ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Hasan ERTAŞ

DAYANIKLI YANLI TAHMİN EDİCİLER

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2015

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAYANIKLI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Hasan ERTAŞ

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 06/02/2015 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	…….	…….....
Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Prof. Dr. A. İhsan GENÇ	Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

..…….....	…….
Doç.Dr. Murat ERİŞOĞLU	Yrd.Doç.Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FEF2013D15

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

DAYANIKLI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Hasan ERTAŞ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl: 2015, Sayfa: 106
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. A.İhsan GENÇ
: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER
: Doç. Dr. Murat ERİŞOĞLU
: Yrd. Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY

Çoklu lineer regresyon analizinde, açıklayıcı değişkenler arasında çoklu iç ilişki ve veri setinde y-yönünde sapan değer bulunması en küçük kareler tahmin edicisini olumsuz etkilemekte ve güvenilir olmayan sonuçlara neden olmaktadır. Bu durumda, dayanıklı yanlı tahmin ediciler kullanılması önerilir. Bu çalışmada, çoklu iç ilişki ve veri setinde y-yönünde sapan değer problemlerini aynı anda çözmek için M-tahmin edicilere dayalı yeni dayanıklı yanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Yeni önerilen tahmin edicilerin performansı, hata kareler ortalaması kriterine göre teorik olarak ya da simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, teorik karşılaştırmaların ya da simülasyon çalışmasının sonuçları bir sayısal örnek verilerek desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çoklu iç ilişki, Yanlı tahmin ediciler, Dayanıklı regresyon, Sapan değerler, Dayanıklı yanlı tahmin ediciler

ABSTRACT

PhD THESIS

ROBUST-BIASED ESTIMATORS

Hasan ERTAŞ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Year: 2015, Pages: 106
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Prof. Dr. A.İhsan GENÇ
: Asst. Prof. Dr. Hüseyin GÜLER
: Assoc. Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU
: Asst. Prof. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY

In multiple linear regression analysis, the presence of multicollinearity among explanatory variables and outliers in the y-direction in the datasets affect the ordinary least squares estimator, adversely and lead to unreliable results. In this case, it is suggested to use robust-biased estimators. In this study, new biased estimators based on M-estimator are proposed to overcome the problem of multicollinearity and outliers in the y-direction, simultaneously. The performances of newly proposed estimators are compared theoretically or with simulation study, according to mean square error criterion. Moreover, a numerical example is given to support the results of theoretical comparisons or simulation study.

Key Words: Multicollinearity, Biased estimators, Robust regression, Outliers, Robust-Biased estimator

TEŞEKKÜR

Tüm akademik hayatımda bana yol gösteren ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a aynı zamanda doktora çalışmalarım boyunca bilgilerinden çokça yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr Hüseyin GÜLER'e ve tezime katkılarından dolayı diğer jüri üyelerimize ayrıca emeği üzerimde çok olan Sayın Doç.Dr. Murat ERİŞOĞLU'na son olarak Çukurova Üniversitesi, İstatistik Bölümü öğretim elemanlarına ve manevi desteğinden dolayı eşim Esra ve oğlum A. Musab ERTAŞ'a ve tüm hayatım boyunca maddi-manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VI
ŞEKİLLER DİZİNİ X
SİMGELER VE KISALTMALAR XII
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 7
2.1. Modelin Yapısı ve Varsayımlar 7
2.2. Dayanıklı Tahmin Ediciler ve Özellikleri 9
2.2.1. Dayanıklı Tahmin Edicilerin Özellikleri 9
2.2.2. Dayanıklı Tahmin Ediciler için Aranan Ölçüler 10
2.2.3. Bazı Dayanıklı Tahmin Ediciler 12
2.3. Çoklu İç İlişki 17
2.3.1. Çoklu İç İlişkinin Nedenleri 18
2.3.2. Çoklu İç İlişkinin OLSE Üzerindeki Etkileri 18
2.3.3. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi 20
2.3.4. Çoklu İç İlişki için Çözüm Yöntemleri 22
3. DAYANIKLI YANLI TAHMİN EDİCİLER 25
3.1. Liu-Tipi M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları 25
3.1.1. Giriş 25
3.1.2. Liu-Tipi M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları 29
3.1.3. LTME için k ve d Seçimi 32
3.1.4. Simülasyon Çalışması 32
3.1.5. Sayısal Örnek 35
3.1.6. Sonuç 41
3.2. Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu-M Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları 41

3.2.1. Giriş 41
3.2.2. Genelleştirilmiş Liu ve Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu-M Tahmin Edicileri ve Karşılaştırmaları 44
3.2.3. GLME ve AUGLME için d_i Seçimi 48
3.2.4. Sayısal Örnek 49
3.2.5. Sonuç 51
3.3. İki Parametreli Ridge-M Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları 51
3.3.1. Giriş 51
3.3.2. İki Parametreli Ridge-M Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları 52
3.3.3. TRME için q ve k Seçimi 55
3.3.4. Simülasyon Çalışması 58
3.3.5. Sayısal Örnek 60
3.3.6. Sonuç 63
3.4. Ridge-M Tahmin Edici İçin k Parametre Seçim Yöntemleri 63
3.4.1. Giriş 63
3.4.2. RME İçin k Parametre Seçim Yöntemleri 64
3.4.3. Simülasyon Çalışması 66
3.4.4. Sayısal Örnek 69
3.4.5. Sonuç 70
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 71
KAYNAKLAR 73
ÖZGEÇMİŞ 79
EKLER 83

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 2.1. Uygulamada ME için en çok kullanılan ψ-fonksiyonları 16
Çizelge 3.1. Tobacco verisi için özdeğerler (λ_i), koşul İndeksi (K_i) ve varyans şişirme faktörü (VIF_i) değerleri 36
Çizelge 3.2. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri 37
Çizelge 3.3. Tobacco verisisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_L$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\tilde{\alpha}_L^*$ ve $\tilde{\alpha}_{ML}^*$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri 49
Çizelge 3.4. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}_q(k)$ ve $\hat{\alpha}_{qM}(k)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri 60
Çizelge 3.5. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri 69
Çizelge A.1. Verisi kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve sapan değer olmadığında $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 83
Çizelge A.2. Verisi kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve bir sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 84
Çizelge A.3. Verisi kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve iki sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini 85
Çizelge A.4. Verisi kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve sapan değer olmadığında $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 86
Çizelge A.5. Verisi kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve bir sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 87

Çizelge A.6. Verisi kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve iki sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 88

Çizelge A.7.Verisi kümesinde hatalar *Standart Cauchy* dağılımından üretildiğinde $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 89

Çizelge B.1. Verisi kümesinde $p = 4$ ve sapan değer olmadığında OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 90

Çizelge B.2. Verisi kümesinde $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 91

Çizelge B.3. Verisi kümesinde $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 92

Çizelge B.4. Verisi kümesinde $p = 4$ ve dört sapan değer olduğunda OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin MSE tahmini 93

Çizelge C.1. $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 94

Çizelge C.2. $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 95

Çizelge C.3. $p = 4$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 96

Çizelge C.4. $p = 10$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 97

Çizelge C.5. $p = 10$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 98

Çizelge C.6. $p = 10$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin ortalamaları 99

Çizelge C.7. Veri kümesinde hatalar *Standart Cauchy* dağılımından üretildiğinde önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları 100
Çizelge C.8. $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 101
Çizelge C.9. $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 102
Çizelge C.10. $p = 4$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 103
Çizelge C.11. $p = 10$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 104
Çizelge C.12. $p = 10$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 105
Çizelge C.13. $p = 10$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük MSE tahminlerinin frekansları 106

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 3.1. Tobacco verisi için k sabit iken $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri 39
Şekil 3.2. Tobacco verisi için d sabit iken $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri 40
Şekil 3.3. Tobacco verisi için k veya q sabit iken $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}_q(k)$ ve $\hat{\alpha}_{qM}(k)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri 62

SİMGELER VE KISALTMALAR

AUGLE : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici

AUGLME : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu M-Tahmin Edici

CME : Kısıtlı M-Tahmin Edici

GME : Genelleştirilmiş M-Tahmin Edici

LAD : En Küçük Mutlak Kareler Tahmin Edici

LE : Liu Tahmin Edici

LMS : En Küçük Ortanca Kareler

LTE : Liu-Tipi Tahmin Edici

LTME : Liu-Tipi M-Tahmin Edici

LTS : En Küçük Biçimli Kareler

ME : M-Tahmin Edici

MSE : Hata Kareler Ortalaması

OLSE : En Küçük Kareler Tahmin Edici

RE : Ridge Tahmin Edici

RME : Ridge M-Tahmin Edici

SE : S-Tahmin Edici

SC : Duyarlılık Eğrisi

TRE : İki Parametreli Ridge Tahmin Edici

TRME : İki Parametreli Ridge M-Tahmin Edici

1. GİRİŞ

Lineer regresyon analizinde; klasik en küçük kareler tahmin edici (Ordinary Least Squares Estimator, OLSE) nin uygulanması için belli varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bu varsayımlardan özellikle, tüm gözlemlerin kestirilmiş regresyon doğrusu üzerinde aynı etkiye sahip olması ile açıklayıcı değişkenlerin lineer bağımsız olması çok önemlidir. Bu iki temel varsayım genellikle uygulamalarda sağlanamamaktadır. Bu durumda sapan değerlerin (outliers) varlığı ve çoklu iç ilişki (multicollinearity) problemi olarak adlandırılan iki problem ile karşılaşılır.

Sapan değerlerin OLSE üzerinde önemli derecede olumsuz etkileri vardır. Bu sorunu ortadan kaldırmak amacıyla regresyon tanısı (regression diagnostic) ve dayanıklı tahmin ediciler (robust estimators) olmak üzere temel iki yaklaşım kullanılır. Regresyon tanısında amaç sapan değerleri kesin olarak belirlemek ve sapan değer olarak saptanan gözlemler düzeltildikten ya da veriden çıkarıldıktan sonra OLSE uygulamaktır. Dayanıklı regresyonda ise sapan değerlerden etkilenmeyen dayanıklı tahmin ediciler üretilmesi amaçlanmaktadır.

Dayanıklı bir yöntem; verinin büyük çoğunluğuna uyacak yapıyı, veri yapısında var olabilecek sapmaları ya da sapan değerleri belirlemek için, veya ilişki yapılarındaki sapmalarla ve beklenmeyen dizisel ilişkilerle ilgilenmek için kullanılır (Kayhan, 2006). Bu tanımlama doğrultusunda dayanıklı tahmin edicilerde, dirençlilik (resistant) ve sağlam etkinlik (robustness of efficiency) özellikleri aranmaktadır. Dayanıklı tahmin edicilerde dirençlilik, tahmin edicinin verideki küçük bozulmalara küçük tepkiler ve büyük bozulmalara karşı güvenilir sonuçlar vermesi şeklinde tanımlanabilir. Dirençlilik için literatürde en çok kullanılan ölçüler, etki fonksiyonuna (influence function) dayalı duyarlılık eğrisi (sensitivity curve), değer değişim eğrisi (change of value curve), yerel kayma duyarlılığı (local shift sensitivity), büyük hata duyarlılığı (gross-error sensitivity) ve bozulma noktası (breakdown point) şeklindedir. Ayrıca, dayanıklı tahmin edicide istenen diğer özellikler; tahmin edicinin küçük varyansa sahip olması, model varsayımlarında bozulma olmadığında tutarlı olması, asimptotik olarak yansız ve yüksek etkinliğe sahip olmasıdır (Staudte ve Sheater, 1990). Literatürde dayanıklı yöntemlerle ilgili

yapılan çalışmalarda genellikle bozulma noktası ve asimptotik etkinlik ölçüleri kullanılmaktadır.

Veri kümesinde sapan değerler bulunması durumunda OLSE tutarlı ve güvenilir sonuçlar vermemektedir. Bu tahmin edici için tek bir sapan değer tahminleri olumsuz olarak etkileyebilir. Bu durumda, OLSE nin bozulma noktası 1/n dir ve n sonsuza giderken bozulma noktası sıfıra yakınsar (Donoho ve Huber, 1983). Bu nedenle OLSE'ye alternatif olarak daha dayanıklı tahmin ediciler geliştirilmeye çalışılmıştır.

Hataların OLSE üzerinde büyük etkiye sahip olmasının nedeni fonksiyonda hataların karelerinin kullanılması olarak düşünülmüş ve bunun üzerine en küçük mutlak değerler tahmin edici (Least Absolute Values Estimator, LAD) geliştirilmiştir (Edgeworth, 1887). LAD, hataların mutlak değerlerinin minimize edilmesi esasına dayanıp *y*-yönündeki sapan değerlere karşı dayanıklı fakat X-yönündeki sapan değerlere karşı OLSE'den daha dayanıklı olmakla birlikte, yine de duyarlı bir tahmin edicidir. Bu nedenle X-yönünde büyük bir etki yaratabilecek tek bir gözlem bile bu tahmin edicinin bozulmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla LAD için de bozulma noktası 1/n'dir.

Literatürde, dayanıklı tahmin ediciler içerisinde yer alan en geniş tahmin edici sınıflarından birisi de M-tahmin edicidir (M-estimator, ME). ME'de temel yaklaşım; hataların karelerini minimum yapmak yerine, hataların bir başka fonksiyonunu minimize etmektir. ME, y-yönündeki sapan değerlere karşı dayanıklı olup LAD'dan daha etkindir fakat bu tahmin edici de X-yönündeki sapan değerlere karşı duyarlı olduğu için bozulma noktası 1/n'dir. ME için literatürde yapılan bazı çalışmalar: Tukey (1970), Andrews (1974), Mallows (1975), Dutter (1977), Holland ve Welsch (1977), Huber (1981) ve Hampel ve ark. (1986) şeklindedir. ME'nin X-yönündeki sapan değerlere olan duyarlılığını azaltmak amacıyla genelleştirilmiş M-tahmin edici (generalized M-estimators, GME) geliştirilmiştir (Mallows, 1975). Bu tahmin edicideki amaç sadece X açıklayıcı değişkenine dayanan bazı ağırlık fonksiyonlarının kullanımı ile sapan değerlerin kestirimler üzerindeki etkisini sınırlamaktır.

Buraya kadar tanıtılan tahmin edicilerin düşük bozulma noktasına sahip olma sorunu, yüksek bozulma noktalı dayanıklı tahmin edicilerin geliştirilip geliştirilemeyeceği sorusunu gündeme getirmiştir. Bu amaçla geliştirilen ilk tahmin edici Rousseeuw'un (1984) ileri sürdüğü en küçük ortanca kareler (Least Median of Squares, LMS) tahmin edicisidir. LMS yöntemindeki temel yaklaşım, OLSE'de olduğu gibi hataların karelerinin toplamını minimize etmek yerine hataların karelerinin medyan değerini minimize etmektir (Rousseeuw, 1984). Diğer bir tahmin edici ise Rousseeuw ve Leroy (1987) tarafından önerilen en küçük biçimli kareler (Least Trimmed Squares, LTS) tahmin edicisidir. LTS tekniğinde temel amaç kareleri alınmış hataları küçükten büyüğe doğru sıralayıp, bu hataların ilk h tanesinin toplamını minimize etmektir (genellikle $h = \frac{n}{2} + 1$). Bu iki tahmin edicinin bozulma noktaları %50 olup hem X hem de y-yönündeki sapan değerlere karşı dayanıklıdırlar.

LMS ve LTS tahmin edicilerinde bozulma noktası maksimum değere sahip olduğundan, bundan sonra yapılan çalışmalarda dayanıklı tahmin edicilerde yüksek asimptotik etkinlik araştırmaları amaçlanmıştır. Rousseeuw ve Yohai (1984) hem yüksek bozulma noktasına hem de yüksek asimtotik etkinliğe sahip olacak biçimde S-tahmin edici (S-estimator, SE) sınıfını tanımlamıştır. SE'deki amaç hataların saçılımını minimize etmeye dayanmaktadır. Buraya kadar sözü edilen tahmin ediciler içerisinde en çok dikkat çekenler ME ve SE olmuştur. Daha yakın zamanda ki bir gelişme ise Mendes ve Tyler tarafından (1996) yüksek bozulma noktalı ve asimptotik etkinlikli Kısıtlı M tahmin edici (Constrained M Estimator, CME) sınıfının önerilmesidir. CME, ME'nin yerel dayanıklılık özellikleri ile SE'nin global dayanıklılık özelliklerine sahiptir (Arslan ve ark., 2002).

Diğer yandan açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağıntı olması çoklu iç ilişki problemine neden olmaktadır. Bu durumda OLSE hala yansızdır fakat varyansı çok büyüktür. Bu nedenden dolayı OLSE parametrelerin gerçek değerlerinden uzaklaşır. Bu problemin etkisini minumuma indirgemek için önerilen yöntemler genel olarak ek verinin toplanması, modelin yeniden belirlenmesi ve yanlı tahmin edicilerin kullanılmasıdır.

Farrar ve Glauber (1967) ve Silvey (1969) çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için ek verinin toplanmasını önermişlerdir. Fakat ekonomik

kısıtlamalardan veya sürecin örnekleme için yeterince uzun bir işleyişe sahip olmamasından dolayı ek veri toplamak her zaman mümkün olmayabilir.

Diğer taraftan, çoklu iç ilişkinin nedeni model seçiminden kaynaklanabilir. Bu durumda ya açıklayıcı değişkenler yeniden tanımlanır ya da ilişkili açıklayıcı değişkenlerden biri çıkarılır. Fakat açıklayıcı değişkenlerin birinin çıkartılması modelin etkinliğini azaltabilir. Çünkü çoklu iç ilişki olsa bile değişkenler birbirini tam temsil etmeyebilir (Lipovetsky ve Conklin, 2001).

Çoklu iç ilişkinin etkisini azaltmak için kullanılan diğer bir yöntem yanlı tahmin ediciler tanımlamaktır. Diğer iki yöntemin ciddi dezavantajlarının olması yanlı tahmin edicilerin ortaya çıkmasına ve incelenmesine neden olmuştur. Yanlı tahmin edicilerde temel amaç OLSE'nin yansızlığından vazgeçip küçük bir yanlılık (bias parameter) terimi ekleyerek tahmin edicinin varyansını minimize etmektir. Böylece yanlı tahmin edicilerin performansı, tahmin edicinin varyansının ve yanlılığının karesinin toplamı olan hata kareler ortalaması (MSE) ile ölçülmektedir. Yanlı tahmin edicilerle ilgili literatürde birçok çalışma bulunmakta ve araştırmalar devam etmektedir. Bu çalışmada kullanılan yanlı tahmin ediciler ile ilgili çalışmalar aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Literatürde en yaygın kullanılan yanlı tahmin edicilerden birisi Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen ridge tahmin edicisi (RE) dir. RE de temel amaç, OLSE de kullanılan $X'X$ (X, açıklayacı değişken) matrisinin herbir köşegenine k yanlılık parametresi eklenilerek çoklu iç ilişkinin etkisinin azaltılmasıdır. RE, k nın karmaşık bir fonksiyonu olduğundan, k nın seçimi problemi ortaya çıkmaktadır. Bu nedenden dolayı k nın seçimi ile ilgili birçok çalışma yapılmış olup araştırmalar devam etmektedir. Literatürde k nın seçimi ile ilgili yapılan bazı temel çalışmalar şu şekildedir: Hoerl ve Kennard (1970), Mallows (1973), Theobald (1974), McDonald ve Galarneau (1975), Hoerl ve ark. (1975), Lawless ve Wang (1976) ve Kibria (2003). RE'de k'nın nasıl seçileceği ile ilgili bir uzlaşmanın olmamasından dolayı Liu (1993) Stein tahmin edicisi (1956) ile RE'nin avantajlarını birleştirerek literatürde yaygın olarak kullanılan yeni bir tahmin edici önermiştir. Daha sonra Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) bu tahmin ediciyi, Liu tahmin edici (LE) olarak adlandırmıştır. LE'nin RE'ye göre avantajı d'nin seçiminin k'ya göre daha kolay

olmasıdır. Çünkü d yanlılık parametresi LE'nin bir lineer fonksiyonudur. Ayrıca Liu (1993), LE'nin OLSE'ye göre üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiş ve MSE yi minimum yapan d yanlılık parametresini önermiştir. Bununla birlikte, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) LE'nin yanlılığını azaltmak için hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin ediciyi (AUGLE) önermiş olup AUGLE'nin üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemişlerdir. RE ye alternatif diğer bir çalışma ise Liu (2003) tarafından ileri sürülen Liu-tipi tahmin edicisidir (LTE). Bu tahmin edici, uygulamalarda RE için önerilen k yanlılık parametresinin tahminleri çok küçük değerler aldığında koşul sayısının düşürülememesi ve böylece çoklu iç ilişki probleminin devam etmesinden dolayı RE'ye alternatif olarak önerilmiştir. Ayrıca, Liu (2003) LTE'nin RE'ye göre üstünlüklerini MSE kriterine göre teorik olarak ve simülasyon çalışması ile incelemiştir. Daha sonra Lipovetsky ve Conklin (2005) RE nin bazı asimptotik özelliklerini inceleyerek, çoklu belirleyicilik katsayısını (R^2) maksimize etmek için iki parametreli ridge tahmin edicisini (TRE) önermişlerdir. Bunun yanı sıra, Toker ve Kaçıranlar (2013) TRE'nin OLSE, RE ve Stein tahmin edicilerine göre üstünlüklerini MSE kriterine göre teorik olarak incelemişlerdir. Bu çalışmanın dışında literatürde sıkça kullanılan bazı yanlı tahmin ediciler ile ilgili çalışmalar şu şekildedir: Swindel (1976), Gibbson (1981), Vinod ve Ullah (1981), Baye ve Parker (1984), Nomura ve Ohkubo (1985), Singh ve ark (1986), Myers (1990), Sarkar (1992), Saleh ve Kibria (1993), Sarkar (1996), Gruber (1998), Kaçıranlar ve ark. (1998, 1999), Sakallıoğlu ve ark. (2001), Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001), Groβ (2003).

Diğer taraftan regresyon analizinde veri kümesinde çoklu iç ilişki ve sapan değer probleminin aynı anda bulunması çok sık karşılaşılan bir problemdir. Bu durumda hem çoklu iç ilişkinin etkisini hem de sapan gözlemlerin etkisini azaltmak için yanlı ve dayanıklı tahmin edicilerin birlikte bulunduğu dayanıklı tahmin ediciler tanımlanmıştır. Bu çalışmalar genellikle iki yöntem üzerinde ilerlemiştir: Birincisi hatalara farklı ağırlıklar vererek dayanıklı ağırlıklı yanlı tahmin edicilerin tanımlanmasıdır. Bu yöntem doğrultusunda yapılan bazı çalışmalar şu şekildedir: Holland (1973), Askin ve Montgomery (1980), Pfaffenberger ve Dielman (1985, 1990). Diğer yöntemde ise yanlı tahmin edicilerden bazıları OLSE'nin bir

formu şeklinde yazıldığından ve OLSE sapan değerlere karşı hassas olduğundan OLSE yerine dayanıklı tahmin ediciler kullanılarak, (y-yönündeki sapan değerler için) dayanıklı yanlı tahmin edicilerin tanımlanmasıdır. Bu yöntem doğrultusunda yapılan bazı çalışmalar şu şekildedir: Silvapulle (1991), Arslan ve Billor (1996), Arslan ve Billor (2000), Jadkav ve Kashid (2011) ve Kan ve ark. (2013).

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, lineer regresyonda çoklu iç ilişki ve sapan değer problemlerinin OLSE üzerindeki etkilerine ve bu problemlerinin çözümü için geçmişte yapılan bazı çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu iki problemin incelenmesinde kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar kısaca verilmiştir. Üçüncü bölümde, veri setinde çoklu iç ilişki ve sapan değer problemlerinin aynı anda bulunması durumunda bu problemlerin çözümü için ME'ye dayalı yeni dayanıklı yanlı tahmin ediciler olan Liu-tipi M-tahmin edici (LTME), hemen hemen yansız genelleştirilmiş M-tahmin edici (AUGLME) ve iki parametreli ridge M-tahmin edici (TRME) tanımlanmış ve MSE kriterine göre üstünlükleri teorik olarak ve/veya simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. Ayrıca, Silvapulle (1991) nin önerdiği dayanıklı ridge M-tahmin edicisi (RME) için k yanlılık parametresi seçim yöntemleri önerilmiş olup, geniş bir simülasyon çalışmasıyla önerilen k yanlılık parametrelerinin MSE kriterine göre performanslarını incelenmiştir. Ek olarak, bu karşılaştırmalar gerçek veri seti üzerinde yapılan uygulamalarla teorik ve/veya simülasyon çalışmaları ile desteklenmiştir. Çalışmanın son bölümünde, üçüncü bölümde önerilen ve incelenen yeni dayanıklı yanlı tahmin edicilerin performansları incelenmiş olup gelecekte bu iki problemin çözümü için yeni çalışma alanları önerilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

2.1. Modelin Yapısı ve Varsayımlar

Çoklu doğrusal regresyon modelini

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1.}$$

göz önüne alalım. Burada; y, $n \times 1$ tipinde yanıt değişkenin vektörü, X, $n \times p$ tipinde açıklayıcı değişkenlerin matrisi, β, $p \times 1$ tipinde bilinmeyen parametrelerin vektörü ve ε, $n \times 1$ tipinde rasgele hataların vektörüdür. (2.1.) modeli için OLSE;

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

şeklinde verilen $S(\beta)$ fonksiyonunu minimum yapan;

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \tag{2.2.}$$

ifadesidir. OLSE'nin önemli istatistiksel özellikleri aşağıda verilmiştir:

(i) Yansız bir tahmin edicidir ($E(\hat{\beta}) = \beta$),

(ii) En iyi lineer yansız tahmin edicidir (Gauss-Markov Teoremi, yani diğer yansız tahmin ediciler arasında minimum varyansa sahiptir),

(iii) $\varepsilon_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ olmak üzere $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$ dağılımına sahiptir.

OLSE'nin yukarıdaki önemli istatistiksel özellikleri sağlayabilmesi için belli varsayımlar gerekmektedir. Bu varsayımlar şu şekildedir:

1) y, yanıt değişkeni X, açıklayıcı değişkenin lineer fonksiyonudur,
2) Hata terimi sıfır ortalamalı ve sabit varyanslıdır $(E(\varepsilon_i) = 0\,, Var(\varepsilon_i) = \sigma^2)$,
3) Hata terimleri birbiriyle ilişkisizdir $\left(Cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0\,, i \neq j\right)$,
4) $X = [X_1, X_2, \dots, X_P]$ olmak üzere; $X_1, X_2, \dots, X_P$ açıklayıcı değişkenleri rasgele değişken olmamalı,
5) $X_1, X_2, \dots, X_P$ açıklayıcı değişkenleri lineer bağımsız ve doğru ölçülmüş olmalıdır,
6) Hatalar sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip olmalıdır $\left(\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2\,)\right)$.

Bu varsayımlara ek olarak tüm gözlemlerin tahmin edilmiş regresyon doğrusu üzerinde aynı etkiye sahip olması gerekmektedir. Yani veri kümesinde sapan değer olmamalıdır (Huber, 1981).

Çoklu lineer regresyon analizinde, veri kümesinde sapan değerlerin bulunması durumunda OLSE güvenilir sonuçlar vermemektedir. Bu nedenden dolayı sapan gözlemlerin belirlenmesi modelin uygunluğu, güvenirliği ve kararlılığı için gereklidir. En genel manada verilerin homojen çoğunluğu tarafından önerilen modele uyumsuzluk gösteren gözlem veya gözlemlere sapan değer(ler) denir.

Sapan değerler regresyon analizi sonuçları üzerinde yaptıkları etkilere bağlı olarak bağımlı değişken yönünde (*y*- yönünde) sapan değerler, bağımsız değişkenler yönünde (*X*-yönünde) sapan değerler, hem bağımlı hem de bağımsız değişkenler yönünde sapan değerler ve etkili gözlemler (influential observations) olmak üzere dört grupta incelenir.

- Lineer regresyonda, regresyon doğrusunun uzağında olan bir başka ifade ile rezidüsü büyük olan gözlemlere *y*-yönünde sapan değerler denir. Regresyonda, *y*-yönünde sapan değerlere aykırı değer de denir.
- *X*-uzayında veri kümesinden uzakta bulunan noktalar, *X*-yönünde sapan değerler (high leverage points) olarak adlandırılır. *X*-yönündeki sapan değerler ikiye ayrılırlar:

(i) Kötü kaldıraç (Bad leverage) noktası: Regresyon doğrusunun eğimini çok fazla değiştiren *X*- yönündeki sapan değerlere kötü kaldıraç noktası denir.

(ii) İyi kaldıraç (good leverage) noktası: Regresyon katsayılarının doğruluğunu arttıran *X*- yönündeki noktalara iyi kaldıraç noktası denir.

- Hem *X*-uzayındaki hem de *y*-uzayındaki veri kümesinden uzakta bulunan noktalara hem bağımlı hem de bağımsız değişkenler yönünde sapan değerler denir.
- Veri kümesindeki diğer gözlemlerle karşılaştırıldığında tek tek ya da hep beraber kestirilmiş regresyon denklemine etki eden gözlemlere etkili gözlemler (influential observations) denir.

Sapan değerlerin OLSE üzerinde önemli derecede olumsuz etkileri olduğundan yukarıda bahsedilmiştir. Bu sorunu ortadan kaldırmak amacıyla Regresyon Tanısı (Regression Diagnostic) ve Dayanıklı Regresyon (Robust Regression) olmak üzere iki temel yaklaşım kullanılır. Regresyon tanısında amaç etkili gözlemleri kesin olarak belirlemek ve sapan değer olarak saptanan gözlemler düzeltildikten ya da veriden çıkarıldıktan sonra OLSE uygulamaktır. Dayanıklı regresyonda ise sapan değerlerden etkilenmeyen dayanıklı tahmin ediciler üretilmeye çalışılır.

2.2. Dayanıklı Tahmin Ediciler ve Özellikleri

2.2.1. Dayanıklı Tahmin Edicilerin Özellikleri

Dayanıklı bir tahmin edicide bulunması gereken temel iki özellik dirençlilik ve sağlam etkinliktir.

Bir tahmin edici az sayıdaki büyük hatadan (gross error) veya herhangi bir miktardaki yuvarlama-gruplama hatalarından (rounding and grouping errors) sınırlı miktarda etkileniyorsa dirençlidir denir.

Örneklemin küçük bir alt kümesi tahminler üzerinde gereğinden çok bir etkiye sahip değilse bu tahmin edici büyük hatalara karşı dirençlidir yorumu yapılabilir. Eğer tahmin edici küçük hatalara karşı sürekli olarak tepki gösteriyorsa hatta tahminler bu gözlemlerin küçük bir parçasının yuvarlanma ya da gruplanması ile belirlenmiyorsa bu tahmin edici için gruplama-yuvarlama hatalarına karşı dirençlidir denir (Kayhan, 2006).

Bir tahmin edicinin varyansı her bir dağılım için minimuma yakın bir değer alıyorsa bu tahmin edici sağlam etkinliğe sahiptir denir.

2.2.2. Dayanıklı Tahmin Ediciler için Aranan Ölçüler

Dirençlilik veya sağlam etkinliğin değerlendirilmesinde literatürde kullanılan bazı ölçüler aşağıdaki gibi verilebilir.

Bozulma Noktası: $Z = \{(x_{11}, \dots, x_{1p}, y_1), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{np}, y_n)\}$ n tane veriden oluşan bir örneklem ve T, Z' nin herhangi bir tahmin edicisi olsun.

