ISSN 1019-1011

Ç.Ü.MÜH.MİM.FAK.DERGİSİ Haziran 2004 Ç.Ü.J.FAC.ENG.ARCH.
CİLT.19 SAYI.1 June VOL.19 NO.1

GÜÇLENDİRİLMİŞ PLAK DÖŞEMELERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Beytullah TEMEL
Ç.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana/Türkiye

ÖZET : *Bu çalışmada, güçlendirilmiş plak döşemelerin statik yükler altında analizi sonlu elemanlar yardımı ile incelenmiştir. Plak ve kiriş malzemeleri lineer elastik ve izotrop kabul edilerek temel denklemler yazılmıştır. Plak orta yüzeyi ile kiriş ekseninin aynı düzlemde olmaması nedeniyle dış merkezlik oluşmaktadır. Buna bağlı olarak plak orta yüzeyinin düzlem içi yer değiştirmeleri de gözönüne alınmıştır. Tabliyelerin keyfi bölgeli olabileceği de düşünülerek genel bir dörtgen plak elemanı seçilip, plak elemanı için rijitlik matrisi sayısal olarak elde edilmiştir. Güçlendirilmiş plak döşemelerin statik analizi için genel amaçlı bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu çalışmada bulunan sonuçların literatür ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir.*

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STIFFENED SLABS

ABSTRACT : *In this study, stiffened slabs subjected to the static loads are investigated with the aid the finite element method. The materials of the plate and beam are assumed to be linear elastic and isotropic. In the formulation, the eccentricity between plate mid-surface and beam axis and the in-plane displacements due to eccentricity are taken into account. The stiffness matrix for a general quadrilateral plate element is obtained numerically to be used for slabs of arbitrary shape. A general computer program is developed for the static analysis of stiffened slabs. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature.*

* Bu çalışma Ç.Ü. Araştırma Projelerince desteklenmiştir (MMF2002 BAP.49).

1. GİRİŞ

Arada kolon arzu edilmeyen büyük açıklıklı döşemeler ve köprü tabliyeleri gibi taşıyıcı plaklar, tek veya iki doğrultuda kirişler ile takviye edilerek eğilme rijitlikleri arttırılmaktadır. Plak ve kirişler aynı malzemeden üretildiği gibi bazen köprü tabliyelerinde boyuna kirişler çelik profillerden, plaklar ise betonarmeden yapılabilmektedir.

Plak ve kirişin birlikte çalışmasında uygun bir model oluşturmak için üç farklı yaklaşım kullanılmaktadır. İlk yaklaşım, plak ve kiriş kompozit sistemi yerine eşdeğer bir düzlem ızgara kiriş sistemi kullanılmıştır. Bu elemanter yönteme ait örnekler (1) ile (2) de bulunabilir. İkinci elemanter yaklaşım ise, plak ve kiriş sistemi yerine, eşdeğer rijitlikte homojen, ortotropik bir plak sistemi kullanmaktır. (3) ile (4) de verilen çalışmalar bu yönteme örnektir. Üçüncü yaklaşımda, plağın kirişler üzerine, aralarında kayma olmaksızın oturduğu varsayılmakta ve kirişle plak arasında sadece kuvvet şeklinde etki-tepki oluştuğu kabul edilmektedir. Bu yaklaşıma, paralelkenar şeklindeki plak-kirişli köprü tabliyelerinde Sonlu Farklar Yöntemi ile sayısal çözümler (5) de verilmektedir.

Plak ve kiriş (eş merkezli ya da dış merkezli) sistemini monolitik olarak birlikte çalışmasını göz önüne alan ilk çalışmalar (6,7) de incelenmektedir. Takip eden çalışmada [8] lineer bir paralelkenar eleman kullanılıp Sonlu Elemanlar yaklaşımı yapılmaktadır. Değişik Sonlu Eleman fomülasyonu (Kollekasyon, Ritz, En Küçük Kareler gibi) sayısal ve deneysel araştırmalara (9-11) örnek verilebilir. Ekasanrik kirişli döşemelerin çözümü için "Constraint Metod"unun Sonlu Elemanlara ugulanması (12) de yapılmıştır. Birçok araştırmacı, (12) de verilen, ortasında tek ve iki doğrultuda birer kirişi bulunan örnekleri çözerek adı geçen çalışma ile karşılaştırmalar yapmaktadır. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile eksantrik kirişli dikdörtgen plaklar ve eşdeğer ortotropik plaklar ile ilgili çeşitli örnek problemler (13) de çözülmüştür. (12) de ele alınan problemler, (13) çalışmasında da çözülmüş ve oldukça uygun sonuçlar elde edilmiştir. Düşey yükler altında, kirişlerle güçlendirilmiş plak eğilmesine ait çeşitli uygulmalar, (14-16) da bulunmaktadır.

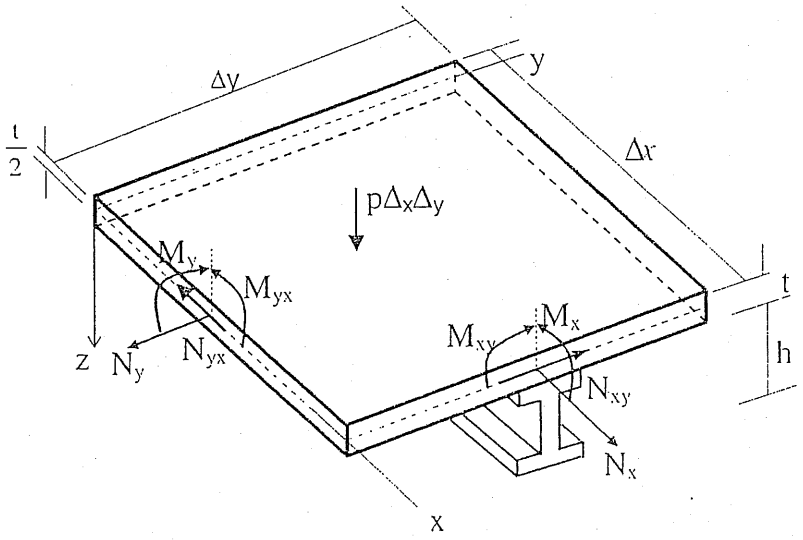
Karışık sınır koşulları kullanılarak eksantrik kirişli plak eğilmesine ait bazı uygulamaları (17) de, gemi yapıları için güçlendirilmiş plak eğilmesine ait bazı uygulamaları da (18) de bulmak mümkündür. (19) da Sonlu Elemanlar Yöntemi ile trapez şeklinde geometriye sahip tek açıklıklı bir döşeme çözülmüş ve literatür ile karşılaştırılmıştır. Yakın zamanda, Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi ile eksantrik kirişli plak eğilmesi için çeşitli uygulamalar yapılmıştır (20,21). Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemine dayalı formülasyonlarda deplasmanlar ile gerilmeler aynı anda birlikte ele alınmaktadır.

