ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mücahit BOZKURT

BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2022

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ

Mücahit BOZKURT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
Yıl: 2022, Sayfa: 61
Jüri : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU

Altdüz bölgesi kavramı bir modülün düz olması için ne kadar yakın (veya uzak) olduğunu ölçmek için kullanılır. Altdüz bölgesi tüm sol modüllerin sınıfı olan sağ modüller tam olarak düz modüllerdir. Bu çalışmada, altdüz bölgesi yalnızca burulmasız modüllerden oluşan RD-düz modülleri inceledik. Böyle modülleri tf-test olarak adlandırdık. Devirli gösterime sahip sol R-modüllerinin alt düz bölgeleri yardımıyla P-uyumlu halkaların ve burulmasız halkaların yeni bir karakterizasyonunu veriyoruz. Sonlu gösterime sahip RD-düz sol R-modülünün tf-test veya burulmasız olduğu halkaların yapılarını inceliyoruz.

Anahtar kelimeler: RD-düz modül, altdüz bölgesi, burulmasız modül.

ABSTRACT

MSc THESIS

TEST MODULE FOR TORSION-FREE MODULES

Mücahit BOZKURT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
Year: 2022, Pages: 61
Jury : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Asst. Prof. Dr. Ayşe Tuğba GÜROĞLU

The concept of subflat domain is used to measure how close (or far away) an module is to be flat. A right module is flat if its subflat domain is the entire class of left modules. In this note, we focus on of RD-flat modules that have subflat domain which is exactly the collection of all torsion-free modules, shortly tf-test modules. We give a new characterization of left P-coherent rings and torsion-free rings by subflat domains of cyclically presented left R-modules. We study the structure of rings over which finitely presented RD-flat left R-module is tf-test or torsion-free.

Anahtar kelimeler: RD-flat module, subflat domain, torsion-free module.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

R bir halka ve N bir modül olsun. $Ext_R(M,N)=0$ olduğunda M bir projektif sağ R-modül oluyorsa N'ye projektiflik için $Whitehead$ test modül veya $p-test$ modül denir. Trlifaj, $Whitehead$ injektif test modüllerini $Whitehead$ projektif test modüllerin duali olarak tanımlamıştır. $Ext_R(N,M)=0$ olduğunda M bir sağ injektif R-modül oluyorsa N'ye injektiflik için $Whitehead$ test modül veya $i-test$ modül denir. $i-test$ modüllerinden esinlenilerek, düz modüller için test modülü ($f-test\ modülü$) Tor funktörü yardımıyla çalışılmıştır. Düz olmayan her N sol R-modülü için $Tor(M,N)\neq 0$ oluyorsa M ye düzlük için test modül veya $f-test$ modül denir.

Burulmasız grupların, değişmeli olmayan halkalar üzerine birbirinden farklı genellemeleri vardır. Bu genellemelerden biri şu şekildedir: M'nin burulmasız modül olması için gerek ve yeter koşul her $r\in R$ için $Tor_1(M,R/Rr)=0$ olmasıdır. Burulmasız modüllerin, nispeten bölünebilir (relatively divisible (RD)) alt modüller ile yakın bir ilişkisi mevcuttur. B bir sağ R-modül ve A, B'nin bir alt modülü olsun. R'nin her r elamanı için $rA\bigcap B=rB$ ise A, B'nin RD-alt modülüdür denir. Denk olarak A, B'nin RD-alt modülü olması için gerek ve yeter koşul R'nin her r elamanı için $A\otimes R/Rr\to B\otimes R/Rr$ birebir olmasıdır. Düz modüller burulmasız modüllerdir fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Bir sol C modülü burulmasız olması için gerek ve yeter koşul $0\to A\xrightarrow{g} B\to C\to 0$ formundaki her kısa tam dizi için, B'nin g(A) alt modülü RD-alt modülü olmasıdır. Burulmasız modüllerin, nispeten bölünebilir (relatively divisible (RD)) alt modüller ile yakın bir ilişkisi mevcuttur. T (D) bir R-modül olsun. T'nin burulmasız (bölünebilir) olması için gerek ve yeter koşul her $0\to D\to B\to T\to 0$ kısa tam dizisinin RD-tam olmasıdır. Standart eşlenik izomorfizmden, bir B modülünün burulmasız olması için gerek ve yeter koşul B'nin karakter modülünün bölünebilir sol R-modül olmasıdır.

Aşikâr olarak her saf tam dizi RD-tam dizidir. Her düz ve fp-injektif modül sırasıyla burulmasız ve bölünebilirdir.

Bu tez çalışmasında burulmasız modüller için test modüller çalışılmıştır. M bir sağ R-modül ve N bir sol R-modül olsun. Eğer sol R-modüllerin her $0 \to H \to F \to N \to 0$ kısa tam dizisi için $0 \to M \otimes H \to M \otimes F \to M \otimes N \to 0$ dizisi tam oluyorsa M'ye $N - altd$üz$(N - subflat)$ denir. M $N - altd$üz olacak şekilde tüm N modüllerin topluluğuna M'nin $altd$üz bölgesi denir. M'nin altdüz bölgesi $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ ile gösterilir. Bir M sağ R-modülünün düz olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F}^{-1}(M) = R - Mod$ olmasıdır. Özel olarak her M sağ R-modülü için, sol modüllerin $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ sınıfı tüm düz modüllerin sınıfını içerir. Eğer M RD-düz sağ R-modül ise $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ sınıfı tüm burulmasız modüllerin sınıfını içerir. Dolayısıyla, bir RD-düz modülün muhtemel en küçük $altd$üz bölgesi burulmasız modüller sınıfıdır. $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ sınıfı tam olarak burulmasız modüllerin sınıfı ise M RD-düz modülüne burulmasız modüller için test modül, kısaca $tf - test$ modül diyeceğiz. Her halkanın tf-test modüle sahip olduğunu inceledik.

Bölüm 4'te ilk başta modüllerin altdüz bölgelerinin yeni özellikleri çalışıldı ve altdüz bölgeleri yardımıyla uyumlu (coherent) P-uyumlu (P-coherent) ve burulmasız halkalar için yeni karakterizasyonları elde edildi. R'nin burulmasız halka olması için gerek ve yeter koşul devirli gösterime sahip (veya RD-düz) her sol (veya sağ) M R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır. R'nin sağ P-uyumlu halka olması için gerek ve yeter koşul her devirli gösterime sahip U modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'in direk çarpım altında kapalı olmasıdır. Ayrıca burulmasız modüller için test modül olarak tf-test modülleri tanıtılmış ve incelenmiştir. Sonlu gösterime sahip RD-düz modüllerin burulmasız veya tf-test (f-test) olduğu halkaların karakterizasyonu çalışılmıştır.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda sürekli desteği, rehberliği, sabrı, bilgisiyle, değerli eleştirileriyle bana desteğini hiç esirgemeyen ve çalışmaya teşvik eden danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez çalışmalarım süresince aldığım lisans üstü bursu için, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK, Proje No: 119F176) teşekkür ederim.

Hayatım boyunca yaşadığım tüm zorluklarda yanımda olan, her türlü fedakârlığı gösteren, maddi manevi desteğini esirgemeyen, beni bu dünyaya getiren ve bugünlere gelmemdeki en büyük paya sahip babam Celil BOZKURT'a annem Makbule BOZKURT'a ablam Havva BOZKURT'a ve varlığıyla bana mutluluk veren canım kardeşim Bengüsu BOZKURT'a çok teşekkür ederim.

.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 5
2.1. Modüller ve Alt Modüller 5
2.2. Modül Homomorfizmaları 6
2.3. Modüllerin Direk Toplamı ve Direk Çarpımı 8
2.4. Serbest Modüller 9
2.5. Modül Kategorileri ve Funktörler 9
2.6. Tam Diziler ve Parçalanan Tam Diziler 11
2.7. Tensör Çarpım 12
2.8. Burulmalı ve Burulmasız Modüller 14
2.9. Eşlenik İzomorfizmaları 15
3. RD-SAF ALT MODÜLLER 17
3.1. Projektif Modüller, İnjektif Modüller ve Düz Modüller 17
3.2. Saf Tam Diziler 22
3.3. RD-Projektif Modüller, RD-İnjektif Modüller ve RD-Düz Modüller 24
3.4. Whitehead Test Modül 34
3.5. Altprojektif Bölgesi 36
4. BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ 41
4.1. Altdüz Notasyonu 41
4.2. Kısıtlı Bir Altdüz Bölgesine Sahip RD-Düz Modüller 45

4.3. Kısıtlı Bir Altdüz Bölgesine Sahip Olan Sonlu Gösterime Sahip RD-Düz Modüller 47
4.4 Sonlu Gösterime Sahip RD-düz Modüllerin Burulmasız veya f-test Olduğu Halkaların Karakterizasyonu 53
KAYNAKÇA 57
ÖZGEÇMİŞ 61

1. GİRİŞ

Bu çalışmada halkalar birimli ve birleşmelidir. Aksi belirtilmedikçe modüller sağ R-modül alınacaktır. Sağ (sol) R-modüllerinin sınıfını Mod-R (R-Mod) ile göstereceğiz.

Mod-R sınıfının tamamına ışık tutan önemli alt sınıfları vardır. Bu önemli alt sınıfları başında, tüm projektif modüller, tüm injektif modüller ve tüm düz modüller sınıfı gelir. Son yıllarda, bir modülün projektifliğini, injektifliğini ve düzlüğünü test etmek için alternatif yollar üzerine geliştirilmiştir. Biz bu çalışmada burulmasız modüller aracılıyla RD-düz modüllerin düzlüğünü inceledik.

Hattori bir tamlık bölgesi üzerinde burulmasız modüllerin miştir. Hattori (1960) çalışmasında, burulmasız modüllerin tamlık bölgesi üzerindeki homolojik özelliklerinden esinlenerek, değişmeli olmayan halkalar üzerinde burulmasız modüller tanımlanmış ve incelenmiştir. X bir sağ R-modülü olsun. Eğer her $r \in R$ için $Tor_1(X, R/Rr) = 0$ ise X'e burulmasız modül denir. Düz modüller, burulmasız modüldür ancak tersi genellikle doğru değildir. Burulmasız modüllerin, nispeten bölünebilir (relatively divisible (RD)) alt modüller ile yakın bir ilişkisi mevcuttur. T (D) bir R-modül olsun. T'nin burulmasız (bölünebilir) olması için gerek ve yeter koşul her $0 \to D \to B \to T \to 0$ kısa tam dizisinin RD-tam olmasıdır. Standart eşlenik izomorfizmden, bir B modülünün burulmasız olması için gerek ve yeter koşul B'nin karakter modülünün bölünebilir sol R-modül olmasıdır. Aşikâr olarak her saf tam dizi RD-tam dizidir. Her düz ve fp-injektif modül sırasıyla burulmasız ve bölünebilirdir.

Bir N R-modülü her RD-tam dizisine göre injektif (sırasıyla, projektif, düz) özelliğine sahipse RD-injektif (sırasıyla, RD-projektif, RD-düz) olarak adlandırılır. Warfield (1969) çalışmasında, RD-projektif, RD-injektif ve RD-düz modül kavramlarını tanıtılmıştır. Couchot (2006) çalışmasında, her Artinian modülün RD-injektif olduğu değişmeli halkalar karakterize edilmiştir. Moradzadeh-Dehkordi ve

Shojaee (2017) çalışmasında, R'nin tüm ideallerini RD-düz olduğu R halkalarının ana özelliklerini incelenmiştir. Eklof ve Trlifaj (2001); Trlifaj (1996) makalesinde Whitehead injektif test (kısaca, i-test modülleri) modüllerden esinlenilerek Tor funktörü aracıyla, f-test modüller, Alizade ve Durğun (2017) çalışmasında, çalışılmıştır. Düz olmayan her K sol R-modülü için $Tor(F,K) \neq 0$ ise F'ye f-test modül denir. Aynı f-test modül gibi, bu tezin temel amacı burulmasız modüller için test modüllerini incelemektir. K bir sağ R-modül ve L bir sol R-modül olsun. Eğer sol R-modüllerin her $0 \to U \to D \to L \to 0$ kısa tam dizisi için $0 \to K \otimes U \to K \otimes D \to K \otimes L \to 0$ dizisi tam oluyorsa K $L-$altdüz ($L-$subflat) denir. K $L-$ altdüz olacak şekilde tüm L modüllerin topluluğuna K'nin altdüz bölgesi denir. K'nin altdüz bölgesi $\mathfrak{F}^{-1}(K)$ ile gösterilir. Bir K sağ R-modülünün düz olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F}^{-1}(K) = R - Mod$ olmasıdır. Tüm düz sol R-modüller sınıfı her K modülü için, $\mathfrak{F}^{-1}(K)$ tarafından içerilmektedir. Eğer M RD-düz sağ R-modül ve N burulmasız sol R-modül ise M N-altdüz olur. Dolayısıyla, bir RD-düz modülün muhtemel en küçük altdüz bölgesi burulmasız modüller sınıfıdır. $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ sınıfı tam olarak burulmasız modüllerin sınıfı ise M RD-düz modülüne burulmasız modüller için test modül, kısaca tf-test modül diyeceğiz. Her halkanın tf-test modüle sahip olduğunu gösterdik

Bölüm 4'te modüllerin altdüz bölgelerinin yeni özellikleri verilmiş ve altdüz bölgeleri yardımıyla P-uyumlu (P-coherent) ve burulmasız halkalar için yeni karakterizasyonları elde edildi. R'nin burulmasız halka olması için gerek ve yeter koşul devirli gösterime sahip (veya RD-düz) her M sol (veya sağ) R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır. Ayrıca burulmasız modüller için test modül olarak tf-test modülleri tanıtılmış ve incelenmiştir. Sonlu gösterime sahip RD-düz modüllerin burulmasız veya tf-test (f-test) olduğu halkaların karakterizasyonu çalışılmıştır.

