ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alev SEVİNDİK

POLİNOM CEBİRLERİNİN KOORDİNAT POLİNOMLARI ve TEST ELEMANLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA,2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLİNOM CEBİRLERİNİN KOORDİNAT POLİNOMLARI VE TEST ELEMANLARI

Alev SEVİNDİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ...../...../2006 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza:.....	İmza:.....	İmza:.....
Yrd.Doç.Dr.Zerrin ESMERLİGİL	Prof.Dr.Naime EKİCİ	Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof.Dr.Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not:Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunudaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POLİNOM CEBİRLERİNİN KOORDİNAT POLİNOMLARI VE TEST ELEMANLARI

Alev SEVİNDİK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Yıl: 2006, Sayfa:65
Jüri: Yrd. Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr.Naime EKİCİ
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL

P_n ve A_n karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde sırasıyla n değişkenli polinom cebiri ve n üreteçli serbest birleşmeli cebir olsun. Bu tezde P_2 cebirinin koordinat polinomlarını bulmamızı sağlayan algoritmalar ile A_2 cebirinde bu probleme paralel olan ve verilen bir elemanının primitif olup olmadığını belirleyen algoritmalar incelenmiştir. Ayrıca A_n cebirinin verilen bir endomorfizminin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşullar verilerek A_n ve P_n cebirlerinin test elemanları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Polinom cebiri, serbest birleşmeli cebir, koordinat polinomları, test elemanları, primitif eleman.

ABSTRACT
MSc THESIS

COORDİNATES AND TEST ELEMENTS OF POLYNOMİAL ALGEBRAS

Alev SEVİNDİK

DEPARTMANT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Year: 2006, Pages:65
Jury: Assist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr.Naime EKİCİ
Assist.Prof.Dr.Ersin KIRAL

Let P_n and A_n be the polynomial and free associative algebra over a field K freely genarated by n generators, respectively. In this thesis we have determined coordinate polynomials of P_n and we have considered an analogue of this problem in the algebra A_2. Furthermore we have analyzed algorithms determining whether the given an element of A_n is primitive. Also we have given necessary and sufficient conditions for an endomorphism of A_n to be an outomorphism. On the other hand we have constructured test elements for the agebras A_n and P_n.

Key Words: Polynomial algebra, free associatealgebra, coordinate polynomial, test element, primitive element.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmamın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocalarım sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ ve sayın Yrd. Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL'e sonsuz şükran ve teşekkürlermi sunarım. Ayrıca değerli arkadaşlarım Arş.Gör. Demet PARLAK'a, Arş.Gör. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ'e, Arş.Gör. Nazif ÇALIŞ'a ve Arş.Gör. Dilek KAHYALAR'a ,Arş.Gör. Zeynep Yaptı ya ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için teşekkürlerimi sunarım. Tez yazımında bana yardımcı olan kardeşim Eser SEVİNDİK'e, bugüne kadar beni sürekli destekleyen ve her zaman yanımda olan eşim Eyyüp SEVİNDİK'e ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ..... I
ABSTRACT..... II
TEŞEKKÜR..... III
İÇİNDEKİLER..... IV
1. GİRİŞ..... 1
2. TEMEL BİLGİLER..... 3
2.1. Serbest Birleşmeli Cebir..... 3
2.2. Fox Türevleri..... 4
3. JACOBİAN HİPOTEZİ..... 7
3.1. Polinom Retractları ve Jacobian Hipotezi..... 8
3.2. $K[x, y]$ nın Retractları..... 11
3.3. Jacobian Hipotezinin Uygulamaları..... 14
4. KOORDİNAT POLİNOMLARI..... 18
4.1. İki Değişkenli Polinom Cebirlerinin Koordinatları..... 18
4.1.1. Koordinat Polinomlarının Seçimi İçin Algoritma..... 27
4.1.2. Jacobian Hipotezi ile Bağlantı..... 29
5. SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLER İÇİN TERS FONKSİYON TEOREMİ..... 31
5.1. Ters Fonksiyon Teoremi..... 33
5.2. A_2 nin Primitif Elemanı İçin Bir Kriter..... 36
5.3. Rankı 2 Olan Serbest Birleşmeli Cebirlerin Koordinat Polinomları..... 38
6. POLİNOM CEBİRLERİNİN VE SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN TEST ELEMANLARI..... 41
6.1. Test Polinomları..... 41
6.2. Polinom Cebirlerinin Test Polinomları..... 43
6.3 Serbest Birleşmeli Cebirlerin Test Elemanları..... 46
KAYNAKLAR..... 57
ÖZGEÇMİŞ..... 59

GİRİŞ

$A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$, karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X_n = \{x_1,...,x_n\}$ olan serbest birleşmeli cebir ve $P_n = K[x_1,...,x_n]$ K cismi üzerinde n değişkenli polinom cebiri olsun.

2. Bölüm de tez boyunca kullanılan tanımlar ve bazı gösterimler verildi.

3. Bölümde Jacobian Hipotezi incelendi. Bu bölümde polinom retractları ele alındı. $K[x,y]$ karakteristiği sıfır olan K cismi üzerinde iki değişkenli polinom cebiri olsun ve R , $K[x,y]$ nin bir alt cebiri olsun. Eğer $\phi(K[x,y]) = R$ olacak şekilde bir $\phi : K[x,y] \to K[x,y]$ retraksiyonu varsa R ye bir retract denir. R nin bir retract olması için birbirine denk koşullar verilerek $K[x,y]$ nin retractları karakterize edildi. Eğer $K[x,y]$ nin bir ϕ polinom dönüşümü tersinir Jacobian matrise sahipse ve sabit olmayan polinomları sabit bırakıyorsa ϕ nin bir otomorfizm olduğu gösterildi. Ayrıca Jacobian hipotezinin uygulamaları verildi.

4. Bölümde koordinat polinomlarının nasıl belirleneceği incelendi ve P_2 deki koordinat polinomları için bir algoritma verildi. Buna ek olarak mümkün olan minimal n sayısı için $p_1,...,p_n$ polinomları Jacobian Hipotezine karşıt bir örnek sağlarsa bu polinomların her birinin dış rankının 1 den büyük olduğu gösterildi.

5. Bölüm de A_n serbest birleşmeli cebirinin bir $U_n = \{u_1,...,u_n\}$ kümesinin bir serbest üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşullar incelendi ve serbest birleşmeli cebirler için ters fonksiyon teoremi verildi. Bu teoreme göre A_n nin bir ψ endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul Jacobian matrisinin tersinir olmasıdır. Bu kısımda $A_2 = K\langle x,y\rangle$ nin bir elemanının primitif olması için bir kriter verildi. $u \in A_2$ elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul bir $v \in A_2$ elemanı ve $0 \neq \alpha \in K$ için $[u,v] = \alpha[x,y]$ olmasıdır.

Altıncı bölümde polinom cebirlerinin ve serbest birleşmeli cebirlerin otomorfizmlerinin nasıl belirleneceği incelendi.

Bir $p(x)$ polinomunun minumum dereceli homojen bileşeni maksimum ranklı ise $p(x)$ in sabit terimi sıfır olan endomorizmler sınıfı içindeki tersinir endomorfizmleri için test polinomu olduğu gösterildi. Bu bölümde ayrıca serbest birleşmeli cebirlerin test elemanları ele alınarak ayrıntılı bir şekilde incelendi.

2.TEMEL BİLGİLER

2.1.Serbest Birleşmeli Cebir

K bir cisim X boş olmayan bir küme olsun. X deki harflerin $w = x_1 x_2 ... x_k$, $k \geq 0$, $x_i \in X$ şeklindeki sonlu bir dizisine bir kelime denir. $W(X)$, X deki harflerin yan yana dizilmesi ile oluşan kelimelerin kümesi olsun. A, bazı $W(X)$ olan serbest K modül olsun. A daki çarpım $W(X)$ kümesini A nın alt yarı grubu (yarı grup: Boş olmayan bir küme ve bu küme üzerindeki birleşmeli ikili işlem ile bir yarı gruptur.) ve A yı cebir yapacak şekilde belirlenebilir. Bu durumda A serbest üreteç kümesi X olan birim elemanlı serbest birleşmeli cebirdir.

A_n ile $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$ serbest üreteç kümesiyle tespit edilen $rankı \geq 2$ olan serbest birleşmeli cebiri göstereceğiz.

Tanm 2.1.1. Bir kelimenin X kümesinden gelen harflere göre yazılışında $u \in K[x_1 ... x_n]$ için $x_{ij} \in X$ olmak üzere $u = x_{i1} x_{i2} ... x_{ik}$ şeklinde ise u ya bir monomial ve k sayısına u nun derecesi denir.

$p \in K[x_1, ..., x_n]$ için p nin yazılışındaki en büyük dereceli monomiale p nin yazılışındaki leading terimi denir.

Tanım 2.1.2. $p \in K[x_1, ..., x_n]$ için p nin yazılışındaki bütün monomiallerin derecesi aynı ise p ye homojen polinom denir.

$p \in K[x_1, ..., x_n]$ polinomu için p tarafından üretilen ideali $\langle p \rangle$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.3. Verilen bir F cismi üzerindeki polinomların kümesi $f = (f_0, f_1, ..., f_n)$, $g = (g_0, g_1, ..., g_m)$ olmak üzere

1) $af + bg = (af_0 + bg_0, ..., af_m + bg_m, ..., af_n)$

2) $k = 0,1,2,...$

işlemleriyle F üzerinde değişmeli ve birim elemanlı bir cebirdir.

$K\left[x_1,...,x_n\right]$ karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde n değişkenli polinom cebiri olsun. Daha genel olarak $K\left[p_1,...,p_n\right]$ ile $K\left[x_1,...,x_n\right]$ nin $p_1,\ldots,p_n$ polinomları tarafından üretilen alt cebirini gösterelim.

Tanım 2.1.4. $f_1,...,f_m \in K\left[x_1,...,x_n\right]$ için $g=\left(f_1,...,f_m\right)$ olsun. $g\left(f_1,...,f_m\right)=0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir bağıntı bulunamıyorsa $f_1,...,f_m$ cebirsel bağımsızdır.

Tanım 2.1.5. $K\left[x_1,...,x_n\right]$ nin bir otomorfizmi değişkenlerden biri dışında diğerlerini sabit bırakıyorsa bu otomorfizme elemanter otomorfizm denir. $EndA_n$ ile A_n cebirinin endomorfizmler grubunu, $AutA_n$ ile A_n cebirinin otomorfizmler grubunu göstereceğiz.

2.2. Fox Türevleri

$\varepsilon : A \to K$, $1 \le i \le n$ için $\varepsilon\left(x_i\right)=0$

olarak tanımlanan dönüşüme genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği, bazı X olan bir serbest sol A modüldür. Bu modülü Δ ile gösterelim. Her $u \in \Delta$ elemanı

$$u=\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}x_n$$

formunda tek bir şekilde yazılabilir. Burada $\left\{x_1,...,x_n\right\}$ bazına göre u nun koordinatları olan

$\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$, $(i = 1,...,n)$ elemanları fox türevleri olup bu türevler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A$ $(1 \le i \le n)$ dönüşümleri sol fox türevleri olarak adlandırılır.

1. $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$,

2. Her $u, v \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i}$,

3. Her $u, v \in A$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \varepsilon(v) + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$,

eğer yukardaki koşullar aşağıdaki gibi ise $\frac{\partial}{\partial x_i}$ fonksiyonuna sağ fox türevleri denir.

1. $\frac{x_i \partial}{\partial x_j} = \delta_{ij}$,

2. Her $u, v \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\frac{(\alpha u + \beta v)\partial}{\partial x_i} = \alpha \frac{u \partial}{\partial x_i} + \beta \frac{v \partial}{\partial x_i}$,

3. Her $u, v \in A$ için $\frac{(uv)\partial}{\partial x_i} = \varepsilon(u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{u \partial}{\partial x_i} v$.

Tanım 2.2.1. $1 \le i \le n$ için x_i yi p ye götüren ϕ otomorfizminin Jacobian matrisi $J_\phi = \left(d_j(p_i)\right)_{1 \le i, j \le n}$ şeklinde tanımlanır. Eğer ϕ endomorfizmi için $p = \phi(q)$ ise zincir kuralı gereğince

$$\left(d_1(p),...,d_n(p)\right) = \left(\phi\left(d_1(q)\right),...,\phi\left(d_n(q)\right)\right).J_\phi \qquad (2.1)$$

dır.Burada J_ϕ, ϕ jacobian matrisidir. Ayrıca jacobian matrisler için çarpım kuralı

$$J_{\phi(\psi)} = \psi\left(J_\phi\right) J_\psi \tag{2.2}$$

dır. $GL_k\left(P_n\right)$ ile P_n üzerindeki $k \times k$ tipindeki matrislerin cebirini, $GE_k\left(P_n\right)$ ile $GL_k\left(P_n\right)$ deki elemanter ve diagonal matrisler tarafından üretilen matrisleri göstereceğiz.

3. JACOBİAN HİPOTEZİ

Bu bölümde polinom fonksiyonları ile ilgili ünlü bir problem olan Jacobian hipotezini inceleyeceğiz.

$K[x_1,...,x_n]$ karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde n değişkenli polinom cebiri olsun. Daha genel olarak $K[p_1,...,p_n]$ ile $K[x_1,...,x_n]$ nin $p_1,\ldots,\ p_n$ polinomları tarafından üretilen alt cebirini gösterelim.

Tanım 3.0.1. $p\in K[x_1,...,x_n]$ olsun. $K[x_1,...,x_n]$ nin her α otomorfizmi için $\alpha(p)=x_i$ ise p polinomuna koordinat polinomu veya sadece koordinat denir.