Bu çalışmada, güçlendirilmiş plak döşemelerin düşey yükler altında çözümü için Sonlu Elemanlar Yöntemine dayalı, uygulamaya yönelik bir model sunulmuştur. Bu modelde plak ve kiriş malzemeleri ayrı ayrı lineer elastik ve izotrop kabul edilmiştir. Temel denklemler yazılırken plak orta düzleminin de şekil değiştirdiği kabul edilmiştir. Orta düzlemin düzlem içi deplasmanları için bilineer, düzleme dik düşey deplasmanı için ise bilinen kübik baz polinomları şeçilmiştir. Literatürde de bu baz polinomları kullanılarak dikdörgen plaklar için çözümler yapılagelmektedir. Aynı baz polinomları, burada plak referans elemanı için göz önüne alınıp, genel dörtgen bir plak elemanın

rijitlik matrisine ait şekil değiştirme matrisinin elemanları ise bu çalışmada elde edilmiştir. Plağın herhangi bir noktasının serbestlik derecesi, üç deplasman (u,v,w) ve iki dönme (θ_x ,θ_y) olmak üzere beştir. Buna göre, dört düğümlü genel bir dörtgen plak elemanın rijitlik matrisi 20x20 boyutlu ve iki düğümlü kiriş elemanının rijitlik matrisi 10x10 boyutlu olmaktadır. Bu çalışmada, güçlendirilmiş döşemelerin keyfi geometriye sahip olabileceği de dikkate alınarak, genel bir dörtgen eleman için plak rijitlik matrisi ve yük vektörü sayısal olarak hesaplanmış ve bununla birlikte eksantrik kiriş elemanı için rijitlik matrisi de kapalı olarak verilmiştir.

2. KİRİŞLİ PLAKLAR İÇİN TEMEL DENKLEMLER

Şekil 1'deki eksantrik kirişli bir plak elemanı göz önüne alınmaktadır. Plak ve kiriş malzemelerinin ayrı ayrı elastik ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Plak deformasyonu ile ilgili kabuller yapılırken Kirchhoff plak teorisi göz önüne alınmış olup bu teoriye göre $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ olarak alınmaktadır. z-doğrultusundaki çökme, w sadece x ve y nin fonksiyonudur. Çökme, plak kalınlığı yanında çok küçüktür. Deformasyondan önce plak ve kirişin orta düzlemine dik olan düzlemler deformasyondan sonra da orta düzleme dik kalırlar.



Şekil 1. Eksantrik kirişli plak elemanı

Herhangi bir noktadaki yer değiştirmeler aşağıda verilmektedir [8].

$$U(z) = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad V(z) = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

Burada, U ve V, referans yüzeyinden z- mesafesinde oluşan, sırasıyla x- ve y-doğrultularındaki deplasmanlardır. u, v ve w referans yüzeyindeki deplasman bileşenleridir. Referans yüzeyi olarak plak orta düzlemi alınmaktadır.

Aşağıdaki şekil değiştirme-deplasman bağıntıları (1) eşitliklerinin türevlerinden yazılmıştır.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (2)$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Burada, ε_x, ε_y ve γ_{xy} şekil değiştirme oranlarıdır. İzotropik plaklar için düzlem gerilme halinde bünye denklemleri

$$\sigma_x=c_{11}\varepsilon_x+c_{12}\varepsilon_y$$
$$\sigma_y=c_{21}\varepsilon_x+c_{22}\varepsilon_y \qquad (3)$$
$$\tau_{xy}=c_{33}\gamma_{xy}$$

olup, burada c_{11}, c_{22}, c_{12} ve c_{33} malzeme sabitleri (4) de verilmektedir.

$$c_{11}=c_{22}=\frac{E_p}{1-\nu^2},\quad c_{12}=c_{21}=\frac{\nu E_p}{1-\nu^2},\qquad c_{33}=\frac{E_p}{2(1+\nu)} \qquad (4)$$

2.1. Plaklar İçin Gerilme-Deplasman Bağıntıları

(2) ifadeleri (3) denklemlerinde yerlerine konursa,

$$\sigma_x=c_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+c_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$\sigma_y=c_{21}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (5)$$
$$\tau_{xy}=c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

plaklar için gerilme-deplasman ilişkisi yazılmaktadır.

2.2. Gerilme Bileşkeleri-Deplasman Bağıntıları

Plak elemanına ait düzlemsel hal için gerilme bileşkeleri,

$$N_{xp}=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_x dz=c_{11}t\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}t\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$N_{yp}=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_y dz=c_{21}t\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}t\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (6)$$
$$N_{xyp}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xy}dz=c_{33}t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

ve plak eğilmesi hali için gerilme bileşkeleri,

$$M_{xp} = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dz = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{yp} = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_y dz = -\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \qquad (7)$$

$$M_{xyp} = -\int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy} dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(5) ifedelerinin plak kalınlığı boyunca integralleri alınarak bulunmuş olup, malzeme sabitleri aşağıda verilmektedir.

$$D_x = D_y = \frac{t^3 c_{11}}{12}, \quad D_1 = \frac{t^3 c_{12}}{12}, \quad D_{xy} = \frac{t^3 c_{33}}{12} \qquad (8)$$

2.3. Kiriş İçin Gerilme-Deplasman Bağıntısı

Kiriş için gerilme-deplasman bağıntısı,

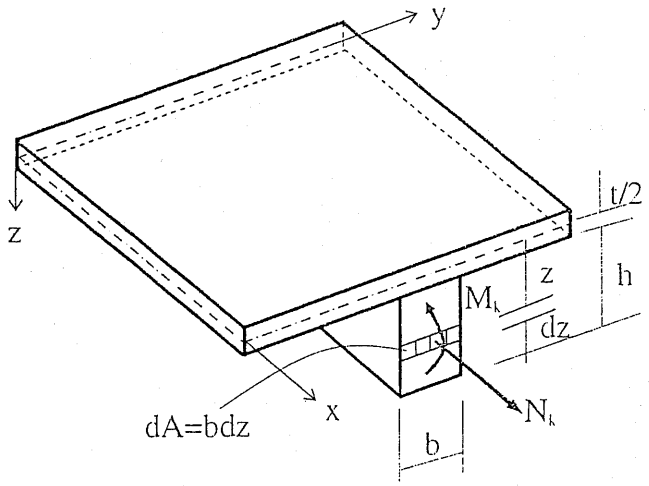
$$\sigma_k = E_k \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \qquad (9)$$

olup, E_k, kirişin elastisite modülüdür.

Dış merkez (eksantrik) kiriş elemanı için gerilme bileşkeleri, kiriş kesiti boyunca (9) ifadesinin integralleri alınarak bulunmaktadır.

$$N_k = \int_{w2}^{w2+h} \sigma_k dA = E_k A_k \frac{\partial u}{\partial x} - E_k S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$M_k = \int_{w2}^{w2+h} z\sigma_k dA = E_k S_x \frac{\partial u}{\partial x} - E_k I_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (10)$$

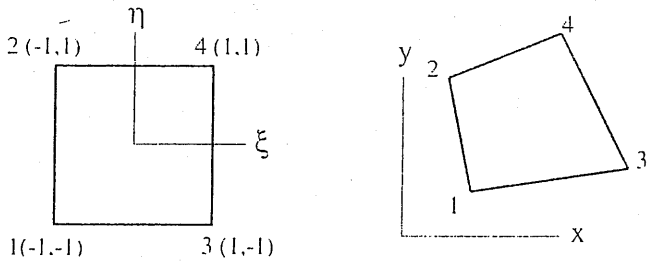


Şekil 2. Kirişte gerilme bileşkeleri

Burada, A_k, kiriş kesit alanını, $S_x(=eA_k)$ ve I_x, referans düzlemine göre kiriş statik momentini ve atalet momentini göstermektedir. e ise, referans düzlemi ile kiriş ekseni arasındaki eksantirisite mesafesidir.