Burulmasız (sırasıyla, düz, tekilsiz) modüllerin ailesini $\mathcal{TF}_R$ (sırasıyla, $\mathcal{F}_R$, $\mathcal{N}_R$) ile göstereceğiz. Bir U R-modülünün karakter (character) modülü $Hom_{\mathbb{Z}}(U, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}})$'yi U^+ ile gösteriyoruz. U ve H R-modüller olsun. $Hom(U,H)$, $Hom_R(U,H)$ anlamına gelirken $Ext^n(U,H)$ ise $Ext_R^n(U,H)$ anlamına gelir. Benzer şekilde $U \otimes H$, $U \otimes_R H$ anlamına gelirken $Tor_n(U,H)$ ise $Tor_n^R(U,H)$ anlamına gelir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.1.1 R bir halka, (M, +) abelyen grup olmak üzere $. : M \times R \to M$ çarpma işlemi her r, s ∈ R ve her m, n ∈ M için aşağıdaki şartları sağlarsa bu çarpma işlemi ile M'ye bir sağ R-modül denir. M_R ile gösterilir.

1) $(m + n).r = m.r + n.r$
2) $m.(r + s) = m.r + m.s$
3) $m.(rs) = (m.r).s$
4) $m.1 = m$

Benzer şekilde sol R-modül tanımlanır. ${}_RM$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.1.2 Birimli her R halkası aynı zamanda bir sağ ve sol R-modüldür. (Rotman, 1979).

Tanım 2.1.3 M bir R-modül ve N ⊆ M olsun. Eğer N, M'nin alt grubu ve her r ∈ R ve her n ∈ N için $r.n \in$ N oluyorsa N, M'nin alt modülü denir. N ≤ M ile gösterilir (Rotman, 1979).

Tanım 2.1.4 X, M'nin alt kümesi olsun.

$$\langle X \rangle = \{\sum r_i x_i : r_i \in R \text{ ve } x_i \in X\}$$

Bu küme X deki elemanların tüm lineer kombinasyonlarının kümesidir. $\langle X \rangle$, X tarafından doğrulan (veya üretilen) alt modüldür denir. $X = \emptyset$ ise $\langle X \rangle = 0$ dır. X sonlu alt küme ve $M = \langle X \rangle$ ise M sonlu üretilmiş modül denir. X tek elemanlı ($X = \{x\}$) bir kümeyse $\langle X \rangle = \langle x \rangle = Rx = \{rx : r \in R\}$ alt modülüne x'in ürettiği devirli modül denir (Rotman, 1979).

Önerme 2.1.5 M bir R-modül olsun. M R-modülünün devirli olması için gerek ve yeter koşul I, R'nin ideali olmak üzere $M \cong R/I$ olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 2.1.6 M bir R-modül ve M ≠ {0} olsun. Eğer M'nin sıfırdan farklı öz alt modüllere sahip değilse M R-modülüne basit modül denir. Yani sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü bulunmayan modüllere basit modül denir (Rotman, 1979).

Sonuç 2.1.7 M bir sol R-modül olsun. M'nin basit modül olması için gerek ve yeter koşul I, R'nin bir maksimal sol ideali olmak üzere $M \cong R/I$ olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 2.1.8 M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun.

$M/K = \{m + K : m \in M\}$ bölüm grubu

her r ∈ R ve her $m + K \in M/K$ için $(m + K)r = mr + K$ tanımlı işlemiyle bir R-modül olur. Bu M/K R-modülüne bölüm modülü denir (Rotman, 1979).

2.2. Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.2.1 M ve N R-modüller olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f, fonksiyonuna bir R-modül homomorfizması denir. Her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(xr) = f(x)r$ (Dummit ve Foote, 2004).

Tanım 2.2.2 $f : M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun. Eğer f birebir ise f ye R-modül monomorfizması, f örten ise f ye R-modül epimorfizması denir. f hem birebir hem de örten bir R-modül homomorfizması ise f ye R-modül izomorfizması denir. M ≅ N ile gösterilir.

M modülünden N modülüne olan tüm homomorfizmalarının kümesini

$$Hom_R(M,N) = \{f : f : M \to N\ R-modül\ homomorfizması\}$$

ile gösterilir. $f, g \in Hom_R(M,N)$ ve her x ∈ M için f + $g \in Hom_R(M,N)$ fonksiyonunu $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ olarak tanımlayalım. Bu toplama ile $Hom_R(M,N)$ bir abelyen grup olur.

R değişmeli halka olsun. $r \in R, f \in Hom_R(M,N)$ ve x ∈ M için

$(rf)(x) = r(f(x))$ olarak tanımlarsak $Hom_R(M,N)$ bir sol R-modül olur (Dummit ve Foote, 2004).

Tanım 2.2.3 $\mu : M \to M/K$ dönüşümü $\mu(x) = x + K$ işlemiyle bir R-modül epimorfizmasıdır. Bu μ R-modül epimorfizmasına doğal (kanonik) epimorfizma denir (Dummit ve Foote, 2004).

Tanım 2.2.4 $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun.

$Çekf = \{m \in M : f(m) = 0\}$ kümesine f nin çekirdek kümesi denir.

$Görf = \{f(m) : m \in M\}$ kümesine f nin görüntü kümesi denir.

N/ $Görf$ bölüm modülüne f'nin eş çekirdeği (cokernel) denir.

Burada $Çekf$, M nin bir alt modülüdür. $Görf$, N nin bir alt modülüdür (Rotman, 1979).

Teorem 2.2.5 (İzomorfizma Teoremleri)

1) **1.İzomorfizma Teoremi:** M ve N R-modül ve $f : M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun**.** O zaman $\phi : M/Çekf \to Görf$ R-modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).
2) **2.İzomorfizma Teoremi:** M bir R-modül ve $S, T \leq M$ olsun. O zaman $S/(S \cap T) \to (S + T)/T$ R-modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).
3) **3.İzomorfizma Teoremi:** M bir R-modül, $S, T \leq M$ ve T ≤ S olsun. O zaman $(M/T)/(S/T) \to M/S$ R-modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).

2.3. Modüllerin Direk Toplamı ve Direk Çarpımı

Tanım 2.3.1. T ve S R-modül olsun. $S \oplus T = \{(s,t) : s \in S \, ve \, t \in T\}$ kümesine (dış) direk toplam denir. Her $x, y \in S$, her $a, b \in T$ ve her $r \in R$ için

1) $(x,a) + (y,b) = (x + y, a + b)$
2) $(x\,,a)r = (xr\,,ar)$

tanımlanan işlemlerle $S \oplus T$ bir R-modül olur (Atiyah ve Macdonald, 1969).

Tanım 2.3.2. M bir R-modül ve $S, T \leq M$ olsun.

Eğer S + T = M ve S ∩ T = {0} ise M = S ⊕ T, S ve T'nin (iç) direk toplamı denir (Rotman, 1979).

Tanım 2.3.4. $\{M_i\}_i$ I kümesiyle indekslenmiş R-modüller ailesi olsun. Bu ailenin direk çarpımı $\prod_{i\in I} M_i = \{f : f : I \to \cup_{i\in I} M_i, her \; i \in I \; için \; f(i) \in M_i\}$ dır.

$f, g \in \prod_{i\in I} M_i$ ve r ∈ R için

1) Her $i \in I$ için $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$
2) Her $i \in I$ için $(fr)(i) = f(i)r$

tanımlanan işlemlerle $\prod_{i\in I} M_i$ bir R-modül olur. Bu modüle M_i R-modüllerin direk çarpımı denir (Rotman, 1979).

$\oplus_{i\in I} M_i = \{f : f \in \prod_{i\in I} M_i, \text{her i} \in \text{I için f(i)} \in \text{Mi ve sonlu çoklukta i dışında f(i)} = 0\}$

M_i R-modüllerinin dış direk toplamı $\prod_{i\in I} M_i$ R-modülünün bir alt modülüdür. Eğer I sonlu ise $\prod_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i$ olur (Rotman, 1979).

2.4. Serbest Modüller

Tanım 2.4.1. F bir R-modül olsun. Eğer F, R'nin kopyalarının bir direk toplamına izomorfik ise F ye bir serbest R-modül denir. Yani B indeks kümesi ve her b ∈ B için $R_b = \langle b \rangle \cong R$ olmak üzere F ≅ $\bigoplus_{b \in B} R_b$ tir. B indeks kümesine F nin bir bazı denir (Rotman, 1979).

Teorem 2.4.2. Herhangi bir R-modül bir serbest R-modülünün bölüm modülüne izomorfiktir (Rotman, 1979).

2.5. Modül Kategorileri ve Funktörler

Tanım 2.5.1. $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. A bir $\mathcal{C}$ kategorisinin nesnesi ise $A \in Obj\mathcal{C}$ ile göstereceğiz. A ve B $\mathcal{C}$ kategorisinin iki nesnesi olsun. $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ veya $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ ile göstereceğimiz bu kümenin elemanlarına A dan B ye morfizmalar denir.

$\mathcal{C}$ kategorisinde üç nesne A, B ve C için

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \ ve \ g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \ olmak \text{ üzere } fg \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

1) $f(gh) = (fg)h$
2) Her A nesnesi için $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ kümesinde

   a) $Her\ B \in Obj\mathcal{C} \ ve \ her \ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \ için \ f1_A = f \ olacak \ şekilde \ 1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A) \ vardır.$
   b) Her $C \in Obj\mathcal{C}$ ve her $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$ için $1_A g = g$ olacak şekilde $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ vardır (Rotman, 1979).

Örnekler 2.5.2

- Ab: Abelyen gruplar kategorisi (Rotman, 1979).
- $R - Mod$: Sol R-modüller kategorisi (Rotman, 1979).
- $Mod - R$: Sağ R-modüller kategorisi (Rotman, 1979).

Tanım 2.5.3. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovaryant fanktor şunlardan oluşur.

1) Her $X \in Obj\mathcal{C}$ için $F(X) \in Obj\mathcal{D}$
   Her $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ için $F(f) : F(X) \to F(Y)$ öyle ki

   a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$
   b) $F(gf) = F(g)F(f)$ sağlanır (Rotman, 1979).

Tanım 2.5.4. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kontravaryant funktör şunlardan oluşur.

1) Her $X \in Obj\mathcal{C}$ için $F(X) \in Obj\mathcal{D}$
2) Her $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ için $F(f) : F(Y) \to F(X)$ öyle ki

   a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$
   b) $F(gf) = F(f)F(g)$ sağlanır (Rotman, 1979).

2.6. Tam Diziler ve Parçalanan Tam Diziler

Tanım 2.6.1. R-modül homorfizmalarının ve R-modüllerinin sonlu veya sonsuz dizisi

$$\dots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

Eğer $Görf_{n+1} = Çekf_n$ ise bu diziye tam dizi denir (Rotman, 1979).