$p_1,\ldots,p_n \in K[x_1,...,x_n]$ olsun. $K[x_1,...,x_n]$ cebirinin $p_1,\ldots,p_m$ polinomları tarafından üretilen idealini $\langle p_1,...,p_m\rangle$ şeklinde gösterelim.

Tanım 3.0.2. $p\in K[x_1,...,x_n]$ olsun. Eğer her, $\phi: K[x_1,...,x_n]\to K[x_1,...,x_n]$ endomorfizmi için $\phi(p)=p$ iken ϕ bir otomorfizm oluyorsa p polinomuna test polinomu denir.

Teorem 3.0.3. (Abhyankar ve Moh, 1975) $p=p(x)$, $q=q(x)$, $K[x]$ de dereceleri sırasıyla $m\geq 1$ ve $n\geq 1$ olan iki polinom olsun.Eğer

$$K[x]=K[p,q]$$

ise o zaman ya *m/n* dir veya *n/m* dir.

Şimdi üzerinde yıllardır çalışılan ve hala çözülememiş olan jacobian hipotezini inceliyelim.

Problem 3.0.4.(Jacobian Hipotezi) (Keller, 1939) $p_1,...,p_n \in K[x_1,...,x_n]$ polinomları için Jacobian matrisi tersinir ise $K[p_1,...,p_n] = K[x_1,...,x_n]$ dir.

$n=2$ olması durumu oldukça özel bir durum olup bir ϕ endomorfizmi için eğer J_ϕ tersinir ve $K[x_1,x_2]$ nin bir ψ otomorfizmi için $\phi\psi$ bileşkesi $K[x_1,x_2]$ de sabit olmayan polinomları sabit bırakıyorsa, ϕ nın bir otomorfizm olduğu Shprilrain tarafından gösterilmiştir. (Shprilrain ve Yu, 2000)

3.1.Polinom Retractları ve Jacobian Hipotezi

Tanım 3.1.1. $K[x,y]$, K cismi üzerinde iki değişkenli polinom cebiri ve R, $K[x,y]$ nin bir alt cebiri olsun. Eğer R aşağıdaki birbirine denk olan koşullardan birini sağlıyorsa R ye bir retract denir.

(R_1) $\phi(K[x,y]) = R$ olacak şekilde bir $\phi: K[x,y] \to K[x,y]$ idempotent homomorfizmi vardır. Bu homomorfizme bir retraksiyon denir.

(R_2) R nin her elamanını sabit bırakan bir $\phi: K[x,y] \to R$ homomorfizmi vardır.

(R_3) $K[x,y]$ cebirinin bazı I idealleri için $K[x,y] = R \oplus I$ dır.

(R_4) I, (R_3) deki ideal olmak üzere $1 \to I \to K[x,y] \to R \to 1$ şeklinde bir ayrık tam dizi vardır.

Örnekler:

1. $p \in K[x,y]$ bir koordinat polinomu olmak üzere K ve $K[x,y]$ nin $K[p]$ formundaki herhangi bir alt cebiri bir retractdır.

2. $p = x + x^2 y$ koordinat olmadığı halde $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractıdır.

3. Bir retractın $K[x,y]$ nin herhangi bir otomorfizmi altındaki görüntüsü yine bir retracttır.

(Costa, 1977) $K[x,y]$ nin, K ve $K[x,y]$ den farklı olan her öz retractının, $p \in K[x,y]$ için $K[p]$ formunda olduğunu göstermiştir. $K[x,y]$ nin bir retractının bir otomorfizm altındaki görüntüsü yine bir retract olduğundan retraktları otomorfizmlerle de karakterize etmek mümkündür. Bunu aşağıdaki teoremle gösterebiliriz.

Teorem 3.1.2. (Shpilrain ve Yu 2000) $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractı olsun. O zaman bir $q = q(x,y)$ polinomu için bir $\psi \in Aut(K[x,y])$ vardır öyle ki $\psi(p) = x + yq$ dur. $K[\psi(p)]$ nin bir retraksiyonu $x \to x + yq$, $y \to 0$ şeklindedir.

Sonuç 3.1.3. Bir $p \in K[x,y]$ polinomunun bir retractı üretmesi için gerek ve yeter koşul $K[x,y]$ nin p yi x e götüren bir polinom dönüşümünün bulunmasıdır.

Teorem 3.1.2. in bir çok uygulamaları vardır.Bunlardan biri de Jacobian hipotezidir. $K[x,y]$ nin retractları ile Jacobian Hipotezi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki anlamda düşüneceğiz.

Hipotez 3.1.4. ("R" Hipotezi): $p,q \in K[x,y]$ polinom çifti için karşılık gelen Jacobian matris tersinir ise o zaman $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractıdır.

R Hipotezi p nin koordinat polinomu olma özelliği yerine bir retractı üretme özelliğine dayanmaktadır bu nedenle daha az kısıtlayıcıdır. Bununla birlikte esas olan nokta iki hipotezin denk olmasıdır.

Teorem 3.1.5. "*R*" Hipotezi, Jacobian Hipotezine denktir.

Tanım 3.1.6. (Jacobian çift) $p,q \in K[x,y]$ polinomları için Jacobian matris tersinir ise (p,q) çiftine Jacobian çift denir.

Sonuç 3.1.7. Aşağıdaki iddialardan herbiri Jacobian Hipotezine denktir.
Varsayalım ki (p,q) bir Jacobian çifti olsun.

(i) Bir g koordinat polinomu için $K[x,y] = K[p] + \langle g \rangle$ dir.

(ii) Bir g koordinat polinomu için $K[x,y] = K[g] + \langle p \rangle$ dir.

Sonuç 3.1.8. (Gwozdziewicz, 1993) Varsayalım ki ϕ, $[x,y]$ nin Jacobian matrisi tersinir olan bir polinom dönüşümü olsun. Eğer ϕ bir doğru üzerinde injektif ise ϕ bir otomorfizmdir.
Bir $\phi : K[x,y] \to K[x,y]$ polinom dönüşümü için

$$\phi^{\infty}\left(K[x,y]\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \phi^{k}\left(K[x,y]\right) \text{ olsun.}$$

Teorem 3.1.9. ϕ, $K[x,y]$ nin bir polinom dönüşümü olsun. Eğer ϕ nin Jacobian matrisi tersinir ise ya ϕ bir otomorfizmdir yada $\phi^{\infty}\left(K[x,y]\right) = K$ dır. Eğer ϕ bir $p \in K[x,y]$ polinomunu sabit bırakıyorsa $p \in \phi^{\infty}\left(K[x,y]\right)$ dir.

Sonuç 3.1.10. Varsayalım ki ϕ, $K[x,y]$ nin tersinir Jacobian matrise sahip olan bir polinom dönüşümü olsun. Eğer sabit olmayan her $p \in K[x,y]$ polinomu için $\phi(p) = p$ ise ϕ bir otomorfizmdir.

Bu sonuç aşağıdaki önemli sonuca karar vermemizi sağlar.
Eğer $\phi, K[x,y]$ nin tersinir Jacobian matrise sahip bir polinom dönüşümü ise bir α otomorfizmi için $\alpha.\phi$ dönüşümü sabit olmayan polinomları sabit bırakır.

3.2. $K[x,y]$ nin Retractları

Teorem 3.1.2. nin Ispatı: $p \in K[x,y]$ olmak üzere $K[p], K[x,y]$ nin bir retractı ve q_1, q_2 tek değişkenli polinomlarına karşılık gelen retraksiyon

$$\phi : x \to q_1(p)$$
$$y \to q_2(p)$$

olsun. ϕ bir retraksiyon olduğu için $q_1(p), q_2(p)$; $K[p]$ yi gerer. Varsayalım ki q_1 ve q_2 nin dereceleri sırasıyla $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ olsun. O zaman Abhyankar-Moh teoremi (Teorem 6) gereğince ya m/n yada n/m dir. Varsayalım ki bir $k \geq 1$ tamsayısı için

$$\deg(q_1) = k \deg(q_2)$$

olsun. O zaman koordinatlarda

$$x \to \tilde{x} = x - cy^k \quad ,$$
$$y \to \tilde{y} = y$$

değişikliğini yapabiliriz**.** Burada $c \in K^*$ katsayısı $q_1 - cq_2^k$ polinomundaki en büyük dereceli terimi yok edecek şekilde seçilir. Bu yeni koordinatlarla

$$\phi : \tilde{x} \to q_1 - cq_2^k = \tilde{q}_1 \ ,$$
$$\tilde{y} \to q_2 = \tilde{q}_2$$

Buradan $\tilde{q}_1$ ve $\tilde{q}_2$ polinomlarının $K[p]$ nin başka bir üreteç kümesi olduğu görülebilir. Fakat $\tilde{q}_1$ ve $\tilde{q}_2$ nin dereceleri toplamı q_1 ve q_2 nin derecelerinden küçüktür. Bu yöntemin devamında bir tanesi $c \in K$ sabiti olan polinom çiftini elde edeceğiz ve diğer polinomu h ile gösterelim. O zaman $K[h] = K[p]$ dir. (yani $h = c_1 p + c_2$ bir $c_1 \in K^*, c_2 \in K$ için) Böylece koordinatları değiştirerek bir $\psi \in Aut(K[x,y])$ için

$$\phi\psi : x \to c_1.p + c_2,$$
$$y \to c$$

elde edilir. Buradan bir $q(x,y)$ polinomu için

$$c_1.\psi(p(x,y)) + c_2 = x + (y-c).q(x,y),$$

olup

$$\psi(p(x,y)) = c_1^{-1}x + c_1^{-1}(y-c).q - c_1^{-1}.c_2$$

$$= c_1^{-1} - c_1^{-1}c_2 + c_1^{-1}(y-c).q$$

$$= c_1^{-1}x - c_1^{-1}c_2 + c_1^{-1}yq - c_1^{-1}cq$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3. nin ispatı:

(1) Varsayalım ki $p \in K[x,y]$ polinomu $K[x,y]$ nin bir retractını üretsin. O zaman Teorem 3.1.2 den bir $\Psi \in \text{Aut}\left(K[x,y]\right)$ otomorfizmi için $\Psi(p)$ polinomu $x + y.q(x,y)$ formundadır. ϕ , $K[x,y]$ nin

$$\phi: \begin{array}{l} x \to x \\ y \to 0 \end{array}$$

formundaki bir dönüşümü olsun. O zaman $\phi(\psi(p)) = x$ dir.

(2) Sonucun yeter koşulunu $K[x_1,...,x_n]$ çok değişkenli polinom cebiri için ispatlayacağız. $\phi(p) = x_1$ olsun. $K[x_1,...,x_n]$ nin

$$\Psi: \begin{array}{ll} x_1 \to p & \\ x_i \to 0 & i=2,..,n \end{array}$$

dönüşümünü düşünelim. O zaman

$$\Psi(\phi(p)) = p \tag{3.1}$$

dir.

$\psi\phi = \rho$ ile gösterelim. O zaman (3.1) den $\rho(p) = p$ olup ρ , $K[p]$ nin her elamanını sabit bırakır. Üstelik $\rho(K[x_1,...,x_n]) = K[p]$ açıktır. Bu nedenle ρ , $K[x_1,...,x_n]$ nin bir retraksiyonudur. O halde $K[p]$ bir retracttır.

Önerme 3.2.1. R , $K[x_1,...,x_n]$ nin $p_1,...,p_n$ $n \geq 2$ polinomları tarafından üretilen bir öz retractı olsun. O zaman $p_1,...,p_n$ cebirsel bağımlıdır.

İspat : $\phi: K[x_1,...,x_n] \to R$, $\phi(R) = R$ olacak şekildeki retraksiyon olsun. Ayrıca ϕ nin R'ye kısıtlanmışı R nin bir otomorfizmidir. Eğer $p_1,...,p_n$ polinomları cebirsel bağımsız olsaydı (Connel ve Zweibell, 1994) deki sonuçtan ϕ, $K[x_1,...,x_n]$ nin bir otomorfizmi olurdu. Bu durumda $R = K[x_1,...,x_n]$ dir. Bunun anlamı R öz retract değildir ve bu bir çelişkidir.

3.3. Jacobian Hipotezi nin Uygulamaları

Teorem 3.1.5. in ispatı: ϕ , $K[x,y]$ nin

$$\phi: x \to p(x,y)$$
$$y \to q(x,y)$$

olarak tanımlanan ve Jacobian matrisi tersinir olan bir polinom dönüşümü olsun. Eğer "R" Hipotezi doğru ise o zaman $p(x,y)$, $K[x,y]$ nin bir retractını üretir. Teorem 3.1.2 den bir $\Psi \in AutK[K(x,y)]$ otomorfizmi için $\Psi(p) = x + y.h(x,y)$ formundadır. Bu nedenle ϕ ile Ψ nin birleşimi üzerine eğer gerekirse $p(x,y)$ nin kendisinin de bu forma sahip olduğunu varsayabiliriz. (Appelgate ve Onishi, 1985) ve (Lang, 1991) den $q = \alpha p$ olacak şekilde $\alpha \in K[x,y]$ vardır. $K[p], K[x,y]$ nin bir retractı idi o zaman

$$K[x,y] = K[p] \oplus I$$

şeklindedir. Buradan

$$I = \langle q \rangle \Rightarrow K[x,y] = K[p] \oplus \langle q \rangle$$
$$= K[p] \oplus \langle \alpha p \rangle$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ϕ bir otomorfizm olmak zorundadır. O halde $K[x,y]=K[p,q]$ dır.