3. PLAK ELEMANI İÇİN FORMÜLASYON

Eleman rijitlik matrisinin fomülasyonu için düzlemsel hal ve plak eğilmesi hali ayrı ayrı ele alınıp, şekil değiştirme-deplasman ilişkisi yazılırken birleştirilecektir.



a) Referans elemanı **b)** Gerçek eleman

Şekil 3. Dörtgen plak elemanı

Plak elemanının herhangi bir noktasının koordinatları düğüm koordinatları cinsinden,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} \overline{N}_i & 0 \\ 0 & \overline{N}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \tag{11}$$

şeklinde ifade edilmektedir. **Düzlemsel halde** herhangi bir noktanın deplasmanları,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} \overline{N}_i & 0 \\ 0 & \overline{N}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{12}$$

(12) bağıntısı ile verilmektedir. Düzlem içi deplasmanlar için bilineer baz polinomları seçilerek aşağıdaki interpolasyon şekil fonksiyonları elde edilmektedir.

$$\overline{N}_1 = (-1+\eta)(-1+\xi)/4,\ \overline{N}_2 = (1+\eta)(1-\xi)/4,\ \overline{N}_3 = (1-\eta)(1+\xi)/4,\ \overline{N}_4 = (1+\eta)(1+\xi)/4 \tag{13}$$

Plak eğilmesi halinde referans elemanınına ait w, çökme (düşey deplasman) için kübik baz polinomları (Ref. 22) seçilmektedir.

$$w=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^3+a_8\xi^2\eta+a_9\xi\eta^2+a_{10}\eta^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3 \tag{14}$$

θ_ξ ve θ_η dönmeleri çökmenin türevlerinden hesaplanmaktadır.

$$\theta_\xi = -\frac{\partial w}{\partial \eta},\quad \theta_\eta = \frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{15}$$

Burada, (14) bağıntısı matris formunda

$$w=\{P\}^T\{a\} \tag{16}$$

kapalı olarak yazılıp,

$$\{P\}^T=\{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \xi^3\eta, \xi\eta^3\} \tag{17}$$

ve

$$\{a\}^T=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\} \tag{18}$$

tarifleri yapılmaktadır. Herhangi bir noktanın çökme ve dönmeleri matris formunda,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \theta_\xi \\ \theta_\eta \end{Bmatrix}}_{\{d\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{P}^T \\ -\dfrac{\partial \underline{P}^T}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \underline{P}^T}{\partial \xi} \end{bmatrix}}_{[C_1]} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{12} \end{Bmatrix}}_{\{a\}} \tag{19}$$

yazılıp, $[C_1]$ matrisi referans elemanının 4 düğümü için oluşturulursa,

$$[C]=\begin{bmatrix} \underline{C}_1 \\ \underline{C}_2 \\ \underline{C}_3 \\ \underline{C}_4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

ifadesi elde edilir. Buradan [C] matrisinin tersi alınıp, $\{N\}^T=\{P\}^T[C]^{-1}$ eşitliği çözülerek plak eğilmesi haline ait interpolasyon şekil fonksiyonları elde edilmiştir.

$$N_1=-(-1+\xi)(-1+\eta)(-2+\xi+\xi^2+\eta+\eta^2)/8 \qquad N_2=(-1+\xi)(-1+\eta)^2(1+\eta)/8$$
$$N_3=-(-1+\xi)^2(1+\xi)(-1+\eta)/8 \qquad N_4=(-1+\xi)(1+\eta)(-2+\xi+\xi^2-\eta+\eta^2)/8$$
$$N_5=(-1+\xi)(-1+\eta)(1+\eta)^2/8 \qquad N_6=(-1+\xi)^2(1+\xi)(1+\eta)/8 \tag{21}$$
$$N_7=(1+\xi)(-1+\eta)(-2-\xi+\xi^2+\eta+\eta^2)/8 \qquad N_8=-(1+\xi)(-1+\eta)^2(1+\eta)/8$$
$$N_9=-(-1+\xi)(1+\xi)^2(-1+\eta)/8 \qquad N_{10}=-(1+\xi)(1+\eta)(-2-\xi+\xi^2-\eta+\eta^2)/8$$
$$N_{11}=-(1+\xi)(-1+\eta)(1+\eta)^2/8 \qquad N_{12}=(-1+\xi)(1+\xi)^2(1+\eta)/8$$

Referans elemanının herhangi bir noktasının çökmesi düğüm deplasmanları cinsinden,

$$w(\xi,\eta)=\{N\}^T\{d\}_{re} \tag{22}$$

olup, burada, {N} şekil fonksiyonları vektörü,

$$\{N\}^T=\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}\} \tag{23}$$

ve $\{d\}_{re}$, referans elemanının düğüm deplasmanları,

$$\{d\}_{re}^T=\{w_1, \theta_{\xi 1}, \theta_{\eta 1}, w_2, \theta_{\xi 2}, \theta_{\eta 2}, w_3, \theta_{\xi 3}, \theta_{\eta 3}, w_4, \theta_{\xi 4}, \theta_{\eta 4}\} \tag{24}$$

açık olarak yazılmaktadır. Gerçek elemana ait deplasmanları yazabilmek için Jacobian matrisi [J] ve bunun tersine ihtiyaç vardır.

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial \overline{N}_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial \overline{N}_i}{\partial \xi}y_i\\ \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial \overline{N}_i}{\partial \eta}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial \overline{N}_i}{\partial \eta}y_i\end{bmatrix},\quad [J]^{-1}=[J^{*}]=\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{25}$$

Dönmelerin, gerçek eleman ile referans elemanı arasındaki ilişkisi,

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=\theta_\eta=J_{11}\frac{\partial w}{\partial x}+J_{12}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{26.a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}=\theta_\xi=J_{21}\frac{\partial w}{\partial x}+J_{22}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{26.b}$$

(26) tarifleri ile yazılabilmektedir. Bu tarifler kullanılarak, (22) eşitliği, gerçek elemana ait herhangi bir noktanın çökmesi cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} w(x,y) = {} & N_1 w_1 + (N_2 J_{22} + N_3 J_{12})\, w_{1,y} + (N_2 J_{21} + N_3 J_{11})\, w_{1,x} \\ & + N_4 w_2 + (N_5 J_{22} + N_6 J_{12})\, w_{2,y} + (N_5 J_{21} + N_6 J_{11})\, w_{2,x} \\ & + N_7 w_3 + (N_8 J_{22} + N_9 J_{12})\, w_{3,y} + (N_8 J_{21} + N_9 J_{11})\, w_{3,x} \\ & + N_{10} w_4 + (N_{11} J_{22} + N_{12} J_{12}) w_{4,y} + (N_{11} J_{21} + N_{12} J_{11})\, w_{4,x} \end{aligned} \tag{27}$$

Burada,

$$w_{i,x}=\frac{\partial w_i}{\partial x}=\theta_{yi},\qquad w_{i,y}=\frac{\partial w_i}{\partial y}=\theta_{xi} \tag{28}$$

tarifleri yapılmaktadır.