Orijinal veri noktalarından herhangi m tanesi keyfi olarak değiştirildiğinde ve elde edilen yeni örneklem Z' olmak üzere maksimum yanlılık

$$bias(m; T, Z) = sup_{Z'} \|T(Z') - T(Z)\|$$

olarak tanımlanır. Burada $bias(m; T, Z)$ sonsuz ise yani m sapan değer T üzerinde geniş bir etkiye sahipse bu tahmin edicinin bozulma noktası olarak ifade edilir. Bu nedenle, T tahmin edicisinin bozulma noktası sonlu örneklem için;

$$\varepsilon_n^* = min\left\{\frac{m}{n}; bias(m; T, Z)\ sonsuz\right\} \quad (2.3.)$$

şeklinde tanımlanır (Donoho ve Huber, 1983).

Etki Fonksiyonu: F dağılımda T tahmin edicisinin etki fonksiyonu;

$$IF(x; T, F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(F_{X,\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon} \quad (2.4.)$$

olarak tanımlanır. Burada $F_{X,\varepsilon}$ ve Δ_x

$$F_{X,\varepsilon} = (1-\varepsilon)F + \varepsilon\Delta_x, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$\Delta_x(y) = \begin{cases} 0 & y < x \\ 1 & y \geq x \end{cases}$$

ile verilir (Hampel, 1974).

Bozulma noktası güvenirliğin evrensel bir ölçüsüyken; etki fonksiyonu, tahmin edici üzerindeki son derece küçük etkileri ölçer. Dayanıklı tahmin ediciler için kullanılan birçok ölçü etki fonksiyonuna dayanmaktadır. Etki fonksiyonuna dayalı literatürde kullanılan bazı ölçüler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Duyarlılık Eğrisi: Duyarlılık eğrisi, örnekleme bir gözlem eklendiğinde ya da çıkarıldığında tahminler üzerinde oluşan etkiyi gösterir.

$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, $n = 2,3,4, \cdots$ kitleden alınmış herhangi bir örneklem için T_n tahmin edicisinin duyarlılık eğrisi (Sensitivity Curve, SC);

$$SC(x; x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, T_n) = n\{T_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x) - T_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\}$$

veya

$$SC(x; x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, T_n) = {}^{1}/_{n}\{T_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x) - T_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\}$$

olarak tanımlanır (Hoaglin, Mosteller ve Tukey, 2000). *SC*, eklenen gözlem x'in tahmin edici üzerindeki etkisini gösterir. Bu nedenle örneklemede olabilecek bir büyük hatanın etkisini tanımlamak için sıkça kullanılan bir ölçüdür. Bir gözlem için yuvarlama-gruplama hatası, örneklemden bir gözlemin çıkarılmasıyla aynı anlamda düşünülebilir. Bu nedenle bu eğri aynı zamanda yuvarlama-gruplama hatasının tahmin edici üzerindeki etkisini göstermek için de kullanılır.

Büyük Hata Duyarlılığı: Büyük hata duyarlılığı, T_n tahmin edicisi üzerindeki tek bir bozulmuş gözlemin asimptotik olarak maksimum etkisini ölçer ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

F dağılımı altında T' nin tutarlı bir kestiricisi T_n olmak üzere büyük hata duyarlılığı (Gross Error Sensitivity, $g.e.s$);

$$g.e.s = sup_x\left|\left(IF(x;T,F)\right)\right|$$

olarak tanımlanır. Bir tahmin edicinin asimptotik yanlılığı $g.e.s$ ile ilişkili olup, bozulmadan kaynaklanan maksimum yanlılık asimptotik olarak

$$sup_{\Delta_x}|(1-\varepsilon)F + \varepsilon\Delta_x - T(F)|$$

ile hesaplanır. IF' nin verilen tanımından maksimum yanlılık yaklaşık olarak $g.e.s$' nin ε katı kadardır. Bir tahmin edici için $g.e.s$ sınırlı ise bu tahmin edici dirençli ve sağlam etkinliğe sahiptir (Hoaglin, Mosteller ve Tukey, 2000).

2.2.3. Bazı Dayanıklı Tahmin Ediciler

En Küçük Mutlak Değer (LAD) Tahmin Edici: Hataların OLSE üzerinde büyük etkiye sahip olmasının nedeni fonksiyonda hataların karelerinin kullanılması olarak düşünülmüş, bunun üzerine en küçük mutlak değer (LAD) tahmin edici önerilmiştir (Edgeworth, 1887). Bu tahmin edicide temel yaklaşım, hataların mutlak değerlerinin toplamının minimize edilmesidir:

$$min \sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|.$$

LAD tekniği, *y*-yönündeki sapan değerlere karşı dayanıklı fakat *X*-yönündeki sapan değerlere karşı ise OLSE'den daha dayanıklı olmakla birlikte, yine de duyarlı bir tahmin edicidir. Bu nedenle *X*-yönünde büyük bir etki yaratabilecek tek bir gözlem bile bu tahmin edicinin bozulmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla LAD için de bozulma noktası 1/n'dir.

LAD tekniğinde, parametrelerin hesaplanması kısıtlı bir optimizasyon problemi olarak düşünülebilir ve bu doğrultuda literatürde yapılan başlıca çalışmalar: Gonin ve Money (1989), Charnes ve ark. (1995) ve Li (1998) şeklindedir.

M-Tahmin Edicileri (ME): Dayanıklı tahmin ediciler içerisinde yer alan en geniş tahmin edici sınıflarından birisi de ilk defa Huber (1964) tarafından ortaya atılmış olan M-tahmin edicidir (ME). ME, y- yönündeki sapan değerlere karşı dayanıklı olup LAD' dan daha etkindir fakat bu tahmin edici de X-yönündeki sapan değerlere karşı duyarlı olduğu için bozulma noktası 1/n'dir. ME'de temel yaklaşım; hataların karelerini minumum yapmak yerine, hataların bir başka fonksiyonu olan $\rho(\varepsilon_i)$ minimize etmeyi amaçlamaktadır ve

$$min \sum_{i=1}^{n} \rho(\varepsilon_i) = min \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i - x_i'\beta) \\ = min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\beta_j\right), \quad j = 1,2,\dots,p \qquad (2.5.)$$

olarak tanımlanır. Burada, x_i' X' in i. satırını göstermektedir. Ayrıca, ρ için aranan özellikler aşağıdaki gibidir (Maronna ve ark., 2006):

i) $\rho(0) = 0$,
ii) $\rho(\varepsilon) \geq 0$,
iii) $\rho(\varepsilon) = \rho(-\varepsilon)$ (simetrik),
iv) ρ sürekli ve türevlenebilir,
v) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ için $\rho(\varepsilon_1) < \rho(\varepsilon_2)$.

ME Hesaplanması: ME, ölçek değişmezliği gerektirmediğinden, ME genelde

$$min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\varepsilon_i}{s_0}\right) = min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{s_0}\right) \qquad (2.6.)$$

denklemi ile çözülür. Burada, $s_0 = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$ ile verilir. (2.6.) ifadesinin minimumunu bulmak için, β'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde;

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\frac{y_i-x_i'\beta}{s_0}\right)=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{y_i-x_i'\beta}{s_0}\right)x_{ij}=0,\qquad j=1,2,\dots,p \tag{2.7.}$$

elde edilir. Burada ψ, ρ fonksiyonun türevidir. Eğer ρ fonksiyonu konveks ise (2.6.) ve (2.7.) ifadeleri birbirine denk olur. Aksi takdirde (2.6.) ifadesinin birden çok çözümü olacağından en iyi tahmini belirlemekte sorun yaşanabilir. (2.7.) de verilen ψ fonksiyonu genelde lineer değildir ve iteratif yöntemlerle çözülmelidir. Literatürde bir çok doğrusal olmayan optimizasyon teknikleri var olmakla birlikte iteratif olarak yeniden ağırlıklandırılmış en küçük kareler (Iteratively Reweighted Least Squares, IRWLS) yöntemi çok yaygın kullanılmaktadır. Bu durumda (2.7.) ile verilen denklem IRWLS yöntemi ile çözülecektir.

Eş. (2.7.) ile verilen denklemin IRWLS yöntemi ile çözümü aşağıdaki gibidir: IRWLS yöntemini kullanmak için, β ve s_0'ın sırasıyla $\hat{\beta}_0$ ve s gibi başlangıç tahminlerinin var olduğu kabul edilir ve (2.7.) denklemi;

$$\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{y_i-x_i'\beta}{s_0}\right)x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ij}\{\psi((y_i-x_i'\beta)/s_0)/(y_i-x_i'\beta/s_0)\}(y_i-x_i'\beta)}{s_0}=0, \tag{2.8.}$$

şeklinde verilir ve (2.8.) denklemi,

$$\sum_{i=1}^{n}w_{i0}\left(\frac{y_i-x_i'\beta}{s_0}\right)x_{ij}=0,\quad j=1,2,\dots,p \tag{2.9.}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada,

$$w_{i0}=\begin{cases}\dfrac{\psi((y_i-x_i'\hat{\beta}_0)/s_0)}{(y_i-x_i'\hat{\beta}_0)/s_0}, & y_i\neq x_i'\hat{\beta}_0\\ 1 & y_i=x_i'\hat{\beta}_0\end{cases}$$

şeklinde verilir (Montgomery ve ark., 2001). Ayrıca, (2.9.) un matrisi gösterimi;

$$X'W_0X\beta = X'W_0y$$

şeklindedir. Burada, W_0 köşegenleri w_{i0} ağırlıklarından oluşan köşegen (diagonal) matristir. Yukarıda cebirsel ifadeler ile verilen IRWLS yönteminin adım adım algoritması aşağıda verilmiştir.

IRWLS Algoritması:

1) Başlangıç tahmin edicisi seçilir (genellikle OLSE),
2) Başlangıç tahmin edicisi kullanılarak rezidüler (residuals) hesaplanır,
3) Bu rezidüler yardımıyla ölçek tahmini hesaplanır,
4) Rezidüler ölçek tahmini yardımıyla standartlaştırılır,
5) Standartlaştırılmış rezidüler ve ME' nin ağırlık fonksiyonu yardımıyla ağırlıklar bulunur. Ağırlıklar yardımıyla ağırlıklı en küçük kareler tekniği kullanılarak regresyon katsayıları tahmin edilir ($\hat{\beta} = (X'WX)^{-1}X'Wy$, W, köşegen elemanları ağırlık (w) olmak üzere köşegen matristir),
6) Ağırlıklı en küçük kareler ile elde edilen regresyon katsayıları ile bir önceki aşamada elde edilen katsayılar arasındaki fark çok küçük ise işlem sonlandırılır. Değilse bulunan katsayılarla 2. Adıma dönülerek yakınsama sağlanana kadar işlemlere devam edilir.

ME hesaplanması için anlatılanları, Huber'in (1981) önerdiği ρ-fonksiyonu üzerinde gösterip, diğer çalışmaları bir tablo halinde özetleyelim.

Huber'in ρ-fonksiyonu: Huber (1981) tarafından standartlaştırılmış hata terimleri için önerilen fonksiyon,

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2}, & -c \le r \le c \\ c|r| - \frac{c^2}{2}, & r < -c \; veya \; c < r \end{cases} \qquad (2.10.)$$

olarak tanımlanır. Burada $r = \frac{e}{s}$, $s = \frac{median\{|e_i - median(e_i)|\}}{0{,}6745}$ ve $c = 1.345$ dir. (2.10.) eşitliğinin *r*' ye göre türevi alındığında,

$$\psi(r) = \begin{cases} -c, & r < -c \\ r, & |r| \le c \\ c, & r > c \end{cases} \tag{2.11.}$$

fonksiyonu elde edilir. $\psi(r)$ fonksiyonunun *r*' ye bölünmesiyle

$$w = \begin{cases} 1, & |r| \le c \\ \frac{c}{r} & |r| > c \end{cases} \tag{2.12.}$$

ağırlık fonksiyonu elde edilir (Ergül, 2006).

Regresyon katsayıları ise IRWLS algoritması ile hesaplanır. ME için kullanılan bazı ψ-fonksiyonları Çizelge 2.1. de verilmiştir (Yıldırım, 2012).

Çizelge 2.1. Uygulamada ME için en çok kullanılan ψ-fonksiyonları

Fonksiyonun Adı	**$\psi(r)$-Fonksiyonu**	**Düzeltme Sabiti**
Andrews	$\psi(r) = \begin{cases} \sin(r/c) & r \le c\pi \\ 0 & r > c\pi \end{cases}$	$c = 1.399$
Cauchy	$\psi(r) = \frac{r}{1 + (r/c)^2} \quad \lvert r\rvert < \infty$	$c = 2.385$
Fair	$\psi(r) = \frac{r}{1 + \lvert r\rvert/c} \quad \lvert r\rvert < \infty$	$c = 1.4$
Hampel	$\psi(r) = \begin{cases} r & \lvert r\rvert < a \\ asign(r) & a < \lvert r\rvert \le b \\ \frac{asign(r)(c - \lvert r\rvert)}{c - b} & b < \lvert r\rvert \le c \\ 0 & \lvert r\rvert > c \end{cases}$	$a = 1.7$ $b = 3.4$ $c = 8.5$
Huber	$\psi(r) = \begin{cases} r & \lvert r\rvert \le c \\ csign(r) & \lvert r\rvert > c \end{cases}$	$c = 1.385$
Logistics	$\psi(r) = ctanh(r/c) \quad \lvert r\rvert < \infty$	$c = 1.205$
Welsch	$\psi(r) = rexp(-(r/c)^2) \quad \lvert r\rvert < \infty$	$c = 2.985$
Talwar	$\psi(r) = \begin{cases} r & \lvert r\rvert \le c \\ 0 & \lvert r\rvert > c \end{cases}$	$c = 2.795$
Tukey (Bisquare)	$\psi(r) = \begin{cases} r\left[1 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^2 & \lvert r\rvert \le c \\ 0 & \lvert r\rvert > c \end{cases}$	$c = 4.685$

ME'nin asimptotik kovaryansı: Kabul edelim ki ME, $\hat{\beta}_M \sim N(\beta, A^2(X'X)^{-1})$ olsun. Pratikte bu varsayım; $n^{1/2}\left(\hat{\beta}_M - \beta\right) \rightarrow N(0, A^2(X'X)^{-1})$ olduğundan dolayı yaklaşık olarak sağlanır. Burada;

$$A^2 = s_0^2 E[\psi^2(\varepsilon/s_0)]/[E\psi'(\varepsilon/s_0)]^2, \tag{2.13.}$$

ve s_0^2 hataların ölçeğidir (Huber, 1981). Burada bilinmeyen değerler yerine tahminleri yazıldığında $\hat{\beta}_M$ için asimptotik kovaryansın tahmini;

$$\widehat{COV}\left(\hat{\beta}_M\right) = \hat{\Omega} = \hat{A}^2(X'X)^{-1}, \tag{2.14.}$$

$$\hat{A}^2 = s^2(n-p)^{-1}\sum_{i=1}^{n}[\psi(e_i/s)]^2 / \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\psi'(\varepsilon/s)\right]^2 \tag{2.15.}$$

şeklindedir (Huber, 1981).

2.3. Çoklu İç İlişki

(2.1) ifadesindeki çoklu lineer regresyon modelinde, açıklayıcı değişkenlerin ilişkisiz olduğu varsayılır. Fakat uygulamada, lineer ilişki olabilir. Bu durumda açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağımsızlık varsayımı geçerli olmaz. Bu da çoklu iç ilişki problemine neden olur.

X_j, X matrisinin j-inci kolon vektörü ($X = [X_1, X_2, \dots, X_P]$) olsun.

$$\sum_{j=1}^{p} t_j X_j = 0 \tag{2.16.}$$

olacak şekilde en az bir $t_j \neq 0$, $j = 1,2, \dots, p$ sabitleri varsa $X_1, X_2, \dots, X_P$ vektörleri lineer bağımlıdır.

X'in kolonlarının bir kümesi için (2.16.) sağlanıyorsa "tam çoklu iç ilişki vardır" (Silvey, 1969). Bu durumda X matrisinin rankı p'den küçük olur ve $X'X$ matrisi tersinir olmayacaktır. Buna kötü koşulluluk problemi denir. Fakat (2.16.) X'in kolonlarının bazı alt kümeleri için yaklaşık olarak doğru ise "yaklaşık çoklu iç ilişki" vardır.

2.3.1. Çoklu İç İlişkinin Nedenleri

Çoklu iç ilişkinin birçok nedeni olabilir (Judge ve ark., 1985, Montgomery ve ark, 2001) . Bunlardan bazıları şu şekildedir:

1) Uygulanan veri toplama metodu: Analizcinin (2.16) ile tanımlı bir bölgenin alt uzayından örneklem almış olması çoklu iç ilişkiye neden olur.

2) Modeldeki ve kitledeki zorunluluklar: Kitledeki zorunluluklar daha çok açıklayıcı değişkenlerin kimyasal veya üretim proseslerinde ortaya çıkar. Örneğin, bir kimyasal reaksiyonun gerçekleşmesi için belli içeriklerin sabit oranlarda olması gibi.

3) Modelin belirlenmesi: Xaçıklayıcı değişkenlerinin değişim aralığı küçük iken bir regresyon modeline polinom terimi eklenmesi çoklu iç ilişki problemine neden olur.

4) Modelin aşırı tanımlanması: Gözlemlerden çok açıklayıcı değişkenlerin olduğu modellere aşırı tanımlanmış model denir ($p > n$). Daha çok tıbbi araştırmalarda ve ekonometrik modellerde ortaya çıkar. Bu gibi durumlarda açıklayıcı değişkenlerden bazılarını atmak gerekir. Değişken çıkarılması, hem analizi kolaylaştırmak hem de var olan iç ilişkiyi indirgemek için kullanılabilecek bir diğer yöntemdir.

2.3.2. Çoklu İç İlişkinin OLSE Üzerindeki Etkileri

1) OLSE ile tahmin etmek regresyon katsayılarının varyansını artırır;

$X = (X_1, X_2)$ özel halini ele alalım ($p = 2$). Bu durumda

$$C = (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-r_{12}^2} & \frac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} \\ \frac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} & \frac{1}{1-r_{12}^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. r_{12}; X_1 ile X_2 arasındaki korelasyon katsayısı ve $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ olduğundan $r_{12} \to 1$ iken $Var(\hat{\beta})$ büyüyecektir. Dolayısıyla X_1 ve X_2 arasında güçlü bir çoklu iç ilişki problemi oluşacaktır. Bu durumu genelleştirecek olursak, yani p açıklayıcı değişken olması durumunda $(X'X)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanları c_{jj} ler;

$$c_{jj} = \frac{1}{1-R_j^2}, \quad j = 1,2,\dots,p$$

şeklinde ifade edilir. Burada R_j^2 , X_j açıklayıcı değişkeninin, geriye kalan $p-1$ açıklayıcı değişken üzerine regres edilmesiyle elde edilen çoklu belirleyicilik katsayısıdır. Dolayısıyla X_j ve diğer açıklayıcı değişkenler arasında bir lineer ilişki varsa bu durum yine varyans artırıcı bir etki yapacaktır. Varyansın büyük olması ise sonuçların örneklemden örnekleme değişebilirliği anlamına gelecektir. Bu durum kestiricinin güvenirliğini azaltacaktır.

2) $\hat{\beta}$ ile β parametresi arasındaki uzaklığı artırır;

$X'X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ olmak üzere çoklu iç ilişki problemi $X'X$ matrisinin öz değerlerinin küçük olmasına neden olacaktır. Dolayısıyla

$$L_1^2 = \left(\hat{\beta} - \beta\right)'\left(\hat{\beta} - \beta\right) \Rightarrow E(L_1^2) = \sigma^2 trace(X'X)^{-1} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j} \qquad (2.17.)$$

ile verilen $E(L_1^2)$ yi yani gerçek parametre ile OLSE nin arasındaki uzaklığın beklenen değerini artıracaktır.

3) $\hat{\beta}$'nın boyunun (normunun) büyümesine neden olur;

(2.17.) ile verilen $E(L_1^2)$ nin büyük olması durumunda tahmin edilmiş parametrenin normunun beklenen değeri;

$$E(\hat{\beta}'\hat{\beta}) = \beta'\beta + E(L_1^2)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $\hat{\beta}$'nın normu gerçek parametreden daha büyük olacaktır. Kötü koşulluluk arttıkça tahmin edilmiş parametrelerin normu daha da büyüyecektir.

Sonuç olarak çoklu iç ilişki problemi olması durumunda; OLSE model parametrelerinin kötü tahmin edilmesine neden olacaktır.

2.3.3. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesi için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bunlardan bazıları şöyledir:

- Korelasyon matrisinin incelenmesi:

$X'X$ matrisinin köşegen üzerinde bulunmayan elemanlarının (r_{ij}) incelenmesi çoklu iç ilişkinin belirlenmesini sağlar. X_i ve X_j açıklayıcı değişkenleri lineer bağımlı ise $|r_{ij}|$ bire yakın olur. Basit korelasyon katsayısı (r_{ij})' nin incelenmesi sadece ikili açıklayıcı değişkenler arasındaki lineer bağımlılığı incelemede yararlıdır. Fakat ikiden fazla açıklayıcı değişken arasında lineer bağımlılık varsa (r_{ij}) uygun ölçü olmayabilir. Dolayısıyla açıklayıcı değişkenler arasında ikili lineer ilişkiden daha karışık bir durum söz konusu ise korelasyon matrisi çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde yeterli bir ölçü olmayacaktır.

- Varyans şişirme faktörü (VIF):

$(X'X)^{-1}$ matrisinin j. köşegen elemanına j.varyans şişirme faktörü (VIF_j) denir.
R_j, X_j 'nin diğer $p-1$ açıklayıcı değişken üzerine olan modelinden çoklu belirleyicilik katsayısı olmak üzere;

$$VIF_j = C_{jj} = \left(1 - R_j^2\right)^{-1} \quad (2.18.)$$

olarak ifade edilir. X_j diğer açıklayıcı değişkenlerin bir alt kümesi ile yaklaşık olarak lineer bağımlı ise R_j bire yaklaşır ve VIF_j büyür. Herhangi bir VIF_j değeri 10'dan büyükse çoklu iç ilişki problemi vardır denir (Montgomery ve ark., 2001).

- $X'X$ matrisinin karakteristik köklerinin (özdeğerleri) analizi:

$X'X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ olmak üzere bir ya da daha fazla özdeğerin küçük (sıfıra yakın) olması veride çoklu iç ilişki olduğunu gösterir (Vinod ve Ullah, 1981). λ_{min} ve λ_{max} $X'X$ matrisinin minumum ve maksimum özdeğerleri olmak üzere;

$$K = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

olarak tanımlanan koşul sayısı çoklu iç ilişki problemini belirlemede kullanılır.

$K < 100 \Rightarrow$ çoklu iç ilişki yoktur
$100 < K < 1000 \Rightarrow$ orta şiddetli çoklu iç ilişki vardır
$K \geq 1000 \Rightarrow$ şiddetli çoklu iç ilişki vardır

Koşul sayısı sık kullanılan ölçülerden biri olmakla birlikte, kolon ölçeklemesine duyarlıdır (Özkale, 2007). Bu olumsuzluğu ortadan kaldırabilmek için koşul indeksi tanımlanmıştır. $X'X$ matrisinin koşul indeksi;

$$K_j = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_j}, \quad j = 1,2,\ldots,p$$

olarak tanımlanır. Büyük koşul indeks sayısı ($K \geq 1000$) $X'X$'deki lineer bağımlılığın bir ölçüsüdür (Özkale, 2007). Ayrıca en büyük koşul indeksi koşul sayısıdır.

- Diğer tanılama metotları:

Çoklu iç ilişki bir çok yöntemle belirlenebilir. Bunlardan birisi $X'X$ matrisinin determinantıdır. Standartlaştırılmış formda $0 \leq |X'X| \leq 1$'dir. $|X'X| = 1$ ise açıklayıcı değişkenler ortogonaldir aksine $|X'X| = 0$ ise tam çoklu iç ilişki vardır. $|X'X|$ sıfıra yaklaştıkça çoklu iç ilişkinin şiddeti artacaktır (Farrar ve Glauber, 1967).

2.3.4. Çoklu İç İlişki için Çözüm Yöntemleri

Çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için önerilen metotlar genel olarak ek verinin toplanması, modelin yeniden belirlenmesi ve OLSE' den farklı yanlı tahmin yöntemlerinin kullanılmasıdır.

- Ek verinin toplanması:

Farrar ve Glauber (1967) ve Silvey (1969) çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için ek verinin toplanmasını önermişlerdir. Fakat ekonomik kısıtlamalardan veya prosesin örnekleme için yeterince uzun bir işleyişe sahip olmamasından dolayı ek veri toplamak her zaman mümkün olmayabilir.

- Modelin yeniden belirlenmesi:

Çoklu iç ilişkinin nedeni model seçiminden kaynaklanabilir, örneğin ilişkili açıklayıcı değişkenlerin kullanılması gibi. Bu gibi durumlarda ya açıklayıcı değişkenler yeniden tanımlanır ya da ilişkili açıklayıcı değişkenlerden biri çıkarılır.

Fakat açıklayıcı değişkenlerden birinin çıkartılması modelin etkinliğini azaltabilir. Çünkü çoklu iç ilişki olsa bile değişkenler birbirini tam temsil etmeyebilirler (Lipovetsky ve Conklin, 2001). Açıklayıcı değişkenlerin her biri uyumda ve bağımlı değişkenin yapısını açıklamada özel bir role sahip olabilir.

- Alternatif tahmin yöntemlerinin kullanılması:

Çoklu iç ilişki olması durumunda OLSE hala yansızdır fakat varyansı çok büyüktür. Bu problemi ortadan kaldırmak için önerilen tahmin prosedürleri yanlı tahmin edicilerin ortaya çıkmasına ve bunların incelenmesine neden olmuştur. Yanlı tahmin yöntemlerinde amaç küçük bir yanlılık terimi kullanarak varyansı küçük bir tahmin edici elde etmektir. Buna bağlı olarak yanlı tahmin edici için daha dar güven aralıkları elde edilecek ve böylece özellikle çoklu iç ilişkinin varlığı durumunda β parametresinin daha uygun bir tahmini elde edilmiş olacaktır. Yanlı tahmin edicilerin karşılaştırılmasında literatürde birçok yöntem bulunmaktadır. Bunlar içerisinde uygulamada en çok kullanılan MSE kriteri olup

$$MSE(\hat{\beta}^*) = E\left[(\hat{\beta}^* - \beta)'(\hat{\beta}^* - \beta)\right]$$
$$MSE(\hat{\beta}^*) = trace\left(Var(\hat{\beta}^*)\right) + \left[(E(\hat{\beta}^*) - \beta)'(E(\hat{\beta}^*) - \beta)\right] \qquad (2.19.)$$

ile verilir. Burada $\hat{\beta}^*$, β'nın herhangi bir tahmin edicisidir. Bu çalışmada kullanılacak bazı yanlı tahmin ediciler ve özellikleri üçüncü bölümde yer alacaktır.

3. DAYANIKLI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde veri kümesinde *y*-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki olması durumunda, ME' ye dayalı; Liu-tipi M-tahmin edicisi, hemen hemen yansız genelleştirilmiş M-tahmin edicisi, iki parametreli ridge M-tahmin edicisi tanımlanacak ve üstünlükleri MSE kriterine göre teorik olarak veya simülasyon çalışmasıyla gösterilecektir. Ayrıca, Silvapulle' nin (1991) önerdiği dayanıklı ridge M-tahmin edicisi için k yanlılık parametresi seçim yöntemleri önerilecek ve geniş bir simülasyon çalışmasıyla önerilen k' ların MSE kriterine göre performansları incelenecektir. Ek olarak, bu karşılaştırmalar gerçek veri seti üzerinde yapılan uygulamalarla desteklenecektir. Bu bölümde yapılan uygulamalardaki bütün değerler MATLAB 2014 programı ile elde edilmiştir.

3.1. Liu-Tipi M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları

3.1.1. Giriş

Eşitlik (2.1.) ile verilen çoklu lineer regresyon modeli,

$$y = X\beta + \varepsilon$$

ele alalım. (2.1.) denkleminin kanonik formu;

$$y = Z\alpha + \varepsilon, \tag{3.1.}$$

burada $Z = XT$, $\alpha = T'\beta$ ve T de kolonları $X'X$ matrisinin özvektörlerinden oluşan ortogonal bir matris olup;

$$Z'Z = T'X'XT = \wedge = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \tag{3.2.}$$

ile elde edilir. Burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$, $X'X$ matrisinin özdeğerleridir. Eş. (3.1.) denklemi için OLSE;

$$\hat{\alpha} = \wedge^{-1} Z'y \tag{3.3.}$$

ile verilir. OLSE çoklu iç ilişki probleminden olumsuz etkilendiğinden Hoerl ve Kennard (1970) bu problemin çözümü için ridge tahmin edicisini önermiştir (RE):

$$\hat{\alpha}(k) = (\wedge + kI)^{-1} \wedge \hat{\alpha} = T_k \hat{\alpha}. \tag{3.4.}$$

Burada, $T_k = (\wedge + kI)^{-1}$ ve $k > 0$ yanlılık parametresidir (biasing parameter). Ayrıca, Hoerl ve Kennard (1970) RE' nin, OLSE' den MSE kriterine göre daha iyi olacak şekilde en az bir $k > 0$ olduğunu göstermiştir.

RE' de temel problem, k yanlılık parametresinin seçimidir. Literatürde k'nın seçimiyle ilgili birçok çalışma bulunmakta ve araştırmalar devam etmektedir. Bu çalışmalarda önerilen bazı k seçim yöntemleri şu şekildedir:

1. Ridge Trace: Hoerl ve Kennard (1970), k'nın seçimi için ridge trace yöntemini önermiştir. Ridge trace k'ya karşı $\hat{\alpha}(k)$'nin elemanlarının grafiğidir. k arttıkça tahminler küçülür ve belli bir k değerinden sonra durağan olurlar. $\hat{\alpha}(k)$ nin durağan olduğu en küçük k değerine uygun bir değer olarak alınır.

2. Hoerl ve Kennard (1970) RE'nin OLSE'den daha küçük MSE'ye sahip yanlılık parametresinin tahmini olarak $\hat{k}_{HK} = \frac{\sigma^2}{\hat{\alpha}^2_{maks}}$'yı vermiştir.

3. Hoerl ve ark. (1975) RE'nin MSE değerini minumum yapan $k_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$ değerlerinin harmonik ortalaması olan $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}'\hat{\alpha}}$'yi önermiştir.

4. Hoerl ve Kennard (1976) tarafından önerilen iteratif yöntem;

$$k_0 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}'\hat{\alpha}}$$

başlangıç değeri olmak üzere;

$$k_I = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}(k_0)'\hat{\alpha}(k_0)}$$

ile verilir ve işlem ardışık olarak sürdürülür. Eğer $\left[\frac{k_{i+I}-k_i}{k_i}\right] < 20\left[\frac{\left[trace(X'X)^{-1}\right]}{p}\right]^{-1.3}$ ise iteresyon sonlandırılır.

5. Lawless ve Wang (1976) bayesyen yaklaşımla $\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}'\Lambda\hat{\alpha}}$ önermişlerdir.

6. Hocking ve ark. (1976) RE'nin OLSE'den daha küçük MSE'ye sahip yanlılık parametresinin tahmini $\hat{k}_{HSL} = \frac{\hat{\sigma}^2\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\hat{\alpha}_i)^2}{\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\hat{\alpha}_i{}^2\right)^2}$'yi önermişlerdir.

7. Kibria (2003) RE nin MSE değerini minumum yapan $k_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$ değerlerinin sırasıyla; aritmetik ortalamasını, geometrik ortalamasını ve medyanını alarak

$$\hat{k}_{AM} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i{}^2},$$

$$\hat{k}_{GM} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\left(\prod_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i{}^2\right)^{1/p}},$$

$$\hat{k}_{MED} = median\left\{\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i{}^2}\right\}, \quad i = 1,2,\dots,p\ (p \geq 3\ ol.\text{üz.}).$$

yanlılık parametrelerini önermiştir ve geniş bir simülasyon çalışmasıyla üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiştir.