Sonuç 3.1.7. nin ispatı:

(i) Genelliği kaybetmeksizin p ve g nin her ikisininde sabit terimini sıfır olduğunu kabul edebiliriz. Eğer gerekirse; bu iki polinoma bir otomorfizim uygulayarak $g=x$ olduğunu varsayabiliriz.

İlk olarak eğer $K[x,y]=K[p]+\langle x\rangle$ ise bu toplamın direkt olduğunu göstermeliyiz. Bunu çelişki bulma yöntemi kullanarak gösterelim. Varsayalım ki sıfırdan farklı bir $u=u(x,y)$ polinomu ve $c_i \in K$ sabitleri için

$$x.u=\sum_{i=1}^{m} c_i p^i \tag{3.2}$$

olsun (3.2) eşitliğinin sol tarafı x ile bölünebildiğinden sağ tarafı da x ile bölünür. Bu ancak p' nin kendisinin x ile bölünmesiyle mümkündür fakat bu durumda p 'nin Newton poligonu y-ekseni boyunca bir kenara sahip olamaz. Bu da p 'nin Jacobian çiftine sahip olması ile çelişir.(Lang, 1991) böylece $K[x,y]=K[p]\oplus\langle x\rangle$ tir. (R_3) teki retract tanımından $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractıdır. Teorem 3.1.5 den $K[p,q]=K[x,y]$dir.

(ii) (i) den $p.u=\sum_{i=1}^{m} c_i x^i$ eşitliğini elde ettik. Bu durumda p, y ' ye bağlı olamaz. Böylece $p=p(x)$ dir, fakat böyle olursa $K[x,y]=K[x]+\langle p\rangle$ olması mümkün değildir.

Böylece $K[x,y]=K[x]\oplus\langle p\rangle$ dir. Bu da açıkça gösterir ki bazı $c\in K^*$ için $p=c.y$ dir.

Sonuç 3.3.1. K cebirsel kapalı bir cisim ve p,q $\in K[x,y]$ için (p,q) bir Jacobian çifti olsun. Varsayalım ki p bir homojen polinom tarafından bölünebilen $g \in K[x,y]$ polinomu için p=x+g formunda ise $K[p,q] = K[x,y]$ dir.

İspat : p lineer olması durumunda iddia gösterildi. Varsayalım ki p lineer olmasın ve varsayalım ki g sabit olmayan h homojen polinomu tarafından bölünsün. Eğer h, x tarafından bölünebiliyorsa p 'nin kendisi de x tarafından bölünür. Bu durumda p 'nin Newton poligonu *y*- ekseni boyunca bir kenara sahip olamaz. Bu da p 'nin Jacobian çiftine sahip olması ile çelişir.(Lang, 1991) Eğer h, y ile bölünebiliyorsa $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractıdır. Eğer y ile bölünmüyorsa bir $c \in K^*$ vardır öyle ki $x \to p \quad y \to cp$ ye götüren homomorfizm *h*'yi 0 a götürür. Bu homomorfizm retraksiyondur. Dolayısıyla $K[p]$, $K[x,y]$ nin bir retractıdır.Van den. Essen ve Tutai (Essen ve Tutaj,1994) de eğer (p,q) Jacobian çifti için h_1 ve h_2 homojen polinomlar olmak üzere (p,q), $(x+h_1, y+h_2)$ formunda ise $K[p,q] = K[x,y]$ olduğunu gösterdiler.

Teorem 3.3.2. $\phi : x \to p(x,y); y \to q(x,y)$ $K[x,y]$ nin tersinir Jacobian matrisine sahip bir polinom dönüşümü olsun. Varsayalım ki $\phi(K[x,y])$ bir koordinat polinomu içersin. O zaman ϕ bir otomorfizmdir.

İspat: ϕ nin bir otomorfizm ile birleşimini göz önüne alıp $x \in \phi(K[x,y])$ olduğunu varsayabiliriz. Bu ise $K[p,q,x] = K[p,q]$ olduğunu ve böylece $K(p,q,x) = K(p,q)$ eşitliğinin varlığını gösterir. Burada $K(p,q)$, $K[p,q]$ nin kesir cismidir.

Diğer taraftan (Formanek, 1994) sonucundan (p,q) nun Jacobian çifti olması $K(p,q,x) = K(x,y)$ olması demektir. O halde $K(p,q) = K(x,y)$ dir.

(Keller, 1939.) Bu durum $K[p,q]=K[x,y]$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.1.9. nin ispatı: Varsayalım ki ϕ bir otomorfizm olmasın. O zaman Teorem 3.3.2 den $\phi\left(K[x,y]\right)$ koordinat polinomlarını içermez. $\phi\left(K[x,y]\right)$ deki herhangi bir polinomun derecesi en az 2 dir. Tümevarım yöntemi kullanılarak $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ deki sabit olmayan herhangi bir polinomun derecesinin en az (k+1) olduğunu göreceğiz. Bu da $\phi^\infty\left(K[x,y]\right)=K$ olması demektir. $k\geq 1$ için $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ cebirini düşünelim; ϕ bire-bir olduğundan $\phi^k(x)$ ve $\phi^k(y)$ polinomları cebirsel bağımsızdır. Eğer ϕ nin $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ ye kısıtlaması $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ de bir otomorfizm ise (Connell ve Zweibel, 1994) ün sonucundan ϕ, $K[x,y]$ nin bir otomorfizmi olacaktır. Bu ise varsayımımızla çelişir. $\left(\phi^k\left(K[x,y]\right)\right)$, ϕ altında invaryant olduğundan $\phi^k\left(K[x,y]\right)\subseteq\phi^{k-1}\left(K[x,y]\right)$ olup $\phi^{k+1}\left(K[x,y]\right)\subseteq\phi^k\left(K[x,y]\right)$ dir. Buradan $\phi/\phi^k\left(K[x,y]\right)$, $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ nin otomorfizmi değildir. Önce verdiğimiz bilgiye göre $\phi^{k+1}\left(K[x,y]\right),\phi^k\left(K[x,y]\right)$ nin koordinat polinomlarını içermez. Ayrıca $\phi^{k+1}\left(K[x,y]\right)$ deki herhangi bir polinomun derecesi $\phi^k\left(K[x,y]\right)$ deki koordinat polinomunun derecesinden büyüktür.

4. KOORDİNAT POLİNOMLARI

Bu bölümde koordinat polinomlarının nasıl belirleneceğini inceleyeceğiz. $P_n = K[x_1,...,x_n]$, K cismi üzerindeki polinom cebiri olsun. P_2 deki koordinatları belirleyecek çeşitli algoritmalar olmasına rağmen $n \geq 3$ için P_n cebirinde koordinat polinomlarını belirleyecek algoritmalar yoktur.

Tanım 4.0.1. $p \in K[x_1,...,x_n]$ polinomunun dış rankı, p nin otomorfik görüntüleri - nin bağlı olduğu x_i üreteçlerinin minimal sayısıdır. Bu sayıyı $orank(p)$ ile göstere - ceğiz.

Bir koordinat polinomunun dış rankının 1'e eşit olduğu açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. Sabit terimi sıfır olan indirgenmez polinomların dış rankı 1 dir. Verilen bir elemanın farklı cebirsel sistemlerde dış rankının bulunması, üzerinde çok çalışılan bir problemdir. Bu konuda (Lyndon ve Zolotykh, 1994), (Mikhalev ve Zolotykh, 1994), (Umirbaev, 1996) ve (Bergman, 1999) çalışmaları önemli bir yer tutar.

4.1. İki Değişkenli Polinom Cebirlerinin Koordinatları

$p \in P_n$ olsun. p nin x_i ye göre kısmi türevini $d_i(p)$ ve p nin $d_1(p),...,d_n(p)$ kısmi türevleri tarafından üretilen ideali $I_{d(p)}$ ile gösterelim.

Tanım 4.1.1. $p \in P_n$ olsun. Eğer $I_{d(p)} = P_n$ ise p polinomu unimoduler gradiente sahiptir denir.

Tanım 4.1.2. (Gröbner İndirgemeleri) Verilen bir (p,q) polinom çifti için

$$S(p,q)=\frac{L}{1.t.(p)}p-\frac{L}{1.t.(q)}q$$

diyelim. Burada $1.t.(p)$, p nin en büyük dereceli terimi; $L=1.c.m.(1.m.(p),1.m.(q))$, burada $1.c.m$ en küçük ortak kat ve $1.m.(p)$, p nin leading monomialidir.

Bu çalışmada monomiallere bir tam sıralama verildiğini ve $x_1 > x_2 > ... > x_n$ olduğunu kabul edeceğiz.

Gröbner indirgemeleri iki şekilde ortaya çıkar:

1)Regüler veya elemanter dönüşümler: Bu dönüşümler r bir polinom ve $\alpha \in K^*$ olmak üzere eğer p nin en büyük dereceli monomiali q nun en büyük dereceli monomiali tarafından bölünürse $S(p,q)=\alpha.p-r.q$ veya q nin en büyük dereceli monomiali p nun en büyük dereceli monomiali tarafından bölünüyorsa bu durumda $S(p,q)=\alpha.q-r.p$ şeklindedir. Bu dönüşümlere lineer denilmesinin sebebi $(p,q)\to(\alpha_1 p,\alpha_2 q)M$ formunda yazılmasıdır burada M elemanter matristir. İkiden fazla polinom olması durumunda $(p_1,...,p_k)\to(\alpha_1 p_1,...,\alpha_k p_k)M$ yazılır. Burada M, $k\times k$ tipinde elemanter matris olup buradaki indirgeme bir polinom çifti üzerinde uygulanırken diğerlerini sabit bırakır. Bazen kolaylık olması bakımından α_i katsayılarını kaldırıp $(p_1,...,p_k)\to(p_1,...,p_k)M$, yazacağız. Burada M, $GL_k(P_n)$ nin tüm elemanter ve köşegen matrisleri tarafından üretilen $GE_k(P_n)$ grubuna aittir. $k\geq 3$ ise $GE_k(P_n)=GL_k(P_n)$ olduğu (Suslin, 1977) de ve $n\geq 2$ ise $GE_2(P_n)\neq GL_2(P_n)$ olduğu (Cohn, 1985) de gösterilmiştir.

2)Singüler dönüşümler: Bunlar regüler olmayan dönüşümlerdir.

Teorem 4.1.3. $p \in P_2$ polinomu unimodular gradiente sahip olsun. O zaman p'nin dış rankının 1'e eşit olması için gerek ve yeter koşul sadece elemanter dönüşümler kullanılarak $\left(d_1(p), d_2(p)\right)$'den $(1,0)$ elde edilebilmesidir veya bir $M \in GE_2(P_2)$ için $\left(d_1(p), d_2(p)\right)M = (1,0)$ olmasıdır.

Önerme 4.1.4. $p \in P_n$ polinomunun koordinat polinomu olması için gerek ve yeter koşul dış rankının 1 olması ve unımoduler gradiente sahip olmasıdır.
Bu önerme Teorem 4.1.3 ile birleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.5. Bir $p \in P_2$ polinomunun koordinat polinomu olması için gerek ve yeter koşul sadece elemanter Gröbner indirgemeleri kullanılarak $\left(d_1(p), d_2(p)\right)$ den $(1,0)$ elde edilebilmesidir.

Bu, P_2 deki koordinat polinomlarının bulunması için doğrudan doğruya bir algoritma verir. p bir koordinat polinomu olduğunda bu algoritma p'yi P_2 nin bazına tamamlayacak polinomu da bulabilir. $n \geq 3$ olduğunda P_n nin koordinat polinomlarını seçmek için bir algoritmanın varlığı henüz bilinmemektedir. p koordinat polinomunu bulmak için geliştirilen algoritma p yi x_1 e dönüştüren elemanter otomorfizmlerin bir dizisini de belirler. Bu otomorfizmler, lineer otomorfizmler ile

$$x_1 \to x_1 + f(x_2)$$
$$x_2 \to x_2$$

formundaki otomorfizmlerden oluşur.
Şimdi Teorem 4.1.3 ü ispatlayabilmek için aşağıdaki önermelere ihtiyacımız vardır.

Önerme 4.1.4. ün İspatı:

(i) Varsayalım ki p bir koordinat olsun $orank(p)=1$' dir. Tanımdan P_n nin p yi x_1' e götüren bir otomorfizmi vardır. Bir ϕ otomorfizmi için $p=\phi(x_1)$ olsun. O zaman (2.1) deki zincir kuralının uygulamasından

$$\left(d_1(p),...,d_n(p)\right)=\left(\phi\left(d_1(x_1)\right),...,\phi\left(d_n(x_1)\right)\right).J_\phi$$

elde ederiz. Buradan

$$\left(d_1(p),...,d_n(p)\right)=(1,0,...,0).J_\phi \qquad (4.1)$$

bulunur. ϕ bir otomorfizm olduğundan J_ϕ matrisi tersinirdir. Böylece (4.1) den

$$\left(d_1(p),...,d_n(p)\right)J_\phi^{-1}=(1,0,...,0),$$

elde edilir. $1\in I_{d(p)}$. O halde $I_{d(p)}=P_n$ dir.

(ii) Varsayalım ki $orank(p)=1$ ve $I_{d(p)}=P_n$ olsun. Otomorfizm uygulandıktan sonra p yi $p=\sum_i \alpha_i x_1^i$ formuna indirgeyebiliriz burada $\alpha_i\in K$ dır. $d_1(p)$ ler P_n' i ideal olarak üretmeli. Fakat bu ancak $i\rangle 1$ için $\alpha_i=0$ olmasıyla mümkündür. Böylece p koordinat polinomudur.