3.1. Şekil Değiştirme-Deplasman İlişkisi

Düzlemsel hal ve plak eğilmesi hali birlikte gözönüne alındığında, gerçek elemana ait herhangi bir noktanın şekil değiştirmeleri,

$$\{\varepsilon\}^T=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\} \tag{29}$$

olup, şekil değiştirmeler ile düğüm deplasmanları arasındaki ilişki şöyledir:

$$\{\varepsilon\}=\sum_{i=1}^{4}\underbrace{\begin{bmatrix} B_{11i} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{22i} & 0 & 0 & 0\\ B_{31i} & B_{32i} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_{43i} & B_{44i} & B_{45i}\\ 0 & 0 & B_{53i} & B_{54i} & B_{55i}\\ 0 & 0 & B_{63i} & B_{64i} & B_{65i}\end{bmatrix}}_{[B_i]}\underbrace{\begin{Bmatrix} u_i\\ v_i\\ w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{Bmatrix}}_{\{d_i\}}=[B]\{d\}_e \tag{30}$$

Burada, $\{d\}_e$, gerçek elemanın düğüm deplasmanlarını göstermektedir.

$$\{d\}_e^T = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, u_3, v_3, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, u_4, v_4, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}\} \quad (31)$$

(30) eşitliğindeki $[B_i]$ matrisinin elemanları bu çalışmada elde edilmiş ve (32) ifadeleri ile sunulmuştur.

$$B_{1i} = \frac{\partial \overline{N}_i}{\partial x}, \quad B_{3i} = \frac{\partial \overline{N}_i}{\partial y}, \quad B_{2i} = \frac{\partial \overline{N}_i}{\partial y}, \quad B_{3i} = \frac{\partial \overline{N}_i}{\partial x}$$

$$B_{4i} = -\left(\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}\right)_i, \quad B_{5i} = -\left(\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}\right)_i, \quad B_{6i} = 2\left(\frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y}\right)_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

$$B_{4i} = -\left(J_{22}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial x^2} + J_{12}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial x^2} + 2J_{11}\frac{\partial J_{22}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial x} + 2J_{12}\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial x}\right)_i \qquad (j=i*3-2)$$

$$B_{5i} = -\left(J_{22}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial y^2} + J_{12}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial y^2} + 2J_{21}\frac{\partial J_{22}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial y} + 2J_{22}\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial y}\right)_i \qquad (32)$$

$$B_{6i} = 2\left(J_{22}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial x \partial y} + J_{12}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial x \partial y} + J_{21}\frac{\partial J_{22}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial x} + J_{11}\frac{\partial J_{22}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial y} + J_{22}\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial x} + J_{12}\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial y}\right)_i$$

$$B_{4i} = -\left(J_{21}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial x^2} + J_{11}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial x^2} + 2J_{11}\frac{\partial J_{21}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial x} + 2J_{12}\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial x}\right)_i$$

$$B_{5i} = -\left(J_{21}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial y^2} + J_{11}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial y^2} + 2J_{21}\frac{\partial J_{21}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial y} + 2J_{22}\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial y}\right)_i$$

$$B_{6i} = 2\left(J_{21}\frac{\partial^2 N_{j+1}}{\partial x \partial y} + J_{11}\frac{\partial^2 N_{j+2}}{\partial x \partial y} + J_{21}\frac{\partial J_{21}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial x} + J_{11}\frac{\partial J_{21}}{\partial \xi}\frac{\partial N_{j+1}}{\partial y} + J_{22}\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial x} + J_{12}\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta}\frac{\partial N_{j+2}}{\partial y}\right)_i$$

(32) ifadelerinde yeralan birinci ve ikinci kısmi türevler aşağıdaki tariflere göre yapılmıştır.

$$\frac{\partial .}{\partial x} = J_{11}\frac{\partial .}{\partial \xi} + J_{12}\frac{\partial .}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial .}{\partial y} = J_{21}\frac{\partial .}{\partial \xi} + J_{22}\frac{\partial .}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 .}{\partial x^2} = (J_{11})^2\frac{\partial^2 .}{\partial \xi^2} + 2J_{11}J_{12}\frac{\partial^2 .}{\partial \xi \partial \eta} + (J_{12})^2\frac{\partial^2 .}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 .}{\partial y^2} = (J_{21})^2\frac{\partial^2 .}{\partial \xi^2} + 2J_{21}J_{22}\frac{\partial^2 .}{\partial \xi \partial \eta} + (J_{22})^2\frac{\partial^2 .}{\partial \eta^2} \qquad (33)$$

$$\frac{\partial^2 .}{\partial x \partial y} = J_{11}J_{21}\frac{\partial^2 .}{\partial \xi^2} + (J_{12}J_{21} + J_{11}J_{22})\frac{\partial^2 .}{\partial \xi \partial \eta} + J_{12}J_{22}\frac{\partial^2 .}{\partial \eta^2}$$

3.2. Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Plak için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_{xp} \\ N_{yp} \\ N_{xyp} \\ M_{xp} \\ M_{yp} \\ M_{xyp} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11}t & c_{12}t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21}t & c_{22}t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}}_{[E]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} \tag{34}$$

olup, [E] malzeme matrisinin elemanları (4) ve (8) eşitliklerinde verilmektedir. (30) eşilliğinde verilen $\{\varepsilon\}$, (34) de yerine konursa,

$$\{\sigma\} = [E]\,[B]\,\{d\}_e \tag{35}$$

plak elemanın herhangi bir noktasında gerilme bileşkeleri ile düğüm deplasmanları arasındaki ilişki elde edilmektedir.

3.3. Plak Elemanı Rijitlik Matrisi ve Yük Vektörü

Plak rijitlik matrisi, elemanın 4 düğüm noktası için $[B] = [B_1, B_2, B_3, B_4]$ olmak üzere,

$$[k_p] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [E]\,[B] \det[J]\, d\xi d\eta \tag{36}$$

(36) ifadesi ile hesaplanmaktadır. Plak düzlemine dik olarak etkiyen üniform yayılı yük altında eleman yük vektörü de,

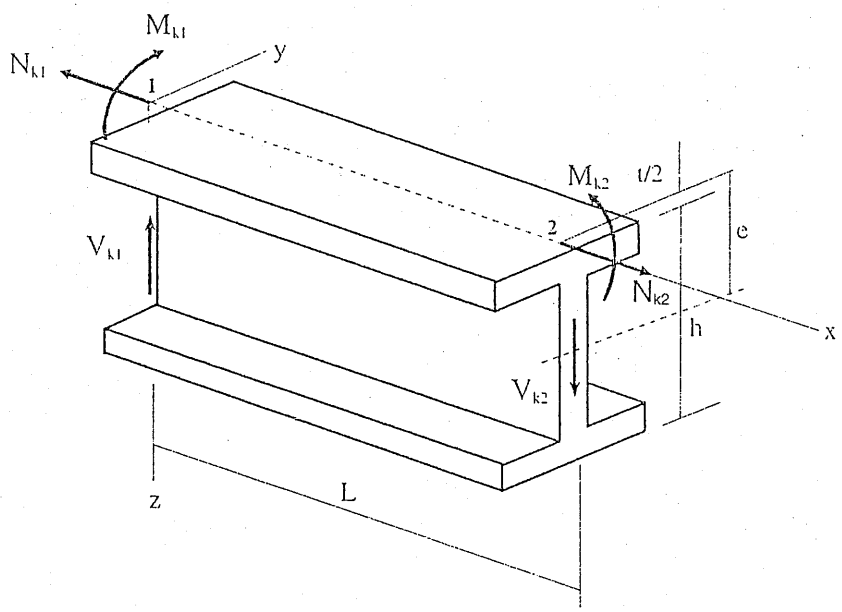
$$\{f_p\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \{N^*\}^T p \det[J]\, d\xi d\eta \tag{37}$$

integrali ile hesaplanmaktadır. (36) ve (37) ifadelerinin integralleri, Gauss sayısal integral yöntemi ile (3x3 Gauss integrasyon noktası alınarak) yapılmaktadır. Burada p, plak yüzeyine etkiyen üniform yayılı yükü göstermektedir. $\{N^*\}^T$ ise,

$$\begin{aligned} \{N^*\}^T = \{&0, 0, N_1, (N_2J_{22} + N_3J_{12}), (N_2J_{21} + N_3J_{11}), \\ &0, 0, N_4, (N_5J_{22} + N_6J_{12}), (N_5J_{21} + N_6J_{11}), \\ &0, 0, N_7, (N_8J_{22} + N_9J_{12}), (N_8J_{21} + N_9J_{11}), \\ &0, 0, N_{10}, (N_{11}J_{22} + N_{12}J_{12}), (N_{11}J_{21} + N_{12}J_{11})\} \end{aligned} \tag{38}$$

şeklinde yazılmaktadır.