Önerme 2.6.2.

i) $0 \to A \xrightarrow{f} B$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul f R-modül homomorfizmasının bire bir olmasıdır (Rotman, 1979).

ii) $B \xrightarrow{g} C \to 0$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul g R-modül homomorfizmasının örten olmasıdır (Rotman, 1979).

iii) $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul h R-modül homomorfizmasının bir izomorfizma olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 2.6.3. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ şeklindeki bir tam diziye kısa tam dizi denir. Bu kısa tam diziye A'nın C ye genişlemesi de denir (Rotman, 1979).

Önerme 2.6.4. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modüllerin bir kısa tam dizi ise $A \cong Görf$ ve $B/Görf \cong C$ dir (Rotman, 1979).

Teorem 2.6.5 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modüllerin kısa tam dizisi olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

i) Bu kısa tam dizi parçalanır.

ii) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h : B \to A$ homomorfizması vardır.

iii) $gt = 1_C$ olacak şekilde bir $t : C \to B$ homomorfizması vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.6.6 Eğer $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modüllerin kısa tam dizisi parçalanır ise $B \cong A \oplus C$ olur (Rotman, 1979).

Tanım 2.6.7 $T : R - Mod \to Ab$ bir fanktor olsun. Her $f, g : A \to B$ için $T(f + g) = T(f) + T(g)$ ise T funktörüne toplamsal funktör denir (Rotman, 1979).

2.7. Tensör Çarpım

Tanım 2.7.1 A bir sağ R-modül, B bir sol R-modül ve G bir abelyen grup olsun. $T : A \times B \to G$ dönüşümü:

1) Her $a_1, a_2 \in A$ ve her $b_1, b_2 \in B$ için $T(a_1 + a_2, b_1) = T(a_1, b_1) + T(a_2, b_1)$ ve $T(a_1, b_1 + b_2) = T(a_1, b_1) + T(a_1, b_2)$ ise T bilineerdir denir.
2) Her $a \in A$, her $b \in B$ ve her $r \in R$ için $T(ar, b) = T(a, rb)$ ise T dengelidir denir (Rotman, 1979).

Tanım 2.7.2 A bir sağ R-modül ve B bir sol R-modül olsun. A ile B'nin tensör çarpımı, aşağıdaki evrensel özelliğe sahip, bir $A \otimes_R B$ abelyen grubu ve bir $h : A \times B \to A \otimes_R B$ bilineer ve dengeli dönüşüm öyle ki Her G abelyen grubu ve $her\ f : A \times B \to G$ bilineer ve dengeli dönüşümü için $th = f$ olacak şekilde tek bir $t : A \otimes_R B \to G$ (grup) homomorfizması vardır (Rotman, 1979).

Tanım 2.7.3. A bir sağ R-modül olsun. $F: R-Mod \rightarrow Ab, F(X) = A \otimes_R X$ bir kovaryant funktördür. Bu funktöra kovaryant tensör çarpım funktörü denir. $A \otimes_R -$ ile gösterilir (Rotman, 1979).

Tanım 2.7.4. A bir R-modül olsun. $F: R-Mod \rightarrow Ab, F(X) = Hom_R(A,X)$ bir kovaryant funktördur. Bu funktöre kovaryant Hom $funktör$ü denir. $Hom_R(A,-)$ ile gösterilir (Rotman, 1979).

Tanım 2.7.5.

- $F: R-Mod \rightarrow Ab$ bir kovaryant funktör olsun. Eğer her $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ dizisi de tam dizi oluyorsa F bir sol yarı (left exact) funktör denir (Rotman, 1979).
- $F: R-Mod \rightarrow Ab$ bir kovaryant funktör olsun. Eğer $her\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ tam dizisi için $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0$ dizisi de tam dizi oluyorsa F bir sağ yarı (right exact) funktör denir (Rotman, 1979).
- $F: R-Mod \rightarrow Ab$ bir kontravaryant funktör olsun. Eğer $her\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ tam dizisi için $0 \rightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ dizisi de tam dizi oluyorsa F bir sol yarı (left exact) funktör denir (Rotman, 1979).
- $F: R-Mod \rightarrow Ab$ bir kontravaryant funktör olsun. Eğer her $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için $F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \rightarrow 0$ dizisi de tam dizi oluyorsa F bir sağ yarı (right exact) funktör denir (Rotman, 1979).

Teorem 2.7.6. Hom funktörleri sol yarı tam funktörlerdir (Rotman, 1979).

Teorem 2.7.7. Tensör çarpım funktörleri sağ yarı tam funktörlerdir (Rotman, 1979).

Tanım 2.7.8

- $F : R - Mod \rightarrow Ab$ bir kovaryant funktör olsun. Her $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0$ dizisi de kısa tam dizi oluyorsa F funktörüne tam funktör denir (Rotman, 1979).
- $F : R - Mod \rightarrow Ab$ bir kontravaryant funktör olsun. Her $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \rightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \rightarrow 0$ dizisi de kısa tam dizi oluyorsa F funktörüne tam funktör denir (Rotman, 1979).

2.8. Burulmalı ve Burulmasız Modüller

Tanım 2.8.1. R birim elemanlı değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun.

M modülünün bir m elemanı için $mr = 0$ olacak şekilde R halkasının sıfır böleni olmayan bir r elemanı varsa m'ye bir burulmalı (torsion) elaman denir. M nin burulmalı elamanlarının kümesi $T(M) = \{m \in M : 0 \neq r \in R \, için \, mr = 0\}$ dir. $T(M) \neq \emptyset$ dur. Çünkü $0 \neq r \in R$ için $0r = 0$ olup $0 \in T(M)$ olur. Eğer $T(M) = M$ ise M'ye burulmalı (torsion) modül, $T(M) = 0$ ise M'ye burulmasız (torsion-free) modül denir. Eğer R tamlık bölgesi ise $T(M)$, M'nin bir alt modülüdür. R tamlık bölgesi değilse $T(M)$, M'nin bir alt modülü olmayabilir (Rotman, 1979).

R tamlık bölgesi olsun. Her M R-modül için

$$0 \rightarrow T(M) \rightarrow M \rightarrow M/T(M) \rightarrow 0$$

bir tam dizisi vardır. Burada $M/T(M)$ burulmasız modüldür. Her burulmasız modülün alt modülü de burulmasızdır (Rotman, 1979).

Önerme 2.8.2 R bir tamlık bölgesi ve M bir serbest R-modül olsun. O zaman M burulmasız modüldür (Roman, 2005).

Örnek 2.8.3 $\mathbb{Q}$ bir burulmasız $\mathbb{Z}$-modüldür. (Goodearl ve Warfield, 2004).

Önerme 2.8.4 R bir esas ideal bölgesi (PID) olsun. M sonlu üretilmiş burulmasız modül ise M serbest modüldür (Hungerford, 1974).

Önerme 2.8.5 R bir tamlık bölgesi, M bir burulmalı modül ve N bir burulmasız modül ise $Hom_R(M,N) = \{0\}$ olur (Cartan ve Eilenberg, 1956).

2.9. Eşlenik İzomorfizmaları

Teorem 2.9.1 R, S iki halka olsun. O zaman

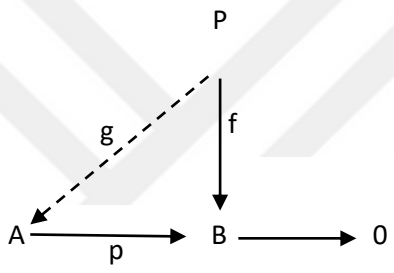
1) A_R, $_RB_S$, C_S ise $Hom_S(A \otimes_R B, C) \cong Hom_R(A, Hom_S(B,C))$
2) $_RA$, $_SB_R$, $_SC$ ise $Hom_S(B \otimes_R A, C) \cong Hom_R(A, Hom_S(B,C))$

doğal izomorfizmaları vardır (Rotman, 1979).

3. RD-SAF ALT MODÜLLER

3.1. Projektif Modüller, İnjektif Modüller ve Düz Modüller

Tanım 3.1.1. P bir R-modül olsun. Eğer her $p : A \to B$ epimorfizması ve her $f : P \to B$ homomorfizması için $pg = f$ olacak şekilde $g : P \to A$ homomorfizması varsa P bir projektif modüldür denir (Rotman, 1979).



Önerme 3.1.2 P bir R-modül olsun. P'nin projektif modül olması için gerek ve yeter koşul $Hom_R(P, -)$ bir tam funktör olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.3 P bir R-modül olsun. P'nin projektif modül olması için gerek ve yeter koşul $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ tam dizisinin parçalanır olmasıdır (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.4 Her serbest modül projektif modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.5 P bir sol R-modül olsun. P'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul P'nin bir serbest sol R-modülünün direk toplam terimi olmasıdır (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.6 R bir halka, I bir indeks kümesi ve P_i, I kümesiyle indekslenmiş R-modüller topluluğu olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir.

i) $\bigoplus_{i\in I} P_i$ projektiftir

ii) Her $i \in I$ için P_i projektiftir (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.7 R bir tamlık bölgesi olsun. P bir projektif modül ise P burulmasız modüldür (Jorza, 2014).

Önerme 3.1.8 R bir esas ideal bölgesi (PID) ve M bir sonlu üretilmiş R-modül olsun. M'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul M'nin burulmasız olmasıdır (Jorza, 2014).

Tanım 3.1.9. $0 \to K \to F \to M \to 0$ kısa tam dizisi için K ve F sonlu üretilmiş modül ve F serbest modül ise M ye sonlu gösterime sahip modül denir (Rotman, 1979).

Her sonlu gösterime sahip modül sonlu üretilmiştir ama her sonlu üretilmiş modül sonlu gösterime sahip modül olmayabilir (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.10. P sonlu üretilmiş projektif modül ise P sonlu gösterime sahiptir (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.11. (Schanuel's lemma) P ve P_1 projektif modüller olsun.

$0 \to K \to P \to M \to 0\ ve\ 0 \to K_1 \to P_1 \to M \to 0$ tam dizileri için $K \oplus P_1 \cong K_1 \oplus P$ olacak şekilde bir izomorfizma vardır (Rotman, 1979).

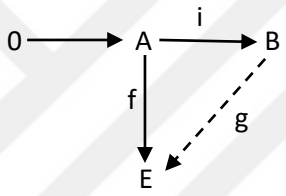
Sonuç 3.1.12 M bir sonlu gösterime sahip R-modül olsun. $0 \to K \to P \to M \to 0$ kısa tam dizisi için F bir sonlu üretilmiş serbest modül ise K sonlu üretilmiş modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.13 M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) M sonlu gösterime sahiptir.

2) Sol R-modüllerin her $(A_\lambda)_\Lambda$ ailesi için $\tau: M \otimes \prod_\Lambda A_\lambda \to \prod_\Lambda M \otimes A_\lambda$ bir izomorfizmdir.
3) Herhangi Λ kümesi için $\tau: M \otimes R^\Lambda \to M^\Lambda$ bir izomorfizmdir (Enochs ve Jenda, 2000).

Tanım 3.1.14 E bir R-modül olsun. Eğer her $0 \to A \xrightarrow{i} B$ tam dizisi ve her $f: A \to E$ homomorfizması için $gi = f$ olacak şekilde bir $g: B \to E$ homomorfizması varsa E bir injektif modüldür denir (Rotman, 1979).



Önerme 3.1.15 E bir R-modül olsun. E'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $Hom_R(-, E)$ bir tam funktör olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.16 E bir R-modül olsun. E'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $0 \to E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ kısa tam dizisinin parçalanır olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.17 $(E_k)_{k\in K}$ injektif modüllerin bir ailesi ise $\prod_{k\in K} E_k$ injektif modül olur (Rotman, 1979).

Sonuç 3.1.18 İnjektif modüllerin sonlu direk toplamı da injektif modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.19 (Bear kriteri) E bir R-modül olsun. E'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul R'nin her I ideali ve her $f: I \to E$ homomorfizmasının $g: R \to E$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir (Rotman, 1979).

Tanım 3.1.20 R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. Eğer her m ∈ M ve her $r \in R$ için $m = rm_1$ olacak şekilde $m_1 \in$ M varsa M'ye bir bölünebilir modül denir (Rotman, 1979).

Örnek 3.1.21 Herhangi bir bölünebilir grup bir bölünebilir $\mathbb{Z}-$modüldür (Jorza, 2014).

Örnek 3.1.22 $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-modül$ olarak bölünebilirdir (Jorza, 2014).