Önerme 4.1.6. $p\in P_n$ koordinat polinomu olsun. O zaman yalnızca elemanter dönüşümler kullanılarak $\left(d_1(p),...,d_n(p)\right)$ den $(1,0,...,0)$ elde edilebilir.

Teorem 4.1.7. ϕ, P_n nin bir otomorfizmi ise J_ϕ Jacobian matrisi $GE_n\left(P_n\right)$ e aittir.

İspat: J_ϕ nin $GL_n\left(P_n\right)$ e ait olması zincir kuralından elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

(i) $n \geq 3$ olsun. O zaman (Suslin, 1977) un sonucundan $GE_n\left(P_n\right) = GL_n\left(P_n\right)$ dir.

(ii) $n = 2$ olsun. Bu durumda P_2'nin otomorfizm grubu lineer otomorfizm ve

$$\begin{aligned} x_1 &\to x_1 + f\left(x_2\right) \\ x_2 &\to x_2 \end{aligned},$$

(Burada $f\left(x_2\right)$, x_1 e bağlı olmayan bir polinomdur) formundaki otomorfizmler tarafından üretilir (Jung,1942). Bu otomorfizmlerin her birinin Jacobian matrisleri $GE_2\left(P_2\right)$ ye aittir. Bu nedenle P_2 nin herhangi bir otomorfizminin Jacobian matrisi de $GE_2\left(P_2\right)$ ye aittir.

Önerme 4.1.6. nın İspatı:

Önerme 4.1.4 den $I_{d(p)} = P_n$ dir. p koordinat polinomu olduğundan bir ϕ otomorfizmi için $p = \phi\left(x_1\right)$ dir. Önerme 4.1.4 ispatındaki gibi

$$\left(d_1\left(p\right),...,d_n\left(p\right)\right).J_\phi^{-1} = \left(1,0,...,0\right) \qquad (4.2)$$

elde edilir. Teorem 4.1.7 den $J_\phi^{-1} \in GE_n\left(P_n\right)$ dir. (4.2) gösterir ki $\left(d_1\left(p\right),...,d_n\left(p\right)\right)$ den $\left(1,0,...,0\right)$ yalnızca elemanter dönüşümler kullanılarak elde edilebilir. Bir I

idealinin rankı bu ideali üreten üreteçlerin minimum sayısı olup bunu $rank(I)$ ile göstereceğiz.

Teorem4.1.8. Bir $p \in P_n$ polinomu için $orank(p) \geq rank(I_{d(p)})$ dır.

İspat: $orank(p) = k$ olsun. O zaman p' ye bir otomorfizm uygulandığında (eğer gerekirse) $p = p(x_1, ..., x_k)$ formuna sahip olduğunu varsayabiliriz. $I_{d(p)}$ nin rankı p' ye bir otomorfizm uygulanması ile değişmez. O zaman $I_{d(p)}$, k eleman tarafından üretilir.

Şimdi Teorem 4.1.3 ün ispatına başlayalım:

$orank(p) \neq rankI_{d(p)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yalnızca elemanter dönüşümler kullanılarak $(d_1(p), d_2(p))$ den $(1,0)$ elde edilebildiği için bir $M \in GE_2(P_2)$ matrisi için $(d_1(p), d_2(p)).M = (1,0)$ dir. $M = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman

$$d_1(p)r_1 + d_2(p)r_2 = 0 \tag{4.3}$$

dır.

$M \in GL_2(P_2)$ olduğundan $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kolonu unimodular olmak zorundadır. Yani bazı $s_1, s_2 \in P_2$ için $s_1.r_1 + s_2r_2 = 1$

Bu eşitlik 4.3 ile birlikte

$$J = \begin{pmatrix} d_1(p) & d_2(p) \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} = M_1$$

olur. M_1 matrisi $GE_2(P_2)$ ye aittir. Çünkü M_1 üçgenseldir. Buradan $J=\begin{pmatrix} d_1(p) & d_2(p) \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ matrisi de $GE_2(P_2)$ ye aittir. (Wright, 1978) deki sonuca göre p,q P_2' nin iki polinomu ve bunlara karşılık gelen Jacobian matris $J=\begin{pmatrix} d_1(p) & d_2(p) \\ d_1(q) & d_2(q) \end{pmatrix}$, $GE_2(P_2)$ ye ait ise p,q P_2 yi üretir. O halde p ve q koordinat polinomlarıdır.

Önerme 4.1.9. Eğer $J=\begin{pmatrix} d_1(p) & d_2(p) \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ formuna sahip bir matris ve $J \in GE_2(P_2)$ ise p koordinat polinomudur.

İspat: Bu önermenin ispatının bir kısmı (Wright, 1978) , deki Teorem 6 nın ispatı ile aynıdır. J matrisinin bir ϕ endomorfizmi için jacobian matrisi olup olmadığını anlamak için Teorem 6 nın (Wright, 1978) ispatından ϕ nin elemanter ψ otomorfizmi ile bileşkesi için bir şey söyleyemeyiz. (2.2) deki çarpım kuralnın yerine $J^*=\psi(J).J_\psi$ matrisini düşünelim. Burada J_ψ,ψ nin jacobian matrisi olup J_ψ elemanter matrisidir. (Wright, 1978) nolu referansta $J_{\psi\phi}$ matrisine karşılık gelen J^* ifadesi J^* ın normal formunun, J nin normal formundan daha küçük uzunluğa sahip olduğunu gösterir. Bir $q \in P_2$ polinomu için J^* ın 1. satırı $(d_1(q),d_2(q))$ formundadır. J^* matrisinin ilk satırının $(d_1(\psi(p))$ $d_2(\psi(p))$ olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $orank(p)=1$ dir. Buradan ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.10.

$A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GE_2(P_2)$ ve $1.m.A=\begin{pmatrix} 1.m.(p) & 1.m.(q) \\ 1.m.(r) & 1.m.(s) \end{pmatrix}$ leading monomiallerin matrisi olsun.

O zaman A nın bileşenlerinden en az üçü sabittir veya $1.m.(A)$ nın satırlardan biri diğer satırların bir monomial katıdır ve kolonlardan biri diğer kolonun bir monomial katıdır.

İspat: $A = D.E_1...E_k \quad k \geq 2$ olsun. Burada D köşegen matris ve $E_1...E_k$ elemanter matrisler olmak üzere ispat E_i matrislerinin sayısı (minimum) üzerinden tümevarımla yapılır. A matrisi tersinir olduğundan A nın determinatı hesaplanırken en büyük dereceli terimleri iptal edilir. Bunun anlamı $1.m.(A)$ matrisinin ya bileşenlerinden her biri sabitlerdir (bileşenlerin bir tanesi sıfır ve diğerlerinden ikisi sabittir) ya da $\det(1.m(A)) = 0$ dır. $\det(1.m.(A)) = 0$ ve $A' = D.E_1...E_{k-1}$ olsun. Tümevarım hipotezine göre iki durum düşünülür.

i) $1.m.(A')$ nin üç bileşeni sabit olabilir. $E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman üç durum söz konusudur:

$a)$ $1.m.(A')$ nın bütün bileşenleri sabittirler. Bu durumda $1.m.(A)$ matrisi $\begin{pmatrix} 1.m.(g) & 1 \\ 1.m.(g) & 1 \end{pmatrix}$ formundadır.

$b)$ $1.m.(A')$ nın bileşenlerinden üçü sabittir. Bu durumda bunlardan biri sıfırdır. $1.m.(A') = \begin{pmatrix} f & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $1.m.(A)$ matrisi 3 sabit bileşene sahiptir.

$c)$ (b) ile aynı olup $1.m(A') = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (f sabit değil) dır. O zaman $1.m.(A) = \begin{pmatrix} 1.m.(f)1.m.(g) & 1.m.(f) \\ 1.m.(g) & 1 \end{pmatrix}$ olup $1.m.(A)$ nın 1. satırı 2. satırın $1.m.(f)$ katıdır ve 1. kolon 2. kolonun $1.m.(g)$ katıdır.

(ii) $A'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun ve h,h' sabit olmayan monomialleri için

$$\left(1.m.(a),1.m.(b)\right)=h\left(1.m.(c),1.m.(d)\right) \qquad (4.4)$$

$$\left(1.m.(a),1.m.(c)\right)=h'\left(1.m.(b),1.m.(d)\right) \qquad (4.5)$$

dir. Bu ise a,b,c nin sabit olmadığını gösterir. Şimdi $g\neq 0$ için $E_k=\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ durumunu düşüneceğiz. O zaman $A=\begin{pmatrix} a & b+ga \\ c & d+gc \end{pmatrix}$ dir. $\det A=1$ olduğundan

$$1.m.(c)1.m.(b+ga)=1.m.(a)1.m.(d+gc)\ =h.1m.(c)1.m.(d+gc)$$

elde edilir.

Buradan

$$1.m.(b+ga)=h.1.m.(d+gc)$$

(4.4) ile birlikte $1.m.(A)$ nın ilk satırı ikinci satırın h katı olduğu anlamına gelir. Ayrıca (4.5) ile

$$1.m(b+ga)=1.m(ga)=1.m(g)1.m(a) \text{ ve}$$

$$1.m(d+gc)=1.m(gc)=1m(g).1.m(c)$$

dır. Buradan da $1.m(A)$ nın ikinci kolonu birinci kolonun $1.m(g)$ katı olduğu elde edilir.

Teorem4.1.5. nın ispatını tamamlayabilmek için p nin bir koordinat polinomu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $(d_1(p), d_2(p))$ satırının $GE_2(P_2)$ nin bir matrisine tamamlanabilir olması gerçeğinden yararlanırız. Bunu Önerme 4.1.10. ile birleştirirsek sonuç elde edilir.

4.1.1. Koordinat Polinomlarının Seçimi İçin Algoritma

Verilen bir $p = p(x_1, x_2)$ polinomunun P_2 polinom cebirinin bir bazının bir parçası olup olmadığını araştırmak istiyoruz:

1. Adım: $d_1(p), d_2(p)$ türevlerini alıp; $d_1(p)$ yi q_1 ile $d_2(p)$ yi q_2 ile gösterelim.

2. Adım: q_1 nin en büyük dereceli monomiali $(1.m)$, q_2 nin en büyük dereceli monomiali tarafından bölünemiyorsa p bazın bir parçası değildir.
Teorem 4.1.3 ve Önerme 4.1.10 dan hareketle bir h monomiali için

$1.m.(q_1) = h.1.m.(q_2)$ veya $1.m.(q_2) = h.1.m.(q_1)$ ise 3. adım ile devam edilir.

3. Adım: Sırasıyla $q_1' = q_1 - h.q_2$ veya $q_2' = q_2 - h.q_1$ olsun. Eğer $1.m.(q_1') = 1$ ise Teorem 4.1.3 den p bazın bir parçasıdır. $1.m.(q_1') = 0$ ise p bazın bir parçasıdır ancak ve ancak $1.m.(q_2)$=1 ise. Tekrar Teorem 4.1.3 ile eğer $1.m(q_1') \neq 0$ veya 1 ise sırasıyla q_1 ile q_1' veya q_2 ile q_2' yerine konularak 2. adım tekrarlanır. q_1 ve q_2 nin derecelerinin maksimumu 3. adımı her uyguladığımızda azalacağından biz bunu en fazla

$$d+(d-1)+....+1=\frac{d.(d+1)}{2}$$

defa uygulayabiliriz. Burada d, p polinomunun derecesidir. Eğer bu algoritma p nin koordinat polinomu olduğunu gösterirse P_2 nin tamamını p ile birlikte üretecek şekilde bir q polinomu bulmak kolaydır. Burada yapmamız gereken şey 3. adımda uyguladıklarımızın matris formunu aşağıdaki şekilde uygulamaktır:

$(q_1,q_2)\to(q_1,q_2)E(h)$ (burada $E(h)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -h & 1\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}1 & -h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$).

Sonunda eğer p polinomu koordinat polinomu ise $(d_1(p),d_2(p))=(1,0).M$ dir. Burada $M,E(h)$ matrislerinin bir çarpımıdır. Buradan $M=\begin{pmatrix}d_1(p) & d_2(p)\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}$ formundadır. Böylece p ve q, P_2 yi üretecek şekildeki bir q polinomu için $s_1=d_1(q), s_2=d_2(q)$ dir.

Bu algoritmayla p nin koordinat polinomu olması durumunda $p\in P_2$ yi x_1 e indirgeyen elemanter otomorfizmlerin bir dizisini bulabiliriz. Aslında $(d_1(p),d_2(p))=(1,0).M$ olacak şekilde bir $M\in GE_2(P_2)$ matrisini bulunabileceği gösterilmiş oldu. Varsayalım ki

$$M=E_{12}(p_1).E_{21}(q_1)...E_{12}(p_k).E_{21}(q_k)$$

olsun. Burada $E_{12}(p)=\begin{pmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve $E_{21}(q)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ q & 1\end{pmatrix}$ dir. O zaman $q_k=q_k(x_1)$ dir. Böylece $E_{21}(q_k)$ matrisi bir elemanter otomorfizmin Jacobian matrisidir. Benzer

olarak, eğer sağdaki ilk elemanter matris $E_{12}(p_k)$ formunda ise $p_k = p_k(x_2)$ dir. ($E_{12}(p_k)$ bir elemanter otomorfizmin Jacobian matrisidir).

4.1.2. Jacobian Hipotezi ile Bağlantı

Bu bölümde 2 den daha yüksek boyutlarda Jacobian hipotezine karşıt bir örneğin açıklanan yöntemle nasıl bulunacağını inceleyeceğiz.