4. EKSANTRİK KİRİŞ ELEMANI İÇİN FORMÜLASYON



Şekil 4. Eksantrik kiriş elemanı ve pozitif uç kuvvetleri

Kiriş elemanı, plak elemanının kenarları boyunca alınmaktadır. Şekil 4'de görülen eksantrik kiriş elemanı x- ekseni doğrultusundadır. Herhangi bir noktada u deplasmanı doğrusal, w deplasmanı ise kübik terimler içermektedir. Kirişin herhangi bir noktasında u, w yer değiştirmeleri ve θ_y dönmesi,

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad (39)$$

matris formunda yazılabilir. Elemanın iki ucunda 10 adet deplasman bulunmaktadır. Eksantrik kirişin bir düğümünde u, v, w deplasmanları ile $\partial w / \partial y$, $\partial w / \partial x$ dönmeleri göz önüne alınmalıdır. Düzlemi içinde şekil değiştiren bir çubuk için rijitlik matrisi elde edilirken sadece u eksenel deformasyon ile w çökmesi ve $\partial w / \partial x$ dönmenin etkisi göz önüne alınmaktadır. Diğerlerinin etkisi rijitlik matrisi elde edildikten sonra eklenecektir.

(39) bağıntısı elemanın iki ucu için,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_2 \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{40}$$

veya kısaca,

$$\{d_k\} = [C_k]\{\alpha\} \tag{41.a}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\{\alpha\} = [C_k]^{-1}\{d_k\} \tag{41.b}$$

olarak çözülür. Kiriş elemanı için şekil değiştirme-deplasman ilişkisi,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix}}_{[Q_k]} \{\alpha\} \tag{42}$$

veya kısaca,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_k \\ \chi_k \end{Bmatrix} = [Q_k][C_k]^{-1}\{d_k^e\} \tag{43}$$

şeklinde yazılabilir. (10) denklemleri matris formunda,

$$\begin{Bmatrix} N_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \underbrace{E_k \begin{bmatrix} A_k & S_k \\ S_k & I_k \end{bmatrix}}_{[D_k]} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \tag{44}$$

yazılıp, (43) ifadesi burada yerine konursa,

$$\begin{Bmatrix} N_k \\ M_k \end{Bmatrix} = [D_k][Q_k][C_k]^{-1}\{d_k\} \tag{45}$$

bulunur. Kiriş elemanına verilen virtüel deplasman nedeniyle iç kuvvetlerin virtüel işi,

$$\partial W_i = \int_0^L \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_k \\ \delta\chi_k \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N_k \\ M_k \end{Bmatrix} dx \tag{46}$$

olup, dış kuvvetlerin virtüel işi de virtüel uç deplasmanları birim alarak,

$$\delta W_e = \{f_k^e\}[I] = \{f_k^e\} \tag{47}$$

bulunur. İç kuvvetlerin virtüel işi = dış kuvvetlerin virtüel işi, ilkesinden aşağıdaki eleman rijitlik denklemi elde edilmektedir.

$$\{f_k^e\} = \underbrace{\left([C_k]^{-1}\right)^T\left(\int_0^{L_k}[Q_k]^T[D_k][Q_k]dx\right)[C_k]^{-1}}_{[k_k]}\{d_k^e\} \tag{48}$$

(48) ifadesindeki $[k_k]$, burulma ve v deplasmanı içermeyen rijitlik matrisidir.

Burulma açısının kiriş elemanı boyunca doğrusal değiştiği varsayılmaktadır. Kiriş elemanın uçlarındaki $w_{1,y}$ ve $w_{2,y}$ dönmeler, burulma momentleri oluşturmaktadır. Matris formunda aşağıda verilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1,y} \\ w_{2,y} \end{Bmatrix} \tag{49}$$

Burada T_1 ve T_2 burulma momentlerini, G, kayma modülünü, J ise, burulma atalet momentini simgelemektedir. Kiriş elemanı plaklarla birlikte çalışacağı için, y-doğrultusunda v_1 ve v_2 uç depalamanlarından doğan yanal kuvvetler olacaktır. Bunlar,

$$\begin{Bmatrix} N_{y,1} \\ N_{y,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12\,E_k I_z}{L^3} & -\frac{12\,E_k I_z}{L^3} \\ -\frac{12\,E_k I_z}{L^3} & \frac{12\,E_k I_z}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

matris şeklinde yazılmaktadır. (49) ve (50) denklemlerinde görülen rijitlikler, $[k_k]$ eleman rijitlik matrisine uygun bir şekilde eklenirse,

$$\{f_k\} = [k_k]\{d_k\} \tag{51}$$

eleman rijitlik denklemi elde edilir. Burada $[k_k]$, eleman rijitlik matrisi ve $[d_k]$ eleman uç deplasmanlarının bileşenleri (52) eşitliğinde açık olarak görülmektedir.

$$\begin{Bmatrix} N_{k1} \\ N_{xy1} \\ V_{k1} \\ T_{k1} \\ M_{k1} \\ N_{k2} \\ N_{xy2} \\ V_{k2} \\ T_{k2} \\ M_{k2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_k A_k}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_k S_k}{L} & -\frac{E_k A_k}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_k S_k}{L} \\ & \frac{12\,E_k I_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\,E_k I_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{12\,E_k I_x}{L} & 0 & \frac{6\,E_k I_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{12\,E_k I_x}{L} & 0 & \frac{6\,E_k I_x}{L} \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ & & & & \frac{4\,E_k I_x}{L} & \frac{E_k S_k}{L} & 0 & -\frac{6\,E_k I_x}{L} & 0 & \frac{2\,E_k I_x}{L} \\ & & & & & \frac{E_k A_k}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_k S_k}{L} \\ & & & & & & \frac{12\,E_k I_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12\,E_k I_x}{L} & 0 & -\frac{6\,E_k I_x}{L} \\ & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{4\,E_k I_x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \tag{52}$$

(52) eşitliğinde A_k, kirişin kesit alanını, S_x (=$A_k e$), referans yüzeyine göre kirişin statik momentini, e ise eksantirisiteyi, I_x, kirişin referans yüzeyine göre atalet momentini ve I_z ise kirişin diğer yöndeki atalet momentini göstermektedir. Bu denklem ile hesaplanan kiriş uç kuvvetleri referans yüzeyindeki düğüm noktalarında hesaplanmaktadır. Uç kuvvetlerini kirişin kendi ekseninde hesaplayabilmek için eğilme momentlerinin transformasyonları yapılmaktadır.