RE, y-yönündeki sapanlara karşı hassas olduğundan Silvapulle (1991) ME'ye dayalı Ridge M- tahmin edici (RME);

$$\hat{\alpha}_M(k) = T_k\hat{\alpha}_M, \qquad k > 0 \tag{3.5.}$$

ile önermiştir. Burada; $\hat{\alpha}_M$, ME'nin kanonik formudur. Ayrıca, Silvapulle (1991) RME'nin RE ve ME'den üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiş ve RME için k yanlılık parametresini şu şekilde önermiştir:

$$\hat{k}_1 = \frac{p\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_M{}'\hat{\alpha}_M}, \tag{3.6.}$$

$$\hat{k}_2 = \frac{p\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_M{}'\Lambda\hat{\alpha}_M}. \tag{3.7.}$$

Burada, $\hat{A}^2$ Eş. (2.15.) ile verilmiştir.

RE'ye alternatif olarak önerilen diğer bir yanlı tahmin edici Liu–tipi tahmin edici (LTE) dir (Liu, 2003). LTE'nin önerilmesindeki temel amaç şu şekildedir: RE'de çoklu iç ilişki problemi gidermek için kullanılan yöntem; $X'X$ matrisinin köşegen elemanına bir $k \geq 0$ sabiti ekleyerek $X'X$ matrisinin koşul sayını düzeltmektir. Uygulamada RE için önerilen k değerleri oldukça küçük olmaktadır. $X'X + kI$'nın koşul sayısı k'nın azalan bir fonksiyonudur. Bu nedenden dolayı eğer $X'X + kI$'nın koşul sayısının küçük olmasını isteniyorsa, k'nın değeri büyük seçmelidir. Bu durumda, uygulamada seçilen küçük k değeri çoklu iç ilişki problemini gidereememektedir. Bu problemin çözümü için Liu (2003) LTE'yi şu şekilde önermiştir:

$$\hat{\alpha}(k,d) = (\wedge + kI)^{-1}(Z'y - d\alpha^*), \qquad k > 0, -\infty < d < \infty \tag{3.8.}$$

Burada α^*, α'nın herhangi bir tahmin edicisidir. Eş. (3.8.) ifadesinde sırasıyla $\alpha^* = \hat{\alpha}$ ve $\alpha^* = \hat{\alpha}(k)$ alınırsa;

$$\hat{\alpha}(k,d) = (\wedge + kI)^{-1}(\wedge - dI)\hat{\alpha} = W_1(k,d)\hat{\alpha} \tag{3.9.}$$

$$\tilde{\alpha}(k,d) = (\wedge + kI)^{-1}(\wedge - d(\wedge + kI)^{-1}\wedge)\hat{\alpha} = W_2(k,d)\hat{\alpha} \tag{3.10.}$$

ifadeleri elde edilir (Liu, 2003). Eş. (3.9.) ve (3.10.) dan;

$$\lim_{d\to 0}\hat{\alpha}(k,d) = \hat{\alpha}(k) \text{ ve } \lim_{d\to 0}\tilde{\alpha}(k,d) = \hat{\alpha}(k)$$
$$\lim_{\substack{k\to 0\\ d\to 0}}\hat{\alpha}(k,d) = \hat{\alpha} \text{ ve } \lim_{\substack{k\to 0\\ d\to 0}}\tilde{\alpha}(k,d) = \hat{\alpha} \tag{3.11.}$$

sonuçları elde edilir. Ayrıca, Liu (2003) LTE'nin OLSE ve RE'den MSE kriterine göre üstünlüklerini incelemiş ve LTE'nin MSE'sini minimum yapan yanlılık parametrelerinden d'yi aşağıdaki şekilde önermiştir.

Eş. (3.9.) ve (3.10.) ile verilen $\hat{\alpha}(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}(k,d)$ MSE'leri şu şekildedir:

$$MSE\left(\hat{\alpha}(k,d)\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{(d-\lambda_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(d+k)^2\alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.12.}$$

$$MSE\left(\tilde{\alpha}(k,d)\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\lambda_i - \frac{d\lambda_i}{\lambda_i+k}\right)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(k\lambda_i+k^2+d\lambda_i\right)^2}{(\lambda_i+k)^4}\alpha_i^2. \tag{3.13.}$$

Eş. (3.12.) ve (3.13.) ifadelerinin d'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve σ^2, α_i^2 ve k bilinmeyen parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\sigma}_{RE}^2$, $\hat{\alpha}_i^2(k)$ ve $\hat{k} = \frac{\lambda_1 - 100\times\lambda_p}{99}$ tahminleri yazılırsa;

$$\hat{d}_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\sigma}_{RE}^2 - \hat{k}\hat{\alpha}_i^2(k)\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^2}{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\sigma}_{RE}^2 + \lambda_i\hat{\alpha}_i^2(k)\right)/\lambda_i\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^2}, \tag{3.14.}$$

$$\tilde{d}_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\sigma}_{RE}^2\lambda_i - \hat{k}\hat{\alpha}_i^2(k)\lambda_i\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^3}{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\sigma}_{RE}^2\lambda_i + \hat{\alpha}_i^2(k)\lambda_i^2\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^4}, \tag{3.15.}$$

ifadeleri elde edilir (Liu, 2003). Burada, $\hat{\sigma}_{RE}^2$; RE rezüdüleri ile elde edilen hata varyans tahminidir.

3.1.2. Liu-Tipi M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları

Eş. (3.9.) ve (3.10.) ile verilen tahmin ediciler y-yönündeki sapan değerlerden olumsuz etkilendiğinden ME'ye dayalı Liu-tipi tahmin edicileri (LTME) RME'ye alternatif olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\hat{\alpha}_M(k,d) = W_1(k,d)\hat{\alpha}_M, \qquad k > 0, -\infty < d < \infty \tag{3.16.}$$

$$\tilde{\alpha}_M(k,d) = W_2(k,d)\hat{\alpha}_M \qquad k > 0, -\infty < d < \infty. \tag{3.17.}$$

Eş. (3.11.)'de LTE'nin özel durumlarında OLSE ve RE'ye yakınsadığı gösterilmişti. Benzer şekilde LTME için de aşağıdaki sonuçlar;

$$\begin{aligned} &\lim_{d\to 0} \hat{\alpha}_M(k,d) = \hat{\alpha}_M(k) \text{ ve } \lim_{d\to 0} \tilde{\alpha}_M(k,d) = \hat{\alpha}_M(k) \\ &\lim_{\substack{k\to 0 \\ d\to 0}} \hat{\alpha}_M(k,d) = \hat{\alpha}_M \text{ ve } \lim_{\substack{k\to 0 \\ d\to 0}} \tilde{\alpha}(k,d) = \hat{\alpha}_M \end{aligned} \tag{3.18.}$$

elde edilir.

LTME'nin, LTE, ME ve RME den MSE kriterine göre üstünlükleri aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 3.1.: $k > 0$ ve d $(-\infty < d < \infty)$ olmak üzere her $i(i = 1,2,\cdots,p)$ için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ ise $MSE\big(\hat{\alpha}_M(k,d)\big) < MSE\big(\hat{\alpha}(k,d)\big)$ ve $MSE\big(\tilde{\alpha}_M(k,d)\big) < MSE\big(\tilde{\alpha}(k,d)\big)$'dir.

İspat: İspat için gerekli olan bazı tahmin edicilerin MSE leri şu şekildedir:

$$MSE(\hat{\alpha}_M) = \sum_{i=1}^{p} \Omega_{ii}, \tag{3.19.}$$

$$MSE\big(\hat{\alpha}_M(k)\big) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2}\Omega_{ii} + k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.20.}$$

$$MSE\big(\hat{\alpha}_M(k,d)\big) = \mathrm{g}_1(d) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(d-\lambda_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}\Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(d+k)^2\alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.21.}$$

$$\mathrm{MSE}\big(\tilde{\alpha}_M(k,d)\big) = \mathrm{g}_2(d) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\lambda_i - \frac{d\lambda_i}{\lambda_i+k}\right)^2}{(\lambda_i+k)^2}\Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(k\lambda_i+k^2+d\lambda_i\right)^2}{(\lambda_i+k)^4}\alpha_i^2. \tag{3.22.}$$

Burada, $k > 0$, $-\infty < d < \infty$ ve Ω_{ii} ise $\hat{\alpha}_M$ nin varyans-kovaryans matrisinin i.inci köşegen elemanıdır. Eş. (3.12.) ve (3.13.) kullanılarak, $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k,d)\right)$ ile $MSE\left(\hat{\alpha}(k,d)\right)$ ve $MSE\left(\tilde{\alpha}_M(k,d)\right)$ ile $MSE\left(\tilde{\alpha}(k,d)\right)$ arasındaki farklar;

$$M=MSE\left(\hat{\alpha}_M(k,d)\right) - MSE\left(\hat{\alpha}(k,d)\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(d-\lambda_i)^2[\lambda_i\Omega_{ii}-\sigma^2]}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2} \tag{3.23.}$$

$$\begin{aligned} M^* &= MSE\left(\tilde{\alpha}_M(k,d)\right) - MSE\left(\tilde{\alpha}(k,d)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i - \frac{d\lambda_i}{\lambda_i+k}\right)^2 \frac{[\lambda_i\Omega_{ii}-\sigma^2]}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2} \end{aligned} \tag{3.24.}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $M < 0$ ve $M^* < 0$ olması için, $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ şartının sağlanması gerekir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.: $k > 0$ olmak üzere;

i) $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k,d)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ olacak şekilde $d_{m1} = \frac{\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\Omega_{ii}-k\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^2}{\sum_{i=1}^{p}(\Omega_{ii}+\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^2}$,

ii) $MSE\left(\tilde{\alpha}_M(k,d)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ olacak şekilde $d_{m2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i{}^2\Omega_{ii}-k\alpha_i^2\lambda_i)/(\lambda_i+k)^3}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i{}^2(\Omega_{ii}+\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^4}$

vardır.

İspat: Eş. (3.21.) ve (3.22.) de verilen $g_1(d)$ ve $g_2(d)$ fonksiyonlarını minumum yapmak için, d ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$d_{m1} = \frac{\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\Omega_{ii}-k\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^2}{\sum_{i=1}^{p}(\Omega_{ii}+\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.25.}$$

$$d_{m2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i{}^2\Omega_{ii}-k\alpha_i^2\lambda_i)/(\lambda_i+k)^3}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i{}^2(\Omega_{ii}+\alpha_i^2)/(\lambda_i+k)^4} \tag{3.26.}$$

ifadeleri elde edilir. Burada, $g_1(0) = MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ ve $g_2(0) = MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ olduğundan; $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k,d_{m1})\right) < \text{MSE}\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ ve $MSE\left(\tilde{\alpha}_M(k,d_{m2})\right) < \text{MSE}\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ elde edilir.

Teorem 3.2.'den ve Silvapulle'nin (1991) verdiği Teorem (i)'den ($MSE(\hat{\alpha}_M(k)) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olacak şekilde $k > 0$ vardır) geçişme özelliği sağlanarak aşağıdaki sonuç teorem verilir.

Sonuç Teorem 3.3.: $MSE\big(\hat{\alpha}_M(k,d)\big) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ ve $MSE\big(\tilde{\alpha}_M(k,d)\big) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olacak şekilde en az bir $-\infty < d < \infty$ ve $k > 0$ vardır.

3.1.3. LTME için k ve d Seçimi

Eşitlik (3.25.) ve (3.26.)'da α_i^2 ve Ω_{ii} bilinmeyen parametrelerin yerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2 - \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ yansız tahminleri yazıldığında;

$$\hat{d}_{m1} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{A}^2 - \hat{k}\hat{\alpha}_{Mi}^2(k)\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^2}{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{A}^2 + \lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2(k)\right)/\lambda_i\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^2}, \tag{3.27.}$$

$$\hat{d}_{m2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{A}^2\lambda_i - \hat{k}\hat{\alpha}_{Mi}^2(k)\lambda_i\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^3}{\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{A}^2\lambda_i + \hat{\alpha}_{Mi}^2(k)\lambda_i^2\right)/\left(\lambda_i+\hat{k}\right)^4}, \tag{3.28.}$$

ifadeleri elde edilir. Burada; $\hat{k} = \frac{\lambda_1 - 100\times\lambda_p}{99}$ ile verilir (Liu, 2003).

3.1.4. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, ele aldığımız çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer problemlerine yönelik veri seti üretilecek ve farklı tahmin edicilerin performanslarını incelemek için bir simülasyon çalışması verilecektir. Dizayn edilecek veri setinde açıklayıcı değişkenler:

$$x_{ij} = (1-\rho^2)^{1/2} z_{ij} + \rho z_{i,p+1}, \qquad i = 1,2,\dots,n \text{ ve } j = 1,2,\dots,p \tag{3.29.}$$

eşitliği ile üretilmiştir. (McDonald ve Galarneau, 1975 ve Gibbons, 1981). Burada z_{ij}, standart normal dağılımdan üretilmiş olup, ρ^2 iki açıklayıcı değişken arasındaki

korelasyon katsayısıdır. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresyon katsayıları MSE'yi minimum yapacak şekilde, $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör olarak seçilmiştir (Kibria, 2003). *n* gözlemli y-yanıt değişkeni ise:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (3.30.)$$

ile üretilmiştir. Burada ε_i, $N(0, \sigma^2)$ veya Normal dağılımdan daha kalın kuyruklu olan Standart Cauchy dağılımından üretilmiş ve β_0 sabiti sıfır olarak alınmıştır.

Bu çalışmada incelenen model parametreleri ve değerleri aşağıda verilmiştir:

$\rho = 0.85, 0.9, 0.99, 0.999,$
$n = 20, 50, 100,$
$\sigma^2 = 1, 25, 100,$
$p = 4,10.$

Ayrıca, hatalar normal dağıldığında sapan değerlerin tahmin ediciler üzerindeki etkisini incelemek için, *y*-yönündeki sapan değerlerin 3 farklı durumu ele alınmıştır. Bu durumlar, sapan değer bulunmaması, bir ve iki sapan değer olmasıdır. Sapan değer bulunmaması durumunda, y-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiştir. Bir sapan değer olması durumunda, y-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiş olup, y-yanıt değişkeninin üçüncü gözlemi $y_3^* = y_3 + 10\sigma$ ifadesi ile değiştirilmiştir. İki sapan değer olması durumunda; y-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiş, y-yanıt değişkeninin üçüncü gözlemi yukarıdaki gibi ve y-yanıt değişkenin onbirinci gözlemi $y_{11}^* = y_{11} - 5\sigma$ ile değiştirilerek elde edilmiştir.

Yukarıda tasarlanan simülasyon deneyi 5000 defa tekrarlanmış ve her bir deney için tahmin edicilerin MSE tahminleri:

$$\hat{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{5000} \sum_{j=1}^{5000} \sum_{i=1}^{p} \left(\hat{\alpha}_{ij} - \alpha_i\right)^2 \qquad (3.31.)$$

ile hesaplanmıştır. Burada $\hat{\alpha}_{ij}$, j. tekrarın i. parametre tahmini, α_i ise gerçek parametre değeridir. Simülasyon çalışmasında incelenen tahmin ediciler için yanlılık parametreleri şu şekilde seçilmiştir:

$\hat{\alpha}(k) \rightarrow \hat{k}_{HKB}$ (Hoerl ve ark., 1975),
$\hat{\alpha}_M(k) \rightarrow \hat{k}_1$ (Silvapulle, 1991),
$\hat{\alpha}(k,d) \rightarrow \hat{d}_{opt}$ ve $\hat{k}$ (Liu, 2003),
$\tilde{\alpha}(k,d) \rightarrow \tilde{d}_{opt}$ ve $\hat{k}$ (Liu, 2003),
$\hat{\alpha}_M(k,d) \rightarrow \hat{d}_{m1}$ ve $\hat{k}$,
$\tilde{\alpha}_M(k,d) \rightarrow \hat{d}_{m2}$ ve $\hat{k}$.

Simülasyon sonuçlarında $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicileri için elde edilen MSE tahminleri ortalamaları Ekler bölümünde bulunan Çizelge A.1.-A.7.'de verilmiştir.

Hataların Normal dağılımdan üretildiği Çizelge A.1.-A.6. nın sonuçları;

- Çoklu iç ilişkinin derecesi (ρ) arttığında, $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ ve $\hat{\alpha}_M(k)$'nin MSE tahminleri artmakta; $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin MSE tahminleri özellikle $\rho = 0.99, 0.999$ olduğu durumlarda azalmaktadır,
- Hataların varyansı (σ^2) arttığında, tüm tahmin edicilerin MSE tahminleri artmaktadır,
- Örneklem hacmi (n) arttığında, tüm tahmin edicilerin MSE tahminleri azalmaktadır,
- Açıklayıcı değişken sayısı (p) arttıkça, $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ ve $\hat{\alpha}_M(k)$'nin MSE tahminleri artmakta fakat $\tilde{\alpha}(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin genellikle azalmaktadır,
- Veri kümesinde y-yönünde sapan değer bulunmadığı ve çoklu iç ilişkinin şiddetli olduğu yerlerde $\hat{\alpha}(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}(k,d)$'nin MSE tahminleri diğer tahmin edicilerden genellikle daha üstündür. Bu gibi durumlarda, $\hat{\alpha}(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}(k,d)$ tahmin edicileri önerilir,

- Veri kümesinde bir veya birden fazla y-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki bulunduğunda; $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin MSE tahminleri, σ^2, n ve p'nin tüm durumlarında diğer tahmin edicilerden çok daha iyidir. Dolayısıyla veri kümesinde y-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki olduğu durumlarda $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin kullanılması önerilir.

Hataların Standart Cauchy dağılımından üretildiği Çizelge A.7.'nin sonuçları;

- Çoklu iç ilişkinin derecesi (ρ) arttığında, $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ ve $\hat{\alpha}_M(k)$'nin MSE tahminleri artmakta fakat $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin MSE tahminleri özellikle $\rho = 0.99, 0.999$ olduğu durumlarda azalmaktadır,
- $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin MSE tahminleri; ρ, n ve p'nin tüm kombinasyonlarında diğer tahmin edicilere göre çok daha performanslıdır. Dolayısıyla, hatalar daha uzun kuyruklu dağılıma sahip ve açıklayıcı değişkenler arasında çoklu iç ilişki problemi bulunuyorsa $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin kullanılması önerilir.

3.1.5. Sayısal Örnek

Tobacco verisi çoklu iç ilişki ve sapan değerlerin OLSE üzerindeki etkisini açıklamak için kullanılan bir veri setidir (Myers, 1990). Bir yanıt değişken (y) ve dört açıklayıcı değişken (x_1, x_2, x_3, x_4) içermektedir. Tobacco verisinde çoklu iç ilişki probleminin belirlenmesi için; korelasyon matris, VIF, özdeğer, koşul indeksleri ve koşul sayısı aşağıdaki şekilde verilir (Tobacco verisi merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmış formda).
Korelasyon matrisi:

$$Corr = X'X = \begin{bmatrix} 1 & 0.988 & 0.997 & 0.996 \\ 0.998 & 1 & 0.985 & 0.987 \\ 0.997 & 0.985 & 1 & 0.993 \\ 0.996 & 0.987 & 0.993 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32.)$$

Eş. (3.32.)'deki korelasyon matrisi incelendiğinde; $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}$ ve r_{34} korelasyon katsayıları bire yakın olduğundan şiddetli çoklu iç ilişki olduğu söylenebilir.

Özdeğer, koşul indeksi, koşul sayıları ve *VIF* değerleri: Çizelge 3.1. incelendiğinde; tüm *VIF* değerleri 10'dan çok büyük, koşul indeksi $K_i > 100$ ve koşul sayısı 1892.333 olduğundan şiddetli çoklu iç ilişki problem olduğu söylenebilir. Ayrıca, λ_1, λ_2, λ_3'ün sıfıra yakın olması şiddetli çoklu iç ilişki olduğunu gösterir.

Çizelge 3.1. Tobacco verisi için özdeğerler (λ_i), koşul İndeksi (K_i) ve varyans şişirme faktörü (VIF_i) değerleri

i	λ_i	K_i	VIF_i
1	0.0021	1892.333	324.141
2	0.0064	620.921	45.172
3	0.0176	225.789	173.257
4	3.9739	1	138.175

Tobacco verisi için sapan değer analizini, literatürde yapılan iki çalışmayla verebiliriz. Bunlarda birincisinde; Rousseeuw ve Leroy (1987) rezidülerden elde edilen En Küçük Medyan Kareler (LMS) yöntemi ile Tobacco verisinde iki tane *y*-yönünde sapan değer olduğunu ve *X*-yönünde sapan değer olmadığını göstermiştir. Diğerinde ise Myers (1990) Tobacco verisi için iki tane *y*-yönünde sapan değer olduğunu göstermiştir.

Çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer içeren Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin parametre ve *MSE* tahminleri Çizelge 3.2.'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri

Tahminler	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
$\hat{\alpha}_1$	0.4857	0.4859	0.4855	0.4856	0.4833	0.4811	0.4963	0.4810
$\hat{\alpha}_2$	-0.672	-0.651	-0.612	-0.5811	-0.4291	-0.1893	-0.7000	-0.1966
$\hat{\alpha}_3$	-1.074	-1.174	-0.851	-0.8819	-0.5872	-0.1312	-0.5976	-0.1593
$\hat{\alpha}_4$	1.4436	0.5929	0.8097	0.2980	0.7196	0.0105	0.3212	0.0296
k			0.0017	0.0021	0.0380	0.0380	0.0380	0.0380
d					-0.0179	0.0014	-0.1271	0.0025
MSE	1.1206	0.8626	0.9373	0.4967	0.4134	0.0550	0.2958	0.0540

Çizelge 3.2.'de, $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$ $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE değerlerinin hesaplanmasında kullanılan MSE ve yanlılık parametreleri;

- $MSE(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}$,
- $MSE(\hat{\alpha}_M)$ →Eş.(3.6.) da; $\Omega_{ii} \rightarrow \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}(k)\right)$ →Eş.(3.7.) de; $\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2$, $k \rightarrow \hat{k}_{HKB}$ ve $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_i^2$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ →Eş.(3.8.) de; $\Omega_{ii} \rightarrow \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $k \rightarrow \hat{k}_1$ ve $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_{Mi}^2$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}(k,d)\right)$ →Eş.(3.15.) de; $\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}_{RE}^2$, $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_i^2(k)$, $k \rightarrow \hat{k}$ ve $d \rightarrow \hat{d}_{opt}$,
- $MSE\left(\tilde{\alpha}(k,d)\right)$ →Eş.(3.16.) de; $\sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}_{RE}^2$, $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_i^2(k)$, $k \rightarrow \hat{k}$ ve $d \rightarrow \tilde{d}_{opt}$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k,d)\right)$ →Eş.(3.23.) de; $\Omega_{ii} \rightarrow \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_{Mi}^2(k)$, $k \rightarrow \hat{k}$ ve $d \rightarrow \hat{d}_{m1}$,
- $MSE\left(\tilde{\alpha}_M(k,d)\right)$ →Eş.(3.25.) de; $\Omega_{ii} \rightarrow \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_{Mi}^2(k)$, $k \rightarrow \hat{k}$ ve $d \rightarrow \hat{d}_{m2}$,

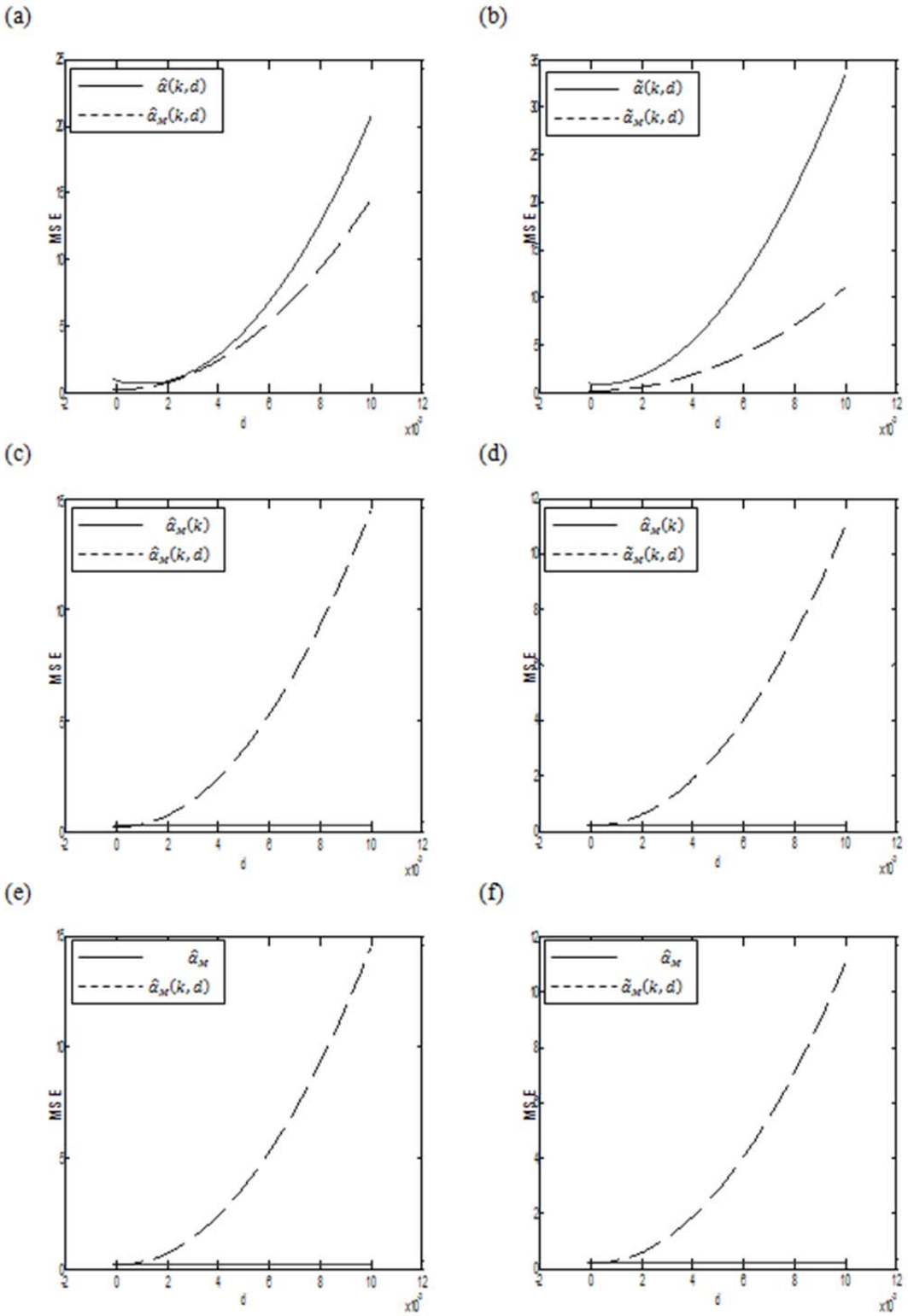
ifadelerinde bilinmeyen parametrelerin yerlerine yazılmasıyla elde edilmiştir.

Çizelge 3.2.'ye bakıldığında yeni önerilen $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha üstün olduğu görülmektedir. Ayrıca, nümerik örnekten elde edilen bu sonuçlar, simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçaları da desteklemiştir.

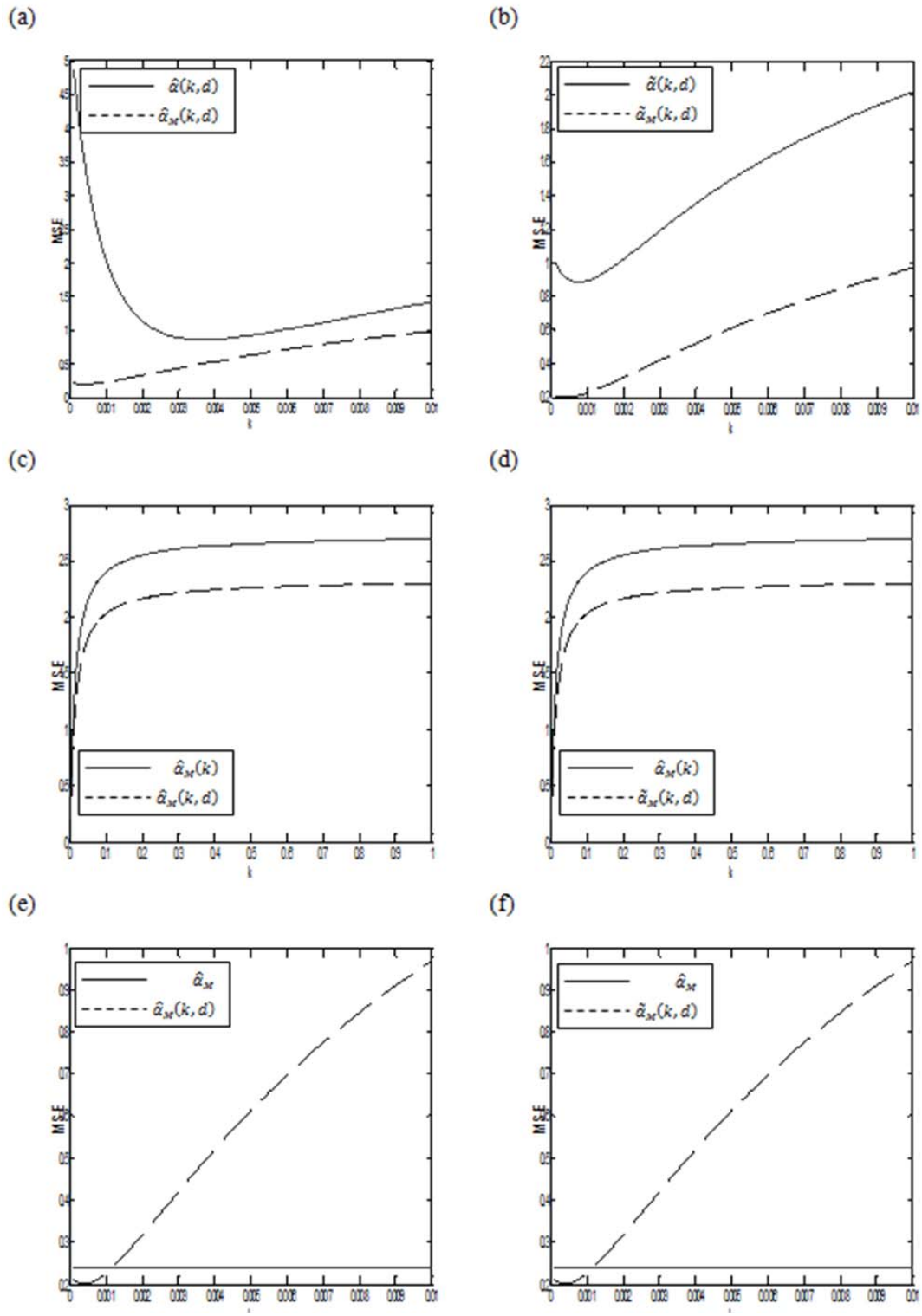
Teorem 3.1., Teorem 3.2. ve Sonuç Teorem 3.3.'ün uygulamaları Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'de gösterilmektedir. Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'nin yorumları şu şekildedir:

- $\widehat{\Omega}_{ii} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0721 \\ 0.1986 \\ 0.5917 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}^2\lambda_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0936 \\ 0.2579 \\ 0.7686 \end{bmatrix}$ olduğundan her $-\infty < d < \infty$ için $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin sırasıyla $\hat{\alpha}(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}(k,d)$'den daha iyi olduğu Şekil 3.1. (a)-(b)'den açıkça görülmekte ve böylece Teorem 3.1. sağlanmaktadır.
- Şekil 3.1. (c)-(d)'den Teorem 3.2.'de ifade edildiği gibi $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin sırasıyla $\hat{\alpha}_M(k)$'dan daha iyi olacak şekilde $\hat{d}_{m1}$ ve $\hat{d}_{m2}$ değerlerinin var olduğu görülmektedir,
- Şekil 3.1. (e)-(f) ye göre; $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$'nin $\hat{\alpha}_M$'den daha iyi olacak şekilde en az bir $\hat{d}_{m1}$ ve $\hat{d}_{m2}$ var olduğu görülmekte olup, aynı zamanda bu durum Sonuç Teorem 3.3.'ü de desteklemektedir.