Önerme 4.1.11. Mümkün olan minimal n sayısı için $p_1,...,p_n$ polinomları Jacobian Hipotezine karşıt bir örnek sağlarsa bu polinomların her birinin dış rankı 1 den büyüktür.

Ispat: Varsayalım ki $orank(p_1)=1$ olsun. O zaman p_1 i (eğer gerekirse) bir otomorfizm uygulanması üzerine $p_1 = p_1(x_1)$ formunda varsayabiliriz. p_1 tersinir Jacobian matrise sahip olacağından bir $\alpha \in K^*$ için $p_1 = \alpha x_1$ dir. O zaman $(n-1)\times(n-1)$

$$J' = \left(d_j(p_i)\right)_{2\le i,j\le n}$$

Jacobian matrisi de tersinirdir. Bu da $K(x_1)[p_2,...,p_n] = K(x_1)[x_2,...,x_n]$ anlamına gelir. Burada $K(x_1)$, $K[x_1]$ in bölüm cismidir. Buradan $K(x_1,p_2,...,p_n) = K(x_1,x_2,...,x_n)$ olur. Keller in teoremi (Keller, 1991) $K(x_1,p_2,...,p_n) = P_n$ olmasını gerektirir. Böylece $p_1,...,p_n$ polinomları P_n cebirini üretirler. Bu ise bir çelişkidir.

Böylece unimodüler gradiante sahip olan fakat dış rankları 1' den büyük olan polinomlar Jacobian Hipotezinin karşıt örneği olarak düşünülebilirler. Suslin' in (

Suslin, 1977) bir sonucu olarak $n \geq 3$ için her unimoduler polinom satırı P_n üzerinde tersinir bir $n \times n$ matrise tamamlanabilir. Burada esas problem her $(q_1,...,q_n)$ satırı için $d_j(q_i) = d_i(q_j)$ koşulunu sağlayan diğer $n-1$ satırın varlığıdır. Bu satırların varlığı tersinir matrisimizin Jacobian matris olup olmadığına emin olmamızı sağlar.

5. SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLER İÇİN TERS FONKSİYON TEOREMİ

$A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$, bir K cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $X_n = \{x_1,...,x_n\}$ olan serbest birleşmeli cebir olsun. Bir $\psi \in EndA_n$ endomorfizmi $\psi(x_i) = u_i$, $i = 1,...,n$ şeklinde X_n üzerindeki etkisi tek türlü bellidir. $U_n = \{u_1,...,u_n\}$, A_n nin serbest üreteçlerinin kümesi ise ψ, A_n nin bir otomorfizmdir.

Tanım 5.0.1. Serbest birleşmeli A_n cebirinin bir u elemanı A_n nin bir serbest üreteç kümesi tarafından içeriliyor ise u ya primitif eleman denir.

Rankı 2 olan serbest asosyatif cebirlerin otomorfizmleri çok iyi bilindiğinden üreteç kümeleri için aşağıdaki komutatör testi geliştirilmiştir:

$U_2 = \{u_1, u_2\}$ kümesinin $A_2 = K\langle x_1, x_2\rangle$ cebirini üretmesi için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı bir $\alpha \in K$ skaleri için $[u_1, u_2] = \alpha[x_1, x_2]$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $[u,v]$ çarpımı $[u,v] = uv - vu$ olarak tanımlanan Lie komutatörüdür.

Bu bölümde A_n nin bir $U_n = \{u_1,...,u_n\}$ kümesinin bir serbest üreteç kümesi olması için gerek ve yeter olan koşullar incelenecektir. w, A_n nin herhangi bir elemanı ise

$$\sum_{i=1,...,n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i - 1) = w - \varepsilon(w) \qquad (5.1)$$

şeklinde tek türlü yazılışa sahiptir.

A_n her $\frac{\partial}{\partial x_i}$ kısmi türevi altında invaryant olduğundan biz bunları A_n nin serbest *Fox* türevleri olarak varsayabiliriz. Eğer $\psi : A_n \to A_n$ herhangi bir endomorfizm ise o zaman ψ nin Jacobian matrisi

$$J_\psi = \left(\frac{\partial \psi(x_i)}{\partial x_j} \right) \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır J_ψ nin A_n üzerindeki tek yanlı tersinirliği, J_ψ nin tersinirliğine denktir.

Önerme 5.0.2. Eğer $\psi \in AutA_n, K$ cismi üzerindeki $A_n = K\langle x_1, ..., x_n \rangle$ serbest birleşmeli cebirinin bir otomorfizmi ise J_ψ Jacobian matrisi A_n üzerinde tersinirdir.

İspat: $i = 1, ..., n$ için $u_i = \psi(x_i)$ olsun. $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$ kümesinin elemanlarının $i = 1, ..., n$ $x_i = w_i(u_1, ..., u_n)$ ifadeleri $U_n = \{u_1, ..., u_n\}$ nin elemanlarının w_i kelimeler formunda bulunur. Bu ifadelerin değiştirilmesi ile

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{5.3}$$

formundaki bu eşitlikler elde edilir. Bu denklem sisteminin matris formu

$$A.J_\psi = J_\psi.A = E \tag{5.4}$$

dır. Burada $A = \left(\frac{\partial w_i}{\partial u_k} \right)$ $i, k = 1, ..., n$ dir.

Not: $c_1, ..., c_n \in A$ için

$D = D(c_1,...,c_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} c_i$ türevini

$$D(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} c_i \qquad (5.5)$$

formülü ile tanımlayalım w_i ler ispatta geçen elemanlar olmak üzere $i, j = 1,...,n$ için $a_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ yazalım. $A = (a_{ij})$ matrisi için

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji} \quad i = 1,...,n \qquad (5.6)$$

diyelim. $i, j = 1,...,n$ için $D_i(u_j) = \delta_{ij}$ dir.

5.1. Ters Fonksiyon Teoremi

Teorem 5.1.1. $i = 1,...,n$ için eğer $D_i(b) = D_i(c)$ eşitlikleri bazı $b, c \in A_n$ elemanları için doğru ise $b - c \in K$ dır.

İspat: Eğer bir $d \in A_n$ için $i = 1,...,n$ $\frac{\partial d}{\partial x_i} = 0$ ise $d \in K$ dır. $i = 1,...,n$ $D_i(b-c) = 0$ eşitlikleri baştan sona kadar yazılırsa katsayılar matrisi A olan ve bilinmeyenleri $\frac{\partial (b-c)}{\partial x_j}$ ($j = 1,...,n$) olan bir homojen denklem sistemi elde edilir: $D_1(b-c) = 0$ denklemini açık olarak yazalım.

$$D_1(b-c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (b-c)}{\partial x_j} a_{j1} = \frac{\partial (b-c)}{\partial x_1} a_{11} + \frac{\partial (b-c)}{\partial x_2} a_{21} + ... + \frac{\partial (b-c)}{\partial x_n} a_{n1} = 0$$

A tersinir olduğundan $\frac{\partial(b-c)}{\partial x_i}=0$ $(i=1,...,n)$ dır.

$\varepsilon: KF_n \to K$ $\varepsilon(x_i)=0$ olacak şekildeki homomorfizm ise $\varepsilon(u_i)=0$ $(i=1,...,n)$ dır.

Bu durumda $b_1,...,b_n \in A_n$ ve $i=1,2,...,n$ için

$$D_i(b_1u_1+...+b_nu_n)=b_i \qquad (5.7)$$

dir.

Örnek 5.1.2: $u=x^2+xy-x-1$, $v=2x+y-x^2-xy-1 \in A_2=K\langle x,y\rangle$ ve $\psi \in EndA_2$ için $\psi(x)=u$ ve $\psi(y)=v$ ise

$$J_\psi=\begin{pmatrix}\frac{\partial_u}{\partial_x} & \frac{\partial_u}{\partial_y}\\ \frac{\partial_v}{\partial_x} & \frac{\partial_v}{\partial_y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & x\\ 2-x & 1-x\end{pmatrix}$$

dır. J_ψ tersinir olup tersi

$$J_\psi^{-1}=\begin{pmatrix}-1+x & x\\ -x+2 & -x+1\end{pmatrix}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}[u,v]&=[x^2+xy-x-1,2x+y-x^2-xy-1]\\ &=[x^2,y]-[x^2,xy]+[xy,2x]+[xy,y]-[xy,x^2]-[x,y]+[x,xy]\\ &=[x^2,y]+[xy,x]+[xy,y]-[x,y]\neq\alpha[x,y]\end{aligned}$$

dır. Yani ψ bir otomorfizm değildir.Görüldüğü gibi J_ψ matrisi tersinir olduğu halde ψ bir otomorfizm değildir.

Tanım 5.1.3. (Lokal Nilpotentlik) ∂, $K[X]$ in bir türevi olmak üzere eğer bir $f \in K[X]$ için $\partial^p(f)=0$ olacak şekilde bir pozitif bir p tamsayısı varsa ∂ ya lokal nilpotenttir denir.

Teorem 5.1.4. $A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$ bir K cismi üzerinde *rankı* n olan serbest birleşmeli cebir olsun. O zaman $\psi \in EndA_n$ bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(1) $J_\psi = \left(\frac{\partial \psi(x_i)}{\partial x_j}\right)$ Jacobian matrisi A_n üzerinde tersinirdir. Yani $J_\psi A = E$ olacak şekilde bir A matrisi vardır.

(2) $i=1,...,n$ için D_i ler (5.6) ile tanımlı olmak üzere $D = K\langle D_1,...,D_n\rangle$ türevler cebirinin A_n üzerindeki etkisi lokal nilpotent ise.

İspat: Bir $b \in A_n$ elemanına D ye göre 0 height e sahiptir deriz eğer her $i=1,...,n$ $D_i(b)=0$ ise. O zaman Teorem 5.1.1. den $b \in K$ dır. Bir $b \in A_n$ elemanı $\le k-1$ heighte sahip değilse ve $D_1,...,D_n$ de $k+1$ dereceli her M monomiali b yi sıfır yapıyorsa yani $M(b)=0$ ise b elemanına k height e sahiptir deriz. Her $b \in A_n$ ve D_i için $D_i(b)$ nin heighti b nin heightinden kesinlikle daha küçüktür. $u_i = \psi(x_i)$ $i=1,...,n$ tarafından üretilen alt cebir içinde heighti $\le k$ olacak şekilde her $c \in A_n$ elemanının nereye ait olduğunu bildiğimizi varsayalım. Buna göre

$$b' = b - D_1(b)u_1 - \ldots - D_n(b)u_n \qquad (5.8)$$

elemanını düşünelim. Genelliği kaybetmeksizin $i = 1,\ldots,n \;\; \varepsilon(u_i) = 0$ varsayabiliriz. Bu durumda her j için

$$D_j(b') = D_j(b) - D_j(b) = 0 \qquad (5.9)$$

olur. Teorem 5.1.1. dolayı $b' \in K$ demektir. Tümevarım hipotezi kullanılarak $D_1(b),\ldots,D_n(b)$ için b nin $K\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$ e ait olduğu gösterilir. *Fox* türevlerinin özellikleri ile teoremin 2. kısmı A_n nin $x_1,\ldots,x_n$ üreteç elemanları üzerindeki etkinin nilpotent olduğunu gösterir.

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji} \qquad D_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{j1}$$

$$D_1(x_1) = \frac{\partial x_1}{\partial x_1}.a_{11} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2}.a_{21} + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial x_n}.a_{n1}$$

$$D_1(x_1) = a_{11} = 1 \quad D_1(D_1(x_1)) = 0 \quad D_i(x_j) = \delta_{ij}$$

5.2. A_2 nin Primitif Elemanı İçin Bir Kriter

$A_2 = K\langle x, y\rangle$ olsun. Bir $u \in A_2$ elemanı primitif olması için gerek ve yeter koşul bir $v \in A_2$ elemanı ve $0 \neq \alpha \in K$ için $[u,v] = \alpha[x,y]$ olmasıdır. Bu durumda $\alpha = 1$ alınırsa primitif eleman için gerek ve yeter koşulu

$$uv - vu = xy - yx \qquad (5.10)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Genelliği kaybetmeksizin $\varepsilon(u)=\varepsilon(v)=0$ varsayalım.

Varsayımımız altında $D_u=\frac{\partial}{\partial u}$ ve $D_v=\frac{\partial}{\partial v}$ kısmi türevleri de vardır. (5.10) eşitliğinin v ye göre türevini alırsak

$$u=(x-1)\frac{\partial y}{\partial v}+(1-y)\frac{\partial x}{\partial v}=x\frac{\partial y}{\partial v}-y\frac{\partial x}{\partial v} \qquad (5.11)$$

ve $u,v\in A_n$ için

$$\frac{\delta(u.v)}{\delta x_i}=\varepsilon(u)\frac{\delta v}{\delta x_i}+\frac{\delta u}{\delta x_i}v \qquad (5.12)$$

dır. Bu durumda $w\in A_2$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\frac{\delta w}{\delta x_i}=w-\varepsilon(w) \text{ olur.} \qquad (5.13)$$

(5.11) ile (5.13) eşitliklerini karşılaştırırsak

$$D_v(y)=\frac{\delta u}{\delta x}, D_v(x)=-\frac{\delta u}{\delta y} \qquad (5.14)$$

elde edilir. Buradan D_v türevi aşağıdaki şekilde tek türlü bellidir.

$$D_v=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u}{\delta x} \qquad (5.15)$$

u nun primitifliği için gerekli koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

(1) $\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ unimoduler dir.

$$(2).\, D_v(u) = -\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta u}{\delta x} = 0 \qquad (5.16)$$

(3) (5.15) ile tanımlanan D_v türevinin x ve y ye etkisi nilpotenttir.