$$M'_{k1} = M_{k1} + e\,N_{k1} \qquad \text{ve} \qquad M'_{k2} = M_{k2} + e\,N_{k2} \tag{53}$$

Kiriş kesiti boyunca herhangi bir noktadaki gerilme, (43) ifadesindeki $\partial u/\partial x$ ve $\partial^2 w/\partial x^2$ terimleri (9) da yerlerine konularak bulunmaktadır. Buraya kadar yapılan işlemler eksantrik (dış merkezli) kirişler içindir. Özel olarak eksantirisitenin sıfır olması durumunda konsantrik (eş merkezli) kirişler de çözülebilmektedir.
Kiriş rijitlik matrisini ortak bir sistem koordinat takımında yazabilmek için aşağıdaki transformasyon yapılmaktadır.

$$[T]=\begin{bmatrix}[t] & 0\\ 0 & [t]\end{bmatrix}, \qquad [t]=\left[\begin{array}{ccccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right] \tag{54}$$

Sistem koordinatlarında eleman rijitlik matrisi şöyle yazılabilir.

$$[k'_k]=[T]^T[k_k][T] \tag{55}$$

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, sonlu eleman formülasyonu kullanılarak, güçlendirilmiş plak döşemelerin düzlemine dik statik yükler altında analizini yapan genel amaçlı KPLAK isimli Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

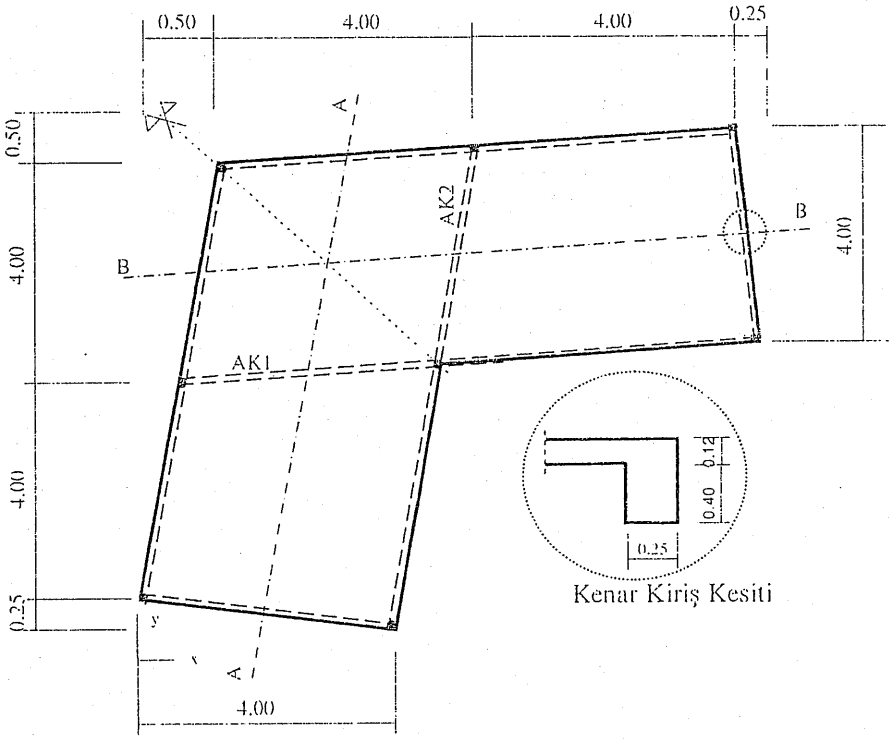
Hazırlanan bilgisayar programını test etmek amacıyla, literatürde (22) çeşitli sınır şartları için verilen kare plağın sonlu elemanlar çözümleri ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Karşılaştırmalarda, kenarları basit ve ankastre mesnetli, üniform yüklü kare plakğın sonlu eleman sonuçları ile aynı değerler bulunmuş, bu problemin analitik çözümlerine de oldukça yakın değerler elde edilmiştir.

Bu çalışmada, keyfi dörtgen geometriye sahip kirişli plakların eğilmesi için bir örnek problem ele alınmıştır. Çeşitli kiriş birleşim durumları için ANSYS(23) sonuçları ile kıyaslamalar yapılmıştır. Ayrıca, eksantrik (eş merkez) ve konsantrik (dış merkez) kirişli birleşimlerin plak eğilme rijitliğine etkileri de araştırılmıştır.

Örnek: L Şeklinde Keyfi Dörtgen Bölgeli Kirişli Döşeme

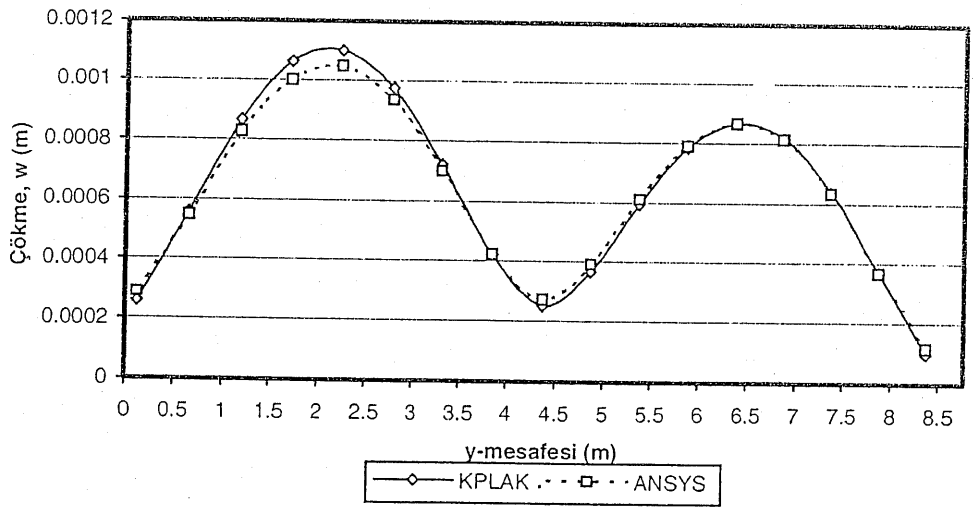
Şekil 5'de görülen kenarlarında ve döşeme arakesitlerinde eksantrik kirişler bulunan L şeklindeki keyfi dörtgen plak döşeme, kiriş birleşim noktalarında kolonlara mesnetlenmiş ve 6500 N/m^2 şiddetinde üniform yayılı yükle yüklenmiştir. Plak ve kirişlerin elastisite modülü, $2.85\text{x}10^{10}$ N/m^2 ve Poisson oranı 0.15 şeçilmiştir. Problem,

bu çalışmada hazırlanan KPLAK programı ile çözülmüştür. Çözümler yapılırken her bir açıklık 8 elemana bölünerek sonlu elemanlar ağı oluşturulmuştur. Sınır şartları olarak mesnetlerde sadece w, düşey deplasmanlar tutulmuştur. Aynı problem döşeme arakesitlerindeki kirişlerin (AK1 ve AK2) mevcut olmaması durumu için ayrıca çözülmüştür. Bununla birlikte kirişlerin eş merkezli olması durumu için çözümler yapılmış ve kirişlerin dış merkezli olması durumuna ait çözümler ile karşılaştırılmıştır.