Benzer yorumlar d sabit iken Şekil 3.2.'den de yapılabilir.



Şekil 3.1. Tobacco verisi için k sabit iken $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri



Şekil 3.2. Tobacco verisi için d sabit iken $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri

3.1.6. Sonuç

Lineer regresyonda, *y*-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki problemlerinin bulunması durumunda OLSE olumsuz etkilenmekte ve güvenilir sonuçlar vermemektedir. Bu durumda, bu iki problemi çözmek için ME'ye dayalı LTME tahmin edicisi önerilmiş ve LTME'nin farklı iki durumu olan $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ nin, diğer tahmin edicilerden daha üstün olduğu durumlar MSE kriterine göre hem teorik hem de simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. Ayrıca, sayısal örnek verilerek teorik karşılaştırmalar ve simülasyon sonuçları desteklenmiştir.

3.2. Hemen Hemen Yansız Genelleştrilmiş Liu M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları

3.2.1. Giriş

Lineer regresyonda, çoklu iç ilişki probleminin OLSE üzerindeki olumsuz etkisini azaltmak için RE önerilmiştir (Hoerl ve Kennard, 1970). Fakat RE'de k'nın seçiminde yaşanılan zorluklardan dolayı, araştırmacılar RE'ye alternatif yanlı tahmin yöntemlerini incelemeye başlamışlardır. Bunların içerisinde literatürde en çok kullanılan yanlı tahmin edicilereden birisi de, Liu'nun (1993) önerdiği tahmin edicidir. Liu (1993), çoklu iç ilişki probleminin etkisini azaltmak için Stein'ın (1956) ileri sürdüğü Stein tahmin edici ile RE'nin avantajlarını birleştireceği düşüncesiyle;

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(d) &= (\wedge + I)^{-1}(X'y + d\hat{\alpha}) \\ &= (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\hat{\alpha}, \qquad 0 < d < 1 \end{aligned} \tag{3.33.}$$

tahmin edicisini önermiştir. Bu tahmin edici, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) tarafından Liu tahmin edicisi (LE) olarak adlandırılmıştır. LE'nin, RE üzerindeki avantajı d'nin bir lineer fonksiyonu olmasıdır. Dolayısıyla d'nin seçimi k'nın seçiminden daha kolaydır. Ayrıca; Liu (1993) LE'nin genelleştirilmiş formu olan, genelleştirilmiş Liu tahmin edicisini (GLE):

$$\hat{\alpha}_L = (\wedge + I)^{-1}(X'y + D\hat{\alpha}) = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + DI)\hat{\alpha}$$
$$= [I - (\Lambda + I)^{-1}(I - D)]\hat{\alpha}, \qquad (3.34.)$$

tanımlamıştır. Burada; $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_p)$, $0 < d_i < 1$, $i = 1,2, \dots, p$. Aynı zamanda Liu (1993) LE'nin, OLSE'den MSE kriterine göre daha iyi olacak şekilde en az bir $0 < d < 1$ olduğunu göstermiş olup, LE ve GLE'nin MSE'sini minumum yapan d ve d_i'yi şu şekilde önermiştir:

$$MSE(\hat{\alpha}(d)) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}, \qquad (3.35.)$$

$$MSE(\hat{\alpha}_L) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}\left(1 - \frac{1-d_i}{\lambda_i + 1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1-d_i}{\lambda_i + 1}\right)^2 \alpha_i^2. \qquad (3.36.)$$

Eş. (3.35.) ve (3.36.)'nın d ve d_i'ye göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle,

$$d = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2 - \sigma^2}{(\lambda_i + 1)^2} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\sigma^2 + \lambda_i \alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2}, \qquad (3.37.)$$

$$d_i = \frac{\alpha_i^2 - \sigma^2}{\alpha_i^2 + \left(\sigma^2 / \lambda_i\right)}, \qquad i = 1,2, \dots, p \qquad (3.38.)$$

elde edilir (Liu, 1993). Burada, Eş. (3.37.) ifadesinde α_i^2 ve σ^2 bilinmeyen parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_i^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}$ ve $\hat{\sigma}^2$ yansız tahminleri ve Eş. (3.38)'de, bilinmeyen parametrelerinin α_i^2 ve σ^2 yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_i^2$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahminleri yazıldığında sırasıyla;

$$\hat{d} = \hat{\sigma}^2 \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}\right], \qquad (3.39.)$$

$$\hat{d}_i = \frac{\lambda_i(\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2)}{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2 + \hat{\sigma}^2}, \qquad i = 1,2, \dots, p \qquad (3.40.)$$

elde edilir (Liu, 1993 ve (Akdeniz ve Kaçıranlar, 1995). LE, y-yönündeki sapanlara karşı hassas olduğundan Arslan ve Billor (2000) ME'ye dayalı robust Liu tahmin edicisini (LME):

$$\hat{\alpha}_M(d) = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\hat{\alpha}_M, \qquad 0 < d < 1 \tag{3.41.}$$

şeklinde önermişlerdir. Ayrıca, Arslan ve Billor (2000), LME'nin LE ve ME'den üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiştir. Ek olarak, LME için MSE'yi minimum yapan d yi şu şekilde önermişlerdir:

$$MSE\big(\hat{\alpha}_M(d)\big) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\lambda_i+d)^2}{(\lambda_i+1)^2}\Omega_{ii} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2}. \tag{3.42.}$$

Eş. (3.42.)'in d'ye göre türevinin alıp sıfıra eşitlenmesiyle,

$$d = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2 - \lambda_i\Omega_{ii}}{(\lambda_i+1)^2} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2 + \Omega_{ii}}{(\lambda_i+1)^2}, \tag{3.43.}$$

elde edilir. Bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii} parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2 - \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ yansız tahminleri yazıldığında;

$$\hat{d} = 1 - \hat{A}^2 \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+1)} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_{Mi}^2}{(\lambda_i+1)^2}\right] \tag{3.44.}$$

elde edilir (Arslan ve Billor, 2000).

Diğer taraftan, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) GLE'nin yanlılığını azaltmak için Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Ediciyi (AUGLE) şu şekilde tanımlamışlardır:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_L^* &= [I + (\Lambda + I)^{-1}(I - D)]\hat{\alpha}_L \\ &= [I - (\Lambda + I)^{-2}(I - D)^2]\hat{\alpha}.\end{aligned} \tag{3.45.}$$

Burada, $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_p)$, $0 < d_i < 1$, $i = 1,2 \dots, p$'dır. Aynı zamanda Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) AUGLE'nin, GLE ve OLSE'den üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiş olup, AUGLE'nin MSE'sini minumum yapan d_i'yi şu şekilde önermişlerdir:

$$MSE(\tilde{\alpha}_L^*) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}\left(1 - \left(\frac{1-d_i}{\lambda_i+1}\right)^2\right)^2 + \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1-d_i}{\lambda_i+1}\right)^4 \alpha_i^2. \quad (3.46.)$$

Eş. (3.46.)'nın d_i'ye göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle;

$$d_i^* = 1 - \frac{\sigma(\lambda_i+1)}{\sqrt{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2}}, \quad (3.47.)$$

ifadesi elde edilir. Burada bilinmeyen α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_i^2$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahminleri yazıldığında;

$$\tilde{d}_i^* = 1 - \frac{\hat{\sigma}(\lambda_i+1)}{\sqrt{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2 + \hat{\sigma}^2}}, \qquad i = 1,2, \dots, p, \quad (3.48.)$$

elde edilir (Akdeniz ve Kaçıranlar, 1995). Ayrıca, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) AUGLE ve GLE'nin parametre tahmini için sırasıyla d_i^* ve d_i alındığında parametre tahminlerinin eşit olduğunu göstermişlerdir.

3.2.2. Genelleştirilmiş Liu ve Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu-M Tahmin Edicileri ve Karşılaştırmaları

Eşitlik (3.34.) ve (3.45.) ile verilen tahmin ediciler *y*-yönündeki sapan değerlere karşı hassas olduğundan sırasıyla ME'ye dayalı Genelleştirilmiş Liu-M (GLME) ve Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu-M tahmin edicileri (AUGLME) aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\hat{\alpha}_{ML} = [I - (\Lambda + I)^{-1}(I - D)]\hat{\alpha}_M, \quad (3.49.)$$

$$\tilde{\alpha}^*_{ML} = [I - (\Lambda + I)^{-2}(I - D)^2]\hat{\alpha}_M. \quad (3.50.)$$

Burada, $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_p)$, $0 < d_i < 1$, $i = 1,2 \dots, p$'dır

AUGLME ve GLME'nin MSE'leri şu şekildedir:

$$MSE(\hat{\alpha}_{ML}) = \sum_{i=1}^{p}\left(1 - \frac{1-d_i}{\lambda_i+1}\right)^2 \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1-d_i}{\lambda_i+1}\right)^2 \alpha_i^2, \quad (3.51.)$$

$$MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) = \sum_{i=1}^{p}\left(1 - \left(\frac{1-d_i}{(\lambda_i+1)}\right)^2\right)^2 \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1-d_i}{(\lambda_i+1)}\right)^4 \alpha_i^2. \quad (3.52.)$$

AUGLME ve GLME'nin performansları aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 3.4.: Her $i = 1,2, \dots, p$ için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ ise

$MSE(\hat{\alpha}_{ML}) < MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) < MSE(\tilde{\alpha}^*_L)$'dir.

İspat: $MSE(\hat{\alpha}_{ML})$ ile $MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML})$ ile $MSE(\tilde{\alpha}^*_L)$ arasındaki farklar, Eş. (3.36.), (3.46.), (3.51.) ve (3.52.) deki MSE'ler kullanılarak;

$$K = MSE(\hat{\alpha}_{ML}) - MSE(\hat{\alpha}_L) = \sum_{i=1}^{p}\frac{(\lambda_i+d_i)^2}{(\lambda_i+1)^2}(\Omega_{ii} - \sigma^2\lambda_i^{-1}),$$

$$K^* = MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) - MSE(\tilde{\alpha}^*_L) = \sum_{i=1}^{p}\left(1 - \left(\frac{1-d_i}{\lambda_i+1}\right)^2\right)^2(\Omega_{ii} - \sigma^2\lambda_i^{-1}),$$

şeklinde elde edilir. Burada, $K < 0$ ve $K^* < 0$ olması için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ olmalıdır. Böylece, her i $(i = 1,2, \dots, p)$ için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ olduğunda $MSE(\hat{\alpha}_{ML}) < MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) < MSE(\tilde{\alpha}^*_L)$ olur.

Teorem 3.5.: Her $i = 1,2, \dots, p$ için $\Omega_{ii} < \lambda_i^{-1}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i+2}{2\lambda_i+3}\right)$ olmak üzere;

i) $MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) < MSE(\hat{\alpha}_{ML})$, $0 < \pi_{1i} < \pi_i < 1$,

ii) $MSE(\tilde{\alpha}^*_{ML}) > MSE(\hat{\alpha}_{ML})$, $0 < \pi_i < \pi_{1i} < 1$,

olacak şekilde $\pi_i = 1 - d_i$ vardır. Burada, $\pi_{1i} = \frac{\lambda_i+1}{2}\left(-1 + \left\{\frac{9\Omega_{ii}+\alpha_i^2}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\}^{1/2}\right)$ ile verilir.

İspat: Eş. (3.51.) ve (3.52.)'deki ifadelerde, $\frac{1-d_i}{\lambda_i+1} = \frac{\pi_i}{\lambda_i+1} = \theta_i$ alınıp düzenleme yapılırsa; $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*) - MSE(\hat{\alpha}_{ML})$ farkı her $i = 1,2,\dots,p$ için

$$\begin{aligned} D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_{ML}) &= (1+\theta_i)^2(1-\theta_i)^2\Omega_{ii} + {\theta_i}^4\alpha_i^2 - (1-\theta_i)^2\Omega_{ii} - {\theta_i}^4\alpha_i^2 \\ &= \theta_i(1-\theta_i)[(2+\theta_i)(1-\theta_i)\Omega_{ii} - \theta_i(1+\theta_i)\alpha_i^2] \\ &= \theta_i(1-\theta_i)\alpha_i^2[(2+\theta_i)(1-\theta_i)\gamma_i - \theta_i(1+\theta_i)] \end{aligned}$$

Şeklinde elde edilir. Burada, $\gamma_i = \frac{\Omega_{ii}}{\alpha_i^2}$, $\pi_i = 1 - d_i$ ve $\theta_i = \frac{\pi_i}{\lambda_i+1}$ olduğundan θ_i ler 0 ile 1 arasındadır ($0 < \theta_i < 1$). Bu durumda, $D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_{ML}) < 0$ olması için

$$(2+\theta_i)(1-\theta_i)\gamma_i - \theta_i(1+\theta_i) < 0, \tag{3.53.}$$

veya (3.53.) ifadesinde $\theta_i = \frac{\pi_i}{\lambda_i+1}$ yerine yazılırsa;

$$\pi_i^2(\gamma_i+1) + (\gamma_i+1)(\lambda_i+1)\pi_i - 2\gamma_i(\lambda_i+1)^2 > 0 \tag{3.54.}$$

olmalıdır. Eş. (3.54.) denklemi π_i'ye göre çözülürse;

$$\pi_{1i} = \frac{\lambda_i+1}{2}\left(-1 + \left\{\frac{9\Omega_{ii}+\alpha_i^2}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\}^{1/2}\right), \tag{3.55.}$$

elde edilir ve $\pi_{1i} < 1$ olması göz önüne alındığında $\Omega_{ii} < \lambda_i^{-1}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i+2}{2\lambda_i+3}\right)$ olmalıdır. Bu durumda $\Omega_{ii} < \lambda_i^{-1}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i+2}{2\lambda_i+3}\right)$ iken $D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_{ML}) < 0$ olması için $0 < \pi_{1i} < \pi_i < 1$ olacak şekilde bir π_i vardır.

Teorem 3.6.: Her $i = 1,2,\dots,p$ için $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)^2-1}$ olmak üzere;

i) $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*) < MSE(\hat{\alpha}_M)$, $0 < \pi_i < \pi_{2i} < 1$,

ii) $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*) > MSE(\hat{\alpha}_M)$, $0 < \pi_{2i} < \pi_i < 1$,

olacak şekilde $\pi_i = 1 - d_i$ vardır. Burada, $\pi_{2i} = (\lambda_i + 1)\left\{\frac{2\Omega_{ii}}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\}^{1/2}$ ile verilir.

İspat : Eş. (3.52.)'deki ifadelerde, $\frac{1-d_i}{\lambda_i+1} = \frac{\pi_i}{\lambda_i+1} = \theta_i$ alınıp düzenleme yapılırsa; $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*) - MSE(\hat{\alpha}_M)$ farkı her $i = 1,2,\dots,p$ için

$$\begin{aligned} D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_M) &= \Omega_{ii}[(1-\theta_i^2)^2 - 1] + {\theta_i}^4\alpha_i^2 \\ &= \theta_i^2[(\theta_i^2 - 2)\Omega_{ii} + \theta_i^2\alpha_i^2], (\theta_i = \tfrac{\pi_i}{\lambda_i+1}, \text{ yazılırsa}) \\ &= \tfrac{\pi_i^2}{(\lambda_i+1)^4}[(\Omega_{ii} + \alpha_i^2)\pi_i^2 - 2(\lambda_i+1)^2\Omega_{ii}] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, $D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_M) < 0$ olması için

$$(\Omega_{ii} + \alpha_i^2)\pi_i^2 - 2(\lambda_i+1)^2\Omega_{ii} < 0, \tag{3.56.}$$

olmalıdır. Eş. (3.56.) denklemi π_i'ye göre çözülürse;

$$\pi_{2i} = (\lambda_i + 1)\left\{\frac{2\Omega_{ii}}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\}^{1/2},$$

elde edilir ve $\pi_{2i} < 1$ olması göz önüne alındığında, $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)^2-1}$ olmalıdır. Böylece, $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)^2-1}$ iken $D_i(\tilde{\alpha}_{ML}^*, \hat{\alpha}_M) < 0$ olması için $0 < \pi_{2i} < \pi_i < 1$ olacak şekilde bir π_i vardır.

Teorem 3.7.: Her $i = 1,2,\dots,p$ için $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)-1}$ olmak üzere;

i) $MSE(\hat{\alpha}_{ML}) < MSE(\hat{\alpha}_M)$, $0 < \pi_i < \pi_{3i} < 1$,

ii) $MSE(\hat{\alpha}_{ML}) > MSE(\hat{\alpha}_M)$, $0 < \pi_{3i} < \pi_i < 1$,

olacak şekilde $\pi_i = 1 - d_i$ vardır. Burada, $\pi_{3i} = (\lambda_i + 1)\left\{\frac{2\Omega_{ii}}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\}$ ile verilir.

İspat : Eş. (3.51.)'deki ifadelerde, $\frac{1-d_i}{\lambda_i+1} = \frac{\pi_i}{\lambda_i+1} = \theta_i$ alınıp düzenleme yapılırsa; $MSE(\hat{\alpha}_{ML}) - MSE(\hat{\alpha}_M)$ farkı her $i = 1,2,\dots,p$ için

$$\begin{aligned} D_i(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_M) &= \Omega_{ii}[(1-\theta_i)^2 - 1] + {\theta_i}^2\alpha_i^2 \\ &= \theta_i[(\theta_i - 2)\Omega_{ii} + \theta_i\alpha_i^2], \ (\theta_i = \tfrac{\pi_i}{\lambda_i+1}, \text{ yazılırsa}) \\ &= \tfrac{\pi_i}{(\lambda_i+1)^2}[(\Omega_{ii} + \alpha_i^2)\pi_i - 2(\lambda_i+1)\Omega_{ii}] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, $D_i(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_M) < 0$ olması için

$$(\Omega_{ii} + \alpha_i^2)\pi_i - 2(\lambda_i+1)\Omega_{ii} < 0, \qquad (3.57.)$$

olmalıdır. Eş. (3.57.) denklemi π_i'ye göre çözülürse;

$$\pi_{3i} = (\lambda_i + 1)\left\{\frac{2\Omega_{ii}}{\alpha_i^2+\Omega_{ii}}\right\},$$

elde edilir ve $\pi_{3i} < 1$ olması göz önüne alındığında, $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)-1}$ olmalıdır. Böylece, $\Omega_{ii} < \frac{\alpha_i^2}{2(\lambda_i+1)-1}$ iken $D_i(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_M) < 0$ olması için $0 < \pi_{3i} < \pi_i < 1$ olacak şekilde bir π_i vardır.

3.2.3. GLME ve AUGLME için d_i Seçimi

Eşitlik (3.51.) ve (3.52.) ifadeleri d_i'ye göre minimize edilip, bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii} parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ tahminleri yazıldığında;

$$\hat{d}_{mi} = \frac{\lambda_i(\hat{\alpha}_{Mi}^2 - \hat{A}^2)}{\lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2 + \hat{A}^2}, \tag{3.58.}$$

$$\tilde{d}_{mi}^* = 1 - \frac{\hat{A}(\lambda_i+1)}{\sqrt{\lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2 + \hat{A}^2}}, \tag{3.59.}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca, burada Akdeniz ve Kaçıranlar'a (1995) benzer şekilde AUGLME ve GLME'nin MSE'sini minumum yapan d_i'ler kullanılarak AUGLME nin parametre tahmininin GLME'nin parametre tahminine eşit olduğu görülmektedir.

3.2.4. Sayısal Örnek

Bu bölümde; Bölüm 3.1.5.'de verilen Tobacco veri seti incelenecektir. Tobacco verisi hem çoklu iç ilişki hem de *y*-yönünde sapan değer içermekteydi.

Uygulamada kullanılacak GLE, AUGLE, GLME ve AUGLME tahmin edicilerin *MSE* tahminleri için sırasıyla (Tobacco verisi merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmış formda);

- $MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}_L^*)$ →Eş.(3.36.) ve (3.46.); $\sigma^2 \to \hat{\sigma}^2$ ve $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_i^2$,
- $MSE(\hat{\alpha}_{ML})$ ve $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*)$ →Eş.(3.50.) ve (3.51.);$\Omega_{ii} \to \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_{Mi}^2$,

ifadeleri kullanılacaktır. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_L$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\tilde{\alpha}_L^*$ve $\tilde{\alpha}_{ML}^*$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri Çizelge 3.3.'de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_L$, $\hat{\alpha}_{ML}$, $\tilde{\alpha}_L^*$ ve $\tilde{\alpha}_{ML}^*$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri

Tahminler	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\tilde{\alpha}_L^*$	$\tilde{\alpha}_{ML}^*$
$\hat{\alpha}_1$	0.4857	0.4859	0.4848	0.4852	0.4848	0.4852
$\hat{\alpha}_2$	-0.672	-0.651	-0.5574	-0.5565	-0.5574	-0.5565
$\hat{\alpha}_3$	-1.074	-1.174	-0.8784	-1.0270	-0.8784	-1.0270
$\hat{\alpha}_4$	1.4436	0.5929	1.0547	0.2210	1.0547	0.2210
d_i			$\hat{d}_i$	$\hat{d}m_i$	$\tilde{d}_i^*$	$\tilde{d}_{mi}^*$
MSE	1.1206	0.8626	0.8504	0.4560	0.8504	0.4560

Burada, $\hat{d}_i$, $\hat{d}_{mi}$, $\tilde{d}_i^*$ ve $\tilde{d}_{mi}^*$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} 0.9913 \\ 0.8256 \\ 0.8162 \\ 0.7300 \end{bmatrix}$, $\hat{d}_{mi} = \begin{bmatrix} 0.9933 \\ 0.8521 \\ 0.8734 \\ 0.3714 \end{bmatrix}$, $\tilde{d}_i^* = \begin{bmatrix} 0.7918 \\ 0.5717 \\ 0.5700 \\ 0.4798 \end{bmatrix}$ ve $\tilde{d}_{mi}^* = \begin{bmatrix} 0.8173 \\ 0.6121 \\ 0.6413 \\ 0.2063 \end{bmatrix}$.

Çizelge 3.3'e bakıldığında; $MSE(\hat{\alpha}_{ML})$ ve $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*)$ tahminlerinin diğer tahmin edicilerinkinden daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca yukarıda bahsedildiği gibi $\hat{\alpha}_L$ ile $\tilde{\alpha}_L^*$ ve $\hat{\alpha}_{ML}$ ve $\tilde{\alpha}_{ML}^*$ tahmin edicilerinin MSE'lerini minimum yapan d_i'ler kullanıldığında bu tahmin edicilerin, parametre ve MSE tahminlerinin eşit olduğu görülmektedir.

Bazı teoremlerin uygulaması şu şekildedir:

Teorem 3.4.'ün uygulaması: Teorem 3.4.'e göre; $0 < d_i < 1$ olmak üzere her $i = 1,2,\dots,p$ için, $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ ise $MSE(\hat{\alpha}_{ML}) < MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}_{ML}^*) < MSE(\tilde{\alpha}_L^*)$'dir.

$\widehat{\Omega}_{ii} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0721 \\ 0.1986 \\ 0.5917 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}^2\lambda_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0936 \\ 0.2579 \\ 0.7686 \end{bmatrix}$ elde edilir. $MSE(\hat{\alpha}_L)$ ve $MSE(\tilde{\alpha}_L^*)$'leri minumum yapan $\hat{d}_i$ ve $\tilde{d}_i^*$'ler alınırsa;

$d_i = \hat{d}_i \rightarrow MSE\left(\hat{\alpha}_L(d)\right)$ =0.8504 ve $MSE\left(\hat{\alpha}_{ML}(d)\right)$ =0.5825

$d_i = \tilde{d}_i^* \rightarrow MSE\left(\tilde{\alpha}_L^*(d)\right)$ =0.8504 ve $MSE\left(\tilde{\alpha}_{ML}^*(d)\right)$ =0.5825

değerleri elde edilir. Böylece Teorem 3.4. desteklenmiş olur.

Teorem 3.5.'in uygulaması: Teorem 3.5.'de bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii} parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ tahminleri yazıldığında;

$$\Omega_{ii} < \lambda_i^{-1}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i+2}{2\lambda_i+3}\right) \rightarrow \hat{A}^2 < \hat{\alpha}_{Mi}^2\left(\frac{\lambda_i+2}{2\lambda_i+3}\right) = \varphi_{1i} = \begin{bmatrix} 0.1288 \\ 0.2818 \\ 0.9190 \\ 0.2343 \end{bmatrix},$$

$\hat{A}^2$=0.0013

$$\hat{\pi}_{1i} = \frac{\lambda_i+1}{2}\left(-1 + \left\{\frac{9\hat{A}^2+\lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2}{\lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2+\hat{A}^2}\right\}^{1/2}\right) = \begin{bmatrix} 0.0134 \\ 0.2394 \\ 0.2096 \\ 0.7282 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\pi}_i = 1 - \tilde{d}^*_{mi} = \begin{bmatrix} 0.1827 \\ 0.3879 \\ 0.3569 \\ 0.7937 \end{bmatrix},$$

ifadesi elde edilir. Burada, her $i = 1,2,\dots,p$ için; $\hat{A}^2 < \varphi_{1i}$ ve $\hat{\pi}_{1i} < \hat{\pi}_i$ iken $d_i = \tilde{d}^*_{mi}$ alındığında, $MSE\left(\tilde{\alpha}^*_{ML}(d)\right)$ =0.4650 ve $MSE\left(\hat{\alpha}_{ML}(d)\right)$ =0.5922 olduğundan Teorem 3.5.'in Tobacco verisi için sağlandığı gösterilmiş olur. Benzer şekilde, Teorem 3.6. nın ve Teorem 3.7.'nin uygulaması da gösterilebilir.

3.2.5. Sonuç

Lineer regresyonda, çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer problemlerini birlikte çözmek için ME2ye dayalı GLME ve AUGLME önerilmiş ve diğer tahmin edicilerden daha üstün olduğu durumlar MSE kriterine göre teorik olarak gösterilmiştir. Ayrıca, sayısal örnek verilerek teorik sonuçlar desteklenmiştir.

3.3. İki Parametreli Ridge M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları

3.3.1. Giriş

Eşitlik (3.1.) ile verilen kanonik formdaki lineer regresyon modeli için OLSE Eş. (3.3.) ile verilmişti. OLSE çoklu iç ilişki probleminden olumsuz etkilendiğinden Hoerl ve Kennard (1970) bu problemin çözümü için Eş. (3.4.) ile verilen RE'yi önermiştir. RE y-yönündeki sapan değerlere karşı hassas olduğundan Silvapulle (1991) RE'ye alternatif olarak Eş. (3.5.) ile verilen RME'yi önermiştir.

RE'nin bazı dezavantajlarından dolayı, araştırmacılar RE'ye alternatif diğer yanlı tahmin yöntemlerini incelemeye başlamışlardır. Bunlardan biri, Lipovetsky ve Conklin'in (2005) R^2'yi (çoklu belirleyicilik katsayısı) maksimum yapacak şekilde önerdiği iki parametreli ridge tahmin edicisidir (TRE):

$$\hat{\alpha}_q(k) = q(\wedge + kI)^{-1} \wedge \hat{\alpha} = qT_k\hat{\alpha}, \qquad k > 0 \qquad (3.60.)$$

Burada,

$$q = \frac{y'Z(\wedge+kI)^{-1}Z'y}{y'Z(\wedge+kI)^{-1}Z'y\wedge(\wedge+kI)^{-1}Z'y}, \qquad k > 0. \tag{3.61.}$$

TRE nin, RE'ye göre daha iyi asimptotik özelliklere sahip olduğunu göstermiştir. Daha sonra, Toker ve Kaçıranlar (2013) TRE'nin OLSE, RE ve Stein tipi tahmin edicilere göre üstünlüğünü daha belirleyici olan MSE kriterine göre incelemişlerdir. Ayrıca Toker ve Kaçıranlar (2013), TRE yi minimum yapan q parametresini şu şekilde önermiştir:

$$MSE\left(\hat{\alpha}_q(k)\right) = q^2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2} + \sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i^2(q\lambda_i-\lambda_i-k)^2}{(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.62.}$$

ifadesinin türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve bilinmeyen α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_i^2$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahminleri yazıldığında;

$$\hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\alpha}_i^2\lambda_i}{\lambda_i+k}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\sigma}^2\lambda_i+\hat{\alpha}_i^2\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2}}, \tag{3.63.}$$

elde edilir.

3.3.2. İki Parametreli Ridge M-Tahmin Edici ve Karşılaştırmaları

Eşitlik (3.60.) ile verilen TRE y-yönündeki sapan değerlerden olumsuz etkilendiğinden ME'ye dayalı iki parametreli ridge-M (TRME) aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\hat{\alpha}_q(k) = qT_k\hat{\alpha}_M, \qquad k > 0. \tag{3.64.}$$

Burada, q Eş. (3.61.) ile verilmiştir. Ayrıca, TRME'nin MSE'si;

$$MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) = q^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{{\lambda_i}^2}{(\lambda_i+k)^2} \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2(q\lambda_i-\lambda_i-k)^2}{(\lambda_i+k)^2}, \quad (3.65.)$$

ile elde edilir. TRME'nin; TRE, RME ve ME'ye göre üstünlükleri aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 3.8.: $q > 1$ ve $k > 0$ olmak üzere her $i = 1,2,\dots,p$ için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ ise $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right)$ olur.

İspat: $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right)$ ile $MSE\left(\hat{\alpha}_{q}(k)\right)$ arasındaki fark, Eş, (3.62.) ve (3.65.)'deki MSE'ler kullanılarak;

$$T = MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) - MSE\left(\hat{\alpha}_{q}(k)\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{q^2{\lambda_i}^2\Omega_{ii} - q^2\sigma^2\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2},$$

Şeklinde elde edilir. Burada, $T < 0$ olması için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ olmalıdır. Böylece, $q > 1$ ve $k > 0$ olmak üzere her $i = 1,2,\dots,p$ için $\Omega_{ii} < \sigma^2\lambda_i^{-1}$ olduğunda $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_{q}(k)\right)$ olur.

Teorem 3.9.: $q > 1$ olmak üzere ve her $i = 1,2,\dots,p$ için $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_{M}(k)\right)$ olacak şekilde $k > k_{1i}$ vardır. Burada, $k_{1i} = \frac{{\lambda_i}^2\Omega_{ii}(q^2-1)(q-1)^2\alpha_i^2}{2\lambda_i(q-1)\alpha_i^2}$ ile verilir.

İspat: $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_{M}(k)\right)$ arasındaki fark, Eş. (3.20.) ve (3.65.)'deki ifadeler kullanılarak;

$$B = \sum_{i=1}^{p} \frac{q^2{\lambda_i}^2\Omega_{ii} + \left({\lambda_i}^2(q-1)^2 - 2\lambda_i(q-1)k + k^2\right)\alpha_i^2 - {\lambda_i}^2\Omega_{ii} - k^2\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^2}, \quad (3.66.)$$

ifadesi elde edilir. Burada, her $i = 1,2,\dots,p$ için $B < 0$ olması için

$$q^2{\lambda_i}^2\Omega_{ii} + \left({\lambda_i}^2(q-1)^2 - 2\lambda_i(q-1)k + k^2\right)\alpha_i^2 - {\lambda_i}^2\Omega_{ii} - k^2\alpha_i^2 < 0, \quad (3.67.)$$

olmalıdır. Eşitsizlik (3.67.) denklemini k ye göre çözülürse;

$$k_{1i} = \frac{{\lambda_i}^2 \Omega_{ii}(q^2-1)(q-1)^2\alpha_i^2}{2\lambda_i(q-1)\alpha_i^2},$$

ifadesi elde edilir. Böylece, $q > 1$ için $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ olacak şekilde bir $k > k_{1i} > 0$ vardır.