Önerme 3.1.23 R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. M injektif ise bölünebilirdir (Jorza, 2014).

Teorem 3.1.24 R esas ideal bölgesi ve E bir R-modül olsun. E R-modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul E'nin bölünebilir olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.1.25 A bir sağ R-modül olsun. Eğer $A \otimes_R -$ bir tam funktör ise A'ya düz modül denir (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.26 Her projektif R-modül düz modüldür (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.27 Sağ R-modüllerinin direk toplamı $\oplus_i M_i$ düz modül olması için gerek ve yeter koşul her M_i R-modülünün düz modül olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.28 M bir sağ R-modül olsun. M'nin her sonlu üretilmiş alt modülü düz modül ise M düz modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 3.1.29 M bir sonlu gösterime sahip R-modül olsun. M'nin düz modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin projektif modül olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 3.1.30 R bir tamlık bölgesi ve A düz modül olsun. O zaman A burulmasız modüldür (Rotman, 1979).

Sonuç 3.1.31 R esas ideal bölgesi olsun. Her burulmasız R-modül düz modüldür (Rotman, 1979).

Tanım 3.1.32 $\mathbb{P}$: ... $P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ bir tam dizi ve her n $\in \mathbb{N}$ için P_n projektif modül olacak şeklinde bir diziye M'nin bir projektif çözümlemesi ($projective\ resolution$) denir (Bland, 2011).

Tanım 3.1.33 $\mathbb{E}$ *: 0* $\rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \ldots \rightarrow E^{n-1} \rightarrow E^n \rightarrow \ldots$ bir tam dizi ve her n $\in \mathbb{N}$ için E^n injektif modül olacak şekilde bir diziye M'nin bir injektif çözümlemesi ($injective\ resolution$) denir (Bland, 2011).

Önerme 3.1.34 Her M R-modülü bir projektif ve bir injektif çözümlemesine sahiptir (Bland, 2011).

Teorem 3.1.34 P bir R-modül olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) P projektif modüldür
2) Her A modülü ve her $n \geq 1$ $için$ $Ext^n(P, A) = 0$ olur
3) Her A modülü için $Ext^1(P, A) = 0$ olur (Bland, 2011).

Teorem 3.1.35 I bir R-modül olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir

1) I injektif modüldür
2) Her A modülü ve her $n \geq 1$ için $Ext^n(A, I) = 0$ olur
3) Her A modülü için $Ext^1(A, I) = 0$ olur (Bland, 2011).

Teorem 3.1.36 Bir K sağ modülü için aşağıdakiler denktir

1) K düz modüldür
2) Her C sol modülü ve her $n \geq 1$ için $Tor_n(K, C) = 0$ olur
3) Her C sol modülü $için$ $Tor_1(K, C) = 0$ olur (Bland, 2011).

3.2. Saf Tam Diziler

Tanım 3.2.1 M bir sağ R-modül ve L, M'nin bir alt modülü olsun. Eğer $i : L \hookrightarrow M$ doğal gömmesi, her X sol R-modülü için $0 \to L \otimes_R X \xrightarrow{1_A \otimes f} M \otimes_R X$ dizisi tam oluyorsa L'ye M'nin bir saf (pure) alt modülü denir (Hazewinkel ve Gubareni, 2017).

Tanım 3.2.2 $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ sol R-modüllerinin bir tam dizisi olsun. Eğer her X sağ R-modülü için $0 \to X \otimes_R A \xrightarrow{1_A \otimes f} X \otimes_R B \to X \otimes_R C \to 0$ tam dizi oluyorsa bu dizeye saf tam dizi denir (Hazewinkel ve Gubareni, 2017).

Örnekler 3.2.3

a) Herhangi parçalanan kısa tam dizi saf tam dizidir (Lam,1999).
b) Saf tam dizilerin herhangi direk toplamı saftır (Lam,1999).
c) $(B_i)_{i \in I}$, sağ R-modüllerin herhangi bir ailesi olsun. $\bigoplus_{i \in I} B_i$, $\prod_{i \in I} B_i$'nin saf alt modülüdür (Lam,1999).

Teorem 3.2.4 $0 \to A \to B \to C \to 0$ sol R-modüllerin bir tam dizisi için aşağıdakiler denktir

1) Bu dizi saf tam dizidir.
2) Her sonlu gösterime sahip M sol R-modülü için
   $0 \to Hom_R(M, A) \to Hom_R(M, B) \to Hom_R(M, C) \to 0$ tam dizidir.
3) $a_i = \sum_{j \in J} (r_{ij} x_j)$ $(a_i \in A, r_{ij} \in R, i \in I, j \in J)$ I ve J sonlu indeks kümeler olmak üzere her lineer denklem sisteminin bir $(a_i) \in B^J$ çözümü ayrıca A^J de bir çözümüdür.
4) Her F sağ R-modülü için $0 \to F \otimes_R A \to F \otimes_R B \to F \otimes_R C \to 0$ tam dizidir.
5) Sağ R-modüllerinin dizisi

$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$ parçalanan tam dizidir (Jensen ve Lenzing, 1989).

Lemma 3.2.5 M bir R-modül ve L, M'nin bir alt modülü olsun. L, M'nin bir saf alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $0 \to L \to M \to M/L \to 0$ dizisinin saf tam dizi olmasıdır (Hazewinkel ve Gubareni, 2017).

Teorem 3.2.6 C bir sol R-modül olsun. C'nin düz olması için gerek ve yeter koşul $0 \to A \to B \to C \to 0$ şeklindeki sol R-modüllerin her tam dizisinin saf tam dizi olmasıdır (Rotman, 1979).

D bir Abelyen grup olsun. D'nin düz modül olması için gerek ve yeter koşul bu grubunun burulmasız olmasıdır. O halde Abelyen grupların

$$0 \to T(A) \to A \to A/T(A) \to 0$$

dizisi saf tam dizidir (Rotman, 1979).

Tanım 3.2.7 R bir halka olsun. Her $r \in R$ için $rar = r$ olacak şekilde $a \in R$ varsa R ye von Neumann regüler halka denir (Rotman, 1979).

Önerme 3.2.8 R bir halka olsun. R'nin von Neumann regüler olması için gerek ve yeter koşul her M R-modülünün herhangi alt modülünün saf olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.2.9 F bir R-modül olsun. Eğer R-modüllerinin her $0 \to N \to M \to L \to 0$ saf kısa tam dizisi için $0 \to Hom(L,F) \to Hom(M,F) \to Hom(N,F) \to 0$ dizisi tam oluyorsa F'ye saf-injektif (pure-injective) modül denir (Couchot, 2007).

Tanım 3.2.10 F bir R-modül olsun. Eğer R-modüllerinin her $0 \to N \to M \to L \to 0$ saf kısa tam dizisi için $0 \to Hom(F,N) \to Hom(F,M) \to Hom(F,L) \to 0$ dizisi tam oluyorsa F'ye saf-projektif (pure-projective) modül denir (Couchot, 2007).

Önerme 3.2.11 Her R-modülü bir saf-injektif modülün bir saf alt modülüdür (Enochs ve Jenda, 2000).

3.3. RD-Projektif Modüller, RD-İnjektif Modüller ve RD-Düz Modüller

Önerme 3.3.1 B ve C R-modül ve A, B'nin bir alt modülü olsun. R-modüllerin bir tam dizisi $0 \to A \to B \to C \to 0$ için aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) Her $r \in R$ için $Hom(R/Rr, B) \to Hom(R/Rr, C)$ doğal homomorfizmi örtendir.
2) Her $r \in R$ için $R/rR \otimes A \to R/rR \otimes B$ doğal homomorfizmi birebirdir.
3) Her $r \in R$ için $rA = A \cap rB$ (Warfield, 1969).

Tanım 3.3.2 Eğer bir kısa tam dizi Önerme 3.3.1'in koşullarını sağlıyorsa A'ya B de nispeten bölünebilir (relatively divisible) denir. Bu kısa tam diziye RD-saf (RD-pure) denir (Warfield, 1969).

Tanım 3.3.3 M bir sol R-modül olsun. Eğer a ∈ R için $M \cong {}^{R}/_{Ra}$ ise M ye devirli gösterime sahip ($cyclically\ presented$) denir.

Tanım 2.8.1'de burulmasız modül tanımı verirken R'yi değişmeli ve birim elemanlı aldık. Hattori (1960), değişmeli olmayan halkalar üzerinde burulmasız modüller tanımlanmış ve incelenmiştir.

Önerme 3.3.4 M bir sağ R-modül olsun. M'nin burulmasız olması için gerek ve yeter koşul her $r \in R$ için $Tor_1^R(M, R/Rr) = 0$ olmasıdır (Hattori, 1960).

Önerme 3.3.5 N bir sol R-modül olsun. N'nin bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul her $r \in R$ için $Ext_R^1(R/Rr, N) = 0$ olmasıdır (Hattori, 1960).

Önerme 3.3.6 A, B ve C sağ R-modüller olsun. Her $0 \to A \to B \to C \to 0$ tam dizisinin RD-tam olması için gerek ve yeter koşul C'nin burulmasız olmasıdır (Hattori, 1960).

Tanım 3.3.7 R bir halka olsun. Eğer R'nin her sol (sağ) esas ideali projektif modül ise R ye sol (sağ) PP halka (PP ring) denir.

Tanım 3.3.8 R bir halka olsun. Eğer R'nin tüm sağ (veya sol) idealleri (sonlu üretilmiş) burulmasız ise R ye burulmasız halka denir (Dauns ve Fuchs, 2004).

Lemma 3.3.9 Burulmasız halkalarının herhangi kümesinin direk çarpımı burulmasız halkadır (Dauns ve Fuchs, 2004).

Lemma 3.3.10 Her sağ (veya sol) PP halka bir burulmasız halkadır (Dauns ve Fuchs, 2004).

Teorem 3.3.11 R bir burulmasız halka olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) R bir sağ PP halkadır.
2) Burulmasız sol R-modüllerin direk çarpımı da burulmasızdır.
3) Herhangi I kümesi için R^I bir burulmasız sol R-modüldür (Dauns ve Fuchs, 2004).

Tanım 3.3.12 M bir sol R-modül olsun. Eğer sol R-modüllerin her RD-tam dizisi $0 \to A \to B \to C \to 0$ için $0 \to Hom(M,A) \to Hom(M,B) \to Hom(M,C) \to 0$ dizisi tam oluyorsa M'ye RD-projektif modül denir (Mao, 2011).

Tanım 3.3.13 N bir sol R-modül olsun. Eğer sol R modüllerin her RD-tam dizisi $0 \to A \to B \to C \to 0$ için $0 \to Hom(C,N) \to Hom(B,N) \to Hom(A,N) \to 0$ dizisi tam oluyorsa N'ye RD-injektif modül denir (Mao, 2011).

Tanım 3.3.14 Bir sağ F R-modül olsun. Eğer sol R-modüllerin her RD-tam dizisi $0 \to A \to B \to C \to 0$ için $0 \to F \otimes A \to F \otimes B \to F \otimes C \to 0$ dizisi tam oluyorsa F'ye RD-düz modül denir (Mao, 2011).

Lemma 3.3.15 R bir halka olsun.

1) Herhangi M sol R-modülü için C devirli gösterime sahip sol R-modüllerin bir direkt toplamı olacak şekilde bir $0 \to N \to C \to M \to 0$ RD-tam dizisi vardır (Fuchs ve Salce, 2001).
2) M bir sol R-modül olsun. M'nin RD-projektif olması için gerek ve yeter koşul M'nin devirli gösterime sahip sol R-modüllerinin bir direkt toplamının bir direkt toplam terimi olmasıdır (Warfield, 1969).
3) F bir sağ R-modül olsun. F'nin RD-düz olması için gerek ve yeter koşul F^+ nın RD-injektif olmasıdır (Couchot, 2006).

Lemma 3.3.16 Aşağıdakiler birbirine denktir

1) $0 \to A \to B \to C \to 0$ dizisi sol R-modüllerin bir RD-tam dizisidir.
2) Herhangi M RD-projektif sol R-modülü için
   $0 \to Hom(M,A) \to Hom(M,B) \to Hom(M,C) \to 0$ dizisi tamdır.
3) Herhangi N RD-injektif sol R-modülü için
   $0 \to Hom(C,N) \to Hom(B,N) \to Hom(A,N) \to 0$ dizisi tamdır (Mao, 2011).