Örnek 5.2.1: $u = x + xy = x(1+y)$ elemanı primitif değildir. u, x ve $(1+y)$ tarafından üretilen alt cebirin karesinin elemanı olup u primitif değildir. Buna rağmen $\partial_u = (1, x)$ vektörü unimodülerdir. Gerçekten de

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ olup $(1+x).1 + (-1).x = 1$ dir. Fakat $D_v(u) = -1.0 + x.(1+y) \neq 0$ dır.

Örnek 5.2.2.: $u = x + x^2 + yx$ elemanı primitif değildir. Çünkü $\partial u(1 + x + y, 0)$ vektörü unimoduler değildir.

Örnek 5.2.3.: $u = x + xyx$ elemanı için $\partial u = (1 + xy, 0)$ vektörü unimodüler değildir Ayrıca $D_v(u) = -(1+xy).0 + 0.(1+yx) = 0$ dır. Fakat $D_v(y) = 1 + yx$ olup D_v nin y üzerindeki etkisi nilpotent değildir.

5.3. Rankı 2 Olan Serbest Birleşmeli Cebirlerin Koordinat Polinomları

$P_2 = K[x_1, x_2]$, K cismi üzerinde *rankı* 2 olan polinom cebiri ve $A_2 = K = \langle x_1, x_2 \rangle$ aynı cisim üzerinde rankı 2 olan serbest birleşmeli cebir olsun. $Aut(P_2)$ ve $Aut(A_2)$ otomorfizm gruplarının birbirlerine izomorfik oldukları açıktır.

Tanım 5.3.1. $\phi \in Aut(P_2)$ olsun. Eğer ϕ lineer kısım üzerinde birim ise, ϕ ye *IL* otomorfizm denir. Bunun benzeri tanım A_2 nin otomorfizmlerine de uygulanır. P_2

nin ve A_2 nin IL otomorfizmler grubunu sırasıyla $Aut_{IL}(P_2)$ ve $Aut_{IL}(A_2)$ şeklinde göstereceğiz.

Örnek 5.3.2.: $\phi : x_1 \to x_1 + p_1$

$x_2 \to x_2 + p_2$

otomorfizmi bir IL otomorfizmidir. Örneğin $u = x_1 + x_2 + [x_1, x_2]$ için

$$\begin{aligned}\phi(u) &= x_1 + x_2 + [\phi(x_1), \phi(x_2)] \\ &= x_1 + x_2 + [x_1 + p_1, x_2 + p_2] \text{ dır.}\end{aligned}$$

$Aut_{IL}(P_2)$ alt grubu veya $Aut_{IL}(A_2)$ alt grubu

$$\begin{matrix} x_1 \to x_1 + f(x_2) \\ x_2 \to x_2 \end{matrix} \text{ veya } \begin{matrix} x_1 \to x_1 \\ x_2 \to x_2 + f(x_1) \end{matrix}$$

formundaki elemanter IL otomorfizmleri tarafından üretilir. Burada f polinomlarının monomiallerinin derecesi ≥ 2 dir. $Aut^{\circ}(P_2)$ ile $\left(Aut^{\circ}(A_2)\right)$ P_2 nin $(A_2'nin)$ genişlemeyi koruyan otomorfizmler grubunu gösterelim. Bunlar $i = 1, 2$ için $x_i \to x_i + p_i$ formundaki otomorfizmlerdir. Burada p_i polinomlarının sabit terimi sıfırdır.

Teorem 5.3.3. Karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki A_2 cebirinin primitif elemanlarını belirlemek için bir algoritma vardır.

Sonuç 5.3.4. Δ ile A_2 nin genişleme idealini yani sabit terimi sıfır olan elemanların kümesini gösterelim. Her $u \in \Delta$ elemanı $u = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2$ formunda tek türlü bellidir. (Cohn, 1966) $d_i(u)$ elemanlarına u nun (kısmi) Fox türevleri denir. $D_i(1) = d_i(1) = 0$ olacak şekilde A_2 nin tamamına lineer olarak genişletilebilir.

Teorem 5.3.4. u, A_2 nin primitif elemanı olsun. O zaman

$$D_1(u).\frac{\partial}{\partial x_2}(u) - D_2(u).\frac{\partial}{\partial x_1}(u) = 0$$

dır.

İspat : $i = 1,2$ için $\phi : x_i \to y_i$ olarak tanımlanan $\phi \in Aut(A_2)$ otomorfizmi için

$$\begin{pmatrix} D_2(y_2) & -D_2(y_1) \\ -D_1(y_2) & D_1(y_1) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} d_1(y_1) & d_2(y_1) \\ d_1(y_2) & d_2(y_2) \end{pmatrix} = cI$$

olduğu (Shpilrain, 1992) de ispatlanmıştır. Burada $c \in K^*$ ve I birim matristir. Buradan (Cohn, 1966)

$$\begin{pmatrix} d_1(y_1) & d_2(y_1) \\ d_1(y_2) & d_2(y_2) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} D_2(y_2) & -D_2(y_1) \\ -D_1(y_2) & D_1(y_1) \end{pmatrix} = c.I$$

ve böylece

$$d_1(y_1).(-D_2(y_1)) + d_2(y_1).D_1(y_1) = 0$$

elde edilir.

6.POLİNOM CEBİRLERİNİN VE SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN TEST ELEMANLARI

K, bir cisim ve $K[X]=K[x_1,...,x_n]$ ile $K\langle X\rangle = K\langle x_1,...,x_n\rangle$ sırasıyla $X=\{x_1,...,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen polinom cebiri ve serbest birleşmeli cebirleri göstersin. Bu bölümde $K[X]$ ile $K\langle X\rangle$ cebirlerinin otomorfizmlerinin nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.

6.1. Test Polinomları

Tanım 6.1.1. $p=p(X)\in K[X]$ olsun. Eğer her $F\in(K[X])^n$ sıralı $n-$lisi için $p(F)=p(X)$ olması $X\to F$ dönüşümünün bir otomorfizm olmasını gerektiriyorsa p polinomuna $K[X]$ in bir test polinomu denir.

Tanım 6.1.2. $S, K[X]$ (veya $K\langle X\rangle$) in endomorfizmlerinin bir sınıfı ve M , S nin bir alt sınıfı olsun. $p(X)=p(x_1,...,x_n)$ polinomuna M için S de bir test polinomudur denir eğer her $F\in S$ için $p(F)=p(X)$ iken $F\in M$ ise. Eğer p test polinomu F otomorfizmi tarafından sabit bırakılıyorsa p,F yi ayırt ediyor deriz. $K\langle X\rangle$ in test elemanları da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 6.1.3. $K[X]$ deki bir $p(X)$ polinomunun dış rankı (veya $K\langle X\rangle$ de) p nin otomorfik görüntüsünün bağlı olduğu x_i üreteçlerinin minimum sayısıdır. Van den Essen ve Shpilrain (Essen ve Zweibel, 1994) herhangi bir $p(X)$ test polinomunun dış rankının n olduğunu gösterdi. Polinom ve serbest cebirler için test elemanlarını sınıflandırmak oldukça zor bir problemdir. Bununla birlikte $[x_1,x_2]$ komutatörünün $K\langle x_1,x_2\rangle$ cebiri (Dicks, 1982) ve $x_1^2+...+x_n^2$ polinomunun $\square[X]$ cebiri için birer

test polinomu olduğu (Essen ve Shpilrain,1997) gösterilmiştir $i=1,...,n$ için $x_i \to f_i$ dönüşümünü $F=(f_1,...,f_n)$ ile göstereceğiz. Ayrıca $p(f_1,...,f_n)$ için $p(F)$ ve $p(x_1,...,x_n)$ için $p(X)$ notasyonunu kullanacağız.

Tanım 6.1.4. Eğer $\alpha_i \in K$ için $F=(\alpha_1+g_1,...,\alpha_n+g_n)$ bir otomorfizm ve $G=(g_1,...,g_n)$ tersinir lineer dönüşüm ise F otomorfizmine afin otomorfizm denir.

Tanım 6.1.5. Üçgensel otomorfizmler $0 \neq \alpha_i \in K$, $fi=\alpha_i x_i + h_i$ olmak üzere $F=(f_1,...,f_n)$ formundaki otomorfizmlerdir. Burada h_i polinomları $x_1,...,x_i$ ye bağlı değildir.

Tanım 6.1.6. $Y=\{y_1,...,y_n\}, K[X]$ $(veyaK\langle X\rangle)$ in serbest üreteçlerinin bir kümesi olsun ve $p(X)\in K[X]$ polinomu $q(Y)=p(X)$ şeklinde yazılsın. Eğer Y nin her seçimi için $q(Y)$ polinomu her i için y_i değişkenine bağlı ise $p(X)$ polinomuna maximal ranklı polinom denir.

$1\le i\le n$ için $\alpha_i \in K$ olmak üzere $F=(\alpha_1+g_1,...,\alpha_n+g_n), K[X]$ in $(veyaK\langle X\rangle)$ bir endomorfizmi olsun. Burada $i=1,...,n$ için g_i polinomlarının sabit terimleri sıfırdır. $H=(x_1-\alpha_1,...,x_n-\alpha_n)$ olsun. O zaman F ve H nin bileşkesi $FoH=G=(g_1,...,g_n)$ olup F nin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $F\circ H$ nin bir otomorfizm olmasıdır. Bu açıdan bakıldığında test polinomlarını, sabit terimi sıfır olan endomorfizmlerin sınıfında düşünebiliriz.

Teorem 6.1.7. Eğer $K[X]$ $(veyaK\langle X\rangle)$ deki $p(X)$ polinomunun minimum dereceli homojen bileşeni maksimum ranklı ise $p(X)$, sabit terimi sıfır olan endomorfizmlerin sınıfı içindeki tersinir endomorfizmler için bir test polinomudur.

İspat: $P_k(X)$, $p(X)$ in minimuml dereceli homojen bileşeni olsun ve bu düşünce altında $F=(f_1,...,f_n)$ bu sınıfın bir endomorfizmi olsun. $G=(g_1,...,g_n), F$ nin lineer bileşeni olsun. Eğer $p(F)=p(X)$ ise $p(F)$ nin minimial dereceli homojen bileşeni $P_k(G)=P_k(X)$ elde ederiz. Eğer $g_1,...,g_k$ lineer bağımlı ise o zaman $x_1,...,x_n$ den lineer dönüşümlerle elde edilen $y_1,...,y_n$ serbest üreteçleri için $y_1,...,y_{n-1}$ in lineer birleşimidir. Bu $P_k(X)$, maksimum ranklı olması ile çelişir. Bu nedenle $g_1,...,g_n$ lineer bağımsızdır ve F endomorfizmi tersinirdir.

6.2. Polinom Cebirlerinin Test polinomları

Bu bölümde, K cisminin karakteristiğinin sıfır olduğunu varsayacağız ve $K[X]=K[x_1,...,x_n]$ cebirinin endomorfizmlerini düşüneceğiz.

Önerme 6.2.1. $x_1^2+x_2^2$ polinomu $K[x_1,x_2]$ nin sabit terimi sıfır olan endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test polinomudur. Bu polinom ortogonal lineer dönüşümleri ayırt eder.

İspat: L,K nın $\sqrt{-1}$ cisim genişlemesi olsun. Eğer $p(X)=x_1^2+x_2^2$, L üzerinde sabit terimi sıfır olan endomorfizmlerin sınıfı içindeki otomorfizmler için bir test polinomu ise o zaman $p(X)$ K üzerinde aynı özelliğe sahiptir. Bu ne-denle genelliği kaybetmeksizin $\sqrt{-1}\in K$ varsayabiliriz. $F=(f_1,f_2)$, $p(F)=p(X)$ olacak şekilde bir endomorfizm olsun. O zaman

$$P(F)=\left(f_1+f_2\sqrt{-1}\right).\left(f_1-f_2\sqrt{-1}\right)=p(X)=\left(x_1+x_2\sqrt{-1}\right).\left(x_1-x_2\sqrt{-1}\right)$$

ve

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \alpha\left(x_1 \pm x_2\sqrt{-1}\right),$$
$$f_1 - f_2\sqrt{-1} = \alpha^{-1}\left(x_1 \mp x_2\sqrt{-1}\right)$$

dır. Burada $0 \neq \alpha \in K$ ve F, X in lineer dönüşümüdür. $F, p(X)$ in quadratik formunu sabit bıraktığı için ortogonaldir.

Önerme 6.2.2. Derecesi 2 den büyük ve rankı 2 olan her homojen polinom
 $[x_1, x_2]$ nın sabit terimi sıfır olan endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için
 $[x_1, x_2]$ cebirinin bir test polinomudur.

Teorem 6.2.3.

$(i)\, K$ herhangi bir cisim ve $k_1, ..., k_n$ pozitif tamsayılar olsun. O zaman

$$p(X) = X^k = x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$$

$K[X] = K[x_1, ..., x_n]$ cebirinin sabit terimi sıfır olan endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test polinomudur. Bu test polinomu aşağıdaki otomorfizmleri ayırt eder:

$$F = \left(\alpha_1 x_{\sigma(1)}, ..., \alpha_n x_{\sigma(n)}\right),\ 0 \neq \alpha_i \in K \quad i = 1, ..., n$$

Burada $\alpha_1^{k_1} ... \alpha_n^{k_n} = 1$ ve σ, S_n simetrik grubunun $k_{\sigma(1)} = k_1, ..., k_{\sigma(n)} = k_n$ olacak şekildeki bir elemanıdır.