Teorem 3.10.: $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olması için gerek koşul $\frac{\alpha_i^2\left((q-1)\lambda_i-k\right)^2}{(\lambda_i+k)^2-q^2{\lambda_i}^2} < \Omega_{ii}$ ve $k > k_{2i}$ olmalıdır. Burada, $q > 1$ ve $k_{2i} = \lambda_i(q-1)$, $i = 1,2,\dots,p$.

İspat: $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ arasındaki fark, Eş, (3.19.) ve (3.65.)'deki ifadeler kullanılarak;

$$B^* = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{q^2{\lambda_i}^2\Omega_{ii}+\alpha_i^2(q\lambda_i-\lambda_i-k)^2}{(\lambda_i+k)^2} - \Omega_{ii}\right), \quad (3.68.)$$

şeklinde elde edilir. Burada, her $i = 1,2,\dots,p$ için $B^* < 0$ olması için,

$$q^2{\lambda_i}^2\Omega_{ii} + \alpha_i^2(q\lambda_i-\lambda_i-k)^2 - \Omega_{ii}(\lambda_i+k)^2 < 0, \quad (3.69.)$$

olmalıdır. Eşitsizlik (3.69.)'dan;

$$\frac{\alpha_i^2\left((q-1)\lambda_i-k\right)^2}{(\lambda_i+k)^2-q^2{\lambda_i}^2} < \Omega_{ii}, \quad (3.70.)$$

elde edilir. Burada, her $i = 1,2,\dots,p$ için Ω_{ii} pozitif olduğundan, Eşitsizlik (3.70.) ifadesinin payda kısmı; $(\lambda_i+k)^2 - q^2{\lambda_i}^2 > 0$ olmalıdır. Bu durumda, $k > k_{2i}$=$\lambda_i(q-1)$ elde edilir. Böylece, her $i = 1,2,\dots,p$ ve $q > 1$ iken $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olması için $\frac{\alpha_i^2\left((q-1)\lambda_i-k\right)^2}{(\lambda_i+k)^2-q^2{\lambda_i}^2} < \Omega_{ii}$ ve $k > k_{2i}$ olmalıdır.

Teorem 3.10.'dan ve Silvapulle'nin (1991) verdiği Teorem (i)'den ($MSE(\hat{\alpha}_M(k)) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olacak şekilde $k > 0$) geçişme özelliği sağlanarak aşağıdaki sonuç teorem verilir.

Sonuç Teorem 3.11.: $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olacak şekilde en az bir $k > 0$ ve $q > 1$ vardır.

3.3.3. TRME için q ve k Seçimi

TRME'nin Eş. (3.65.)'de verilen MSE sini minimum yapan q ve k parametreleri sırasıyla şu şekilde elde edilir:

$$f(k,q) = MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) = q^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{{\lambda_i}^2}{(\lambda_i+k)^2} \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2(q\lambda_i-\lambda_i-k)^2}{(\lambda_i+k)^2}, \quad (3.71.)$$

ifadesinde; k sabit tutulup, q ya göre kısmi türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2 \lambda_i}{\lambda_i+k}}{\sum_{i=1}^{p} \frac{\Omega_{ii}{\lambda_i}^2+\alpha_i^2\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2}}, \quad (3.72.)$$

ifadesi elde edilir. Eş. (3.72.)'de bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii}parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ tahminleri yazıldığında;

$$\hat{q}_m = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_{Mi}^2 \lambda_i}{\lambda_i+k}}{\sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{A}^2\lambda_i+\hat{\alpha}_{Mi}^2\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2}}, \quad (3.73.)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde; Eş. (3.71.)'de q sabit tutulup, k'ya göre kismi türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$k_i = \frac{q\lambda_i^2\Omega_{ii}+(q-1)\lambda_i^2\alpha_i^2}{\lambda_i\alpha_i^2}, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3.74.}$$

ifadesi elde edilir. Eş. (3.74.) ifadesindeki k seçimi; Kibria'nın (2003) k'nın seçimine ($\hat{k}_{AM}$) benzer şekilde önerilecektir. O halde, Eş. (3.74.) ifadesinde bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii} parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ tahminleri yazılıp, aritmetik ortalaması alınırsa;

$$\hat{k}_m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{q\hat{A}^2\lambda_i+(q-1)\lambda_i^2\hat{\alpha}_{Mi}^2}{\lambda_i\hat{\alpha}_{Mi}^2}, \tag{3.75.}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $q > 1$ için Eş (3.75.) ile önerilen k parametresinin sıfırdan büyük olduğu açıktır. Fakat Eş. (3.72.) ile verilen q parametresinin birden büyük olması için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.12.: Her $i = 1,2,\dots,p$ için $\tilde{k}_m > max\left(\frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mi}^2}\right)$ ise $q > 1$'dir.

İspat: Eş. (3.72.)'den $q > 1$ olması için;

$$\frac{\alpha_i^2\lambda_i}{\lambda_i+k} > \frac{\Omega_{ii}{\lambda_i}^2+\alpha_i^2\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2}, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3.76.}$$

olmalıdır. Eşitsizlik (3.76.) ile ilgili bazı cebirsel işlemler yapılırsa;

$$k > \frac{\Omega_{ii}\lambda_i}{\alpha_i^2}, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3.77.}$$

ifadesi elde edilir. Eşitsizlik (3.77.)'de bilinmeyen α_i^2 ve Ω_{ii} parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{\alpha}_{Mi}^2$ ve $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$ tahminleri yazılıp ve her $i = 1,2,\dots,p$ için eşitliğin sol tarafının maksimumundan büyüğü alınırsa;

$$\tilde{k}_m > max\left(\frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mi}^2}\right) \tag{3.78.}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde; Eş. (3.63.)'de, TRE için de $q > 1$ olması için $\tilde{k} > max\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2}\right)$ ifadesi elde edilir. TRME'de, k ve q seçimi için aşağıdaki iteratif metod ile verilir:

Adım 1. Eşitsizlik (3.78.)'den $\tilde{k}_m$ hesaplanır.

Adım 2. Adım 1.'deki $\tilde{k}_m$ kullanılarak, Eşitsizlik (3.73.)'deki $\hat{q}_m$ tahmin edilir.

Adım 3. Adım 2.'deki $\hat{q}_m$ kullanılarak, Eşitsizlik (3.75.)'deki $\hat{k}_m$ elde edilir.

Simülasyon çalışması ve nümerik örnekte kullanılacak tahmin ediciler için yanlılık parametreleri şu şekilde verilmiştir:

RE→ $\hat{k}_{HKB}$ (Hoerl, ve ark., 1975),

RME→ $\hat{k}_1$ (Silvapulle, 1991),

TRE_1→ $\tilde{k} > max\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2}\right)$ ve $\hat{q}$ (Eş. (3.63.)),

$TRME_1$→ $\tilde{k}_m$ (Eş. (3.78.) ve $\hat{q}_m$ (Eş. (3.73.)),

TRE_2→ k ve q parametrelerinin hesaplanması aşağıdaki gibi yeni iteratif yöntem ile verilir:

i) $\tilde{k}$ hesaplanır.

ii) *(i)*'deki $\tilde{k}$ kullanılarak, Eş. (3.63.)'deki $\hat{q}$ tahmin edilir.

iii) *(ii)*'deki $\hat{q}$ kullanılarak, $\hat{k} = \sum_{i=1}^{p} \frac{q\hat{\sigma}^2\lambda_i + (q-1)\lambda_i^2\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}$ elde edilir.

$TRME_2$→iteratif metod (Adım 1-3).

3.3.4. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde; çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer içeren veri seti üretilecek ve farklı tahmin edicilerin performansı incelenecektir. Veri seti şu şekilde dizayn edilmiştir:

- Açıklayıcı değişkenler Eş. (3.29.) ile üretilmiştir.
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresyon katsayıları $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör olarak seçilmiştir (Kibria, 2003).
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ile üretilmiştir.
- *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ile elde edilmiştir.

Bu çalışmada incelenen paremetreler ve değerleri aşağıda verilmiştir:

$\rho = 0.9, 0.99, 0.999,$
$n = 20, 50, 100,$
$\sigma^2 = 1, 25, 100,$
$p = 4.$

Ayrıca, sapan değerlerin tahmin ediciler üzerindeki etkisini incelemek için, *y*-yönündeki sapan değerlerin 4 farklı durumu ele alınmıştır. Bu durumlar, sapan değer bulunmaması, bir, iki ve dört tane y-yönünde sapan değer(ler) olmasıdır. Sapan değer bulunmaması durumunda, *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ile türetilmiştir. Bir sapan değer olması durumunda; *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ile türetilmiş olup, *y*-yanıt değişkeninin beşinci gözlemi $y_5^* = y_5 + 20\sigma$ ifadesi ile değiştirilmiştir. İki sapan değer olması durumunda; *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ile türetilmiş olup, *y*-yanıt değişkeninin beşinci gözlemi yukarıdaki gibi ve dokuzuncu gözlemi $y_9^* = y_9 - 10\sigma$ şeklinde değiştirilerek elde edilmiştir. Dört sapan değer olması durumunda; *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ile türetilmiş, *y*-yanıt değişkeninin beşinci ve dokuzuncu gözlemleri yukarıdaki gibi on üçüncü ve on yedinci gözlemleri sırasıyla, $y_{13}^* = y_{13} + 5\sigma$ ve $y_{17}^* = y_{17} - 15\sigma$ şeklinde değiştirilmiştir.

Yukarıda tasarlanan simülasyon deneyi 5000 defa tekrarlanmış ve her bir deney için tahmin edicilerin MSE tahminleri:

$$\hat{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{5000}\sum_{j=1}^{5000}\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\alpha}_{ij} - \alpha_i\right)^2,$$

ile hesaplanmıştır. Burada $\hat{\alpha}_{ij}$, j. tekrarın i. parametre tahmini, α_i ise gerçek parametre değeridir.

Simülasyon sonuçlarında elde edilen; OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2, $TRME_2$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri Ekler bölümünde bulunan Çizelge B.1.-B.4.'de verilmiştir.

Çizelge B.1.'in (y-yönünde sapan değer olmadığında) sonuçları:

- Çoklu iç ilişkinin derecesi (ρ) ve hataların varyansı (σ^2) arttığında arttığında, tüm tahmin edicilerin MSE tahminleri artmaktadır.
- Örneklem hacmi (n) arttığında, tüm tahmin edicilerin MSE tahminleri azalmaktadır.
- Veri kümesinde sapan değer olmadığında; TRE_2, diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha üstündür.

Çizelge B.2.-B.4.'ün (y-yönünde sapan değer bulunduğunda) sonuçları:

- Hatarın varyansı (σ^2) arttığında; OLSE, ME, RE, RME, $TRME_1$, ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin tüm MSE tahminleri artmakta, TRE_1 ve TRE_2 nin MSE tahminleri genellikle artmaktadır.
- Örneklem hacmi (n) arttığında, OLSE ve ME nin MSE tahminleri azalmakta, diğer tahmin ediciler için n'nin yüksek olduğu yerlerde genellikle azalmaktadır.
- Çoklu iç ilişkinin derecesi (ρ) arttığında; OLSE, ME, RE ve RME'nin MSE tahminleri artmakta, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2, $TRME_2$'nin MSE tahminleri genellikle artmaktadır.
- Veri kümesinde sapan değerlerin sayısı arttığında; OLSE ve ME'nin MSE tahminleri artmakta, diğer tahmin edicilerin genellikle artmaktadır.

- Yapılan simülasyon çalışmasında, y-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki birlikte bulunduğunda; $TRME_2$, diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha iyi bir tahmin edicidir.

3.3.5. Sayısal Örnek

Bu bölümde; Bölüm 3.1.5.'de bahsedilen Tobacco verisi incelenecek ve teorik olarak elde edilen sonuçlar bu veri kümesi üzerinde uygulanacaktır.

Uygulamada kullanılacak TRE ve TRME tahmin edicilerin MSE tahminleri için sırasıyla; (Tobacco verisi merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmış formda).

- $MSE\left(\hat{\alpha}(k)\right)$ →Eş.(3.7.);$\sigma^2 \to \hat{\sigma}^2$ ve $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_i^2$, $k \to \hat{k}_{HKB}$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ →Eş.(3.8.); $\Omega_{ii} \to \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_{Mi}^2$, $k \to \hat{k}_1$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}_q(k)\right)$ →Eş.(3.62.);$\sigma^2 \to \hat{\sigma}^2$ ve $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_i^2$, $k \to \hat{k}_{HKB}$, $q \to \hat{q}$,
- $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right)$ →Eş.(3.65.); $\Omega_{ii} \to \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \to \hat{\alpha}_{Mi}^2$, $k \to \hat{k}_{HKB}$, $q \to \hat{q}_m$,

ifadeleri kullanılacaktır. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}_q(k)$ ve $\hat{\alpha}_{qM}(k)$ tahmin edicilerin parametre ve MSE tahminleri Çizelge 3.4. de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Tobacco verisi için $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}_q(k)$ ve $\hat{\alpha}_{qM}(k)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri

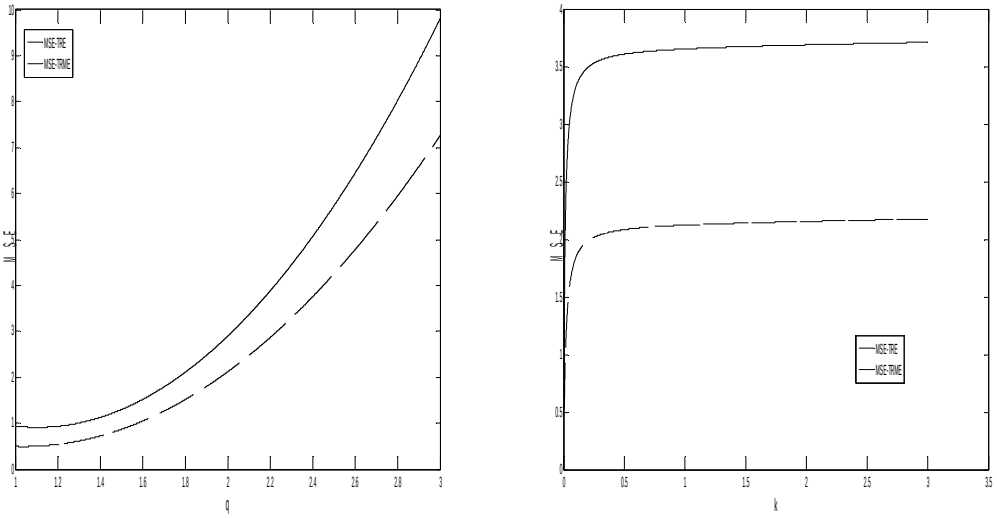
Tahminler	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}_q(k)$	$\hat{\alpha}_{qM}(k)$
$\hat{\alpha}_1$	0.4857	0.4859	0.4855	0.4856	0.5360	0.5044
$\hat{\alpha}_2$	-0.672	-0.651	-0.6142	-0.5811	-0.6781	-0.6035
$\hat{\alpha}_3$	-1.074	-1.174	-0.8510	-0.8819	-0.9376	-0.9159
$\hat{\alpha}_4$	1.4436	0.5929	0.8097	0.2980	0.8940	0.3095
k			0.0017	0.0021	0.0017	0.0021
q					1.1041	1.0386
MSE	1.1206	0.8626	0.9373	0.4967	0.9105	0.4941

Çizelge 3.4.'e bakıldığında yeni önerilen $\hat{\alpha}_{qM}(k)$'nın diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha üstün olduğu görülmektedir.

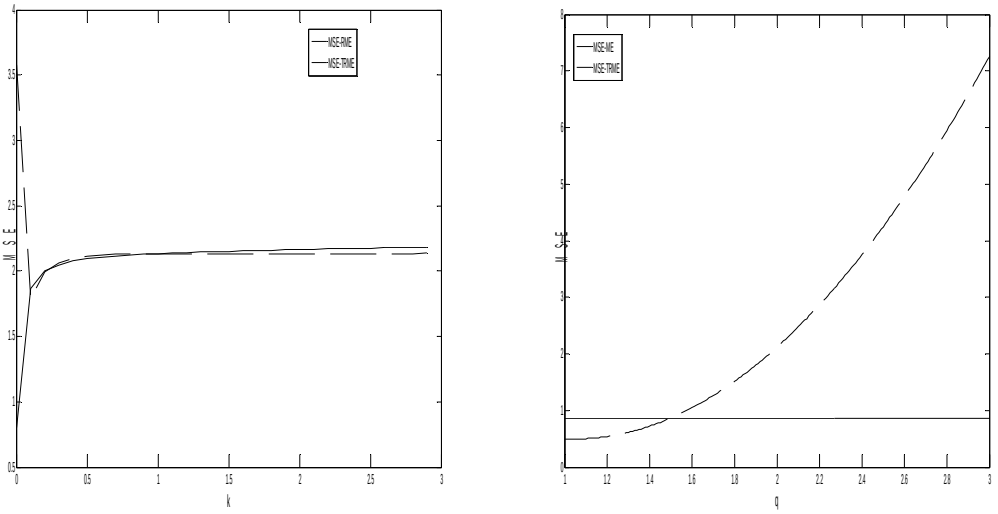
Yukarıda verilen Teorem 3.9., Teorem 3.10. ve Sonuç Teorem 3.12.'nin uygulaması Şekil 3.3.'te gösterilmektedir. Şekil 3.3.'ün yorumları şu şekildedir:

- $\widehat{\Omega}_{ii} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0721 \\ 0.1986 \\ 0.5917 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}^2\lambda_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0936 \\ 0.2579 \\ 0.7686 \end{bmatrix}$ olduğundan her $q > 1$ ve $k > 0$ için $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_q(k)\right)$ olduğu Çizelge 3.4. ve Şekil 3.3. (a-b) de açıkça görülmektedir ve böylece Teorem 3.8. sağlanmaktadır.
- Teorem 3.10.'da verilen $k_{1i} = \frac{{\lambda_i}^2\Omega_{ii}(q^2-1)(q-1)^2\alpha_i^2}{2\lambda_i(q-1)\alpha_i^2}$ için bilinmeyen α_i^2, Ω_{ii}, q ve k parametrelerin yerlerine sırasıyla; $\hat{\alpha}_{Mi}^2$, $\frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\hat{q}$ (Eş. (3.63.)) ve $\tilde{k}_m$ (Eş.(3.78.)) tahminleri yazılırsa $\hat{k}_{1i} = \begin{bmatrix} 0.0822 \\ 0.0032 \\ 0.0012 \\ 0.0007 \end{bmatrix}$, $\hat{q} = 1.7292$ ($\tilde{k}_m$=0.0154 kullanıldığında), elde edilir. $k > 0.0822$ olduğunda $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right)$ olduğu Şekil 3.3. (c)'ye bakıldığında kolayca görülmekte olup, Teorem 3.9. sağlanmaktadır.
- Ayrıca, $\hat{k}_1 = 0.0021$ ve $\hat{q}_m = 1.0386$ için $MSE\left(\hat{\alpha}_{qM}(k)\right) < MSE(\hat{\alpha}_M)$ olduğu Çizelge 3.4. ve Şekil. 3.3. (d)'de görülmektedir. Bu durumda, en az bir $k > 0$ ve $q > 1$ için Sonuç Teorem 3.11. sağlanmaktadır.

(a) (b)



(c) (d)



Şekil 3.3. Tobacco verisi için k veya q sabit iken $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$ $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}_q(k)$ ve $\hat{\alpha}_{qM}(k)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri

3.3.6. Sonuç

Lineer regresyonda, *y*-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki problemlerini çözmek için ME'ye dayalı TRME tahmin edicisi önerilmiş ve TRME'nin TRE, RME, ve ME'den MSE kriterine göre teorik olarak üstünlükleri incelenmiştir. Ayrıca, TRME nin farklı iki durumu olan, $TRME_1$ ve $TRME_2$'nin performansı simülasyon çalışmasıyla incelenmiş olup ve $TRME_2$'nin diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha üstün olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, teorik olarak elde edilen sonuçlar gerçek veri kümesi üzerinde uygulanmış olup teorik sonuçlar desteklenmiştir.

3.4. Ridge M-Tahmin Edici İçin *k* Parametre Seçim Yöntemleri

3.4.1. Giriş

Lineer regresyonda; çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer problemi etkisini minumuma indirgemek için dayanıklı yanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Bunlar içerisinde literatürde en yaygın kullanılanlardan biri Silvapulle (1991) tarafından önerilen RME'dir (Eş., (3.6.)). Aynı zamanda, Silvapulle (1991) RME'nin, RE ve ME den üstünlüklerini MSE kriterine göre teorik olarak ve simülasyon çalışmasıyla incelemiştir.

RME'de bulunan $(\wedge + kI)^{-1}$ fonksiyonu k yanlılık parametresinin karmaşık bir fonksiyonu olduğundan, k'nın seçimi problemi ortaya çıkmaktadır. RME için, k'nın seçimi ile ilgili tek çalışma Silvapulle tarafından (1991) yapılan çalışmadır. Bu çalışmada amaç, özellikle Kibria'nın (2003) RE için önerilen k seçim yöntemlerine benzer şekilde RME için k yanlılık parametreleri önermek ve geniş bir simülasyon çalışmasıyla performanslarını MSE kriterine göre incelemektir.

3.4.2. RME İçin k Parametre Seçim Yöntemleri

RME için önerilen k yanlılık parametresi; Hoerl ve Kennard'ın (1970) RE'nin MSE'sini minimize edecek şekilde önerdiği k yöntemine benzer şekilde yapılacaktır. Bu durumda, Eş.(3.20.) ile verilen RME'nin MSE'sini minimize edecek k şu şekilde elde edilir:

$$MSE\left(\hat{\alpha}_M(k)\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i+k)^2} \Omega_{ii} + k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^2}, \tag{3.79.}$$

ifadesinin k'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$k_i = \frac{\Omega_{ii}\lambda_i}{\alpha_i^2}, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3.80.}$$

ifadesi elde edilir. Burada, bilinmeyen Ω_{ii} ve α_i^2parametrelerinin yerlerine sırasıyla $\hat{A}^2{\lambda_i}^{-1}$ ve $\hat{\alpha}_{Mi}$ tahminleri yazılırsa;

$$\hat{k}_i = \frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mi}{}^2}, \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3.81.}$$

ifadesi elde edilir. RME için k seçim yöntemleri; RE için önerilen k seçim yöntemlerine (Hoerl ve Kennard, 1970, Hoerl ve ark., 1975, Lawless ve Wang, 1976, Hocking ve ark., 1976 ve Kibria, 2003) dayanarak önerilmiştir.

RME için k seçim yöntemleri şu şekildedir:

i) Silvapulle (1991), RME için k seçim yöntemini şu şekilde önermiştir:

$$\hat{k}_1 = \frac{p\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_M{}'\hat{\alpha}_M}, \tag{3.82.}$$

$$\hat{k}_2 = \frac{p\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_M{}'\Lambda\hat{\alpha}_M}. \tag{3.83.}$$

ii) Hoerl ve Kennard'ın (1970), RE için önerdiği k'ya benzer bir düşünce ile Eş. (3.81.) ifadesinde $\hat{\alpha}_{Mi}{}^2$ yerine $\hat{\alpha}_{Mmax}^2$ yazılırsa RME için;

$$\hat{k}_3 = \frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mmax}^2}, \tag{3.84.}$$

tahmini önerilir.

iii) Hocking ve ark.'nın (1976) RE için önerdiği k'ya benzer bir düşünce ile RME için;

$$\hat{k}_4 = \frac{\hat{A}^2 \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i \hat{\alpha}_{Mi})^2}{\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i \hat{\alpha}_{Mi}{}^2)^2}, \tag{3.85.}$$

tahmini elde edilir.

iv) Kibria'nın (2003) RE için önerdiği birden fazla k seçim yöntemine benzer bir düşünceyle, Eş. (3.81.) ifadesinin sırasıyla aritmetik ortalaması, geometrik ortalaması ve medyanı alınarak RME için;

$$\hat{k}_5 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mi}{}^2}, \tag{3.86.}$$

$$\hat{k}_6 = \frac{\hat{A}^2}{\left(\prod_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_{Mi}{}^2\right)^{1/p}}, \tag{3.87.}$$

$$\hat{k}_7 = medyan\left\{\frac{\hat{A}^2}{\hat{\alpha}_{Mi}{}^2}\right\}, \quad i = 1,2,\dots,p\ (p \geq 3\ ol.\ \text{üz.}). \tag{3.88.}$$

tahminleri verilir.

3.4.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde; çoklu iç ilişki ve *y*-yönünde sapan değer içeren veri seti üretilecek ve farklı tahmin edicilerin performansı incelenmiştir. Veri seti şu şekilde dizayn edilmiştir.

- Açıklayıcı değişkenler Eş.(3.29.) ile üretilmiştir,
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresyon katsayıları $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör olarak seçilmiştir,
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ veya Standart Cauchy dağılımından üretilmiştir,
- *y*-yanıt değişkeni Eş. (3.30.) ileüretilmiştir..

Bu çalışmada incelenen parametreler ve değerleri aşağıda verilmiştir:

$\rho = 0.9, 0.99, 0.999,$
$n = 20, 50, 100,$
$\sigma^2 = 1,9, 25, 100,$
$p = 4,10.$

Ayrıca, sapan değerlerin tahmin ediciler üzerindeki etkisini incelemek için, *y*-yönündeki sapan değerlerin 3 farklı durumu ele alınmıştır. Bu durumlar, bir, iki ve üç sapan değer olmasıdır. Bir sapan değer bulunması durumunda; *y*-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiş olup, *y*-yanıt değişkeninin üçüncü gözlemi $y_3^* = y_3 + 10\sigma$ ifadesi ile değiştirilmiştir. İki sapan değer olması durumunda; *y*-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiş, *y*-yanıt değişkeninin üçüncü gözlemi yukarıdaki gibi ve sekizinci gözlemi $y_8^* = y_8 - 5\sigma$ şeklinde değiştirilerek elde edilmiştir. Üç sapan değer olması durumunda; *y*-yanıt değişkeni eşitlik (3.30.) ile türetilmiş, *y*-yanıt değişkeninin üçüncü ve sekizinci gözlemi yukarıdaki gibi ve onüçüncü gözlemi $y_{13}^* = y_{13} + 5\sigma$ şeklinde değiştirilerek elde edilmiştir.

Yukarıda dizayn edilen simülasyon deneyi 10000 defa tekrarlandı ve her bir deney için tahmin edicilerin MSE tahminleri:

$$\hat{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{10000}\sum_{j=1}^{10000}\sum_{i=1}^{p}\left(\hat{\alpha}_{ij} - \alpha_i\right)^2$$

ile hesaplanmıştır. Burada $\hat{\alpha}_{ij}$, j. tekrarın i. parametre tahmini, α_i ise gerçek parametre değeridir.

$\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerinin MSE tahminleri Çizelge C.1.-Çizelge C.7.'de, en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları Çizelge C.8.-Çizelge C.13.'de verilmiştir.

Çizelge C.1.-Çizelge C.6.'ya göre simülasyon sonuçları şu şekildedir:

- ρ arttıkça; $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminleri artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$'in ise bazı durumlarda azalmakta bazı durumlarda ise artmaktadır.
- σ^2 arttıkça; tüm tahmin edicilerin *MSE* tahminleri artmaktadır.
- n arttıkça; $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminleri azalmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$'in genellikle azalmaktadır.
- Sapan değer sayısı arttıkça $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminleri artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$'in genellikle artmaktadır.
- p arttıkça; $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$ tahmin edicilerin MSE tahminleri artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$'nin ise ortalamaya göre iyi olduğu durumlarda azalmakta diğer yerlerde ise artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$'in genellikle artmaktadır.
- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminlerinin diğer tahmin edicilere göre daha iyi olduğu gözlenmiştir.
- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminlerinin; σ^2 ve ρ'nun düşük olduğu durumlarda daha iyi bir performans gösterdiği görülmüştür (simülasyon sonuçlarında oluşan her bir tablonun %7).

- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$ tahmin edicisi; σ^2 ve ρ'nun büyük olduğu durumlarda daha iyi performans göstermektedir ($p = 4$ iken %33 ve $p = 10$ iken %23).
- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$ tahmin edicisi, genel olarak diğer tahmin edicilerden daha iyi performans göstermektedir. Özellikle; ρ, σ^2, p'nin büyük ve sapan değerlerin fazla olduğu durumlarda MSE kriterine göre daha iyi olduğu gözlenmektedir ($p = 4$ iken %60 ve $p = 10$ iken %70).

Hataların *Standart Cauchy* dağılımından üretildiği Çizelge C.7. nin sonuçları:

- ρ arttıkça; $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin MSE tahminleri artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$ tahmin edicinin genellikle azalmakta ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$ in ise $n = 100$ olduğu durumda azalmakta diğer durumlarda ise artmaktadır.
- p arttıkça; $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\alpha}_M$, tahmin edicilerin MSE tahminleri artmakta, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$'nin $n = 20$ iken artmakta diğer durumlarda ise azalmakta, ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$ ise genellikle azalmaktadır.
- n arttıkça; $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\alpha}_M$tahmin edicilerin MSE tahminleri azalmakta, diğer tahmin edicilerin n'nin büyük olduğu yerde azalmaktadır.
- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$ tahmin edici; q, p ve n'nin tüm durumlarında diğer tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Çizelge C.8.-Çizelge C.13. ya göre simülasyon sonuçları:

- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerinin MSE tahminlerinin performansları daha açık bir şekilde görülmektedir.

- $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamalarına benzer bir sonuç vermekle birlikte, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$'nin performansının daha belirgin olduğu görülmektedir ($p = 4$ iken %63 ve $p = 10$ iken %73).

3.4.4. Sayısal Örnek

Bu bölümde, Eş. (3.82.)-(3.88.)'de RME için önerilen k yanlılık parametrelerinin performansı Tobacco verisi üzerinde incelenecektir.

Uygulamada kullanılacak RME tahmin edicisinin MSE tahmini (Tobacco verisi merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmış formda).

- $MSE(\hat{\alpha}_M(k))$ →Eş.(3.8.); $\Omega_{ii} \rightarrow \frac{\hat{A}^2}{\lambda_i}$, $\alpha_i^2 \rightarrow \hat{\alpha}_{Mi}^2$

ifadesi ile hesaplanacaktır.

Çizelge 3.5. Tobacco verisi için , $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerinin parametre ve MSE tahminleri

Tahminler	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
$\hat{\alpha}_1$	0.485	0.485	0.4856	0.4852	0.4854	0.4853	0.4855	0.4856	0.4855
$\hat{\alpha}_2$	-0.672	-0.651	-0.5811	-0.5002	-0.5403	-0.5030	-0.5503	-0.5817	-0.5483
$\hat{\alpha}_3$	-1.074	-1.174	-0.881	-0.6414	-0.7507	-0.6485	-0.7808	-0.8841	-0.7746
$\hat{\alpha}_4$	1.443	0.592	0.2980	0.1705	0.2210	0.1735	0.2369	0.2995	0.2335
k			0.0021	0.0053	0.0036	0.0052	0.0032	0.00209	0.0033
MSE	1.1206	0.8626	0.4967	0.6366	0.5436	0.6293	0.5261	0.4966	0.5294

Çizelge 3.5. incelendiğinde; $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$, $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$ ve $\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$ tahmin edicilerin $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\alpha}_M$ tahmin edicilerinden MSE kriterine göre daha iyi olduğu, yeni önerilen $\hat{k}_6$ ve Silvapulle (1991) tarafından önerilen $\hat{k}_1$ yanlılık parametrelerinin diğerlerinden daha iyi olduğu görülmektedir.