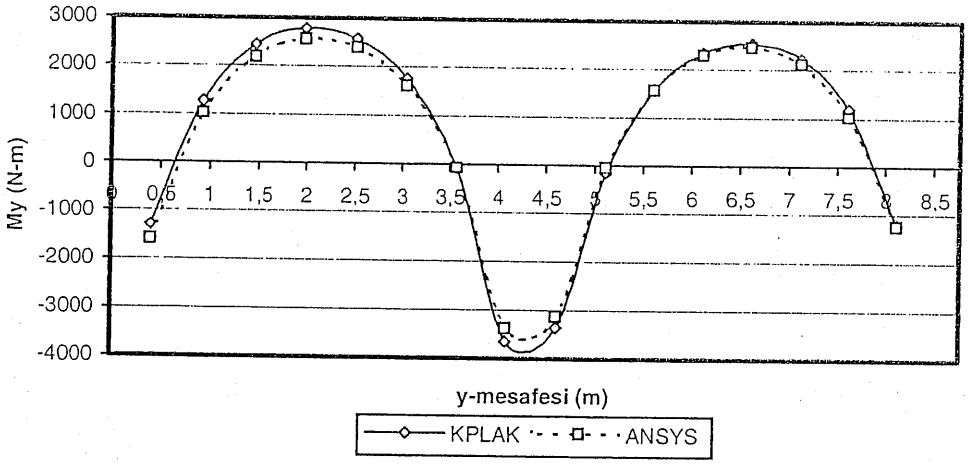


Şekil 5. L şeklinde keyfi dörtgen bölgeli döşeme

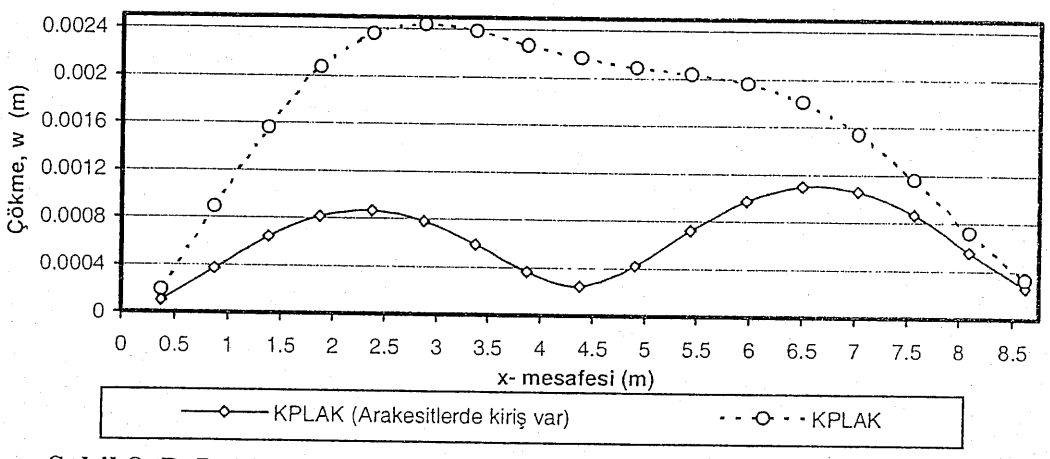
Şekil 6 ve Şekil 7'de, döşeme arakesitlerinde AK1 ve AK2 kirişlerinin mevcut olması durumu için A-A aksı boyunca çökme ve plak My momenlerinin değişimi, bu çalışmada hazırlanan KPLAK ve ANSYS programlarının sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 8 ve Şekil 9'da döşeme arakesitlerinde AK1 ve AK2 kirişlerinin mevcut olup olmaması durumları için B-B aksı boyunca çökme ve plak Mx momentleri karşılaştırılmıştır. Şekil 10 ve Şekil 11'de, tüm kiriş enkesitlerinin eş merkez ve dış merkezli birleşimler için B-B aksı boyunca çökme ve plak Mx momentleri karşılaştırılmıştır.



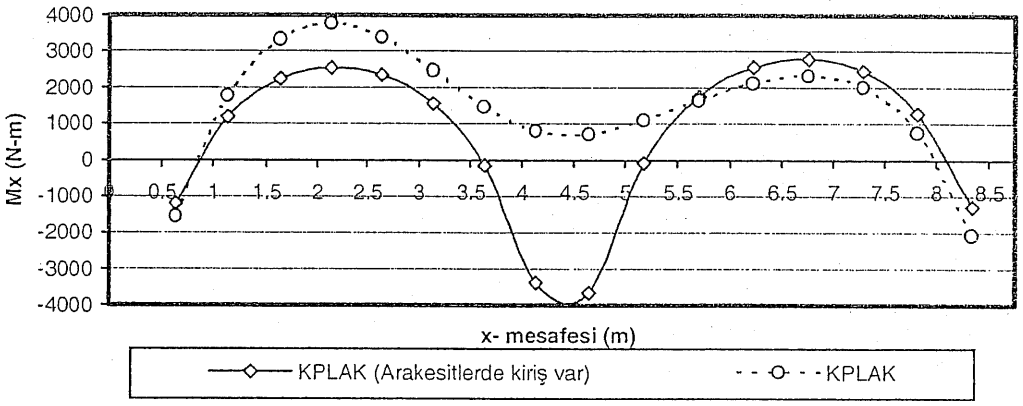
Şekil 6. A-A Aksı boyunca çökmelerin değişimi (eksantrik kirişli hal)



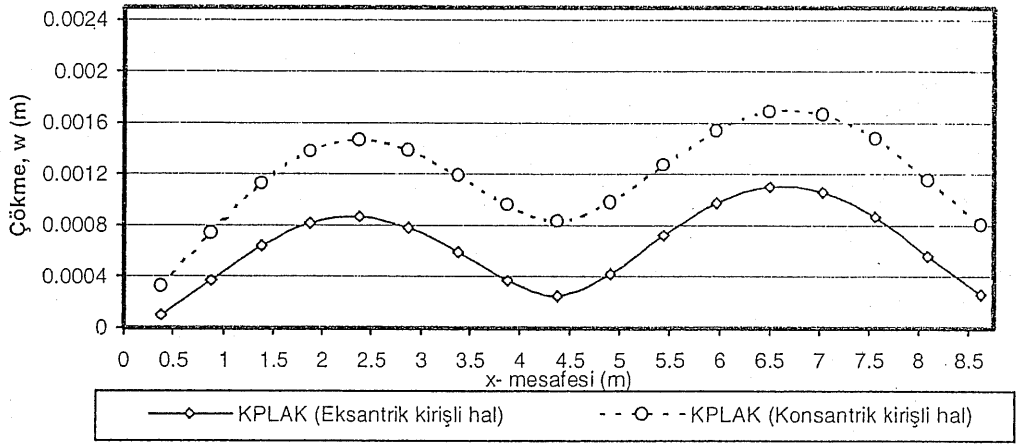
Şekil 7. A-A Aksı boyunca My momentlerinin değişimi (eksantrik kirişli hal)