Önerme 3.3.17 M bir sol R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) M bölünebilirdir.
2) Her sol R-modüllerin $0 \to M \to E \to F \to 0$ tam dizisi RD-tam dizidir.
3) B bölünebilir olacak şekilde $0 \to M \to B \to C \to 0$ bir RD-tam dizisi vardır.
4) Herhangi N RD-projektif sol R-modülü için $Ext^1(N,M) = 0$ olur (Mao, 2011).

Önerme 3.3.18 N bir sağ R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) N burulmasız modüldür.
2) Her sağ R-modüllerin $0 \to K \to P \to N \to 0$ tam dizisi RD-tam dizidir.
3) T burulmasız olacak şekilde $0 \to K \to T \to N \to 0$ RD-tam dizisi vardır.
4) Herhangi M RD-injektif sağ R-modülü için $Ext^1(N, M) = 0$ olur.
5) Herhangi M RD-düz sol R-modülü için $Tor_1(N, M) = 0$ olur (Mao, 2011).

Sonuç 3.3.19 Herhangi R halkası için aşağıdakiler doğrudur

1) Bir bölünebilir RD-injektif sol R-modül injektif modüldür (Mao, 2011).
2) Bir burulmasız RD-projektif sağ R-modül projektif modüldür (Mao, 2011).
3) Bir burulmasız RD-düz sağ R-modül düz modüldür (Mao, 2011).

Teorem 3.3.20 M bir sol R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) M RD-projektif modüldür
2) Sol R-modüllerin her $0 \to K \to N \to M \to 0$ RD-tam dizisi parçalanırdır.
3) E RD-injektif olsun. O zaman sol R-modüllerin her $0 \to K \to E \to F \to 0$ RD-tam dizisine göre M projektif modüldür (Mao, 2011).

Teorem 3.3.21 M bir sol R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) M RD-injektif modüldür.
2) Sol R-modüllerin her $0 \to M \to E \to F \to 0$ RD-tam dizisi parçalanırdır.
3) P RD-projektif olacak şekilde sol R-modüllerin her $0 \to K \to P \to L \to 0$ RD-tam dizisine göre M injektif modüldür (Mao, 2011).

Önerme 3.3.22 R bir değişmeli halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) M bir RD-injektif R-modüldür.
2) Herhangi F düz R-modülü için $Hom(F, M)$ bir RD-injektif R-modülüdür (Mao, 2011).

Önerme 3.3.23 R bir değişmeli halka ve N bir R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir

1) N bir RD-düz R-modüldür.
2) Herhangi E injektif R-modülü için $Hom(N, E)$ bir RD-injektif R-modüldür (Mao, 2011).

Tanım 3.3.24 M bir R-modül olsun. $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ tam dizisi M'nin bir projektif çözümlemesi ve n negatif olmayan bir tam sayı olsun. M'nin projektif boyutu ≤ n olur. Eğer M'nin en küçük projektif çözümlemesinin uzunluğu n ise M'nin projektif boyutu ($projective\ dimension$) = n olur. Projektif boyut pd(M) ile gösterilir. Eğer M'nin böyle bir sonlu projektif çözümlemesi yoksa pd(M) = ∞ olur (Rotman, 1979).

pd(M) = 0 olması için gerek ve yeter koşul M'nin projektif modül olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.25 M bir R-modül olsun. $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^{n-1} \to E^n \to 0$ tam dizisi M'nin bir injektif çözümlemesi ve n negatif olmayan bir tam sayı olsun. M'nin injektif boyutu ≤ n olur. Eğer M'nin en küçük injektif çözümlemesinin uzunluğu n ise M'nin injektif boyutu ($injektive\ dimension$) = n olur. İnjektif boyut id(M) ile gösterilir. Eğer M'nin böyle bir sonlu injektif çözümlemesi yoksa id(M) = ∞ olur (Rotman, 1979).

id(M) = 0 olması için gerek ve yeter koşul M'nin injektif modül olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.26 M bir R-modül olsun. $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ tam dizisi M'nin bir düz çözümlemesi ve n negatif olmayan bir tam sayı olsun. M'nin düz boyutu ≤ n olur. Eğer M'nin en küçük düz çözümlemesinin uzunluğu n ise M'nin düz boyutu ($flat\ dimension$) = n olur. M'nin düz boyutu fd(M) ile gösterilir. Eğer M'nin böyle bir sonlu düz çözümlemesi yoksa fd(M) = ∞ olur (Rotman, 1979).

M bir sağ R-modül olsun. M'nin düz olması için gerek ve yeter koşul fd(M) $= 0$ olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.27 R bir halka olsun. R'nin sağ zayıf boyutu ($right\ weak\ dimension$)

$$rwD(R) = sup\{fd(A): A \in Mod - R\}$$

şeklinde tanımlanır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.28 R bir halka olsun. R'nin sol zayıf boyutu ($left\ weak\ dimension$)

$$lwD(R) = sup\{fd(B): B \in R - Mod\}$$

şeklinde tanımlanır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.29 R bir halka olsun. $rwD(R)$ ve $lwD(R)$ nin ortak değerine R nin zayıf boyutu ($weak\ dimension$) denir (Rotman, 1979).

Önerme 3.3.30 A bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) $fd(A) \leq n$
2) Her sol B R-modülleri ve her $k \geq n + 1$ için $Tor_k^R(A, B) = 0$
3) Her sol B R-modülleri için $Tor_{n+1}^R(A, B) = 0$ (Rotman, 1979).

Önerme 3.3.31 $rwD(R) \leq n$ olması için gerek ve yeter koşul her A sağ R-modülü ve her sol B R-modülü için $Tor_{n+1}^R(A, B) = 0$ olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 3.3.32 R bir halka olsun. Eğer R'nin her sonlu üretilmiş sol ideali sonlu gösterime sahip ise R ye bir sol uyumlu halka ($coherent\ ring$) denir (Rotman, 1979).

Teorem 3.3.33 R bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir uyumlu halkadır.
2) Bir serbest R-modülünün her sonlu üretilmiş alt modülü sonlu gösterime sahiptir.
3) Düz R-modüllerin her direkt çarpımı bir düz R-modüldür (Chase, 1960).

Tanım 3.3.34 R bir halka olsun. Eğer R'nin her esas sol ideali sonlu gösterime sahip ise R ye bir sol P-uyumlu halka ($P - coherent\ ring$) denir (Mao ve Ding, 2008).

Uyumlu halkalar P-uyumlu halkadır ancak P-uyumlu halkalar uyumlu halka olmayabilir (Mao ve Ding, 2008).

Sonuç 3.3.35 R bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir sol PP halkadır.
2) R bir sol P-uyumlu halkadır ve bir burulmasız sağ R-modülünün her alt modülü burulmasızdır.
3) Bir bölünebilir sol R-modülünün her bölüm modülü bölünebilirdir.
4) Her RD-projektif sol R-modülü projektif boyuta sahiptir. Projektif boyut ≤ 1.
5) R bir sol P-uyumlu halkadır ve her RD-injektif sağ R-modülü injektif boyuta sahiptir. İnjektif boyut ≤ 1.
6) R bir sol P-uyumlu halkadır ve her RD-düz sol R-modülü düz boyuta sahiptir. Düz boyut ≤ 1 (Mao, 2011).

Sonuç 3.3.36 R bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir von Neumann regüler halkadır.
2) Her RD-projektif sol R-modülü projektiftir.
3) Her RD-düz sol R-modülü düz modüldür.
4) Her RD-injektif sağ R-modülü injektiftir.
5) Her sol R-modüllerin $0 \to A \to B \to C \to 0$ tam dizisi RD-tam dizidir (Mao, 2011).

Tanım 3.3.37 A bir R-modül olsun. A'nın

$$\{m \in A : R'nin\ bazı\ geniş\ idealleri\ için\ mI = 0\ dır.\}$$

alt kümesi, A'nın tekil (singular) elemanlarının kümesidir. A'nın tekil elemanlarının kümesi Z(A) ile gösterilir ve A'nın tekil alt modülü olarak adlandırılır. Eğer $Z(A) = 0$ ise A modülüne tekilsiz (non-singular) modül denir. Eğer $Z(A) = A$ ise A modülüne tekil (singular) modül denir (Goodearl, 1976).

Lemma 3.3.38 R ortogonal idempotentlerinin sonsuz kümeye sahip olmayan bir sağ PP halka olsun. O zaman R bir sol PP halkadır, R'nin her sol veya sağ sıfırlayanı bir idempotent tarafından üretilir ve R sağ sıfırlayanlar için artan zincir koşuluna ve azalan zincir koşuluna sahiptir (Chatters ve Hajarnavis, 1980).

Lemma 3.3.39 R bir sol PP halka ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) M burulmasızdır.
2) Her $x \in M$ için xR burulmasızdır
3) $x \in M$ ve $r \in R$ olmak üzere $xr = 0$ ve $ann_\ell(r) = Re$ olacak şekilde $e \in R$ idempotent ise $x = xe$ olur (Albrecht, Dauns ve Fuchs, 2005).

Tanım 3.3.40 R bir sağ tekilsiz halka olsun. Eğer R'nin her $\mathcal{S}$-kapalı ($\mathcal{S}$-closed) sağ ideali bir sağ sıfırlayan (annihilator) ise R'ye bir sağ Utimi halka denir. M bir R-modül ve U, M'nin bir alt modülü olsun. Eğer M/U tekilsiz ise U'ya $\mathcal{S}$-kapalı ($\mathcal{S}$-closed) denir. R'nin bölümlerinin maksimal sağ halkaları Q^r ile gösterilir (Albrecht, Dauns ve Fuchs, 2005).

Teorem 3.3.41 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir Goldie sağ PP halka ve Q^r, R'nin bir yarı-tam (semi-perfect) lokalizasyonudur (localization).

2) R ortogonal idempotentlerinin sonsuz bir kümeye sahip olmayan bir sağ Utimi PP halkadır.
3) R ortogonal idempotentlerinin sonsuz bir kümeye sahip olmayan bir sağ tekilsiz (non-singular) halka ve tüm sonlu üretilmiş tekilsiz sağ R-modüller burulmasızdır.
4) Bir sağ R-modülünün burulmasız olması için gerek ve yeter koşul o modülün tekilsiz olmasıdır.

Önerme 3.3.42 R ortogonal idempotentlerinin sonsuz kümeye sahip olmayan bir PP halka olsun. Bir burulmasız sağ R-modülünün devirli alt modülleri projektiftir. Tüm burulmasız (sol veya sağ) R-modüller tekilsizdir (non-singular) (Albrecht, Dauns ve Fuchs, 2005).

Teorem 3.3.43 R bir sağ ve sol Noetherian halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) Her R_i ya bir bölüm $cebiri$ (division algebra) üzerinde bir alt üç$gensel\ matris$ halkasına Morita-eşdeğerdir veya bir asal sağ ve sol kalıtsal (hereditary) halka olmak üzere $R = R_1 \times R_2 \times \ldots R_n$ dir.
2) Her sağ M R-modülü için aşağıdakiler denktir.
   a) M burulmasızdır.
   b) M tekilsizdir.
   c) M düzdür (Albrecht, Dauns ve Fuchs, 2005).

3.4. Whitehead Test Modül

Bir M modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul her $N \in Mod - R$ için $Ext_R(M,N) = 0$ olmasıdır. Benzer şekilde bir N modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $M \in Mod - R$ için $Ext_R(M,N) = 0$ olmasıdır.

Projektiflik veya injektiflik için tüm $Ext_R(M,N)$ gruplarını kontrol etmemize gerek yoktur. Aslında tek bir grubun değerlendirilmesi yeterlidir. Her M modülü için K ve L modülü vardır öyle ki M projektif (injektif) olması için gerek ve yeter koşul $Ext_R(M,K) = 0$ ($Ext_R(L,M) = 0$) olmasıdır (Önerme 3.4.2). Sabit bir N modülü kullanarak ve bir tek Ext grubu hesaplayarak M'nin projektifliğine veya injektifliğine karar vermenin yolu Tanım 3.4.1'de verilmiştir (Trlifaj, 1996).

Tanım 3.4.1 R bir halka ve N bir modül olsun.

1) $Ext_R(M,N) = 0$ olduğunda M bir sağ projektif R-modül oluyorsa N'ye bir projektiflik için $Whitehead$ test modül veya $p - test$ modül denir (Trlifaj, 1996).
2) $Ext_R(N,M) = 0$ olduğunda M bir sağ injektif R-modül oluyorsa N'ye bir injektiflik için $Whitehead$ test modül veya $i - test$ modül denir (Trlifaj, 1996).