3.4.5. Sonuç

Regresyon analizinde, açıklayıcı değişkenler arasında çoklu iç ilişki ve veri setinde y-yönünde sapan değer bulunması probleminde dayanıklı yanlı tahmin ediciler kullanılması önerilmiştir. Bu çalışmada, dayanıklı yanlı tahmin edici olan RME (Silvapulle,1991) için k seçim yöntemleri önerilmiş ve MSE kriterine göre performansı simülasyon çalışmasıyla incelenmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasında, önerilen k yanlılık parametreleri için elde edilen RME tahmin edicilerin, OLSE ve ME den daha iyi ve $\hat{k}_5$ yanlılık parametresinin de diğerlerinden genellikle daha üstün olduğu görülmüştür. Ayrıca literatürde çoklu iç ilişki ve y-yönünde sapan değer içeren bir veri seti olarak bilinen Tobacco verisi için, önerilen $\hat{k}_1$ ve $\hat{k}_6$ yanlılık parametreleri kullanılarak elde edilen RME'nin diğerlerinden daha üstün olduğu görülmüştür.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çoklu lineer regresyonda; parametre tahmininde literatürde en sık kullanılan en küçük kareler yönteminin, açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağımsızlık olması ve y-yönünde sapan değer bulunmaması varsayımlarının sağlanamaması durumunda, çoklu iç ilişki ve sapan değer problemi olarak adlandırılan iki problemle karşılaşırız. Bu durumda OLSE olumsuz etkilenmekte ve güvenilir sonuçlar vermemektedir. Bu iki problemin çözümü için dayanıklı kestiricilere dayalı yanlı tahmin ediciler önerilmiştir.

Bu çalışmada; ME'ye dayalı LTME, AUGLME ve TRME tahmin edicileri önerilmiş ve üstünlükleri MSE kriterine göre teorik olarak ve/veya simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. Ayrıca, Silvapulle'nin (1991) önerdiği dayanıklı tahmin edici olan RME için k yanlılık parametreleri önerilmiş ve performansları simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Ek olarak, sayısal bir örnek verilerek teorik ve/veya simülasyon çalışmaları desteklenmiştir.

Bu çalışmanın sonucunda; önerilen yeni dayanıklı yanlı tahmin edicilerin, uygulamada sıkça rastlanılan çoklu iç ilişki ve y-yönünde sapan değer problemlerinin etkisini azaltarak daha güvenilir sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Böylece veri setinde bu iki problemin aynı anda bulunması durumunda LTME, AUGLME ve TRME dayanıklı yanlı tahmin ediciler kullanılabilir.

Bu çalışmalara ek olarak çoklu lineer regresyonda, y-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki olması durumunda ME'ye dayalı yeni dayanıklı yanlı tahmin ediciler önerilebilir ve üstünlükleri MSE kriterine göre teorik ve simülasyon çalışmasıyla gösterilebilir. Bunun yanısıra, hem X-yönünde hem y-yönünde sapan değer ve çoklu iç ilişki bulunması durumunda farklı dayanıklı kestiricilere (LMS, LTS, S ve CM) dayalı yeni dayanıklı yanlı kestiriciler tanımlanabilir; performansları teorik ve simülasyon çalışmasıyla incelenebilir.

KAYNAKLAR

AKDENİZ, F., and KAÇIRANLAR, S., 1995. On the Almost Unbiased Generalized Liu Estimator and Unbiased Estimation of the Bias and MSE. Comm. Statist. Theory Methods, 24, 1789-1797.

ANDREWS, D.F., 1974. A Robust Method for Multiple Linear Regression. Technometrics, 16, 4, 523–531.

ARSLAN, O., and BİLLOR N., 1996. Robust Ridge Regression Estimation Based on the GM-Estimators. Journal of Math, 9, 1, 1-9.

ARSLAN, O., and BİLLOR N., 2000. Robust Ridge Regression Estimation Based on the M-Estimator. Journal of Applied Statistics, 27, 1, 39-47.

ARSLAN, O., EDLUN, and O., EKBLOM, H., 2002. Algorithms to Compute CM and S Estimates for Regression. Metrika, 55, 37-51.

ASKIN, G.R., and D.C MONYGOMERY, 1980. Augmented Robust Estimators. Technometrics, 22, 333-341.

BAYE, M. R., and PARKER, D. F., 1984. Combining Ridge and Principal Component Regression. A Money Demand Illustration. Comm. Statist. Theory Methods, 13, 2, 197-205.

CHARNES, A., COOPER and W.W., FERGUSON, R., 1995. Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, Management Science, 1, 138-151.

DONOHO, D. L., and HUBER, P. J., 1983. "The Notation of Breakdown Point" A Festschrift for Erich Lehmann, edited by P. Bickel, K. Doksum, and J. L. Hodges, Jr.,Wadsworth, Belmont, CA.

EDGEWORTH, F. Y., 1887. On Observations Relating to Several Quantities. Hermathena, 6, 279-285.

ERGÜL, B., 2006. Robust Regresyon ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

FARRAR, D. E., and GLAUBER, R. R., 1967. Multicollinearity in Regression Analysis. The Problem Revisited. The Review of Economics and Statistics, 49, 1, 92-107.

GIBBONS, D.G., 1981. A Simulation Study of Some Ridge Estimators. Journal of the American Statistical Association, 76, 131-139.

GONIN, R. and MONEY, A. H., 1989. Nonlinear Lp Norm Estimation Marcel Dekker, Inc, New York, Basel.

GROβ, J., 2003. Restricted Ridge Estimation. Statistics and Probability Letters, 65, 57-64.

GRUBER, M. H. J., 1998. Improving Efficiency by Shrinkage: The James-Stein and Ridge Regression Estimators. Marcell Dekker, Inc. New York.

HAMPEL, F.R., 1974. The Influence Curve and Its Role in Robust Estimation. Journal of the American Statistical Association, 69, 383-393.

HAMPEL, F. R., RONCHETTİ, E. M., ROUSSEEUW, P. J., and STAHE W.A., 1986. Robust Statistics, the Approach Based on Infuence Function. New York, Wiley.

HOAGLIN, D.C., MOSTELLER, F., and TUKEY, J.W., 2000. Understanding Robust and Exploratory Data Analysis, John Wiley&Sons, Newyork.

HOCKING, R. R., SPEED, F. M., and LYNN, M. J., 1976. A Class of Biased Estimator in Linear Regression. Technometrics, 18, 425-438.

HOERL, A. E., and KENNARD, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12, 1, 55-67.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., and BALDWIN, K. F., 1975. Ridge Regression. Some Simulation. Communication in Statistics, 4, 105-123.

HOERL, A.E., and KENNARD, R.W., 1976. Ridge Regression: Iterative Estimation of the Biasing Parameter. Commun. Statist. Theor. Meth., 5(1), 77-88.

HOLLAND, W. P., 1973. Weighted Ridge and Robust Regression Methods. NBERWorking Paper, Cambridge, MA.

HOLLAND, W. P., and WELSCH, E.R., 1977. Robust Regression Using Iteratively Reweighted Least-Squares. Commun. Statist.-Theor. Meth, A(6), 9, 813–827.

HUBER, P.J., 1964. Robust Estimation of a Location Parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 35, 73-101.

HUBER, P. J., 1981. Robust Statistics. John Wiley, New York.

JADKAV, N.H., and KASHİD, D.N., 2011. A Jacknife Ridge M-Estimator for Regression Model with Multicollinearity and Outliers

JUDGE, G. G., GRIFFITHS, W. E., HILL, R. C., LÜTKEPOHL, H., and LEE, T-C., 1985. The Theory and Practice of Econometrics. John Wiley and Sons, New York, 1018p.

KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., AKDENİZ, F., STYAN., G. P. H., and WERNER, H. J., 1999. A New Biased Estimator in Linear Regression and a Detailed Analysis of the Widely-Analysed Dataset on Portland Cement. Sankhya, Series B, Indian Journal of Statistics, 61, 443-459.

KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., AKDENİZ, F., (1998). Mean Squared Error Comparison of Modified Ridge Regression Estimator and the Restricted Ridge Regression Estimator. Comm. Statist. Theory Methods, 27, 131-138.

KAÇIRANLAR, S., and SAKALLIOĞLU, S., 2001. Combining the Liu Estimator and the Principal Component Regression Estimator. Comm. Statist. Theory Methods, 30, 12, 2699-2705.

KAN, B., ALPU, Ö., and YAZICI, B., 2013. Robust Ridge ve Robust Liu Estimator for Regression Based on LTS Estimator.

KAYHAN, Y., 2006. Regresyon Çözümlemesinde Sağlam Konum Kestiricilerin Karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü, Ankara.

KIBRIA, B.M.G., 2003. Performance of Some New Ridge Regression Estimators. Communications in Statistics, Simulation and Computation, 32(2): 419-435.

LAWLESS, J. F., and WANG, P., 1976. A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators. Communication in Statistics, 7, 139-164.

LI, H. L., 1998. Solve Least Absolute Value Regression Problems Using Modified Goal Programming Techniques. Computers Op. Res., 25, 12, 1137-1143.

LIPOVETSKY, S., and CONKLIN, W. M., 2001. Multiobjective Regression Modifications for Collinearity. Computers and Operations Research, 28, 1333-1345.

LIPOVETSKY, S., and CONKLIN, W. M., 2005. Ridge Regression in Two Parameter Solution. Applied Stochastic Model and Business Industry, 21, 525-540.

LIU, K., 1993. A New Class of Biased Estimate in Linear Regression. Comm. Statist. Theory Methods, 22, 2, 393-402.

LIU, K., 2003. Using Liu-Type Estimator to Combat Collinearity. Communications in Statistics, Theory and Methods, 32: 1009-1020.

MALLOWS, C. L., 1973. Some Comments on C_p. Technometrics, 15, 661-675.

MALLOWS, C.L., 1975. On some topics in Robustness. Unpublished Memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, NJ.

MARONNA R., MARTİN D., and YOHAİ V., 2006. Robust Statistics Theory and Methods, John Wiley, A.B.D..

McDONALD, G. C., and GALARNEAU, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-Type Estimators. Journal of the American Statistical Association, 70, 350, 407-416.

MENDES, B., and TYLER, D.E., 1996. Constrained M-Estimation for Multivariate Location and Scatter. The Annals of Statistics, 24, 1346-1370.

MONTGOMERY, D.C., PECK, E.A., and VINING, G.G., 2001. Introduction to Linear Regression Analysis. 3rd ed. John Wiley & Sons, New York, 672s.

MYERS, R. H., 1990. Classical and Modern Regression with Applications. Duxbury Press: California.

NOMURA, M., and OHKUBO, T., 1985. A Note on Combining Ridge and Principal Component Regression. Comm. Statist. Theory Methods, 14, 10, 2489-2493.

ÖZKALE, M.R. ,2007. Çoklu İç İlişki İle İlgili Problemler. Yayınlanmış Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.

PFAFFENBERGER, R.C., and DIELMAN, T.E., 1985. A Cmparison of Robust Ridge Regression. Proceeding of the American Statistical Association Business and Economic Statistics Section, Las Vegas, Nev., 631-635.

PFAFFENBERGER, R.C., and DIELMAN, T.E., 1990. A Comparison of Regression Estimators When Both Multicollinearity and Outliers are Present. In Robust Regression, 243-270

ROUSSEEUW, P. J., 1984. Least Median of squares Regression. J. American Statist. Assoc., 79, 388.

ROUSSEEUW, P. J., and LEROY, A. M., 1987. Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley & Sons, Newyork.

ROUSSEEUW, P. J., and YOHAI V., 1984. Robust Regression by Means of S Estimators, in Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Edited by J. Franke, W. Härdle and R.D. Martin, Lecture Notes in Statistics, 26, 256-272.

SAKALLIOĞLU, S., KAÇIRANLAR, S., and AKDENİZ, F., (2001). Mean Squared Error Comparisons of Some Biased Regression Estimators. Comm. Statist. Theory Methods, 30(2), 347-361.

SALEH, A. K. Md., and KIBRIA, B. M. G., 1993. Performance of Some New Preliminary Test Ridge Regression Estimators and Their Properties. Comm. Statist. Theory Methods, 22, 2747-2764.

SARKAR, N., 1992. A New Estimator Combining the Ridge Regression and the Restricted Least Squares Methods for Estimation. Comm. Statist. Theory Methods, 21, 7, 1987-2000.

SARKAR, N., 1996. Mean Square Error Matrix Comparison of Some Estimators in Linear Regression with Multicollinearity. Statistics and Probability Letters, 30, 133-138.

SILVAPULLE, M. J., 1991. Robust ridge regression based on an M-estimator. Australian Journal of Statistics, 33, 319-333.

SILVEY, S. D., 1969. Multicollinearity and Imprecise Estimation. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 31, 3, 539-552.

SINGH, B., CHAUBEY, Y.P., and Dwivedi.T.D., 1986. An Almost Unbiased Ridge Estimator. The Indian Journal of Statistics, 48, 342-346.

STAUDTE, R. G. and SHEATHER, S. J., 1990. Robust Estimation and Testing, John Wiley& Sons, New York.

STEIN, C., 1956. Inadmissibility of Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. Proceeding of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, 197-206.

SWINDEL, F. F., 1976. Good Ridge Estimators Based on Prior Information. Comm. Statist. Theory Methods, A5 (11), 1065-1075.

THEOBALD, C. M., 1974. Generalizations of Mean Square Error Applied to Ridge Regresion. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 36, 1, 103-106.

TOKER, S. and KAÇIRANLAR, S., 2013. On the Performance of Two Parameter Ridge Estimator under the Mean Square Error Criterion. Applied, Mathematics and Computation, 219, 4718-4728.

TUKEY, J. W., 1970. Exploratory Data Analysis. MA, Addison-Wesley.

VINOD, H. D. and ULLAH, A., 1981. Recent Advances in Regression Methods. Marcel Dekker, New York, 361p.

YILDIRIM, V., 2012. Doğrusal Regresyon Modeli için M-Tahmin Edicilerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü, Eskişehir

ÖZGEÇMİŞ

20/10/1985 yılında Adana da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana da tamamladı. 2007 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2009 yılında Artvin Çoruh Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi'nde İstatistik Bölümü'nde yüksek lisansa başladı. Daha sonra 2011 yılında yüksek lisansını tamamlayarak Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde Doktora programına başladı. Evli ve bir çoçuk babasıdır.

EKLER

EK A

Çizelge A.1. Veri kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve sapan değer olmadığında $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
				$n = 20$					
1	**0.85**	0.5047	0.5291	0.2954	0.3070	0.4708	0.5238	1.4386	1.5401
	0.9	0.7173	0.7525	0.3677	0.3826	0.6558	0.7333	1.6908	1.8172
	0.99	6.5423	6.8661	2.0967	2.2140	2.0405	2.1752	1.9956	2.1286
	0.999	64.7904	68.0303	19.1311	20.2902	0.0778	0.1042	0.0429	0.0725
5	**0.85**	12.6176	13.2268	4.3269	4.5575	11.7726	13.0963	35.5066	38.0427
	0.9	17.9336	18.8136	5.8783	6.2010	16.3989	18.3327	42.1304	45.2909
	0.99	163.5568	171.6516	48.4842	51.3941	51.0096	54.3778	49.8859	53.2122
	0.999	1619.7608	1700.7572	474.3100	503.2630	1.9428	2.6027	1.0632	1.8029
10	**0.85**	50.4703	52.9070	16.5094	17.4327	47.0909	52.3852	141.9699	152.1148
	0.9	71.7346	75.2543	22.8029	24.0946	65.5961	73.3308	168.5049	181.1470
	0.99	654.2272	686.6066	193.4214	205.0583	204.0379	217.5106	199.5429	212.8484
	0.999	6479.0434	6803.0288	1896.7408	2012.5502	7.7707	10.4103	4.2513	7.2101
				$n = 50$					
1	**0.85**	0.2529	0.2660	0.1691	0.1755	0.2253	0.2464	0.5915	0.6273
	0.9	0.3650	0.3838	0.2185	0.2265	0.3025	0.3295	0.5076	0.5429
	0.99	3.4027	3.5769	1.1520	1.2043	0.1902	0.2179	0.1853	0.2125
	0.999	33.7358	35.4634	9.9389	10.4467	0.0068	0.0073	0.0058	0.0063
5	**0.85**	6.3235	6.6495	2.1187	2.2210	5.6361	6.1609	14.7491	15.6412
	0.9	9.1248	9.5942	2.9249	3.0701	7.5642	8.2376	12.6830	13.5630
	0.99	85.0672	89.4235	24.9127	26.2009	4.7526	5.4443	4.6266	5.3061
	0.999	843.3946	886.5839	244.4599	257.1367	0.1672	0.1809	0.1348	0.1471
10	**0.85**	25.2939	26.5981	7.9112	8.3160	22.5449	24.6438	58.9912	62.5597
	0.9	36.4994	38.3766	11.1554	11.7325	30.2573	32.9505	50.7311	54.2508
	0.99	340.2688	357.6940	99.1446	104.2947	19.0104	21.7768	18.5060	21.2236
	0.999	3373.5783	3546.3357	977.3360	1028.0407	0.6687	0.7235	0.5381	0.5875
				$n = 100$					
1	**0.85**	0.1310	0.1378	0.1014	0.1057	0.1184	0.1270	0.2729	0.2884
	0.9	0.1899	0.1999	0.1348	0.1402	0.1574	0.1683	0.2335	0.2478
	0.99	1.7934	1.8868	0.6698	0.7011	0.0627	0.0706	0.0605	0.0682
	0.999	17.8363	18.7645	5.2610	5.5668	0.0029	0.0030	0.0025	0.0027
5	**0.85**	3.2742	3.4450	1.1538	1.2113	2.9620	3.1742	6.7924	7.1778
	0.9	4.7486	4.9964	1.5712	1.6536	3.9347	4.2064	5.8341	6.1903
	0.99	44.8360	47.1712	13.0113	13.7829	1.5655	1.7609	1.5044	1.6974
	0.999	445.9064	469.1133	127.5215	135.1688	0.0686	0.0729	0.0531	0.0566
10	**0.85**	13.0968	13.7801	4.1041	4.3326	11.8481	12.6969	27.1661	28.7075
	0.9	18.9943	19.9856	5.7766	6.1060	15.7390	16.8254	23.3360	24.7606
	0.99	179.3440	188.6849	51.5443	54.6318	6.2615	7.0431	6.0167	6.7885
	0.999	1783.6256	1876.4532	509.5854	540.1761	0.2740	0.2910	0.2109	0.2249

Çizelge A.2. Veri kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve bir sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
					$n = 20$				
1	**0.85**	2.8394	0.6575	0.8895	0.2463	2.6912	0.6439	9.3214	1.9704
	0.9	4.1778	0.9414	1.1440	0.2550	3.8740	0.8913	11.6085	2.3569
	0.99	41.0684	8.7455	9.4295	1.0229	9.7120	1.1742	9.3857	1.0930
	0.999	412.3151	86.8970	93.8412	9.2442	0.4016	0.0854	0.1316	0.0332
5	**0.85**	70.9846	16.4368	16.8476	2.3646	67.2661	16.0932	234.5412	49.2088
	0.9	104.4449	23.5359	24.0973	3.0684	96.8365	22.2781	290.9263	58.9595
	0.99	1026.7095	218.6383	231.9959	23.5592	242.7568	29.3412	234.5927	27.3082
	0.999	10307.8787	2172.4242	2342.1276	229.2903	9.9933	2.1231	3.2012	0.8042
10	**0.85**	283.9386	65.7470	66.7499	8.3720	269.0571	64.3714	939.0909	196.9836
	0.9	417.7797	94.1435	96.0017	11.4161	387.3381	89.1104	1164.1142	235.9097
	0.99	4106.8380	874.5534	927.8778	93.9623	971.0062	117.3590	938.3467	109.2258
	0.999	41231.5148	8689.6967	9368.3397	916.9534	39.9508	8.4873	12.7636	3.2069
					$n = 50$				
1	**0.85**	0.5734	0.2799	0.2609	0.1556	0.4776	0.2517	1.5576	0.6706
	0.9	0.8263	0.4039	0.3256	0.1940	0.6119	0.3274	1.2027	0.5640
	0.99	7.6668	3.7640	1.7422	0.9170	0.2764	0.1360	0.2595	0.1294
	0.999	75.9273	37.3253	15.5715	7.8393	0.0159	0.0071	0.0111	0.0056
5	**0.85**	14.3340	6.9978	3.3690	1.7220	11.9545	6.2943	38.7644	16.7000
	0.9	20.6569	10.0985	4.6783	2.3560	15.3138	8.1865	29.9947	14.0791
	0.99	191.6700	94.0999	39.4537	19.6789	6.9425	3.4046	6.5324	3.2379
	0.999	1898.1820	933.1337	385.1201	192.7050	0.4334	0.1821	0.3416	0.1438
10	**0.85**	57.3359	27.9911	12.8407	6.3676	47.8236	25.1780	154.9840	66.7823
	0.9	82.6277	40.3942	18.0755	8.9335	61.2621	32.7469	119.9455	56.3091
	0.99	766.6798	376.3996	157.1115	78.2732	27.7872	13.6214	26.1546	12.9557
	0.999	7592.7278	3732.5349	1539.7491	770.3770	1.7524	0.7316	1.4012	0.5806
					$n = 100$				
1	**0.85**	0.3019	0.1446	0.1976	0.1071	0.2819	0.1326	0.5299	0.2986
	0.9	0.4399	0.2098	0.2582	0.1408	0.3837	0.1747	0.5176	0.2573
	0.99	4.1983	1.9823	1.4076	0.6787	0.1211	0.0636	0.1138	0.0605
	0.999	41.8719	19.7168	12.2737	5.3785	0.0049	0.0029	0.0030	0.0024
5	**0.85**	7.5471	3.6159	2.4887	1.1794	7.0514	3.3145	13.1384	7.4197
	0.9	10.9976	5.2454	3.4880	1.6072	9.5967	4.3673	12.8998	6.4213
	0.99	104.9571	49.5571	30.5587	13.3323	3.0428	1.5903	2.8666	1.5111
	0.999	1046.7979	492.9212	302.0220	130.6333	0.1387	0.0741	0.1030	0.0565
10	**0.85**	30.1884	14.4637	9.2698	4.2072	28.2067	13.2584	52.5116	29.6686
	0.9	43.9904	20.9816	13.2563	5.9233	38.3887	17.4696	51.5818	25.6819
	0.99	419.8283	198.2283	121.5037	52.8323	12.1799	6.3622	11.4789	6.0458
	0.999	4187.1916	1971.6847	1207.3477	522.0358	0.5641	0.2978	0.4294	0.2279

Çizelge A.3. Veri kümesinde $p = 4$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve iki sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
					$n = 20$				
1	**0.85**	2.2020	0.6253	0.5308	0.1946	2.0769	0.6084	8.6272	1.9258
	0.9	3.2405	0.8935	0.6358	0.1975	2.9149	0.8332	10.3888	2.2647
	0.99	31.3393	8.2226	4.5106	0.6349	5.1471	0.8218	4.8030	0.7402
	0.999	312.5013	81.5603	43.6619	5.5385	0.2994	0.0813	0.0722	0.0303
5	**0.85**	55.0512	15.6325	7.9939	1.5605	51.9169	15.2105	215.7994	47.5479
	0.9	81.0128	22.3376	11.5049	1.9828	72.8723	20.8335	259.7274	56.3768
	0.99	783.4818	205.5650	109.1684	14.3368	128.6955	20.5606	120.0934	18.5241
	0.999	7812.5319	2039.0074	1087.7806	137.0725	7.5138	2.0507	1.8559	0.7880
10	**0.85**	220.2050	62.5299	31.0279	5.2877	207.6636	60.8429	863.4302	190.0671
	0.9	324.0512	89.3506	45.3303	7.2116	291.4869	83.3355	1038.9650	225.4402
	0.99	3133.9273	822.2598	436.1190	57.1378	514.7917	82.2514	480.3843	74.1069
	0.999	31250.1274	8156.0295	4350.4774	548.0825	30.0709	8.2130	7.4521	3.1704
					$n = 50$				
1	**0.85**	0.5705	0.2890	0.2159	0.1495	0.4862	0.2594	1.4338	0.6681
	0.9	0.8214	0.4168	0.2628	0.1833	0.6195	0.3356	1.1626	0.5690
	0.99	7.5728	3.8776	1.3730	0.8480	0.1891	0.1196	0.1723	0.1125
	0.999	74.7157	38.4227	12.3027	7.2874	0.0081	0.0078	0.0068	0.0053
5	**0.85**	14.2631	7.2262	2.6531	1.6247	12.1570	6.4827	35.7959	16.6840
	0.9	20.5343	10.4207	3.6730	2.2074	15.4915	8.3872	29.0526	14.2264
	0.99	189.3209	96.9401	31.2475	18.3215	4.7290	2.9823	4.3091	2.7993
	0.999	1867.8913	960.5677	304.5009	179.3121	0.2068	0.1869	0.1513	0.1348
10	**0.85**	57.0524	28.9047	10.1027	5.9971	48.6286	25.9303	143.1740	66.7416
	0.9	82.1372	41.6827	14.2260	8.3781	61.9666	33.5482	116.2065	56.9095
	0.99	757.2835	387.7605	124.5830	72.9382	18.9180	11.9267	17.2393	11.1932
	0.999	7471.5653	3842.2710	1217.5939	716.9116	0.8298	0.7448	0.5994	0.5437
					$n = 100$				
1	**0.85**	0.2653	0.1447	0.1699	0.1058	0.2386	0.1317	0.5622	0.3040
	0.9	0.3864	0.2100	0.2203	0.1387	0.3144	0.1725	0.4915	0.2588
	0.99	3.6878	1.9845	1.1084	0.6549	0.1066	0.0605	0.0998	0.0575
	0.999	36.8184	19.7401	9.3952	5.1571	0.0076	0.0030	0.0048	0.0023
5	**0.85**	6.6315	3.6177	1.9769	1.1383	5.9720	3.2933	13.9235	7.5480
	0.9	9.6608	5.2494	2.7482	1.5495	7.8690	4.3130	12.2394	6.4541
	0.99	92.1958	49.6132	23.3797	12.7827	2.6888	1.5145	2.5291	1.4400
	0.999	920.4593	493.5020	230.3754	125.1581	0.2151	0.0792	0.1652	0.0597
10	**0.85**	26.5258	14.4708	7.2568	4.0438	23.8907	13.1735	55.6402	30.1778
	0.9	38.6433	20.9975	10.3262	5.6921	31.4800	17.2527	48.9350	25.8111
	0.99	368.7834	198.4529	92.7934	50.6265	10.7684	6.0604	10.1356	5.7635
	0.999	3681.8371	1974.0082	920.7582	500.1254	0.8744	0.3198	0.6868	0.2434

Çizelge A.4. Veri kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve sapan değer olmadığında $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
				$n = 20$					
1	**0.85**	4.1540	4.2124	1.1724	1.1913	0.8534	0.9606	0.6873	0.7960
	0.9	6.0392	6.1273	1.6351	1.6630	0.7086	0.8261	0.4600	0.5877
	0.99	57.0551	57.8719	14.0946	14.3592	0.3290	0.3438	0.0281	0.0827
	0.999	566.4891	574.5437	138.4934	141.1710	0.0527	0.0538	0.0052	0.0057
5	**0.85**	103.8509	105.3106	25.5799	26.0435	21.3372	24.0110	17.1819	19.8914
	0.9	150.9805	153.1813	37.0701	37.7603	17.7166	20.6494	11.4965	14.6820
	0.99	1426.3780	1446.7986	348.3866	354.9950	8.2225	8.5914	0.6935	2.0564
	0.999	14162.2275	14363.5920	3458.3366	3525.2705	1.3147	1.3422	0.1212	0.1321
10	**0.85**	415.4036	421.2425	101.8181	103.6716	85.3493	96.0434	68.7275	79.5645
	0.9	603.9220	612.7252	147.7799	150.5397	70.8666	82.5970	45.9857	58.7269
	0.99	5705.5121	5787.1943	1393.0453	1419.4779	32.8896	34.3654	2.7729	8.2243
	0.999	56648.9098	57454.3681	13832.8450	14100.5794	5.2584	5.3687	0.4835	0.5274
				$n = 50$					
1	**0.85**	0.8684	0.8983	0.3802	0.3885	0.4949	0.5146	0.5375	0.5586
	0.9	1.2666	1.3103	0.4946	0.5061	0.4751	0.4921	0.4642	0.4808
	0.99	12.0689	12.4933	3.2988	3.4071	0.0862	0.0941	0.0222	0.0317
	0.999	120.1235	124.3534	31.0731	32.1650	0.0127	0.0132	0.0027	0.0028
5	**0.85**	21.7092	22.4563	5.8451	6.0363	12.3704	12.8623	13.4380	13.9635
	0.9	31.6656	32.7587	8.4013	8.6810	11.8757	12.3009	11.6029	12.0180
	0.99	301.7215	312.3336	77.8125	80.5365	2.1517	2.3498	0.5451	0.7832
	0.999	3003.0875	3108.8349	772.0927	799.4101	0.3146	0.3273	0.0588	0.0617
10	**0.85**	86.8369	89.8251	22.7874	23.5550	49.4815	51.4490	53.7520	55.8539
	0.9	126.6625	131.0347	33.0133	34.1347	47.5028	49.2034	46.4112	48.0718
	0.99	1206.8859	1249.3345	310.6554	321.5544	8.6068	9.3990	2.1794	3.1316
	0.999	12012.3499	12435.3396	3087.7756	3197.0483	1.2582	1.3089	0.2345	0.2457
				$n = 100$					
1	**0.85**	0.3805	0.3985	0.2223	0.2296	0.2335	0.2469	0.2647	0.2793
	0.9	0.5553	0.5816	0.2866	0.2959	0.2174	0.2285	0.2194	0.2306
	0.99	5.2984	5.5499	1.5699	1.6414	0.0176	0.0192	0.0057	0.0070
	0.999	52.7537	55.2610	13.8585	14.5715	0.0025	0.0026	0.0012	0.0013
5	**0.85**	9.5125	9.9621	2.6924	2.8200	5.8374	6.1709	6.6178	6.9826
	0.9	13.8827	14.5403	3.8221	4.0088	5.4333	5.7105	5.4824	5.7618
	0.99	132.4609	138.7486	34.5127	36.2971	0.4385	0.4780	0.1324	0.1662
	0.999	1318.8415	1381.5240	341.5575	359.3881	0.0593	0.0622	0.0212	0.0223
10	**0.85**	38.0500	39.8485	10.1663	10.6775	23.3497	24.6836	26.4711	27.9305
	0.9	55.5309	58.1612	14.6826	15.4302	21.7331	22.8418	21.9294	23.0469
	0.99	529.8438	554.9944	137.4369	144.5758	1.7537	1.9117	0.5284	0.6635
	0.999	5275.3660	5526.0961	1365.6154	1436.9390	0.2370	0.2486	0.0836	0.0878