$(ii)\, p(X) = \left(X^k\right)^s = \left(x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}\right)^s$

polinomu $k_i = n+i-1,\ i=1,...,n$ ve $s \geq 1$ için $K[X]$ in endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test polinomudur. Bu test polinomları tarafından ayırt edilen otomorfizmler:

$\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ için $\left(\alpha_1^{k_1},...,\alpha_n^{k_n}\right)^s = 1$ olmak üzere $F = \left(\alpha_1 x_1,...,\alpha_n x_n\right)$ dir.

İspat:

$(i)\, F = (f_1,...,f_n)$ sabit terimi sıfır olan endomorfizm olsun. O zaman $P(F) = P(X)$ olduğundan $f_1^{k_1}...f_n^{k_n} = x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$ olup $f_i = \alpha_i x_{\sigma(i)},\quad (\sigma \in S_n)$ dir.

$$\left(\alpha_1 x_{\sigma(1)}\right)^{k_1}....\left(\alpha_n x_{\sigma(n)}\right)^{k_n} = x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

$$\alpha_1^{k_1}...\alpha_n^{k_n} x_{\sigma(1)}^{k_1}...x_{\sigma(n)}^{k_1} = x_1^{k_1}...x_n^{k_n} \quad (\alpha_1^{k_1}...\alpha_n^{k_n}=1)$$

$$x_{\sigma(1)}^{k_1}...x_{\sigma(n)}^{k_1} = x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

(ii) $F = (f_1,...,f_n)$ ve $\left(f_1^{k_1},...,f_n^{k_n}\right)^s = \left(x_1^{k_1},...,x_n^{k_n}\right)^s$ olsun. O zaman tüm f_i polinomları monomiallerdir.

$$f_i = \beta_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} \quad 0 \neq \beta \in K \text{ ve } \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} \text{ olsun.}$$

x_i nin derecesi için

$$a_{i1}n + a_{i2}(n+1) + ... + a_{in}(2n-1) = n+i-1$$

elde edilir. a_{ij} ler negatif olmayan tamsayılar olduğundan herhangi $n+q-1$ ve $n+r-1$ sayılarının toplamı $2n-1$ den büyüktür. Buradan $a_{ii}=1$, $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ tek olasılığı elde edilir. Buradan sonuç ispatlanmış olur.

Sonuç 6.2.4. Bir önceki teoremin (i) ifadesi tüm endomorfizm sınıfı için doğru değildir. Örneğin $p(X)=x_1...x_n$ polinomu $n\rangle 1$ için otomorfizm olmayan $F=(x_1,...,x_n,1,...,1)$ endomorfizmi tarafından sabit bırakılır.

Sonuç 6.2.5. Teorem 6.2.3 (ii) nin ispatındaki fikir kullanarak lineer olmayan üçgensel otomorfizmler için de test polinomu inşa edilebilir.

Örneğin $n=2$ olsun.

$$p(X)=x_2^2\left(x_1+a^2\left(1-a^8\right)^{-1}x_2^2\right)^3, \qquad a\in K \qquad a\neq 0 \qquad a^8\neq 1$$

$p(X)$, $F=\left(a^{-2}x_1+x_2^2,a^3x_2\right)$ otomorfizmi tarafından sabit bırakılır.

Diğer yandan $p(X)$ bütün endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için test polinomudur. F otomorfizmi bir lineer otomorfizme eşleniktir. Eğer üreteçlerin yeni bir sistemi $Y=(y_1,y_2)=\left(x_1+a^2\left(1-a^8\right)^{-1}x_2^2,x_2\right)$ olarak alınırsa $F(Y)=\left(a^{-2}y_1,a^3y_2\right)$ olduğunu görürüz.

6.3. Serbest Birleşmeli Cebirlerin Test Elemanları

Bu kısımda $K\langle X\rangle=K\langle x_1,...,x_n\rangle$ serbest birleşmeli cebirinin test elemanlarını inceleyeceğiz.

Tanım 6.3.1. $K\langle X\rangle$ cebirinin her I sol ideali aynı zamanda bir sol $K\langle X\rangle$-modül ise $K\langle X\rangle$ e serbest ideal halkası denir.

Önerme 6.3.2. (Cohn, 1985)

(i) $K\langle X\rangle$ cebiri serbest ideal halkasıdır; eğer I homojen elmanlar tarafından üretililen bir ideal ise. O zaman I, $K\langle X\rangle$ modül olarak homojen bir serbest üreteç sistemine sahiptir.

(ii) Eğer $0 \neq y_i, z_i \in K\langle X\rangle,\ i = 1,...,k$ için

$$\deg(y_{i-1}) \leq \deg(y_i)\ \ i = 2,...,k \text{ ve } \sum_{i=1}^{k} y_i z_i = 0$$

ise o zaman y_i elemanlarından biri $y_1,...,y_{i-1}$ tarafından üretilen sağ ideale aittir.

Sonuç 6.3.3.

(i) Eğer $i = 1,2$ için u_i, v_i, $K\langle X\rangle$ in sıfırdan farklı elemanları ve $\deg(u_1) \geq \deg(v_1)$ ise $u_1u_2 = v_1v_2$ eşitliği bir $w \in K\langle X\rangle$ için $u_1 = v_1w$, $u_2 = wv_2$ olmasını gerektirir.

(ii) Eğer $KarK = 0$ ve $K\langle X\rangle$ de $uv + vu = 0$ ise $u = 0$ veya $v = 0$ dır.

İspat:

(i) Önerme 6.3.2 de (ii) den görülür. Gerçekten $\deg(v_1) \leq \deg(u_1)$ ise $\sum_{i=1}^{2} u_i v_i = 0$ dan $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ ve $y_1 = v_1$, $y_2 = u_1$ olur.

(ii) $\deg(u) + \deg(v)$ üzerinden tümevarımla gösterelim.

$d(v)=0$ ise sonuç açıktır.

$u,v\neq 0$ ve $\deg(u)\geq\deg(v)\geq 1$ olsun . $uv+vu=0$ ise $uv=v(-u)$ olup (i) den bir $w\in K\langle X\rangle$ için $u=vw$ ve $(vw)v+v(vw)=0$ dır. $K\langle X\rangle$ sıfır bölensiz olduğundan $wv+vw=0$ elde edilir. O zaman $\deg(w)<\deg(u)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 6.3.4. K, karakteristiği sıfır olan bir cisim olsun. O zaman $p(X)=x_1^2+x_2^2$ elemanı $K\langle x_1,x_2\rangle$ serbest cebirinin sabit terimi sıfır olan endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test elemanıdır.

İspat: $\sqrt{-1}\in K$ olarak varsayabiliriz. $F=(f_1,f_2)$ sabit terimi sıfır olan bir endomorfizm olsun öyle ki $p(F)=p(X)$ olsun . $f_1=g_1+g_2+...+g_k$ ve $f_2=h_1+h_2+...+h_k$ olsun. Burada g_i ve h_i, f_1 ve f_2 nin sırasıyla i dereceli homojen bileşenleri olsun. Eğer $h_k\neq 0$ ve $k>1$ alınırsa $P(F)$ ve $P(X)$ in $2k$ dereceli homojen bileşenlerinin karşılaştırılması ile $g_k^2+h_k^2=0$ elde edilir. $g_k=h_k\sqrt{-1}$ dir. Kabul edelim ki $i\geq 1$ için $g_j=h_j\sqrt{-1}$ $(j=i+1,...,k)$ olsun. $k+i$ dereceli homojen bileşenlerin karşılaştırılması ile

$$\sum_{s=i}^{k}\left(g_s g_{i+k-s}+h_s h_{i+k-s}\right)=0\ ,$$

$$\left(h_i+g_i\sqrt{-1}\right)h_k+h_k\left(h_i+g_i\sqrt{-1}\right)=0$$

elde edilir. $p(F)=f_1^2+f_2^2=x_1^2+x_2^2$ olup

$$\left(g_1+g_2+...+g_k\right)^2+\left(h_1+h_2+...+h_k\right)^2=x_1^2+x_2^2$$

eşitliğinden

$$g_1^2+g_2^2+....+g_k^2+g_1g_2+g_2g_1+...+g_1g_k+g_kg_1+...+g_{k-1}g_k+g_kg_{k-1}+$$
$$h_1^2+h_2^2+....+h_k^2+h_1h_2+h_2h_1+...+h_1h_k+h_kh_1+...+h_{k-1}h_k+h_kh_{k-1}=x_1^2+x_2^2$$

elde edilir. Sonuç 6.3.3 (ii) den $g_i=h_i\sqrt{-1}$ olur. Buradan $g_1=h_1\sqrt{-1}$ bulunur. $P(F)$ nin derecesi 2 olan homojen bileşenleri ve $P(X)$, $g_1^2+h_1^2=x_1^2+x_2^2$ eşitliğini sağlar. Bu $g_1=h_1\sqrt{-1}$ olmasıyla çelişir. Böylece F lineerdir. F, $x_1^2+x_2^2$ i invaryant bıraktığından tersinirdir. O halde F otomorfizmdir.

Şimdi n-inci simetrik grubu S_n ile gösterelim.

Teorem 6.3.5. K, $KarK=0$ olan bir cisim ve $\alpha_\sigma\in K$,

$$p(X)=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}\in K\langle X\rangle=K\langle x_1,...,x_n\rangle$$

olsun. Eğer $\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\neq 0$ ise $p(X)$ sabit terimi sıfır olan endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test elemanıdır. Bu test elemanı sadece lineer otomorfizmleri ayırt eder.

İspat: $F=(f_1,...,f_n)$, $P(F)=P(X)$ olacak şekilde sabit terimi sıfır olan bir endomorfizm olsun. Öncelikle F lineer olmasın. g_i lerde f_i lerin maksimum dereceli homojen bileşenleri olsun. $p(X)$ elemanı multilineer olduğundan $p(F)=p(f_1,...,f_n)$ nin maksimum dereceli homojen bileşeni $p(G)=p(g_1,...,g_n)$ dir. F lineer olmadığından bir i için $\deg(g_i)\rangle 1$ ve

$$p(G)=p(g_1,...,g_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma g_{\sigma(1)}...g_{\sigma(n)}=0 \text{ dır.}$$

Örneğin; S_2 de $p(x)=\sum_{\sigma\in S_2}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}=\alpha_{\sigma_1}.x_1.x_2+\alpha_{\sigma_2}.x_2.x_1$ için

$F=(f_1,f_2)$ $G=(g_1,g_2)$ $\deg(g_1)>1$ olsun.

$$P(G)=\alpha_{\sigma_1}g_1g_2+\alpha_{\sigma_2}g_2g_1$$

$$\begin{aligned}P(F)&=\alpha_{\sigma_1}f_1f_2+\alpha_{\sigma_2}f_2f_1\\&=\alpha_{\sigma_1}\left(g_1+g_1^*\right).\left(g_2+g_2^*\right)+\alpha_{\sigma_2}\left(g_2+g_2^*\right)\left(g_1+g_1^*\right)\\&=\alpha_{\sigma_1}x_1x_2+\alpha_{\sigma_2}x_2x_1\end{aligned}$$

dır. Buradan bir $\tau\in S_n$ için $p(\tau(G))=p\left(g_{\tau(1)},\ldots,g_{\tau(n)}\right)$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma g_{\sigma\tau(1)}\cdots g_{\sigma\tau(n)}=0$$

dır. τ , S_n i taradıkça bu toplamı oluşturursak $S_n\tau=S_n$ olduğundan

$$q(G)=\left(\sum_{\rho\in S_n}\alpha_\rho\right)\left(\sum_{\sigma\in S_n}g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(n)}\right)=0$$

elde edilir. Bu nedenle $p(G)=0$ eşitliğinde tüm α_σ katsayılarının 1 olduğunu varsayabiliriz. Yani

$$p(X)=\sum_{\sigma\in S_n}x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

olduğunu varsayabiliriz.

h_i, g_i nin en büyük dereceli terimi olsun. $p(G)$ de her $g_{\sigma(1)},...,g_{\sigma(n)}$ çarpımının en büyük dereceli terimi $h_{\sigma(1)}...h_{\sigma(n)}$ dir ve $p(G)$ nin en büyük dereceli terimi $h_{\sigma(1)}...h_{\sigma(n)}$ lerin toplamıdır. Cismin karakteristiği sıfır ve $p(G)$ nin en büyük dereceli terimi sıfırdan farklı olduğundan bu bir çelişkidir. Buradan f_i polinomları lineerdir. $K\left[\overline{X}\right]$ polinom cebirinin $\overline{F}$ dönüşümü F nin belirlediği bir dönüşümdür.

$$\overline{P}\left(\overline{X}\right) = \overline{P}\left(\overline{F}\right) = n!\,\overline{f}_1...\overline{f_n}$$

Teorem 6.2.3. dan $\overline{f_i}$ ler lineer bağımsızdır. f_i ler lineer olduğundan f_i ler lineer bağımsızdır yani F, $K\langle X\rangle$ in lineer otomorfizmidir. Dolayısıyla $p(X)$ test elemanıdır.

Sonuç 6.3.6. K, $KarK = 0$ olan bir cisim $\alpha_\sigma \in K$, $\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \neq 0$ ve

$$p(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)} \in K\langle X\rangle = K\langle x_1,...,x_n\rangle$$

olsun. Verilen her $s \geq 1$ için $q(X) = p\left(x_1^{sn}, x_2^{s(n+1)},..., x_n^{s(2n-1)}\right)$ elemanı tüm endomorfizmler sınıfındaki otomorfizmler için bir test elemanıdır.