Lemma 3.4.2 R bir halka olsun.

1) $M \in Mod - R$ ve P projektif olacak şekilde $0 \to K \to P \to M \to 0$ sağ R-modüllerin bir kısa tam dizi olsun. O zaman M'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul $Ext_R(M,K) = 0$ olmasıdır (Trlifaj, 1996).

2) $N \in Mod-R$ ve I injektif olacak şekilde $0 \to N \to I \to L \to 0$ Mod-R de bir kısa tam dizi olsun. O zaman N'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $Ext_R(L,N) = 0$ olmasıdır (Trlifaj, 1996).

Tanım 3.4.3 M bir sağ R-modül ve N bir sol R-modül olsun. Eğer sol R-modüllerin her $0 \to H \to F \to N \to 0$ kısa tam dizisi için $0 \to M \otimes H \to M \otimes F \to M \otimes N \to 0$ dizisi tam oluyorsa M ye $N-$ altdüz ($N-subflat$) denir. M $N-$ altdüz olacak şekilde tüm N modüllerin topluluğuna M'nin altdüz bölgesi denir ve $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ ile gösterilir. Bir M sağ R-modülü düz olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F}^{-1}(M) = R-Mod$ olmasıdır (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.4 M bir sağ R-modül ve N bir sol R modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1) M $N-$altdüz.
2) N $M-$altdüz.
3) P bir düz sol R-modül ve K P nin bir M-saf ($M-pure$) alt modülü olmak üzere $N \cong {}^{P}/_{K}$ dır.
4) $Tor(M,N) = 0$ (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.5 $\bigcap_{M \in Mod-R} \mathfrak{F}^{-1} = \{N \in R-Mod : N \text{ düz}\}$ (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.6 $\{M_k\}_{k \in K}$ sol R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\mathfrak{F}^{-1}(\bigoplus_{k \in K} M_k) = \bigcap_{k \in K} \mathfrak{F}^{-1}(M_k)$ olur (Alizade ve Durğun, 2017).

Tanım 3.4.7 M bir sağ R-modülü ve N bir sol R-modülü olsun. $\mathfrak{F}^{-1} = \{A \in R-Mod : A \text{ düz}\}$ durumunda yani düz olmayan her N sol R-modülü için

$Tor(M,N) \neq 0$ oluyorsa M ye düzlük için test modül veya $f-test$ modül denir (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.8 Her $i-test$ modül $f-test$ modüldür (Alizade ve Durğun, 2017).

Sonuç 3.4.9 Her halka $f-test$ sağ R-modüllerine sahiptir (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.10 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir

1) R bir von Neumann regüler halkadır.
2) Her sıfırdan farklı sağ (sol) R-modül $f-test$ modüldür.
3) Bir sağ(sol) düz $f-test$ R-modülü vardır (Alizade ve Durğun, 2017).

Önerme 3.4.11 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) Her düz olmayan sağ R-modül $f-test$ modüldür.
2) Her düz olmayan sol R-modül $f-test$ modüldür.
3) Her düz olmayan M sağ R-modül ve her düz olmayan N sol R-modül için $Tor_1^R(M,N) \neq 0$ (Alizade ve Durğun, 2017).

3.5. Altprojektif Bölgesi

Tanım 3.5.1 M ve N modülleri verilsin. Eğer her $g: B \to N$ epimorfizmi ve her $f: M \to N$ homomorfizmi için $gh = f$ olacak şekilde bir $h: M \to B$ homomorfizmi varsa M'ye N-altprojektif denir. Bir M modülünün altprojektif bölgesi, M N-altprojektif olacak şekilde tüm N modüllerinin topluluğu olarak tanımlanır. M'nin altprojektif bölgesi $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}$(M) ile gösterilir. $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}$(M) $= \{N \in Mod-R: M\ N-$

$altprojektif\}$ (Holston, Lopez-Permouth, Mastromatteo ve Simental-Rodriguez, 2015).

Önerme 3.5.2 Herhangi M modülü için aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) M projektiftir.
2) $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M) = Mod - R$
3) $M \in \underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}$(M) (Holston, Lopez-Permouth, Mastromatteo ve Simental-Rodriguez, 2015).

Lemma 3.5.3 Herhangi N modülü için aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) N bir projektif modül tarafından içerilir.
2) Her E injektif modülü için N E-altprojektiftir.
3) N E(N)-altprojektiftir.
4) Her F serbest sol R-modülü için N F^+-altprojektiftir (Durğun, 2015).

Tanım 3.5.4 M bir modül olsun. Eğer $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}$(M) tam olarak projektif modüllerden oluşuyorsa M'ye p-yoksul (p-indigent) denir (Holston, López-Permouth, Mastromatteo, ve Simental-Rodríguez, 2015).

Γ sonlu gösterime sahip sağ R-modüllerinin bir temsilcilerinin kümesi olmak üzere $\mathcal{FP} = \bigoplus_{M_i \in \Gamma} M_i$.

Önerme 3.5.5 $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathcal{FP})$ tam olarak düz modüllerden oluşur (Durğun, 2015).

Tanım 3.5.6 R bir halka olsun. R halkası kendi üzerine injektif modül oluyorsa R'ye öz injektif (self injective) denir. Eğer R sağ ve sol noetherian ve R sağ veya sol bir öz injektif halka ise R'ye quasi-Frobenius (QF) halka denir (Rotman, 1979).

Teorem 3.5.7 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R sağ noetherian ve sağ öz injektiftir.
2) R sol noetherian ve sağ öz injektiftir.
3) R sağ noetheriandır. R aşağıdaki durumları sağlar:
   a) Herhangi R'nin herhangi sağ A ideali için $ann_r(ann_\ell A) = A$ olur.
   b) Herhangi R'nin herhangi sol B ideali için $ann_\ell(ann_r B) = B$ olur.
4) R sağ ve sol artinian ve R a) ve b) koşullarını sağlar (Lam, 1999).

Sonuç 3.5.8 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir QF-halkadır.
2) Bir projektif modülü içeren bir p-yoksul modül vardır.
3) Bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olan bir yoksul modül vardır (Durğun, 2015).

M bir modül olsun. Eğer M'nin her alt modülü bir direk toplam teriminde büyük (essential) alt modül ise M'ye CS denir. Eğer R_R CS ise R sağ CS halka denir. M'nin kopyalarının her direk toplamı CS ise M'ye bir $\sum - CS$ modül denir.

Teorem 3.5.9 R bir yarı-basit olmayan (nonsemisimple) halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1) R bir tek basit tekilsiz modül olacak şekilde sağ $\sum - CS$ halkadır.
2) $R \cong S \times T$ olacak şekilde bir halka direk toplamı vardır. Burada S yarı-basit artinian halkadır. T

   a) Ya bir yerel QF-halkası üzerinde matris halkası
   b) Veya $J(T)^2 = 0$ olan kalıtsal artinian seri halkası
   olan bir bileşenlere indirgenemez (indecomposable) bir halkadır (Durğun, 2015).

Önerme 3.5.10 R bir sağ noetherian sağ tekilsiz halka olsun. O zaman herhangi düz sağ R-modülü tekilsizdir (Durğun, 2016).

4. BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde modüllerin altdüz bölgelerinin yeni özellikleri verilmiş ve altdüz bölgeleri yardımıyla P-uyumlu (P-coherent) ve burulmasız halkalar için yeni karakterizasyonları elde edilmiştir. R'nin burulmasız halka olması için gerek ve yeter koşul devirli gösterime sahip (veya RD-düz) her sol (veya sağ) M R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır. Ayrıca burulmasız modüller için test modül olarak tf-test modülleri tanıtılmış ve incelenmiştir. Sonlu gösterime sahip RD-düz modüllerin burulmasız veya tf-test (f-test) olduğu halkaların karakterizasyonu çalışılmıştır.

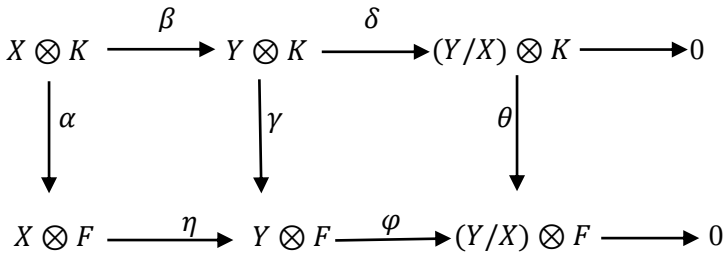
4.1. Altdüz Notasyonu

Bu bölümde modüllerin $altd$üz bölgelerinin bazı temel özellikleri elde edilmiştir.

X bir sol modül ve Y bir sağ modül olsun. Y $X-altd$üz olması için gerek ve yeter koşul $Tor_1^R(Y,X)=0$ olmasıdır (Önerme 3.4.4). Ayrıca $T \leq M$ olsun. T ve M/T $N-$altdüz ise M de $N-$altdüz olur.

Önerme 4.1.1 $Y \in Mod-R$ ve X, Y nin bir saf alt modülü olsun. O halde $\mathfrak{F}^{-1}(Y) \subseteq \mathfrak{F}^{-1}(X)$ olur.

İspat $A \in \mathfrak{F}^{-1}(Y)$ olsun. Herhangi $0 \to K \to F \to A \to 0$ tam dizisi için aşağıdaki değişmeli diyagrama sahibiz



$A \in \mathfrak{F}^{-1}(Y)$ olduğundan dolayı γ bir monomorfizm olur. Diğer yandan X, Y'nin bir saf alt modülü olduğundan satırlar tamdır. O halde $\eta\alpha = \gamma\beta$ bir monomorfizm yani α bir monomorfizm olur.

$Y \in Mod - R$ için Y nin düz boyutu $(fd(Y)) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul her $B \in Mod - R$ için $Tor_2^R(Y, B) = 0$ olmasıdır (Önerme 3.3.30).

Önerme 4.1.2. $Y \in Mod - R$ ve X, Y'nin bir alt modülü olsun. Eğer $fd(Y/X) \leq 1$ ise $\mathfrak{F}^{-1}(Y) \subseteq \mathfrak{F}^{-1}(X)$ olur.

İspat Önerme 3.3.30 den $fd(Y/X) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul her A sol R-modülü için $Tor_2^R(Y/X, A) = 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer $A \in \mathfrak{F}^{-1}(Y)$ ise Önerme 3.4.4'ten $Tor_1^R(Y, A) = 0$ olur. Yani $0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$ dizisi için $0 = Tor_2^R(Y/X, A) \to Tor_1^R(X, A) \to Tor_1^R(Y, A) = 0$ olur. O halde Önerme 3.4.4'ten X $A-$altdüz olur.

Lemma 4.1.3. $M \in Mod - R$ olsun. $fd(M) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ alt modülleri altında kapalı olmasıdır.

İspat $A \in \mathfrak{F}^{-1}(M)$ ve B, A nın herhangi bir alt modülü olsun. Eğer $fd(M) \leq 1$ ise her C sol R-modülü için $Tor_2^R(M, C) = 0$ olur. Böylece $0 \to A \to B \to A/B \to 0$ tam dizisi için $0 = Tor_2^R(M, A/B) \to Tor_1^R(M, A) \to Tor_1^R(M, B) = 0\ dır$. Bu yüzden Önerme 3.4.4'ten M $B-$altdüz yani $B \in \mathfrak{F}^{-1}(M)$ olur. Tersine $C \in R -$

Mod alalım. K serbest olacak şekilde $0 \to B \to K \to C \to 0$ dizisini düşünelim. $K \in \mathfrak{F}^{-1}(M)$ olduğundan $Tor_1^R(M,K) = 0$ olur dolayısıyla $Tor_1^R(M,B) = 0$ olur. $0 = Tor_2^R(M,K) \to Tor_2^R(M,C) \to Tor_1^R(M,B) = 0$ dizisinin tamlığından dolayı $Tor_2^R(M,C) = 0$ olup $fd(M) \leq 1$ olur.

$wD(R) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul her X sol (veya sağ) R-modülü için $fd(X) \leq 1$ olmasıdır (Önerme 3.3.31).

Sonuç 4.1.4 $wD(R) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul her (sonlu gösterime sahip) M sol (veya sağ) R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır.