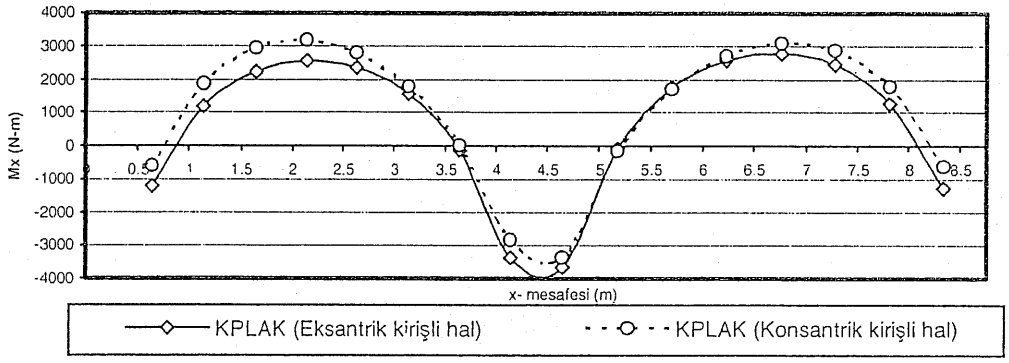
Şekil 8. B-B Aksı boyunca çökmelerin değişimi (eksantrik kirişli hal)



Şekil 9. B-B Aksı boyunca Mx momentlerinin değişimi (eksantrik kirişli hal)



Şekil 10. Eksantrik ve konsantrik kirişli durumlarda B-B Aksı boyunca çökmelerin değişimi



Şekil 11. Eksantrik ve konsantrik kirişli durumlarda B-B Aksı boyunca Mx momentlerinin değişimi

Her iki program ile hesaplanan çökme ve momentlerin birbirlerine yakın oldukları görülmektedir. Maksimum değerlerde görülen çok küçük farklar, Kirchhoff kabulünde kayma şekil değiştirmesinin göz önüne alınmamasından kaynaklanmaktadır. ANSYS'de kullanılan plak eğilmesi elemanında kayma şekil değiştirmesinin etkisi göz önüne alınmaktadır. Döşeme arakesitlerindeki AK1 ve AK2 kirişlerinin mevcut olması durumunda çökmelerin önemli ölçüde azaldığı, bu kirişlerin üzerindeki elemanlarda plak için mesnet etkisi yaptığı gözlenmiştir. Şekil 10 ve Şekil 11'de, tüm kiriş enkesitlerinin eksantrik ve konsantrik olması durumları için B-B aksı boyunca çökmeler ve plak Mx momentleri karşılaştırılmış, çökmeler arasındaki büyük farklar olmasına karşın plak eğilme momentlerinin birbirine yakın oldukları gözlenmiştir.

6. SONUÇLAR

Keyfi geometriye sahip L şeklindeki kirişli döşeme KPLAK ve ANSYS programları ile çeşitli durumlar için çözümler yapılmış ve sonuçlar grafik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca, eş merkez (eksantrik) ve dış merkez (konsantrik) kiriş birleşimlerin eğilme rijitliğine etkileri irdelenmiştir. Varılan genel sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

Eş merkez ve dış merkez kiriş birleşim durumlarında, çökmeler arasındaki fark plak eğilme momentlerine göre daha fazla olmaktadır.

Büyük açıklıklı döşemelerde ara kirişlerin mevcudiyeti plak eğilme rijitliğini önemli ölçüde arttırmaktadır.

TS500 de mevcut olmayan keyfi dörtgen bölgeli kirişli plak döşemeler, KPLAK programı yardımı ile kolayca çözülebilmektedir.

Büyük açıklıklı kaset döşemelerin ve kompozit malzemeli köprülerin analizleri de, bu çalışmada hazırlanan program yardımıyla yapılabilmektedir.

7. KAYNAKLAR

1. Hendry,A.W. and Jaeger,L.G., "The Analysis of Grid Frameworks and Related Structures", Chatto and Windus, London, 1958.

2. Lightfoot,E. and Sawko,F., "Grid Frameworks Resolved by Generalized Slope-Deflection", Engineering, 187, 18-20, London, 1959.

3. Massonet,C., "Methods de Calcul des Ponts a' Poutres Multiple Tenant Compte de leur Resistance a la Torsion", International Association for Bridge and Structural Engineering, 10(147), 1950.

4. Chu,K.H. and Krishnamoorthy,G., "Use of Orthotropic Plate Theory in Bridge Design", Journal of Structural Division, ASCE, 88(ST3), Proc. Paper 3157, 35-77, 1962.

5. Chen,T.Y., Siess,C.P. and Newmark,N.M., "Moments in Simply Supported Skew I Beam Bridges", Bulletin 439, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, 1957.

6. Tekinalp,B., "Elastik Kirişlere Oturan Plakların Çözümü", Doktora Tezi, İ.T.Ü., 1951.

7. Hoppman,W.H., Huffington,J.J. and Magness,A., "Study of Orthogonally Stiffened Plates", Trans ASME, J. Appl. Mech., 78, 343-350, 1956.

8. Gustafson,W.C. and Wright,R.N., "Analysis of Skewed Composite Girder Bridges", Journal of The Structural Division, ASCE, 94 (No. ST4), 919-941, 1968.

9. Ghosh,P. and Som,R.K., "Automated System Analysis of Plates with Edge Beam Interactions", Computers and Structures, 9, 101-111, 1978.

10. Mukhopadhyay,M. and Satsangi,S.K., "Isoparametric Stiffened Plate Bending Element for The Analysis of Ships Structures", The Royal Institution of Naval Architects, 141-51,1983.

11. Deb,A. and Booton,M., "Finite Element Models for Stiffened Plates Under Transverse Loading", Computer and Structures, 28(3), 361-372., 1988.

12. Rossow,M.P. and Ibrahimkhail,A.K., "Constraint Method Analysis of Stiffned Plates", Computers and Structures, 8, 51-60, 1978.

13. Kıral,E. ve Temel,B., "Kirişli Döşemelerin Bilgisayar İle Hesabı", Teknik Yayınevi, Ankara, 1990.

14. Srinivasan,R.S. and Thiruvenkatachari,V., "Static Analysis of Stiffened Plates", AIAA Journal, 22(9), 1342-1344, 1984.

15. Applegarth,L.Y., Li,I., Bull,W.J., Bettes,P. and Bond,T.J., "Adaptive Analysis of Stiffened Structures Using Stiffened Plate Bending Elements", Int. J. Pres. Vessels &Piping, 65, 117-125, 1996.

16. Bedair,O.K., "Analysis of Stiffened Plates Under Lateral Loading Using Sequential Quadratic Programming (SQP)", Computers and Structures, 62(1), 63-80, 1997.

17. Siddiqi,Z.A., Kukreti,A.R., "Analysis of Eccentrically Stiffened Plates With Mixed Boundary Condition Using Differential Quadrature Method", Applied Mathematical Modelling, 22, 251-275, 1998.

18. Satish Kumar,Y.V., Mukhopathyay,M., "Finite Element Analysis of Ship Structures Using A New Stiffened Plate Element", Applied Ocean Research, 22, 364-374, 2000.

19. Temel,B. ve Hunu,D.Z., "Keyfi Dörtgen Bölgeli Kirişli Döşemelerin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi", İnşaat Mühendisliğinde Gelişmeler, IV. Uluslararası Kongre, Doğu Akdeniz Üniversitesi, Gazimagusa, KKTC, 2, 579-587, 2000.

20. Aköz,Y. ve Özçelikörs,Y., "Takviyeli Plaklar", 5. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, 1987.

21. Özçelikörs,Y. ve Aköz,Y., "A Mixed Finite Element Formulation of Eccentrically Stiffened Plates", Bull. Tech.Uni. Istanbul, 46, 257-277, 1993.

22. Zienkiewicz,O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London, 1971.

23. ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, USA.