İspat: F, $K\langle x\rangle$ in bir endomorfizmi olsun öyle ki $q(F) = q(X)$ ve $G = (g_1,...,g_n)$ olsun. Burada $g_i = f_i^{s(n+i-1)}$ dir. h_i, g_i nin maximum dereceli homojen bileşeni olsun. Eğer F, afin değilse Teorem 6.3.5 ün ispatındaki gibi $p(h_1,...,h_n) = 0$ elde ederiz. Bu olası değildir. Bu nedenle F affine dir. Şimdi $K\left[\overline{x}\right]$ in F tarafından belirlenen $\overline{F}$ endomorfizmini düşünelim.

$$\overline{q}\left(\overline{X}\right)=\overline{q}\left(\overline{F}\right)=\overline{p}\left(\overline{G}\right)=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\right)\overline{g}_1...\overline{g}_n$$

$$=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\right)\overline{f}_1^{sn}\overline{f}_2^{s(n+1)}...\overline{f}_n^{s(2n-1)}$$

$$=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_r\right)\overline{x}_1^{sn}\overline{x}_2^{s(n+1)}...\overline{x}_n^{s(2n-1)}$$

olduğu görülür. Teorem 6.2.3 den $\overline{F}$ nin $K\left[\overline{X}\right]$ nin lineer otomorfizmi olduğunu elde ederiz. Aynı şey $K\langle X\rangle$ de F için de geçerlidir.

Teorem 6.3.7. $K\langle X\rangle$ in her h_1,h_2 monomiali $n>2$ için $x_3,...,x_n$ değişkenlerinden bazılarına bağlı olsun. O zaman $\left[x_1+h_1,x_2+h_2\right]=\left[x_1,x_2\right]$ eşitliği varsa $h_1=h_2=0$ dır.

İspat: Genelliği bozmaksızın $h_1\neq 0$ varsayalım $W\subset K\langle X\rangle$ $x_3,...,x_n$ lerin bazılarına bağlı tüm monomialleri tarafından gerilen vektör uzayı olsun. w_1 ve w_2 sadece x_1 ve x_2 ye bağlı ve i_1 ve i_k indislerinin her ikisi 1 ve 2 den farklı olmak üzere $w=w_1\left(x_1,x_2\right)x_{i_1}...x_{i_k}w_2\left(x_1,x_2\right)$ formunda yazılabilir. Açıkça W,

$$x_{i_1},...,x_{i_k},\ k\geq 1\ \ i_1,i_k\neq 1,2$$

monomiallerinden oluşan baz ile serbest $K\langle x_1,x_2\rangle$ bimodüldür. p, h_1 ve h_2 nin sıfırdan farklı homojen bileşenlerinin minimum derecesi ve u_1,u_2 sırasıyla h_1 ve h_2 nin p-dereceli homojen bileşenleri olsun. O zaman

$$[x_1,u_2]+[u_1,x_2]=x_1u_2-x_2u_1-u_2x_1+u_1x_2=0$$

dır u_1 ve u_2 aşağıdaki formdadır:

$$u_1=\sum s_{1i}(x_1,x_2)x_{i1}...x_{ik}s_{2i}(x_1,x_2),$$

$$u_2=\sum t_{1i}(x_1,x_2)x_{i1}...x_{ik}t_{2i}(x_1,x_2)$$

(Burada toplam $i_1,i_k\neq 1,2$ ile $i_1,...,i_k$ üzerindendir.) Böylece

$[x_1+h_1,x_2+h_2]=[x_1,x_2]$ eşitliğinden

$$[x_1+h_1,x_2]+[x_1+h_1,h_2]=[x_1,x_2]+[h_1,x_2]+[x_1,h_2]+[h_1,h_2]=[x_1,x_2]$$

$$[h_1,x_2]+[x_1,h_2]+[h_1,h_2]=0$$

$$[u_1,x_2]+[x_1,u_2]=0$$

elde edilir. Buradan

$$[x_1,u_2]+[u_1,x_2]=\sum(x_1t_{1i}x_{i1}...x_{ik}t_{2i}-x_2s_{1i}x_{i1}...x_{ik}s_{2i}-t_{1i}x_{i1}...x_{ik}t_{2i}x_1+s_{1i}x_{1i}...x_{ik}s_{2i}x_2)=0$$

olur. W, serbest $K\langle x_1,x_2\rangle$ bimodül olduğundan herhangi bir $(i_1,...,i_k)$ için $K\langle x_1,x_2\rangle\otimes_k K\langle x_1,x_2\rangle$ de olacak şekilde eşitliği elde ederiz.

$$x_1t_{1i}\otimes t_{2i}-x_2s_{1i}\otimes s_{2i}-t_{1i}\otimes t_{2i}x_1+s_{1i}\otimes s_{2i}.x_2=0$$

s_{2i} ve t_{2i} nin minimum dereceli homojen bileşenlerinin karşılaştırılması ile bunların 0 olduğu kabul edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 6.3.8. $i_1,...,i_r$, $j_1,...,j_r$ indislerin bir kümesi olsun öyle ki $k=1,...,r$ için $i_k \neq j_k$ ve $\{i_k, j_k \mid k=1,...,r\}=\{1,...,n\}$ olsun. O zaman

$$p(X)=\left[x_{i1},x_{j1}\right]\ldots\left[x_{ir},x_{jr}\right]$$

polinomu $K\langle X\rangle$ in tüm endomorfizmleri sınıfındaki otomorfizmler için bir test polinomudur.

İspat: $F=(f_1,...,f_n)$, $K\langle X\rangle$ in $p(F)=p(X)$ olacak şekilde bir endomorfizmi olsun. $\left[f_{ik},f_{jk}\right]$ komutatörleri sabit ve lineer terimlere sahip olmadığından ve $\deg(p(x))=2r$ olduğundan

$$\left[f_{ik},f_{jk}\right]=\alpha_k\left[x_{ik},x_{jk}\right],\ 0\neq\alpha_k\in K$$

dır. Örneğin $[f_1,f_2]=\alpha[x_1,x_2]$ olsun. h_1,h_2 nin her monomiali $x_3,...,x_n$ değişkenlerinin her birine bağlı olduğunda f_1 ve f_2

$$f_1=g_1(x_1,x_2)+h_1\ ,\ f_2=g_2(x_1,x_2)+h_2$$

formunda yazılır. Bu nedenle

$$\left[g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2)\right]=\alpha\left[x_1,x_2\right]$$

olup (Dicks, 1982) sonucu gereğince (g_1,g_2), $K\langle x_1,x_2\rangle$ nin bir otomorfizmidir.

(g_1, g_2) yi $K\langle X\rangle$ in $G=(g_1, g_2, x_3, ..., x_n)$ otomorfizmine genişletebiliriz. $G^{-1}=(u_1, u_2, x_3, ..., x_n)$, G nin tersi olsun. $[u_1, u_2]=\alpha^{-1}[x_1, x_2]$ olup $V=F\circ G^{-1}$ otomorfizmi $[v_1, v_2]=[x_1, x_2]$ özelliğine sahiptir. Diğer yandan w_1, w_2 nin her monomiali $x_3, ..., x_n$ lere bağlı olduğundan $v_1=x_1+w_1$, $v_2=x_2+w_2$ dır. Teorem6.3.7 den $w_1=w_2=0$ olduğu görülür. Yani, $f_1=f_1(x_1, x_2)$, $f_2=f_2(x_1, x_2)$ ve (f_1, f_2) $K\langle x_1, x_2\rangle$ nin bir otomorfizmidir. Bu yolla her i_k, j_k indis çifti için $F_k=(f_{ik}, f_{jk})$ çiftinin $\left(K\langle x_{ik}, x_{jk}\rangle\right)^2$ ya ait olduğu elde edilir. Bu da F_k nın $K\langle x_{ik}, x_{jk}\rangle$ nın bir otomorfizmi olduğu gösterir.

Bir i indeksi $i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_r$ indisleri içinde tam olarak bir kez göründüğünden F, G_k otomorfizmlerinin bir çarpımı olarak ayrıştırılır öyle ki her G_k, x_{ik} ve x_{jk} dan farklı bütün x_s, leri sabit bırakır. Buradan F bir otomorfizmdir. Şimdi 1 indeksi 2 kere görünsün örneğin i_1 ve i_2 olsun. O zaman $f_1\in K\langle x_1, x_{j1}\rangle\cap K\langle x_1, x_{j2}\rangle$ ve $f_1=f_1(x_1)$ dir. (f_1, f_{j1}), $K\langle x_1, x_{j1}\rangle$ in bir otomorfizmi olduğundan $f_1=\xi+\mu x_1$, $\xi, \eta\in K$, $\eta\neq 0$ elde edilir ve f_i, x_1 in lineer polinomudur. Şimdi $p(X)$ üç tipteki komutatörün çarpımı olarak sunulur.

(i) $[x_i, x_j]$. Burada x_i ve x_j diğer komütatörlerde görünür.

(ii) $[x_i, x_k]$. Burada x_i diğer komütatörlerde görünür ancak x_k görünmez .

(iii) $[x_l, x_m]$**.** Burada diğer komutatörlerde ne x_l de x_m in görünmez.

$$f_i=\xi_i+\eta_i x_i\ ,\quad f_j=\xi_j+\eta_j x_j\quad ,\quad \xi_i, \xi_j\in K\quad ,\quad 0\neq\eta_i, \eta_j\in K$$

$$f_k=\eta_k x_k+g_k(x_i)\ ,\ 0\neq\eta_k\in K\ ,\ g_k\in K\langle x_i\rangle$$

$$\left(f_1, f_m\right)=\left(f_1\left(x_l, x_m\right), f_m\left(x_l, x_m\right)\right) \in AutK\langle x_l, x_m\rangle$$

F, bir veya iki değişkenli dışında diğerlerini sabit bırakan otomorfizmler kompozisyonudur. Bu da f nin bir otomorfizm olduğunu gösterir.

Sonuç 6.3.9.

$$p(X)=\left[x_1, x_2\right] \ldots\left[x_{2n-1}, x_{2n}\right]$$

$K\left\langle x_1, \ldots, x_{2n}\right\rangle$ nin endomorfizmler sınıfında bir test elemanıdır.

KAYNAKLAR

ABHYANKAR, S. S. AND MOH T. T., (1975), Embedding of the line in theplane.J. Reine Angew. Math. 148-166.

APPELGATE, H. AND ONİSHİ H., (1985). The Jacobian conjecture in two variables . J. Pure Appl. Algebra 37, 215-227.

BERGMAN, G. M., (1999). Supports of derivations, free factorizations, and ranks of fixed subgroup in free groups. Trans. Amer. Math. Soc. 351, 1531-1550.

COHN, P. M., (1966). On the structure of the of a ring. Inst. Hautes Etudes Sci.Publ. Math. 30, 365-413.

COHN, P. M., (1985). Free Rings and Their Relations, 2nd Ed. Academic Pres, London.

CONNELLE VE ZWEİBEL , J., (1994). Subrings invariant under polynomial maps.Houston J. Math. 20, 175-185.

COSTA, D., (1977). Retracts of polynomial rings. J. Algebra 44, 492-502.

DİCKS, W., (1982). A commutator test for two elements to generate the free algebra of rank two. Bull. London Math. Soc. 14, 48-51.

ESSEN, A. VAN DEN AND SHPİLRAİN V., (1997). Some combinatorial questions about polynomial mappings. J. Pure Appl. Algebra 119, 47-52.

ESSEN, A.VAN DEN VE TUTAJ H., (1994). A remark on the two-dimensional Jacobian conjecture. J. Pure Appl. Agebra 96, 19-22.

FORMANEK, E., (1994). Observations about the Jacobian conjecture. Houston J.Math. 20 369-380.

GWOZDZİEWİCZ, J., (1993). Injectivity on on eline. Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz. Ser.Rech. Deform. 15, 59-60.

JUNG, H. W. E., (1942). Über ganze birationale Transformationen der Ebene. J.Reine Angew. Math. 184, 161-174.

KELLER, O., (1939). Ganze Cremona-Transformationen. Monatsh. Math. Phys. 47,299-306.

LANG, J., (1991). Newton polygons of Jacobian pairs. JPure Appl. Algebra 72, 39-51.

LYNDON, R. VE SCHUPP, P., (1977). Combinatorial Group Theory. Reprint of the edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

MİCHALEV, A. A. VE ZOLOTYKH, A. A., (1994). The rank of an element of the free color Lie (p-) superalgebra. Dokl. Akad. Nauk. 334, 690-693. English translation: Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 49 (1994), no. 1, 189-193.

SHPILRAIN, V , (1992) An inverse function theorem for free associative algebras of rank two J Pure Appl Algebra 83, 23-26

SHPILRAIN, V VE YU, J T , (2000) Polynomial retracts and the Jacobian conjecture Trans Amer Math Soc 352 477-484

SUSLIN, A A , (1977) The structure of the special linear group over rings of polynomials Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat 41 no 2, 235 252, 477 English ranslation Math USSR Izv 11, 221 239

UMIRBAEV, U U , (1996) On ranks of elements of free groups Fundam Prikl Mat 2, 313-315

WRIGHT, D , (1978) The amalgamated free product structure of and the weak Jacobian theorem for two variables J Pure Appl Algebra 12 , 235 251

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Adana'da doğdum. Öğrenimimi sırasıyla Yıldırım Bayezit İlkokulu, Tepebağ Ortaokulu ve Adana Kız Lisesi'nde tamamladım. 1997 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 2002 yılında lisans öğrenimimi tamamlayıp 2003 yılında bölümde yüksek lisansa başladım ve halen İmamoğlu Çok Programlı Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.