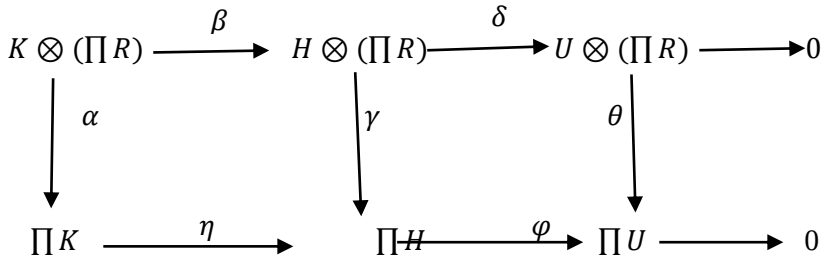
Sonuç 4.1.5. $wD(R) \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul her sonlu gösterime sahip (veya saf-projektif) X sol (veya sağ) R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(X)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır.

R bir halka olsun. Eğer R'nin tüm sağ (veya sol) idealleri (sonlu üretilmiş) burulmasız ise R ye burulmasız halka denir (Tanım 3.3.8).

Sonuç 4.1.6. R'nin burulmasız halka olması için gerek ve yeter koşul devirli gösterime sahip (veya RD-düz) her sol (veya sağ) M R-modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ nin alt modülleri altında kapalı olmasıdır.

Lemma 4.1.7. U sonlu gösterime sahip sağ R-modül ve H sonlu üretilmiş serbest modül olmak üzere $0 \to K \to H \to U \to 0$ bir tam dizi olsun. $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'nün direk çarpım altında kapalı olması için gerek ve yeter koşul K'nin sonlu gösterime sahip olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) Varsayımımızdan $Tor_1^R(U, \prod R) = 0$ olur. Aşağıdaki diyagramını düşünelim.



Teorem 3.1.13'ten dolayı γ ve θ izomorfizmdir. O halde 5-lemmadan α bir izomorfizm olup Teorem 3.1.13'ten dolayı K sonlu gösterime sahiptir.

($\Leftarrow$) $A \in \mathfrak{F}^{-1}(U)$ alalım. O halde $Tor_1^R(U, A) = 0$ olur. Eşlenik (adjoint) izomorfizmden $Ext_R^1(U, A^+) = 0$ olur. Bir N modülü P_0, P_1 ve P_2 sonlu üretilmiş olmak üzere $P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$ projektif çözümlemesine sahip ise her $B \in R - Mod$ için $Tor_1^R(N, B^+) = Ext_R^1(N, B)^+$ olur. O halde $Tor_1^R(U, A^{++}) = 0$ yani U $A^{++} - altd$üz olur.

Her $i \in J$ için $M_i \in \mathfrak{F}^{-1}(U)$ olacak şekilde $\{M_i\}_{i\in J}$ sol R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\oplus_i M_i \in \mathfrak{F}^{-1}(U)$ olur. Yani $\left(\oplus_{i\in J} M_i\right)^{++} \cong \left(\prod_{i\in J} M_i^+\right)^+$, $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'in elemanı olur. Ama Örnekler 3.2.3'ten $(\oplus_i M_i^+)$, $(\prod_{i\in J} M_i^+)$'in bir saf alt modülüdür. Böylece $\left(\prod_{i\in J} M_i^+\right)^+ \to \left(\oplus_{i\in J} M_i^+\right)^+ \to 0$ bir parçalanan epimorfizmdir. Bu yüzden $\left(\oplus_{i\in J} M_i^+\right)^+ \cong (\prod_{i\in J} M_i^{++})$, $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'in elemanı olur. $(\prod_{i\in J} M_i)$, $(\prod_{i\in J} M_i^{++})$'in bir saf alt modülü olduğundan ve $\mathfrak{F}^{-1}(U)$ saf alt modüller altında kapalı olduğundan $\prod_{i\in J} M_i \in \mathfrak{F}^{-1}(U)$ olur.

R bir halka olsun. Eğer R'nin her sonlu üretilmiş sol ideali sonlu gösterime sahip ise R ye bir sol uyumlu halka ($coherent\ ring$) denir (Tanım 3.3.32).

R bir halka olsun. Eğer R'nin her esas sol ideali sonlu gösterime sahip ise R ye bir sol P-uyumlu halka ($P-coherent\ ring$) denir (Tanım 3.3.34).

Sonuç 4.1.8 R bir halka olsun. R'nin sağ uyumlu halka olması için gerek ve yeter koşul her sonlu gösterime sahip U modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'in direk çarpım altında kapalı olmasıdır.

Sonuç 4.1.9 R bir halka olsun. R'nin sağ P-uyumlu halka olması için gerek ve yeter koşul her devirli gösterime sahip U modülü için $\mathfrak{F}^{-1}(U)$'in direk çarpım altında kapalı olmasıdır.

4.2. Kısıtlı Bir Altdüz Bölgesine Sahip RD-Düz Modüller

Bu bölümde burulmasızlık için test modüllerin varlığını inceledik. Eğer U RD-düz modül ve N burulmasız sol R-modül ise $U\ N$ −altdüz olur. Sonraki önerme herhangi bir RD-düz modülünün altdüz bölgesinin en azından burulmasız modülleri içermek zorunda kaldığını gösterir.

Önerme 4.2.1 Ω tüm RD-düz modüllerin sınıfı olmak üzere ${}_{\mathrm{R}}\mathcal{TF} = \bigcap_{M\in\Omega}\mathfrak{F}^{-1}(M)$.

Tanım 4.2.2 K bir RD-düz modül olsun. Eğer her burulmasız olmayan X sol modülü için $Tor(K,X) \neq 0$ yani $\mathfrak{F}^{-1}(M) = \mathcal{TF}$ ise K'ye $tf-test$ modül denir.

Γ devirli gösterime sahip sağ R-modüllerinin bir temsilcilerinin kümesi olmak üzere $\mathfrak{CP} = \bigoplus_{C_i\in\Gamma} C_i$. $\mathfrak{CP}$ bir RD-düz modüldür.

Önerme 4.2.3 $\mathfrak{CP}$ bir $tf-test$ modüldür.

İspat $U \in R-Mod$ alalım. Kabul edelim ki $Tor_1^R(\mathfrak{CP},U) = 0$ olsun. O zaman $Tor_1^R(\mathfrak{CP},U) \cong \bigoplus_{C_i\in\Gamma} Tor_1^R(C_i,U)$ olduğundan dolayı her $C_i \in \Gamma$ için $Tor_1^R(C_i,U) = 0$ olur. Yani U burulmasız modüldür.

Önerme 4.1.1 ve Önerme 4.2.3 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.2.4 $\mathfrak{CP}$ modülünün herhangi bir saf genişlemesi bir $tf-test$ modüldür.

Önerme 4.1.2 ve Önerme 4.2.3 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.2.5 Eğer $wD(R) \leq 1$ ise E($\mathfrak{CP}$) bir $tf-test$ modüldür.

Açıklama 4.2.6 K sonlu gösterime sahip bir modül ve $F_0 \to F_1 \to K \to 0$, K'nin minimal serbest çözümlemesi olsun. $Hom_R(F_1,R) \to Hom_R(F_0,R)$ dual dönüşümünün eşçekirdeğine (cokernel) K'nin transpozu denir. K'nin transpozu $\mathrm{T}r(K)$ ile gösterilir. $\mathrm{T}r(K)$ 'in izomorfizm sınıfları minimal çözümlemesi seçimimize bağlı değildir. $\mathrm{T}r(K)$ sonlu gösterime sahip bir sol R-modüldür (Auslander ve Bridger, 1969; Skljarenko, 1978).

Teorem 4.2.7 $\mathcal{M}$ sonlu gösterime sahip sağ R-modüllerin bir kümesi olsun. Sol R-modüllerin herhangi $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi ve $M \in \mathcal{M}$ için $Hom(Tr(M),\mathbb{E})$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul $M \otimes \mathbb{E}$ dizisini tam olmasıdır (Skljarenko, 1978).

Sonuç 4.2.8 K bir sonlu gösterime sahip modül olsun. $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{K}) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{T}r(K))$ ve $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{T}r(K)) = \mathfrak{F}^{-1}(K)$ olur.

Sonuç 4.2.9 K bir sonlu gösterime sahip modül olsun.

1) K'nin RD-düz modül olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{T}r(K)$'in bir RD-projektif modül olmasıdır.
2) $\mathrm{T}r(K)$'in RD-düz modül olması için gerek ve yeter koşul K'nin RD-projektif modül olmasıdır.

Önerme 4.2.10 U bir sonlu gösterime sahip RD-düz modül olsun. U'nun $tf-test$ modül olması için gerek ve yeter koşul $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{T}r(U)) = \mathcal{TF}$ olmasıdır.

Önerme 4.2.11 U bir RD-düz modül olsun. Eğer U $tf-test$ modül ise her sonlu gösterime sahip projektif olmayan RD-düz C modülü için $Hom_R(C,U) \neq 0$ olur.

İspat Kabul edelim ki bazı sonlu gösterime sahip projektif olmayan RD-düz C modülü için $Hom_R(C,U)=0$ olsun. F_1 projektif olacak şekilde $0\to F_0\to F_1\to U\to 0$ kısa tam dizi için $0\to Hom_R(C,F_0)\to Hom_R(C,F_1)\to Hom_R(C,U)=0$ tam dizi olur. O halde Teorem 4.2.7'den dolayı $0\to F_0\otimes \mathrm{T}r(C)\to F_1\otimes \mathrm{T}r(C)\to U\otimes \mathrm{T}r(C)\to 0$ dizisi tam olup böylece $Tor(U,\mathrm{T}r(C))=0$ olur. U $tf-test$ modül olduğundan $\mathrm{T}r(C)$ burulmasız modüldür. Ama Sonuç 3.3.19'dan $\mathrm{T}r(C)$ RD-düz modül olup düz modüldür. O halde Teorem 4.2.7'den C projektif olur. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden $Hom_R(C,U)\neq 0$ olur.

4.3. Kısıtlı Bir Altdüz Bölgesine Sahip Olan Sonlu Gösterime Sahip RD-Düz Modüller

Sezgisel olarak bir RD-düz modülünün altdüz bölgesi bize böyle bir modülün düz olmaktan ne kadar uzak (veya yakın) olduğunu söyler. Bir RD-düz (RD-projektif) modülün düz (projektif) olması için gerek ve yeter koşul bu modülün burulmasız olmasıdır (Sonuç 3.3.36). RD-projektif R-modüllerin saf-projektif RD-düz modüller olduğuna dikkat edelim. Von Neumann regüler halkalarının tam olarak RD-düz modülünün düz modül olduğu halkalardır (Sonuç 3.3.36).

Önerme 4.3.1 R bir Von Neumann regüler halka olması için gerek ve yeter koşul bir burulmasız $tf-test$ sağ (veya sol) R-modülünün var olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) Sonuç 3.3.36 ve Önerme 4.2.3'ten dolayı açık. ($\Leftarrow$) K burulmasız tf-test modül olsun. O halde her RD-düz A sol R-modülü için $Tor_1(K,A)=0$ olur. Ama K $tf-test$ modül yani A düz modüldür. Bu yüzden Sonuç 3.3.36'dan R bir Von Neumann regüler halkadır.

Tezimizin geri kalanında tüm halkaları Von Neumann regüler olmayan halka olarak alacağız.

4. BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ
Mücahit BOZKURT

R bir halka olsun. Tüm basit sağ modüllerin RD-projektif olması durumunda R'ye bir sağ SRDP halka diyoruz. Buna denk olarak tüm basit sağ modüller hem sonlu gösterime sahip hem de RD-düz modül ise R'ye bir sağ SRDP halka diyoruz. Benzer şekilde sol SRDP halkaları tanımlanır. PIR (Esas ideal halkaları) aşikâr bir şekilde SRDP halkalarıdır. SRDP halkasının daha az belirgin örneği değişmeli kalıtsal ($hereditary$) $noetherian$ halkadır.

R bir halka olsun. Eğer R'nin her sol (sağ) esas ideali projektif modül ise R ye sol (sağ) PP halka (PP ring) denir (Tanım 3.3.7). Herhangi PP halkasının burulmasız halka olduğuna dikkat edelim (Dauns ve Fuchs, 2004).

