S.B. 1989b. On the distribution of the ratio of powers of sums of gamma random variables. Pak J Stat 5:157–174

R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2011. R: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN: 3-900051-07-0. http://www.R-project.org/

RIDER, P.R. 1963. Sampling from a Triangular Distnbvbon.Journa/ of the Mathematical Statistical Association, 58 (302): 509-512

ROHATGI, V.K. 1976. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. New York: Wiley

SAKAMOTO H. 1943. On the distributions of the product and the quotient of the independent and uniformly distributed random variables. Tohoku Math J 49:243–260

SCHMIDT R. 1934. Statistical analysis of one –dimensional distributions. Ann. Math. Statist.,5, 30-43.

SHAKIL M, AHSANULLAH M. 2011. Record values of the ratio of Rayleigh r andom variables. Pak J. Stat 27 (3): 307–325

SHAKIL M, KIBRIA B.M.G. 2006. Exact distribu tion o f the ratio of gamma and Rayleigh random variables. Pak J Stat Oper Res 2 :87–98

SHAKIL M, KIBRIA B.M.G., SINGH J.N. 2006. Distribution of the ratio of Maxwell and R ice random variables. Int J Contemp Math Sci 1: 623–637

SHAKIL M, KIBRIA B.M.G., CHANG K. 2008. Distributions of the product and ratio of Maxwell and Rayleigh random variables. Stat Pap 49:729–747

SIMPSON, T. 1755. A letter to the Right Honourable George,Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, on the advantage of taking the mean of a

number of observations in partical astronomy. Phil. Trans. R. Soc. Lond., 49, 82-93.

SOLTANI, A.R., HOMEI, H. 2009. A generalization for two-sided power distributions and adjusted method of moments, Statistics, 43, 611-620.

SPRINGER, M.D., THOMPSON, W.E. 1970. The distribution of products of beta, gamma and Gaussian random variables. SIAM Journal on Applied Mathematics 18 (4), 721–737.

STEECE B.M. 1976. On the exact distribution for the product of two independent beta-distributed random variables. Metron 34:187–190

STEIN W.E., KEBLIS M.F. 2009. A new method to simulate the triangular distribution. Math Comput Model 49:1143–1147

STUART A. 1962. Gamma-distributed products of independent random variables. Biometrika 49: 564–565

TANG, J., GUPTA, A. K. 1984. On the distribution of the product of independent beta random variables. Stat. and Probab. Letters, 2, 165-168.

VAN DORP, J. R., KOTZ, S. 2002a. The standard two-sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering. The American Statistician, 56.

VAN DORP, J. R., KOTZ, S. 2002b. A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation. The Statistician, 51, Part 1, 63-79.

VAN DORP, J.R., KOTZ, S. 2003. Generalizations of Two-Sided Power Distributions and Their Convolution, Communications in Statistics – Theory and Methods, 32:9, 1703-1723.

VAN DORP, J.,R., MAZZUCHI, T., A., 2000. Solving for the Parameters of a Beta Distribution under Two Quantile Constraints, J. Stat. Comp. And Simul., 67:189:201.

WALLGREN, C.M. 1980. The distribution of the product of two correlated t variables, JASA, 75, 996-1000.

WITKOVSKY V. 2001. Computing the distribution of a linear combination of inverted gamma variables. Kybernetika 37:79–90

WOLFRAM RESEARCH, INC. 2012. Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladı. 2004 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nden 2008 yılında mezun olup aynı yıl içerisinde Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde yüksek lisansa başladı. 2009 yılında İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi oldu, 2011 yılında yüksek lisansını tamamladı ve halen Çukurova Üniversitesindeki görevine devam ediyor.