Çizelge A.5. Veri kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve bir sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
				$n = 20$					
1	**0.85**	14.9571	5.6235	1.6646	0.2900	2.5576	0.8456	1.8632	0.5621
	0.9	21.8140	8.1945	2.3728	0.3956	2.8323	0.8985	1.5659	0.4474
	0.99	207.9183	77.7800	21.6052	3.3101	1.7706	0.5177	0.0872	0.0210
	0.999	2069.9729	773.0984	214.4370	32.4828	0.2770	0.0819	0.0227	0.0063
5	**0.85**	373.9285	140.5882	38.9257	6.0279	64.0104	21.1615	46.6870	14.0839
	0.9	545.3490	204.8624	56.5721	8.7247	70.8765	22.4832	39.2655	11.2176
	0.99	5197.9567	1944.5001	537.2355	81.6090	44.3280	12.9614	2.2972	0.5571
	0.999	51749.3220	19327.4611	5358.0067	810.9138	6.9844	2.0653	0.6819	0.1883
10	**0.85**	1495.7139	562.3528	155.2254	23.9697	256.0776	84.6580	186.8042	56.3541
	0.9	2181.3960	819.4494	225.7747	34.7542	283.5417	89.9442	157.1244	44.8905
	0.99	20791.8267	7778.0005	2148.3607	326.2606	177.3438	51.8560	9.2511	2.2481
	0.999	206997.2882	77309.8444	21431.4364	3243.4740	27.9684	8.2711	2.7879	0.7722
				$n = 50$					
1	**0.85**	2.0726	0.9725	0.6051	0.2304	1.1668	0.4214	1.2833	0.4793
	0.9	3.0181	1.4186	0.8127	0.2878	1.0740	0.3612	1.0391	0.3458
	0.99	28.8837	13.5362	6.5087	1.7973	0.3054	0.0978	0.0866	0.0166
	0.999	288.6457	134.8161	63.8282	16.8981	0.0595	0.0164	0.0308	0.0053
5	**0.85**	51.8155	24.3129	11.8351	3.1930	29.1279	10.5220	32.0606	11.9747
	0.9	75.4513	35.4657	16.9919	4.5663	26.7946	9.0156	25.9175	8.6287
	0.99	722.0914	338.4041	159.3195	42.2329	7.5707	2.4300	2.0466	0.3814
	0.999	7216.1426	3370.4023	1592.3009	419.7529	1.4255	0.3955	0.6421	0.0990
10	**0.85**	207.2618	97.2517	47.2362	12.4369	116.4908	42.0823	128.2312	47.8957
	0.9	301.8052	141.8629	67.9026	17.9548	107.1520	36.0559	103.6412	34.5076
	0.99	2888.3657	1353.6164	637.2758	168.6540	30.2511	9.7130	8.1305	1.5121
	0.999	28864.5706	13481.6091	6369.2093	1678.7365	5.6715	1.5753	2.5084	0.3822
				$n = 100$					
1	**0.85**	0.8365	0.4188	0.4013	0.1987	0.5051	0.2278	0.5680	0.2644
	0.9	1.2189	0.6112	0.5214	0.2483	0.4798	0.1946	0.4836	0.1970
	0.99	11.5727	5.8296	3.3819	1.2567	0.0377	0.0182	0.0114	0.0045
	0.999	115.0336	58.0378	31.5694	11.0333	0.0041	0.0026	0.0009	0.0012
5	**0.85**	20.9133	10.4709	6.0158	2.1617	12.6301	5.6941	14.2020	6.6111
	0.9	30.4733	15.2790	8.6258	3.0593	11.9965	4.8626	12.0926	4.9224
	0.99	289.3180	145.7401	79.1998	27.4815	0.9454	0.4534	0.2861	0.1047
	0.999	2875.8388	1450.9440	783.7788	271.8297	0.1070	0.0640	0.0246	0.0218
10	**0.85**	83.6530	41.8835	23.3503	8.1388	50.5217	22.7764	56.8081	26.4444
	0.9	121.8932	61.1160	33.7847	11.7316	47.9875	19.4506	48.3720	19.6896
	0.99	1157.2721	582.9605	316.0654	109.4190	3.7844	1.8139	1.1486	0.4184
	0.999	11503.3552	5803.7760	3134.3777	1086.8108	0.4311	0.2562	0.1036	0.0871

Çizelge A.6. Veri kümesinde $p = 10$, $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ ve iki sapan değer olduğunda $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
				$n = 20$					
1	**0.85**	19.6313	9.2414	2.2777	0.6124	3.4583	1.4891	2.4704	1.0012
	0.9	28.4957	13.2834	3.2480	0.8352	3.6629	1.5344	1.9836	0.7721
	0.99	268.4918	121.9921	29.5218	6.9085	2.0819	0.8118	0.0807	0.0350
	0.999	2664.5999	1202.3686	291.6863	67.0538	0.3025	0.1236	0.0092	0.0049
5	**0.85**	490.7825	231.0343	54.3196	13.7379	86.4722	37.2111	61.7803	25.0020
	0.9	712.3931	332.0840	78.5905	19.4218	91.5859	38.3435	49.6101	19.2665
	0.99	6712.2956	3049.8031	735.4486	171.4281	52.0563	20.2769	2.0302	0.8336
	0.999	66614.9977	30059.2143	7289.5675	1675.0800	7.5706	3.0716	0.1911	0.1344
10	**0.85**	1963.1299	924.1373	216.9040	54.7350	345.8975	148.8372	247.1345	99.9964
	0.9	2849.5725	1328.3361	313.9895	77.5013	366.3513	153.3663	198.4533	77.0520
	0.99	26849.1824	12199.2122	2941.4284	685.5786	208.2305	81.0995	8.1306	3.3175
	0.999	266459.9907	120236.8573	29157.9064	6700.1926	30.2871	12.2785	0.7481	0.5466
				$n = 50$					
1	**0.85**	2.2612	1.0525	0.6004	0.2202	1.1950	0.4316	1.3263	0.4941
	0.9	3.2807	1.5335	0.7998	0.2734	1.0919	0.3658	1.0544	0.3494
	0.99	31.0607	14.5784	6.2734	1.6984	0.3063	0.1001	0.0805	0.0154
	0.999	309.3214	145.0490	61.1068	15.9495	0.0617	0.0171	0.0328	0.0056
5	**0.85**	56.5306	26.3131	11.8359	3.0803	29.8265	10.7760	33.1313	12.3452
	0.9	82.0176	38.3371	16.8247	4.3827	27.2384	9.1280	26.2951	8.7154
	0.99	776.5180	364.4591	153.6657	40.0089	7.5897	2.4840	1.8871	0.3491
	0.999	7733.0354	3626.2245	1524.5036	396.2957	1.4766	0.4109	0.6880	0.1036
10	**0.85**	226.1224	105.2526	47.2565	12.0048	119.2822	43.0972	132.5121	49.3769
	0.9	328.0703	153.3483	67.2538	17.2438	108.9246	36.5045	105.1488	34.8535
	0.99	3106.0720	1457.8365	614.6834	159.7878	30.3257	9.9284	7.4893	1.3818
	0.999	30932.1415	14504.8981	6098.0420	1584.9381	5.8746	1.6365	2.6895	0.3996
				$n = 100$					
1	**0.85**	0.8956	0.4266	0.4162	0.1937	0.5300	0.2247	0.5987	0.2627
	0.9	1.3016	0.6223	0.5369	0.2403	0.4961	0.1886	0.5003	0.1911
	0.99	12.2842	5.9282	3.4137	1.1856	0.0408	0.0182	0.0118	0.0039
	0.999	121.9242	58.9986	31.7286	10.3616	0.0054	0.0026	0.0014	0.0010
5	**0.85**	22.3890	10.6660	6.2320	2.0568	13.2570	5.6190	14.9696	6.5687
	0.9	32.5402	15.5569	8.8638	2.9011	12.4111	4.7171	12.5163	4.7791
	0.99	307.1046	148.2053	79.8823	25.8351	1.0357	0.4576	0.3153	0.0988
	0.999	3048.1048	1474.9661	787.6561	255.1836	0.1509	0.0684	0.0586	0.0245
10	**0.85**	89.5559	42.6642	24.1178	7.7167	53.0324	22.4776	59.8791	26.2749
	0.9	130.1608	62.2275	34.6380	11.0952	49.6500	18.8702	50.0705	19.1181
	0.99	1228.4183	592.8213	318.6951	102.8279	4.1513	1.8327	1.2754	0.3988
	0.999	12192.4194	5899.8645	3149.7867	1020.2209	0.6120	0.2758	0.2502	0.1016

Çizelge A.7. Veri kümesinde hatalar *Standart Cauchy* dağılımından üretildiğinde $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_M$, $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{\alpha}_M(k)$, $\hat{\alpha}(k,d)$, $\tilde{\alpha}(k,d)$, $\hat{\alpha}_M(k,d)$ ve $\tilde{\alpha}_M(k,d)$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

p	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}(k)$	$\hat{\alpha}_M(k)$	$\hat{\alpha}(k,d)$	$\hat{\alpha}_M(k,d)$	$\tilde{\alpha}(k,d)$	$\tilde{\alpha}_M(k,d)$
				$n = 20$					
4	**0.85**	67821.34	7134.43	14063.01	385.74	62934.89	6786.51	213104.1	33158.5
	0.9	96346.95	10220.64	19887.87	546.95	87971.04	8944.07	249107.5	37005.82
	0.99	868942.61	93825.22	175881.34	6946.75	170907.03	8068.02	167729.4	4278.83
	0.999	8553872.32	928053.15	1731224.01	39473.65	7865.32	808.04	3271.92	389.14
10	**0.85**	738605.96	110272.46	146951.03	3920.19	113380.10	12689.07	91796.08	8230.19
	0.9	1090982.64	165689.68	218768.28	5862.04	85338.56	12633.84	51404.22	6302.01
	0.99	10742755.31	1476694.53	2226475.28	47268.44	39879.92	6639.33	4225.08	357.86
	0.999	107919270.21	14920205.93	22639758.81	491483.82	7666.78	1130.02	1815.75	174.22
				$n = 50$					
4	**0.85**	37159.38	1660.98	9975.76	25.28	32882.53	1209.25	88090.42	2609.07
	0.9	53786.90	2392.05	14335.25	34.89	43301.92	1147.91	76291.37	2034.46
	0.99	500389.30	22314.29	128329.95	202.89	25650.94	100.29	24696.03	51.69
	0.999	4954852.08	221651.27	1261516.51	1712.86	1869.75	48.48	1665.11	38.66
10	**0.85**	155216.99	2493.61	31689.35	3.837	85153.83	1108.40	94619.29	1354.09
	0.9	225402.57	3656.05	45722.10	5.300	80246.36	1235.14	77468.83	1152.01
	0.99	2118723.80	35962.91	423170.19	47.874	16167.05	727.79	3021.22	32.10
	0.999	20993556.01	359490.05	4177691.49	468.40	2148.29	103.96	304.23	1.674
				$n = 100$					
4	**0.85**	1740116.14	23495.93	197861.08	313.57	1573601.15	10081.51	3646006	52612.58
	0.9	2500077.21	33017.36	261959.63	417.24	1938659.03	7703.97	3133623	27318.91
	0.99	23487112.55	297009.01	2257677.77	1198.40	183225.67	1525.92	123272.7	984.69
	0.999	233649160.6	2936257.70	22368213.07	5046.86	9620.17	851.78	915.3346	773.60
10	**0.85**	10248600.84	89607.09	2346322.49	47.97	6808334.53	21301.37	7359152	33467.34
	0.9	14973896.77	130925.56	3434858.11	70.72	5910977.59	20159.63	5954140	21022.11
	0.99	142873985.9	1250909.10	32880257.93	664.82	331074.47	5053.25	42594.72	119.75
	0.999	1421485172	12456209.15	327291595.3	6532.30	42392.87	576.55	1185.90	13.31

Çizelge B.1. Veri kümesinde $p = 4$ ve sapan değer olmadığında OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	0LSE	ME	RE	RME	TRE_1	$TRME_1$	TRE_2	$TRME_2$
				$n = 20$					
1	0.9	1.0687	1.1741	0.4706	0.5620	0.1346	0.1848	0.000081	0.000112
	0.99	9.9529	10.6868	3.0761	3.6363	1.5759	1.9849	0.000658	0.000828
	0.999	100.0669	110.4052	29.8460	37.7413	10.3845	14.4032	0.006367	0.008831
5	0.9	26.7322	29.3689	8.3101	10.3729	3.8228	5.1840	0.002315	0.003140
	0.99	248.8250	267.1723	72.9184	86.6729	14.9190	19.2009	0.006227	0.008014
	0.999	2501.6735	2760.1313	742.1212	939.1346	27.6647	40.9523	0.016962	0.0251089
10	0.9	106.9286	117.4757	32.6944	40.9144	12.8506	17.5127	0.007784	0.010607
	0.99	995.2999	1068.6893	291.1654	346.1549	33.1056	43.8928	0.013817	0.018319
	0.999	10006.6939	11040.5254	2967.9830	3755.9972	52.5972	79.7264	0.032248	0.0488882
				$n = 50$					
1	0.9	0.3088	0.3319	0.19249	0.2139	0.0374	0.0445	0.000022	0.000230
	0.99	2.8783	3.0942	0.9646	1.1381	0.3796	0.4729	0.00023	0.000286
	0.999	28.7624	30.9425	8.28294	9.9263	4.2080	5.1499	0.002583	0.003161
5	0.9	7.7203	8.2976	2.50392	2.9462	1.3140	1.6001	0.000788	0.000959
	0.99	71.9588	77.3558	20.3185	24.3967	7.0155	9.1086	0.004244	0.005510
	0.999	719.3144	773.8490	203.234	244.0421	16.3776	22.5221	0.010060	0.013834
10	0.9	30.8811	33.1907	9.45289	11.2005	4.9522	6.1827	0.002969	0.003707
	0.99	287.8354	309.4231	80.772	97.0453	15.1110	20.8813	0.009142	0.012633
	0.999	2877.2578	3095.2951	812.435	975.6287	25.0845	36.355	0.015408	0.022331
				$n = 100$					
1	0.9	0.1431	0.1540	0.1092	0.1194	0.0162	0.0190	0.000012	0.000109
	0.99	1.3210	1.4168	0.5321	0.6101	0.1477	0.1811	0.000109	0.000133
	0.999	13.1093	14.0410	3.9574	4.6496	2.0020	2.4391	0.001476	0,001799
5	0.9	3.5779	3.8500	1.2691	1.4775	0.5974	0.7164	0.000442	0.000530
	0.99	33.0249	35.4192	9.7546	11.5294	4.2259	5.1069	0.003107	0.003755
	0.999	327.7316	351.0255	95.0427	112.1032	12.4771	15.5163	0.009201	0.011443
10	0.9	14.3116	15.3999	4.5618	5.3709	2.3344	2.8272	0.001725	0.002090
	0.99	132.0996	141.6767	38.5298	45.5978	9.0691	11.3585	0.006668	0.008352
	0.999	1310.9265	1404.1021	379.6850	447.8958	16.6372	21.4131	0.012269	0.015791

Çizelge B.2. Veri kümesinde $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	0LSE	ME	RE	RME	TRE_1	$TRME_1$	TRE_2	$TRME_2$
				$n = 20$					
1	0.9	62.0315	2.3305	30.5512	0.2339	16.8753	0.0800	0.003375	0.000016
	0.99	575.9293	21.3723	271.8762	1.3009	49.3992	0.3716	0.009880	0.000074
	0.999	5700.6601	211.3935	2671.7292	12.1569	66.3982	0.6966	0.013280	0.000139
5	0.9	1550.7881	58.2635	759.6721	4.0662	93.8452	0.7161	0.018769	0.000143
	0.99	14398.2330	534.3078	6791.2791	31.3987	42.2387	0.8154	0.008448	0.000163
	0.999	142516.5045	5284.8399	66787.1303	302.8713	50.1612	0.9008	0.010032	0.000180
10	0.9	6203.1527	233.0543	3039.2046	15.8590	501.2180	1.8918	0.100244	0.000378
	0.99	57592.9322	2137.2314	27164.8914	125.4498	131.4787	1.7369	0.026296	0.000347
	0.999	570066.0179	21139.3599	267148.0609	1211.3602	98.3816	1.8254	0.019676	0.000365
				$n = 50$					
1	0.9	2.1059	0.3430	0.4522	0.1097	0.0954	0.0178	0.000019	0.000004
	0.99	19.1848	3.2085	2.5693	0.3763	0.8290	0.1225	0.000166	0.000025
	0.999	189.0132	31.8825	23.5659	3.0455	3.3596	0.9054	0.000672	0.000181
5	0.9	52.6498	8.5763	7.5896	1.0413	3.1994	0.4878	0.000640	0.000098
	0.99	479.6213	80.2149	60.6582	7.6894	7.4690	1.4152	0.001494	0.000283
	0.999	4725.3306	797.0640	585.6275	74.4852	8.9907	2.1253	0.001798	0.000425
10	0.9	210.5995	34.3052	29.7834	3.7467	11.6248	1.5585	0.002325	0.000312
	0.99	1918.4854	320.8596	242.0031	30.5295	17.4383	2.9265	0.003488	0.000585
	0.999	18901.3224	3188.2561	2341,8890	297.7237	18.1714	3.5871	0.003634	0.000717
				$n = 100$					
1	0.9	0.9611	0.1556	0.4530	0.1027	0.0656	0.0131	0.000013	0.000003
	0.99	9.2266	1.4612	2.8466	0.4219	0.9474	0.1140	0.000189	0.000023
	0.999	92.0388	14.5302	26.3647	3.0730	8.3974	1.4136	0.001679	0.000283
5	0.9	24.0278	3.8911	7.0637	0.99823	3.0135	0.4592	0.000603	0.000092
	0.99	230.6650	36.5313	65.6876	7.5891	13.0892	2.6986	0.002618	0.000540
	0.999	2300.9719	363.2557	653.4741	7.7745	21.3360	6.3857	0.004267	0.001277
10	0.9	96.1114	15.5644	27.5499	3.5311	9.5630	1.6875	0.001913	0.000338
	0.99	922.6600	146.1252	261.9958	29.9680	22.4137	5.5577	0.004483	0.001112
	0.999	9203.8876	1453.0228	2613.1234	294.7154	29.6069	8.7184	0.005921	0.001744

Çizelge B.3. Veri kümesinde $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda OLSE, ME, RE, RME, TRE_1, $TRME_1$, TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	OLSE	ME	RE	RME	TRE_1	$TRME_1$	TRE_2	$TRME_2$
				$n = 20$					
1	0.9	80.9029	3.8065	42.1665	0.4164	28.3773	0.2014	0.005675	0.000040
	0.99	757.8044	36.3178	386.5608	3.0833	84.5064	0.9858	0.016901	0.000197
	0.999	7510.7551	361.4418	3817.0705	29.8760	111.5197	1.5510	0.022304	0.000310
5	0.9	2022.5732	95.1636	1047.8358	8.2987	166.24735	1.4507	0.033249	0.000290
	0.99	18945.1113	907.9452	9657.0258	75.3638	156.4983	1.8506	0.0312300	0.000370
	0.999	187768.8783	9036.0469	95419.5546	745.2117	167.2658	1.9632	0.033453	0.000393
10	0.9	8090.2929	380.6547	4190.7113	32.8523	535.4495	3.6778	0.107090	0.000736
	0.99	75780.4452	3631.7809	38627.1645	301.2230	314.3579	3.7075	0.062872	0.000742
	0.999	751075.5135	36144.1878	381677.1762	2980.6176	306.4088	3.7991	0.061282	0.000760
				$n = 50$					
1	0.9	2.7395	0.3884	0.5653	0.1110	0.1046	0.0175	0.000021	0.000004
	0.99	24.3537	3.6283	3.3197	0.3904	0.8073	0.1200	0.000161	0.000024
	0.999	238.8194	36.0451	30.5957	3.2299	3.2590	0.8497	0.000652	0.000170
5	0.9	68.4883	9.7122	10.1419	1.0950	3.66712	0.4769	0.000733	0.000095
	0.99	608.8432	90.7086	79.2748	8.1619	6.6369	1.2211	0.001327	0.000244
	0.999	5970.4858	901.1296	761.2622	79.2165	7.6132	1.7250	0.001523	0.000345
10	0.9	273.9533	38.8490	39.9408	3.9593	12.9125	1.4705	0.002583	0.000294
	0.99	2435.3731	362.8346	316.4708	32.4379	14.7961	2.4225	0.002959	0.0004845
	0.999	23881.9434	3604.5186	3044.4429	316.6698	14.4738	2.8373	0.002895	0.000567
				$n = 100$					
1	0.9	1.7032	0.1740	0.85837418	0.1114	0.2337	0.0149	0.000047	0.000003
	0.99	16.2663	1.6355	6.46073279	0.4627	3.2522	0.1365	0.000650	0.000027
	0.999	162.0364	16.2657	62.164263	3.4780	19.9593	1.6164	0.003992	0.000323
5	0.9	42.5816	4.3517	16.4924894	1.1093	6.9764	0.5127	0.001395	0.000103
	0.99	406.6599	40.8889	155.539411	8.6007	18.3196	2.7635	0.003664	0.000553
	0.999	4050.9121	406.6448	1547.98405	83.9100	23.9238	5.8651	0.004785	0.001173
10	0.9	170.3264	17.4070	65.4003851	3.9716	19.0223	1.7920	0.003804	0.000358
	0.99	1626.6398	163.5556	621.571465	34.0325	20.3828	5.0137	0.004077	0.001003
	0.999	16203.6485	1626.5793	6191.33904	335.2791	21.3136	7.4186	0.004263	0.001484

Çizelge B.4. Veri kümesinde $p = 4$ ve dört sapan değer olduğunda OLSE. ME. RE. RME. TRE_1. $TRME_1$. TRE_2 ve $TRME_2$ tahmin edicilerinin *MSE* tahmini.

σ	ρ	OLSE	ME	RE	RME	TRE_1	$TRME_1$	TRE_2	$TRME_2$
					$n = 20$				
1	0.9	111.3571	15.3986	57.4379	3.1898	8.4065	0.6186	0.001680	0.000124
	0.99	1007.8529	109.6626	485.3365	15.8828	5.9459	1.5580	0.001189	0.000312
	0.999	9890.9491	1018.5838	4668.1366	135.5666	5.7585	2.0981	0.001151	0.000419
5	0.9	2783.9283	384.9661	1437.5161	76.8582	650.9501	7.9149	0.130190	0.001582
	0.99	25196.3231	2741.5664	12134.4496	394.7882	660.5566	2.3879	0.132111	0.000477
	0.999	247273.7297	25464.5964	116704.2512	3386.9905	597.1118	2.0162	0.119422	0.000403
10	0.9	11135.7133	1539.8646	5753.3917	307.3528	2976.0206	40.4934	0.595204	0.008098
	0.99	100785.2927	10966.2656	48540.8920	1579.0694	3574.3778	12.1704	0.714875	0.002434
	0.999	989094.9190	101858.3856	466820.0028	13547.8639	3343.8561	9.3028	0.668771	0.001860
					$n = 50$				
1	0.9	7.9046	0.5796	2.7704	0.1470	2.3533	0.0290	0.000471	0.000005
	0.99	72.3964	5.4312	22.1720	0.6152	13.2469	0.2414	0.002649	0.000048
	0.999	713.2750	53.8914	213.8487	5.3294	27.9982	1.3199	0.005599	0.000263
5	0.9	197.6151	14.4919	62.1479	1.6585	34.9394	0.7020	0.006987	0.000140
	0.99	1809.9112	135.7810	546.7113	13.4622	66.3713	1.8269	0.013274	0.000365
	0.999	17831.8768	1347.2856	5338.5851	131.3573	74.0473	2.4944	0.014809	0.000498
10	0.9	790.4604	57.9678	247.2115	6.2064	106.0924	2.0653	0.021218	0.000413
	0.99	7239.6450	543.1241	2185.3445	53.5931	151.7751	3.4740	0.030355	0.000694
	0.999	71327.5073	5389.1426	21352.8294	525.1743	159.0336	4.1222	0.031806	0.000824
					$n = 100$				
1	0.9	2.4321	0.1870	1.1204	0.1095	0.1965	0.0142	0.000039	0.000002
	0.99	23.3546	1.7579	9.0185	0.4252	3.2139	0.1229	0.000642	0.000024
	0.999	233.1123	17.4906	88.0200	3.2196	19.1624	1.3804	0.003832	0.000276
5	0.9	60.8040	4.6752	23.0131	1.0496	6.3891	0.4588	0.001277	0.000091
	0.99	583.8657	43.9490	219.6930	7.9713	11.8243	2.0327	0.002364	0.000406
	0.999	5827.8082	437.2655	2194.5854	77.8147	15.1557	3.8811	0.003031	0.000776
10	0.9	243.2161	18.7009	91.7045	3.7374	23.1313	1.5055	0.004626	0.000301
	0.99	2335.4629	175.7960	878.3481	31.5695	13.8922	3.3481	0.002778	0.000669
	0.999	23311.2331	1749.0621	8777.8850	310.9572	12.6260	4.5939	0.002525	0.000918

Çizelge C.1. $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	7,601	1,574	0,351	1,45	0,512	0,507	0,324	0,232	0,300
1	**0.99**	74,583	15,044	2,338	8,196	2,790	0,269	0,490	0,961	0,885
	0.999	750,04	150,145	22,354	8,848	46,778	0,048	0,262	4,274	7,322
	0.9	68,411	14,168	2,279	9,492	2,683	1,351	0,726	1,066	1,037
3	**0.99**	671,24	135,399	20,158	19,78	24,754	0,426	0,563	4,380	6,624
	0.999	6750,4	1351,3	200,301	6,279	421,00	0,1471	0,2139	17,748	65,779
	0.9	190,03	39,357	6,089	21,86	7,229	3,939	1,092	2,251	2,322
5	**0.99**	1864,6	376,107	55,774	32,91	68,736	2,942	0,720	8,967	18,309
	0.999	18751	3753,62	556,171	8,485	1169,4	6,908	0,394	35,065	182,71
	0.9	760,13	157,431	23,901	74,43	28,555	23,27	2,219	6,675	8,335
10	**0.99**	7458,3	1504,43	222,678	89,21	274,84	46,403	1,469	25,351	73,091
	0.999	75004	15014,5	2224,26	20,54	4677,7	126,14	1,1005	95,549	730,82
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	1,994	0,404	0,209	0,401	0,298	0,302	0,308	0,147	0,181
1	**0.99**	19,46	3,813	1,072	3,564	1,660	0,637	0,409	0,562	0,606
	0.999	195,27	37,969	9,407	21,55	15,549	0,178	0,666	2,829	2,713
	0.9	17,954	3,638	1,083	3,389	1,650	1,142	0,596	0,639	0,665
3	**0.99**	175,14	34,325	8,542	21,1	14,132	0,567	0,722	2,565	2,526
	0.999	1757,4	341,725	83,534	31,34	139,84	0,133	0,291	11,439	23,454
	0.9	49,871	10,106	2,746	8,784	4,367	3,047	0,831	1,216	1,2
5	**0.99**	486,49	95,349	23,489	40,66	39,219	3,022	0,714	4,802	6,726
	0.999	4881,7	949,235	231,802	34,85	388,44	4,154	0,312	20,339	65,126
	0.9	199,49	40,425	10,490	32,93	17,136	15,324	1,353	3,079	3,607
10	**0.99**	1946	381,396	93,583	117,8	156,81	42,855	1,018	11,463	26,614
	0.999	19527	3796,94	926,84	71,04	1553,7	115,94	0,676	45,567	260,46
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0,377	0,156	0,115	0,156	0,141	0,142	0,266	0,078	0,107
1	**0.99**	3,346	1,459	0,544	1,444	0,742	0,665	0,264	0,321	0,399
	0.999	32,953	14,495	4,035	13,1	5,902	0,444	0,815	1,755	1,562
	0.9	3,399	1,409	0,565	1,395	0,787	0,798	0,425	0,370	0,450
3	**0.99**	30,117	13,133	3,711	12,1	4,358	0,796	0,904	1,695	1,545
	0.999	296,58	130,46	35,031	67,07	52,693	0,160	0,677	8,207	11,315
	0.9	9,441	3,914	1,308	3,826	1,732	1,573	0,677	0,791	0,890
5	**0.99**	83,659	36,481	10,010	30,36	11,833	0,957	1,173	3,57	3,480
	0.999	823,82	362,388	97,006	106,2	146,357	0,206	0,527	16,421	31,306
	0.9	37,768	15,656	4,687	14,89	6,128	5,410	1,369	2,246	2,294
10	**0.99**	334,64	145,927	39,502	99,71	47,095	5,179	1,557	9,709	13,021
	0.999	3295,3	1449,55	387,485	201,8	585,418	7,346	0,647	41,806	125,15

Çizelge C.2. $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	9,294	2,086	0,431	1,889	0,643	0,572	0,338	0,265	0,349
1	**0.99**	89,778	19,837	3,003	9,752	4,187	0,262	0,499	1,092	0,980
	0.999	899,06	197,79	28,91	8,799	67,301	0,047	0,240	4,733	8,270
	0.9	83,65	18,776	2,933	12,207	4,055	1,606	0,768	1,238	1,163
3	**0.99**	808,01	178,53	26,07	23,274	37,423	0,471	0,572	4,998	7,470
	0.999	8091,5	1780,1	259,23	6,825	605,71	0,157	0,224	19,86	74,319
	0.9	232,36	52,156	7,894	28,413	11,081	4,788	1,17	2,656	2,626
5	**0.99**	2244,5	495,93	72,17	39,913	103,93	2,850	0,758	10,386	20,658
	0.999	22476	4944,7	719,82	9,758	1682,5	4,599	0,428	39,982	206,43
	0.9	929,45	208,62	31,102	97,79	44,052	28,477	2,468	8,043	9,528
10	**0.99**	8977,8	1983,7	288,19	110,83	415,66	48,526	1,639	29,975	82,496
	0.999	89906	19779	2878,8	24,558	6730,1	115,92	1,266	111,66	825,72
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	2,6543	0,508	0,253	0,503	0,360	0,363	0,314	0,173	0,211
1	**0.99**	26,088	4,8182	1,414	4,4522	2,422	0,672	0,468	0,690	0,700
	0.999	262,33	48,004	12,763	25,177	23,747	0,171	0,682	3,438	3,289
	0.9	23,889	4,579	1,403	4,208	2,344	1,394	0,644	0,759	0,747
3	**0.99**	234,79	43,364	11,556	24,918	21,46	0,680	0,7	3,030	3,065
	0.999	2361	432,04	113,67	32,205	213,69	0,158	0,270	13,341	28,718
	0.9	66,357	12,721	3,633	10,887	6,405	4,334	0,855	1,388	1,396
5	**0.99**	652,19	120,46	31,861	47,896	59,598	5,916	0,6678	5,410	8,269
	0.999	6558,3	1200,1	315,51	36,917	593,59	11,187	0,319	22,633	79,754
	0.9	265,43	50,885	14,064	41,382	25,424	21,697	1,422	3,588	4,453
10	**0.99**	2608,8	481,82	127,09	145,89	238,36	72,722	1,002	12,614	32,807
	0.999	26233	4800,4	1261,7	84,112	2374,3	205,84	0,729	49,282	318,96
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0,599	0,175	0,127	0,175	0,157	0,158	0,260	0,087	0,115
1	**0.99**	5,530	1,646	0,622	1,627	0,796	0,717	0,304	0,378	0,464
	0.999	54,704	16,363	4,780	14,687	7,719	0,449	0,928	2,091	1,881
	0.9	5,398	1,581	0,633	1,564	0,858	0,862	0,459	0,426	0,511
3	**0.99**	49,773	14,817	4,375	13,551	4,398	0,813	1,001	1,993	1,817
	0.999	492,33	147,27	41,694	72,097	69,262	0,159	0,673	9,758	14,234
	0.9	14,997	4,393	1,491	4,283	1,934	1,719	0,744	0,906	0,984
5	**0.99**	138,26	41,158	11,85	33,686	11,913	1,039	1,205	4,172	4,257
	0.999	1367,6	409,08	115,51	111,18	192,39	0,216	0,494	19,361	39,43
	0.9	59,988	17,576	5,417	16,643	7,028	6,425	1,427	2,504	2,552
10	**0.99**	553,03	164,63	46,868	110,02	47,4	7,763	1,457	11,04	16,232
	0.999	5470,4	1636,3	461,51	212,32	769,55	12,003	0,587	48,12	157,65

Çizelge C.3. $p = 4$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	11,475	4,243	1,055	3,832	1,515	1,150	0,580	0,704	0,839
1	**0.99**	108,59	40,945	8,335	20,058	12,418	0,563	1,264	3,444	3,441
	0.999	1083,8	410,69	82,2	18,147	167,99	0,1262	0,540	15,457	30,998
	0.9	103,27	38,196	7,985	27,362	11,802	4,18	2,350	4,195	4,082
3	**0.99**	977,35	368,5	73,336	66,657	111,52	1,451	2,045	18,701	28,801
	0.999	9754,6	3696,2	738,06	23,418	1511,9	0,593	0,843	77,72	278,83
	0.9	286,87	106,1	21,74	68,253	32,596	11,013	4,500	10,049	10,295
5	**0.99**	2714,9	1023,6	203,19	131,66	309,77	3,985	3,311	43,28	79,81
	0.999	27096	10267	2049,6	39,111	4199,8	1,987	1,790	175,69	774,54
	0.9	1147,5	424,39	86,013	247,66	130,19	50,818	12,37	34,697	39,327
10	**0.99**	10859	4094,5	811,57	398,64	1239,1	26,465	8,814	144,39	319,02
	0.999	108384	41069	8197,3	106,65	16799	22,797	6,150	573,91	3098,1
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	3,215	0,662	0,320	0,654	0,452	0,453	0,322	0,213	0,261
1	**0.99**	31,78	6,307	1,948	5,768	3,405	0,758	0,6155	0,962	0,931
	0.999	319,79	62,954	18,011	30,795	33,876	0,180	0,800	4,904	5,045
	0.9	28,935	5,959	1,888	5,443	3,257	1,816	0,724	0,957	0,913
3	**0.99**	286,02	56,768	16,242	31,755	30,531	0,882	0,793	4,250	4,604
	0.999	2878,1	566,58	160,77	38,685	304,88	0,183	0,278	19,213	44,567
	0.9	80,375	16,555	4,965	14,17	8,992	6,091	0,927	1,730	1,787
5	**0.99**	794,5	157,69	44,85	62,6	84,804	8,455	0,708	7,570	12,546
	0.999	7994,7	1573,8	446,31	47,183	846,87	13,94	0,318	32,679	123,78
	0.9	321,5	66,22	19,401	54,353	35,856	30,415	1,524	4,531	6,026
10	**0.99**	3178	630,76	179,01	197	339,2	108,44	1,013	17,4	49,926
	0.999	31979	6295,4	1784,8	114,28	3387,5	319,31	0,710	70,144	495,07
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0,661	0,183	0,130	0,183	0,163	0,164	0,265	0,091	0,119
1	**0.99**	6,160	1,720	0,635	1,699	0,793	0,714	0,309	0,386	0,472
	0.999	60,971	17,101	4,932	15,233	8,113	0,419	0,912	2,123	1,911
	0.9	5,951	1,650	0,642	1,630	0,834	0,856	0,473	0,438	0,520
3	**0.99**	55,446	15,484	4,5063	14,03	4,2189	0,754	0,963	2,001	1,823
	0.999	548,74	153,91	43,082	71,182	72,852	0,146	0,602	9,72	14,7
	0.9	16,533	4,5857	1,5202	4,4535	1,823	1,716	0,749	0,913	0,967
5	**0.99**	154,02	43,011	12,225	34,426	11,429	1,017	1,091	4,122	4,349
	0.999	1524,3	427,52	119,38	105,73	202,36	0,226	0,429	18,964	40,742
	0.9	66,13	18,343	5,5501	17,253	6,545	6,916	1,325	2,414	2,509
10	**0.99**	616,07	172,04	48,398	110,98	45,484	10,149	1,246	10,527	16,731
	0.999	6097,1	1710,1	477,01	199,08	809,44	17,242	0,528	45,495	162,91

Çizelge C.4. $p = 10$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	18,52	6,587	0,513	3,587	1,904	0,651	0,514	0,583	0,2689
1	**0.99**	178,85	63,648	4,195	7,513	18,326	0,244	0,330	4,900	1,021
	0.999	1786,3	635,65	41,279	3,210	183,07	0,052	0,323	288,88	9,762
	0.9	166,68	59,289	4,0627	11,924	16,907	5,403	0,706	3,818	1,241
3	**0.99**	1609,6	572,83	37,332	8,892	164,93	3,739	0,490	230,71	9,011
	0.999	16077	5720,8	371,09	1,742	1647,6	3,201	0,294	4753,4	87,857
	0.9	462,99	164,69	11,152	27,364	46,935	29,253	0,862	24,08	3,1716
5	**0.99**	4471,2	1591,2	103,63	17,074	458,15	94,44	0,667	919,88	25,005
	0.999	44659	15891	1030,7	3,2082	4576,6	301,09	0,543	14435	244,05
	0.9	1852	658,76	44,381	105,24	187,66	129,37	1,536	283,08	12,064
10	**0.99**	17885	6364,8	414,45	63,403	1832,6	505,48	1,446	5252,8	99,951
	0.999	178634	63565	4122,9	11,921	18307	1704,9	1,399	61945	976,18
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	4,072	1,285	0,335	1,266	0,810	0,825	0,342	0,700	0,144
1	**0.99**	38,966	12,269	2,054	11,017	4,898	1,299	0,25	0,5029	0,974
	0.999	388,21	122,19	19,185	55,074	44,747	0,306	0,827	45,802	6,789
	0.9	36,652	11,568	1,966	10,423	3,774	2,394	0,471	0,640	0,959
3	**0.99**	350,69	110,42	17,367	57,383	43,843	0,796	0,863	38,772	6,150
	0.999	3493,9	1099,7	171,54	65,129	402,71	0,114	0,947	895,35	60,972
	0.9	101,81	32,134	5,207	26,333	10,108	5,234	0,676	4,119	2,029
5	**0.99**	974,14	306,73	47,993	100,95	121,79	1,388	1,162	178,4	17,023
	0.999	9705,2	3054,7	476,24	63,92	1118,6	0,206	0,690	2801,8	169,37
	0.9	407,25	128,54	20,398	93,938	40,21	34,198	1,174	47,757	7,380
10	**0.99**	3896,6	1226,9	191,55	250,04	487,14	39,727	1,354	1003,9	68,074
	0.999	38821	12219	1904,5	105,39	4474,6	75,45	0,600	11915	677,46
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	1,592	0,596	0,258	0,594	0,500	0,503	0,314	0,813	0,089
1	**0.99**	15,145	5,682	1,319	5,561	2,786	1,728	0,191	0,153	0,721
	0.999	150,61	56,551	11,586	46,453	19,047	0,766	0,706	14,59	4,262
	0.9	14,333	5,368	1,270	5,253	2,458	2,128	0,395	0,4235	0,697
3	**0.99**	136,31	51,138	10,504	43,24	23,527	1,260	0,728	12,125	3,898
	0.999	1355,5	508,96	102,88	157,86	171,2	0,188	1,466	374,28	37,611
	0.9	39,813	14,913	3,221	14,196	6,198	3,723	0,541	1,137	1,516
5	**0.99**	378,63	142,05	28,868	98,49	65,335	1,292	1,223	65,72	10,541
	0.999	3765,2	1413,8	285,46	187,97	475,56	0,186	1,234	1237,2	104,47
	0.9	159,25	59,652	12,355	53,835	24,427	15,462	0,996	15,724	4,743
10	**0.99**	1514,5	568,2	114,94	278,63	261,34	9,269	1,698	424,84	42,08
	0.999	15061	5655,1	1141,3	270,44	1902,3	6,637	0,887	5444,4	417,9

Çizelge C.5. $p = 10$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	35,528	24,389	5,834	14,487	13,439	4,176	0,604	1,452	1,969
1	**0.99**	340,54	233,92	54,97	31,47	135,6	1,782	1,314	108,27	16,223
	0.999	3393,8	2333,1	547,99	13,146	1351,8	0,309	1,183	2085,9	162,52
	0.9	319,74	219,48	51,507	87,49	120,9	110,68	1,058	70,545	15,512
3	**0.99**	3064,9	2105,3	493,73	100,04	1220,4	447,07	0,838	1734,9	145,95
	0.999	30544	20998	4930,9	25,541	12166	1459,7	0,614	20604	1462,7
	0.9	888,17	609,68	143,02	241,3	335,83	321,53	2,068	365,78	42,963
5	**0.99**	8513,6	5848,1	1371,4	268,92	3389,9	1730,9	1,478	5413,8	405,4
	0.999	84844	58327	13697	68,116	33795	6503,1	1,274	57943	4063
	0.9	3553	2439,1	572,47	989,64	1343,7	1053,8	10,624	2201,8	171,53
10	**0.99**	34054	23392	5485,9	1129,8	13560	3988,7	8,175	23138	1621,6
	0.999	339376	233308	54788	292,2	135179	11445	5,231	23314	16252
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	4,547	1,449	0,346	1,425	0,869	0,881	0,349	0,684	0,146
1	**0.99**	43,344	13,826	2,154	12,225	6,036	1,211	0,246	0,588	0,967
	0.999	431,33	137,65	20,168	56,551	48,038	0,261	0,769	52,96	6,908
	0.9	40,925	13,049	2,074	11,668	4,861	2,489	0,466	0,699	0,972
3	**0.99**	390,1	124,43	18,284	61,863	54,265	0,760	0,829	45,304	6,263
	0.999	3881,9	1238,8	180,4	64,297	432,34	0,107	0,890	1020,2	62,079
	0.9	113,68	36,248	5,506	29,499	13,297	5,422	0,658	4,937	2,0694
5	**0.99**	1083,6	345,64	50,536	109,45	150,74	1,313	1,155	206,72	17,348
	0.999	10783	3441,1	500,86	65,128	1201	0,194	0,696	3179,1	172,44
	0.9	454,72	144,99	21,582	105,39	53,079	33,469	1,186	57,533	7,540
10	**0.99**	4334,4	1382,6	201,7	273,07	602,94	27,512	1,489	1155,3	69,38
	0.999	43133	13765	2003	109,57	4803,8	43,677	0,664	13477	689,76
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	1,439	0,603	0,246	0,601	0,497	0,501	0,322	0,820	0,086
1	**0.99**	13,726	5,749	1,234	5,616	2,427	1,616	0,187	0,152	0,677
	0.999	136,61	57,227	10,824	46,197	20,423	0,664	0,648	14,385	3,988
	0.9	12,953	5,429	1,186	5,301	2,412	2,013	0,399	0,430	0,657
3	**0.99**	123,53	51,742	9,807	43,044	19,441	1,100	0,677	11,945	3,638
	0.999	1229,5	515,04	96,087	147,04	183,66	0,162	1,274	374,22	35,227
	0.9	35,981	15,083	3,005	14,283	6,163	3,492	0,535	1,098	1,402
5	**0.99**	343,15	143,73	26,95	96,372	53,963	1,142	1,102	65,278	9,8602
	0.999	3415,3	1430,7	266,62	169,05	510,18	0,166	1,040	1244,7	97,85
	0.9	143,92	60,33	11,522	53,919	24,366	15,322	0,940	15,325	4,414
10	**0.99**	1372,6	574,91	107,31	267,41	215,84	9,912	1,452	425,06	39,37
	0.999	13661	5722,7	1066	239,54	2040,7	7,6319	0,736	5498,6	391,4

Çizelge C.6. $p = 10$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	36,021	27,164	6,4092	15,817	14,631	5,3548	0,786	2,971	3,427
1	**0.99**	346,89	261,09	60,657	37,369	144,05	2,9347	1,986	149,43	30,52
	0.999	3464,7	2604,2	603,95	18,737	1439,6	0,504	1,588	2417,1	300,7
	0.9	324,21	244,53	56,77	104,86	131,71	125,67	1,178	107,24	29,85
3	**0.99**	3122	2349,8	544,94	151,27	1296,5	534	0,917	2068,4	274,7
	0.999	31182	23438	5434,6	46,489	12956	1608,9	0,607	23170	2706
	0.9	900,48	679,14	157,61	290,74	365,72	353,15	2,584	482,62	82,86
5	**0.99**	8672,3	6527,3	1513,7	408,7	3601,4	2210,3	1,442	6203,5	763
	0.999	86617	65106	15096	123,58	35989	9295,2	1,177	64822	7517
	0.9	3602,2	2716,6	630,73	1186,2	1462,9	1197,2	16,05	2564,9	331,1
10	**0.99**	34689	26109	6054,8	1686,2	14405	5717,3	8,382	25947	3052
	0.999	346470	260422	60384	516,79	143958	19561	4,660	26030	30068
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	5,813	2,109	0,542	2,065	1,223	1,164	0,345	0,565	0,277
1	**0.99**	55,323	19,999	3,849	17,178	10,225	1,324	0,391	1,774	1,676
	0.999	550,53	198,85	36,811	69,578	74,933	0,260	1,245	104,11	14,12
	0.9	52,323	18,986	3,710	16,429	9,084	3,533	0,622	1,669	1,634
3	**0.99**	497,9	179,99	33,42	76,156	92,017	0,994	1,169	88,731	12,87
	0.999	4954,8	1789,6	330,06	62,847	674,4	0,148	0,839	1581,7	127
	0.9	145,34	52,74	10,05	41,315	25,187	12,318	0,913	11,3	4,029
5	**0.99**	1383,1	499,97	92,582	132,84	255,6	4,944	1,172	349,22	35,73
	0.999	13763	4971,1	916,59	66,688	1873,3	1,103	0,518	4724,9	352,8
	0.9	581,36	210,96	39,815	152,87	100,72	93,97	1,317	99,583	15,73
10	**0.99**	5532,3	1999,9	369,95	374,63	1022,4	253,78	1,103	1739,3	142,9
	0.999	55053	19885	3666	142,78	7493,3	704,11	0,568	19571	1411
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	1,715	0,637	0,248	0,635	0,517	0,520	0,332	0,817	0,088
1	**0.99**	16,329	6,063	1,246	5,910	2,506	1,568	0,189	0,156	0,675
	0.999	162,44	60,324	10,963	47,813	18,963	0,596	0,626	15,263	3,93
	0.9	15,442	5,736	1,2016	5,588	2,526	1,998	0,411	0,436	0,659
3	**0.99**	146,96	54,568	9,945	44,729	20,429	1,014	0,663	12,72	3,59
	0.999	1462	542,92	97,377	143,84	170,51	0,147	1,172	395,93	34,76
	0.9	42,894	15,935	3,0545	15,021	6,543	3,471	0,547	1,179	1,38
5	**0.99**	408,23	151,58	27,343	98,966	56,716	1,077	1,057	69,172	9,746
	0.999	4061,1	1508,1	270,21	162,18	473,63	0,157	0,947	1314,7	96,55
	0.9	171,58	63,738	11,734	56,556	25,934	16,07	0,941	16,336	4,374
10	**0.99**	1632,9	606,31	108,89	272,14	226,85	10,074	1,365	449,2	38,92
	0.999	16244	6032,4	1080,4	229,98	1894,5	7,012	0,679	5801,6	386,2

Çizelge C.7. Veri kümesinde hatalar *Standart Cauchy* dağılımından üretildiğinde önerilen k parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin *MSE* tahminlerinin ortalamaları

p	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$n = 20$					
4	0.9	55035821,87	2344668,84	5021,130608	24673,09197	24238,43334	3900,217773	57,8625426	407,6272689	192,3190941
	0.99	553833754,7	22287670,33	26450,76785	10407,0823	159865,727	6456,723263	119,1403627	1529,168749	816,2418715
	0.999	5607032613	222176650	159851,4903	8286,736948	1455653,945	2798,306081	138,9125827	4390,392237	7691,192841
10	0.9	990092220,8	57948079,4	329570,7096	377390,9708	286062,5288	3286069,786	19,9827464	3434,339011	10732,14276
	0.99	10194772938	239920533,7	864501,4573	49399,8611	3490904,517	154655,368	1063,625489	16320,77385	42025,81259
	0.999	103542903016	2290893313	8241272,814	17873,30324	36281685,29	34351,70852	1777,220705	76009,38766	377401,3176
					$n = 50$					
4	0.9	39381428,6	942266,8827	19845,6649	320189,5397	20073,73913	41274,33488	11,05803008	441,8227716	305,5623238
	0.99	382897036,8	9159599,721	159418,5891	173992,9883	221022,1568	14074,05442	1032,432747	6756,53019	3604,774378
	0.999	3837854699	92149385,51	1541185,746	32744,53104	2284330,294	6985,330832	1563,161274	15972,6392	20515,45036
10	0.9	120377726,9	1447414,756	3991,135975	110099,5852	16164,92445	8693,007073	1,814094552	264,7119015	568,4927297
	0.99	1164418276	13671073,27	22650,14571	23329,34296	63296,5276	2974,266835	269,6860862	2878,385607	4371,843186
	0.999	11642967697	135755122,2	194022,2272	5442,056908	610355,4488	2275,322032	432,4701258	7898,060738	23848,34731
					$n = 100$					
4	0.9	2448747,208	45634,72545	218,9075092	15833,91115	341,3954342	1443,97949	1,574231263	31,47403904	161,5030588
	0.99	19736921,46	435089,5705	1964,699806	8913,262477	3298,647191	4847,83735	1,204438996	128,688703	1413,426418
	0.999	192427099,8	4331299,451	18836,49461	1375,221478	53558,75267	2988,530297	1,111373336	354,152549	13283,20717
10	0.9	24405758,55	135038,7049	72,9890076	12657,90075	370,0664773	1997,404934	1,154298224	5,847981201	16,4187523
	0.99	230491302,9	1286549,663	602,7512565	2649,011756	3876,944067	6705,693121	0,763468716	39,85385709	129,4509343
	0.999	2288020700	12804286,74	5518,68814	366,6820635	37303,22135	22297,27126	0,650703103	165,4502454	911,9837246

Çizelge C.8. $p = 4$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	1	1379	5	187	39	4527	2407	1455
1	**0.99**	0	0	152	0	903	3594	3554	1162	635
	0.999	0	0	52	1	347	8111	1106	187	196
	0.9	0	1	574	60	1186	1210	4103	1485	1381
3	**0.99**	0	0	183	40	995	5060	2449	606	667
	0.999	0	0	31	220	202	6242	2604	277	424
	0.9	0	1	467	95	1206	888	4709	1321	1313
5	**0.99**	0	0	108	100	842	3827	3746	694	683
	0.999	0	0	27	526	191	5446	3197	248	365
	0.9	0	2	245	73	1111	505	5762	1144	1158
10	**0.99**	0	0	44	92	816	2339	5562	538	609
	0.999	0	0	19	429	225	3640	5225	173	289
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	4	16	1575	7	68	7	3288	3036	1999
1	**0.99**	0	0	288	0	99	887	6161	1484	1081
	0.999	0	0	55	0	470	5685	2866	590	334
	0.9	0	7	945	28	513	428	4457	2017	1605
3	**0.99**	0	0	156	5	601	4837	2884	781	736
	0.999	0	0	51	3	479	7075	1682	230	480
	0.9	0	6	564	55	645	589	4754	1727	1660
5	**0.99**	0	0	190	22	548	3401	4122	750	967
	0.999	0	0	39	44	333	4893	3699	382	610
	0.9	0	5	285	41	661	265	6180	1274	1289
10	**0.99**	0	0	101	24	441	1653	6171	731	879
	0.999	0	0	20	81	332	3028	5737	353	449
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	123	11	1406	0	12	1	2769	3306	2372
1	**0.99**	94	0	139	0	25	59	6787	1606	1290
	0.999	6	0	23	0	359	3644	4883	619	466
	0.9	67	1	1107	6	127	21	4729	2425	1517
3	**0.99**	13	0	170	0	699	2673	4551	1166	728
	0.999	0	0	19	0	713	7149	1682	268	169
	0.9	45	0	790	11	439	168	5127	1989	1431
5	**0.99**	0	0	117	0	1034	4016	3433	779	621
	0.999	0	0	23	0	624	7317	1575	188	273
	0.9	7	0	386	15	766	299	5601	1528	1398
10	**0.99**	0	0	114	5	1069	3269	4299	567	677
	0.999	0	0	14	7	468	5507	3384	255	365

Çizelge C.9. $p = 4$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	0	1172	5	171	47	4927	2331	1347
1	**0.99**	0	0	124	0	684	4202	3306	1114	570
	0.999	0	0	34	1	158	8322	1114	175	196
	0.9	0	0	452	38	956	1174	4539	1419	1422
3	**0.99**	0	0	132	32	819	5148	2675	566	628
	0.999	0	0	19	181	96	6552	2539	211	402
	0.9	0	0	403	74	945	789	5197	1288	1304
5	**0.99**	0	0	85	79	676	3739	4185	579	657
	0.999	0	0	17	419	89	5463	3478	179	355
	0.9	0	0	211	64	862	413	6307	1013	1130
10	**0.99**	0	0	43	72	652	2095	6067	498	573
	0.999	0	0	8	327	110	3359	5728	143	325
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	0	6	1432	7	49	10	3690	2959	1847
1	**0.99**	0	0	265	0	37	1264	6004	1410	1020
	0.999	0	0	41	0	228	6353	2553	543	282
	0.9	0	1	743	26	452	480	4666	1953	1679
3	**0.99**	0	0	157	2	295	4900	3086	717	843
	0.999	0	0	49	2	178	6845	2119	220	587
	0.9	0	0	461	46	409	532	5171	1714	1667
5	**0.99**	0	0	173	18	252	2949	4804	783	1021
	0.999	0	0	32	34	135	4425	4338	389	647
	0.9	0	0	233	31	375	215	6782	1161	1203
10	**0.99**	0	0	105	12	211	1248	6863	688	873
	0.999	0	0	16	68	148	2509	6454	309	496
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	25	14	1339	3	10	0	3080	3250	2279
1	**0.99**	22	0	155	0	49	95	6935	1512	1232
	0.999	0	0	35	0	213	4160	4547	606	439
	0.9	17	1	1090	9	157	28	4904	2279	1515
3	**0.99**	3	0	153	0	979	2897	4239	1041	688
	0.999	0	0	27	0	412	7681	1492	230	158
	0.9	14	0	734	16	491	218	5207	1868	1452
5	**0.99**	0	0	119	0	1369	4046	3165	710	591
	0.999	0	0	34	0	357	7399	1698	198	314
	0.9	4	0	368	14	789	322	5708	1390	1405
10	**0.99**	0	0	116	6	1255	2825	4530	557	711
	0.999	0	0	25	5	268	5074	3941	278	409

Çizelge C.10. $p = 4$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	0	276	0	140	155	6582	1498	1349
1	**0.99**	0	0	20	0	453	5931	2827	497	272
	0.999	0	0	1	0	47	8978	854	71	49
	0.9	0	0	89	1	769	1249	6029	803	1060
3	**0.99**	0	0	10	0	576	6660	2365	188	201
	0.999	0	0	0	10	36	8609	1243	26	76
	0.9	0	0	67	3	766	779	7030	528	827
5	**0.99**	0	0	6	2	573	4906	4196	115	202
	0.999	0	0	0	33	35	6737	3104	18	73
	0.9	0	0	34	4	709	425	7850	307	671
10	**0.99**	0	0	1	7	536	3021	6188	75	172
	0.999	0	0	0	34	35	4322	5540	11	58
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	0	7	1113	8	43	9	4374	2791	1655
1	**0.99**	0	0	203	0	20	1940	5696	1209	932
	0.999	0	0	28	0	71	7001	2240	456	204
	0.9	0	0	539	25	289	407	5189	1769	1782
3	**0.99**	0	0	121	3	117	4947	3450	588	774
	0.999	0	0	37	2	67	7032	2207	208	447
	0.9	0	0	321	42	277	403	5744	1468	1745
5	**0.99**	0	0	136	18	106	2604	5481	584	1071
	0.999	0	0	26	32	56	4123	4891	310	562
	0.9	0	0	161	30	198	139	7324	991	1157
10	**0.99**	0	0	83	19	80	996	7498	540	784
	0.999	0	0	14	55	53	2134	7007	276	461
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	20	12	1427	4	22	3	3083	3176	2253
1	**0.99**	15	0	160	0	71	105	6927	1567	1155
	0.999	0	0	33	0	186	4362	4384	574	461
	0.9	13	3	1141	6	229	52	4828	2251	1477
3	**0.99**	0	0	153	0	1167	3014	3906	1061	699
	0.999	0	0	25	0	391	7797	1412	206	169
	0.9	11	0	718	17	649	325	4945	1824	1511
5	**0.99**	0	0	129	1	1544	3997	3009	696	624
	0.999	0	0	32	0	294	7207	1883	208	376
	0.9	0	0	381	18	994	346	5515	1415	1331
10	**0.99**	0	0	127	8	1277	2469	4753	596	770
	0.999	0	0	20	10	222	4588	4385	308	467

Çizelge C.11. $p = 10$ ve bir sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	0	1630	0	81	42	1550	1284	5413
1	**0.99**	0	0	13	0	9	2722	4993	1560	703
	0.999	0	0	0	0	5	8509	1418	16	52
	0.9	0	0	213	3	96	363	4721	1734	2870
3	**0.99**	0	0	5	11	9	3398	6089	54	434
	0.999	0	0	0	339	4	4832	4779	0	46
	0.9	0	0	58	2	51	109	7187	639	1954
5	**0.99**	0	0	0	26	10	1265	8359	17	323
	0.999	0	0	0	519	2	2473	6982	0	24
	0.9	0	0	9	1	27	11	9082	62	808
10	**0.99**	0	0	1	9	7	241	9602	1	139
	0.999	0	0	0	250	3	659	9072	0	16
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	0	0	368	0	0	0	3257	332	6043
1	**0.99**	0	0	10	0	0	45	5380	3793	772
	0.999	0	0	0	0	16	4201	5443	319	21
	0.9	0	0	196	0	15	2	3784	3540	2463
3	**0.99**	0	0	0	0	12	3284	6044	505	155
	0.999	0	0	0	0	14	8243	1735	1	7
	0.9	0	0	71	0	108	12	6181	2388	1240
5	**0.99**	0	0	0	0	13	4124	5647	67	149
	0.999	0	0	0	0	11	8129	1853	0	7
	0.9	0	0	10	0	186	8	8466	492	838
10	**0.99**	0	0	0	0	12	1520	8356	6	106
	0.999	0	0	0	1	5	3687	6300	0	7
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0	0	198	0	0	0	3094	83	6625
1	**0.99**	0	0	9	0	0	1	3545	5440	1005
	0.999	0	0	0	0	43	2039	7288	603	27
	0.9	0	0	142	0	0	0	3222	3501	3135
3	**0.99**	0	0	4	0	11	1366	7264	1220	135
	0.999	0	0	0	0	77	7078	2823	14	8
	0.9	0	0	79	0	10	2	4843	3417	1649
5	**0.99**	0	0	0	0	30	3192	6359	327	92
	0.999	0	0	0	0	82	8073	1838	2	5
	0.9	0	0	21	0	56	5	7907	1419	592
10	**0.99**	0	0	0	0	36	2370	7496	25	73
	0.999	0	0	0	0	61	5824	4108	0	7

Çizelge C.12. $p = 10$ ve iki sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	0	3	0	0	0	6171	3353	473
1	**0.99**	0	0	0	0	0	3232	6668	69	31
	0.999	0	0	0	0	0	8106	1894	0	0
	0.9	0	0	0	0	0	0	9771	99	130
3	**0.99**	0	0	0	0	0	29	9962	0	9
	0.999	0	0	0	0	0	139	9861	0	0
	0.9	0	0	0	0	0	0	9972	2	26
5	**0.99**	0	0	0	0	0	2	9997	0	1
	0.999	0	0	0	1	0	14	9985	0	0
	0.9	0	0	0	0	0	0	9997	1	2
10	**0.99**	0	0	0	0	0	2	9998	0	0
	0.999	0	0	0	0	0	5	9995	0	0
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	0	0	354	0	0	0	3114	388	6144
1	**0.99**	0	0	5	0	0	58	5726	3552	659
	0.999	0	0	0	0	8	4401	5349	232	10
	0.9	0	0	141	0	10	2	3955	3494	2398
3	**0.99**	0	0	0	0	3	3340	6095	435	127
	0.999	0	0	0	0	7	8190	1799	1	3
	0.9	0	0	48	0	39	21	6401	2349	1142
5	**0.99**	0	0	0	0	1	4096	5705	63	135
	0.999	0	0	0	0	5	8146	1845	0	4
	0.9	0	0	12	0	87	10	8697	388	806
10	**0.99**	0	0	0	0	2	1668	8227	4	99
	0.999	0	0	0	2	5	4189	5799	0	5
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0	0	253	0	0	0	2937	62	6748
1	**0.99**	0	0	8	0	0	2	3507	5393	1090
	0.999	0	0	0	0	30	2155	7192	595	28
	0.9	0	0	180	0	0	0	3161	3352	3307
3	**0.99**	0	0	3	0	39	1463	7092	1242	161
	0.999	0	0	0	0	59	7120	2803	12	6
	0.9	0	0	99	0	13	2	4706	3412	1768
5	**0.99**	0	0	0	0	85	3354	6154	299	108
	0.999	0	0	0	0	54	8133	1808	0	5
	0.9	0	0	20	0	59	15	7844	1428	634
10	**0.99**	0	0	0	0	85	2210	7585	21	99
	0.999	0	0	0	0	40	5597	4358	0	5

Çizelge C.13. $p = 10$ ve üç sapan değer olduğunda önerilen *k* parametreleri için elde edilen tahmin edicilerinin en küçük *MSE* tahminlerinin frekansları

σ	ρ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_M$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_1)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_2)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_3)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_4)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_5)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_6)$	$\hat{\alpha}_M(\hat{k}_7)$
					$\boldsymbol{n = 20}$					
	0.9	0	0	1	0	0	0	7759	2164	76
1	**0.99**	0	0	0	0	0	3136	6834	19	11
	0.999	0	0	0	0	0	7841	2159	0	0
	0.9	0	0	0	0	1	0	9974	17	8
3	**0.99**	0	0	0	0	0	4	9996	0	0
	0.999	0	0	0	0	0	11	9989	0	0
	0.9	0	0	0	0	0	0	9997	1	2
5	**0.99**	0	0	0	0	0	1	9999	0	0
	0.999	0	0	0	0	0	4	9996	0	0
	0.9	0	0	0	0	0	0	10000	0	0
10	**0.99**	0	0	0	0	0	0	10000	0	0
	0.999	0	0	0	1	0	0	9999	0	0
					$\boldsymbol{n = 50}$					
	0.9	0	0	228	0	0	0	3739	1231	4802
1	**0.99**	0	0	4	0	0	351	6722	2495	428
	0.999	0	0	0	0	1	5479	4390	119	11
	0.9	0	0	77	0	13	3	5302	3040	1565
3	**0.99**	0	0	0	0	0	4152	5522	206	120
	0.999	0	0	0	0	0	8592	1405	0	3
	0.9	0	0	23	0	25	22	7536	1561	833
5	**0.99**	0	0	0	0	0	2748	7111	26	115
	0.999	0	0	0	0	0	6072	3922	0	6
	0.9	0	0	4	0	22	3	9295	200	476
10	**0.99**	0	0	0	0	0	529	9410	1	60
	0.999	0	0	0	0	0	1446	8550	0	4
					$\boldsymbol{n = 100}$					
	0.9	0	0	296	0	0	0	2880	72	6752
1	**0.99**	0	0	5	0	0	0	3601	5310	1084
	0.999	0	0	0	0	37	2223	7102	605	33
	0.9	0	0	194	0	0	0	3074	3394	3338
3	**0.99**	0	0	1	0	30	1568	7010	1245	146
	0.999	0	0	0	0	76	7206	2704	8	6
	0.9	0	0	98	0	15	3	4724	3373	1787
5	**0.99**	0	0	0	0	79	3453	6055	281	132
	0.999	0	0	0	0	62	8164	1769	0	5
	0.9	0	0	19	0	68	10	7853	1311	739
10	**0.99**	0	0	0	0	81	2208	7592	13	106
	0.999	0	0	0	0	55	5483	4456	0	6