Önerme 4.3.2 R bir sağ SRDP halka ve $wD(R) \leq 1$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

1) Her $U \in Mod-R$ için ya $Soc(U)$ projektif ya da $\mathfrak{F}^{-1}(U) \subseteq {}_R\mathcal{TF}$
2) Tekil ($singular$) $yarıartinian$ modüller $tf-test$ modüldür.
3) Projektif olmayan basit modüller $tf-test$ modüldür.

İspat 1) ⇒ 2) ve 2) ⇒ 3) açık.

3) ⇒ 1) Eğer $Soc(U)$ projektif değil ise o zaman U projektif olmayan bir basit alt modüle sahiptir bu alt modüle A diyelim. Ama A $tf-test$ modül yani Önerme 4.1.2'den U $tf-test$ modül olur.

Her sonlu gösterime sahip RD-düz sol R-modül ya $tf-test$ ya da düz (veya burulmasız) modül olan halkaların bu özelliğini (P) ile gösterelim.

Lemma 4.3.3 R, (P) özelliğini sağlayan bir sağ SRDP halka olsun. O zaman bir tek projektif olmayan basit modül var ve R ya sol bölünebilir halka ya da sol PP halka olur.

İspat H projektif olmayan bir basit modül olsun. Sonuç 4.2.8'den dolayı $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(H)=\mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{T}r(H))$, $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(H)=\mathcal{TF}$ olur. Y projektif olmayan basit modül olsun. O zaman ya $H \cong Y$ ya da $Hom_R(H,Y)=0$ olur. Eğer $H \cong Y$ ise ispat biter. Eğer $Hom_R(H,Y)=0$ ise H $Y-altprojektif$ ve yani Y burulmasız modül olur. Y RD-projektif modül olduğundan Sonuç 3.3.19'dan dolayı Y projektif modül olur. Bu bir çelişkidir. Yani bir tek projektif olmayan basit modül var.

H bir projektif olmayan basit modül olsun. O halde ya $Hom_R(H,R)=0$ ya da $Hom_R(H,R)\neq 0$ olur. İkinci durumda H, R'ye gömülür. Lemma 3.5.3'ten $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(H)=\mathcal{TF}$ olduğundan dolayı her injektif modül burulmasız modüldür. Özel olarak ${}_RR^{+}$ burulmasız modül ve böylece ${}_RR^{++}$ bölünebilirdir. O zaman R bir sol bölünebilir halkadır çünkü Önerme 3.2.11'ten R (RD-)saf olarak R^{++} ya gömülür. Önceki durumda her sağ L ideali için $Hom_R(H,L)=0$ olur. O halde H $tf-test$ modül olduğundan R burulmasız modülüne sahibiz. $\{N_s\}_{s\in J}$ burulmasız modüllerin kümesi olsun. $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(H)=\mathcal{TF}$ ve $Hom_R(H,R)=0$ olduğundan bir Z modülünün burulmasız olması için gerek ve yeter koşul $Hom_R(H,Z)=0$ olmasıdır. Şimdi $Hom_R\left(H,\prod_{i\in J}N_s\right)\cong\bigoplus_{i\in J}Hom_R(H,N_s)=0$ yani $\prod_{i\in J}N_s$ burulmasız modüldür. Teorem 3.3.11'den R sol PP halkadır.

Lemma 4.3.4 R bir sağ SRDP halka ve $wD(R)\leq 1$ olsun. R'nin (P) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumları sağlamasıdır.

1) R bir tek projektif olmayan basit modüle sahip bir sol PP halkadır.
2) Bir L modülünün burulmasız olması için gerek ve yeter koşul $Soc(L)$'in projektif olmasıdır.

İspat (⇒) Lemma 4.3.3'ten dolayı R bir tek projektif olmayan basit modüle sahip bir sol PP halka olup bu modüle A diyelim. Kabulümüz ve Sonuç 4.2.8'den dolayı $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(A) = \mathfrak{F}^{-1}(Tr(A)) = \mathcal{TF}$ olur. L modülünü alalım. Eğer $Soc(L)$ projektif modül ise A L-altprojektif modül ve böylece L burulmasız modüldür. Tersine L burulmasız modül ise $Soc(L)$ projektif modül olduğunu göstereceğiz. L bir projektif olmayan basit modüle sahip olsun. Bu modüle N diyelim. A'nın tekliğinden dolayı $N \cong A$ olur. A $L - altprojektif$ modül olduğundan Sonuç 4.1.6'dan A $A - altprojektif$ yani $N \cong A$ projektif modüldür. Bu N'nin projektif olmayışıyla çelişir. Bu yüzden $Soc(L)$ projektif modüldür.

(⇐) İlk önce $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(A) = \mathfrak{F}^{-1}(Tr(A)) = \mathcal{TF}$ olduğuna dikkat edelim. İkinci olarak 2)'den burulmasız sağ R-modüllerin herhangi direk çarpımı burulmasız modül olur. Böylece Sonuç 4.1.9'dan R bir sol P-uyumlu halkadır. X düz modül olmayan sonlu gösterime sahip bir RD-düz modül ve $L \in \underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(Tr(X)) = \mathfrak{F}^{-1}(X)$ olsun. O halde ya $Hom_R(A, L) = 0$ ya da $Hom_R(A, L) \neq 0$ olur. Eğer $Hom_R(A, L) = 0$ ise A L-altprojektif yani L istenildiği gibi burulmasız modül olur. Eğer $Hom_R(A, L) \neq 0$ ise genelliği bozmaksızın A'yı L'nin bir alt modülü olarak alabiliriz. Sonuç 4.1.4'ten $A \in \mathfrak{F}^{-1}(X)$ yani $Tor_1^R(A, X) = 0$ olur. O zaman standart eşlenik izomorfizmden $Ext(A, X^+) = 0$ olur. $0 \to X^+ \to E(X^+) \to E(X^+)/X^+ \to 0$ kısa tam dizisini düşünelim. $Soc(E(X^+)/X^+)$ projektiftir. Aksi taktirde A'nın tekliğinden $E(X^+)/X^+$ A'ya izomorfik olacak şekilde bir projektif olmayan basit alt modüle sahiptir. O halde $E(X^+)$'in bir Z büyük alt modülü var öyle ki $Z/X^+ \cong A$ olur. Ama $Ext(A, X^+) = 0$ yani X^+, Z'nin bir direk toplam terimidir. Bu çelişki (X^+)'in Z'nin büyük alt modülü olmadığını kanıtlıyor. Bu yüzden $Soc(E(X^+)/X^+)$ projektif ve 2)'den $E(X^+)/X^+$ burulmasız modüldür. Yani X^+ bölünebilirdir. Standart eşlenik izomorfizmden X burulmasız modüldür. Ama X RD-düz ve böylece Sonuç 3.3.19'dan X düz modül olur. Bu bir çelişkidir. Yani X bir $tf - test$ modüldür.

Lemma 4.3.5 R bir sağ SRDP halka ama PP halka olmasın. Eğer R, (P) özelliğini sağlıyor ise

a) R sağ $Kasch$ halkadır.
b) İnjektif modüller burulmasızdır.
c) Her RD-projektif sağ R-modül bir projektif modüle gömülür.
d) R bir sol bölünebilirdir.

İspat Lemma 4.3.3'ten R bir tek projektif olmayan basit modüle sahip bir sol bölünebilir halka olur. Bu modüle V diyelim. Kabulümüzden ve Sonuç 4.2.8'den $\mathfrak{Pr}^{-1}(V) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{T}r(V)) = \mathcal{TF}$ olur. $Hom_R(V,R) \neq 0$ olur. Aksi taktirde Lemma 4.3.3'ün ispatından R sol PP halka olurdu. Bu yüzden R, sağ $Kasch$ halka yani tüm basit modüller R'ye gömülür. R $Kasch$ halka olduğundan, Lemma 3.5.5'ten herhangi E injektif modülü için V, E-altprojektif modüldür. $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{V}) = \mathcal{TF}$ olduğundan injektif modüller burulmasız modüldür. V bir RD-projektif sağ R-modül olsun. $i: V \to E(V)$ içerme dönüşümünü ve H bir serbest modül olmak üzere $p: H \to E(V)$ epimorfizmini düşünelim. V bir RD-projektif sağ R-modül ve E(V) burulmasız modül olduğundan $i = pf$ olacak şekilde $f: V \to H$ bir homomorfizma vardır. O halde f bir monomorfizmdir.

Sıfırdan farklı tekil sağ modülleri sıfır olmayan $sokullara$ $(socles)$ sahip olan halkalara sağ C-halkalar denir.

Teorem 4.3.6 R Ortogonal idempotentlerinin kümesi sonlu olmayacak şekilde bir sağ SRDP halka olsun. Eğer R $Kasch$ halka değil ise R, (P) özelliğini sağlayan bir halka olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulları sağlamasıdır.

1) R sağ kalıtsal $(hereditary)$ C-halkadır.
2) R bir tek projektif olmayan basit modüle sahiptir.

3) R bir sağ $Goldie$ ve Q^r , R'nin bir sol yarı-tam (semi-perfect) lokalizasyonudur.

İspat (⇒) Lemma 4.3.3'ten R bir tek projektif olmayan basit modüle sahip bir sol PP halkadır. Bu modüle V diyelim. Hipotezimizden $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{V}) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{T}r(V)) = \mathcal{TF}$ olur. N'nin tekil, M'nin tekilsiz $(non-singular)$ olduğu yerde, N'nin M'ye $altprojektif$ olduğunu belirtelim. O zaman Önerme 3.3.42'ten tüm burulmasız (sağ ve sol) R-modüller tekilsizdir. Şimdi, koşul (c) sağlanır çünkü teorem 3.3.41'den burulmasız modül=tekil modül. R'nin sağ C-halkası olduğunu göstermek için her sıfırdan farklı tekil sağ R-modülünün sıfırdan farklı bir sokulu olduğunu göstermek yeterlidir. H sıfırdan farklı tekil sağ R-modül olsun ama H sıfır sokula sahip olsun. O zaman N $H-altprojektif$ modül ve böylece hipotezimizden H tekilsizdir. Ama H tekil olduğundan H sıfır olmalıdır. Bu bir çelişkidir. Bu bize R'nin C-halka olduğunu söyler. Özellikle, R bir sağ C-halka ve sağ SRDP halka olduğundan her bölünebilir (ve $fp-injektif$) modül injektiftir. X herhangi bir bölünebilir modül olsun. $Soc(E(X)/X)$ projektiftir. Aksi taktirde $E(X)/X$ bir basit alt modüle sahiptir. Bu basit modüle A diyelim. $E(X)/X$ tekil olduğundan A tekildir. $E(X)$'in bir büyük alt modülü L var öyle ki $L/X \cong A$ olur. N tek olduğundan $N \cong A$ ve böylece $Ext(A,X) = 0$ olur. Böylece X, L de bir direk toplam terimi olup bu X'in L de büyük alt modül oluşuyla çelişir. Bu yüzden $Soc(E(X)/X)$ projektiftir ve böylece $Hom_R(N, E(X)/X) = 0$ olur. Ama $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\mathrm{N}) = \mathcal{TF} = \mathcal{N}$ yani $E(X)/X$ tekilsizdir. (B, A'nın alt modülü olmak üzere $Z(A/B) = 0$ ise B, A da kapalıdır. (Sandomierski, 1968)) O halde X, $E(X)$'de kapalıdır. Ancak bir injektif modülün kapalı alt modülü injektiftir ve böylece X injektif olur. Lemma 3.3.38'den dolayı R'nin bir sağ PP halka olduğunu işaret edelim. O zaman R bir PP halka ve bölünebilir modüller injektif olup Sonuç 3.3.35'ten R sağ kalıtsaldır.

(⇐) R sağ kalıtsal olduğundan Lemma 3.3.38'den bir sağ PP halkadır. Şimdi bir H modülünün burulmasız modül olması için gerek ve yeter koşul $Soc(H)$ projektif modül olmasıdır olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki H projektif olmayan sokula sahip burulmasız modül olsun. O zaman H projektif olmayan bir basit alt modüle sahiptir. Bu basit modüle N diyelim. O halde Lemma 3.3.39'dan N burulmasız modül olur. Ancak N RD-projektif yani projektif modüldür. Bu bir çelişkidir. Tersine bir H modülü için kabul edelim ki $Soc(H)$ projektif olsun. X projektif olacak şekilde bir $0 \to A \to X \to H \to 0$ kısa tam dizisi vardır. R sağ C-halka olduğundan bu dizi tam olarak kapalıdır. O zaman H tekilsiz ve teorem 3.3.41'ten burulmasızdır.

4.4 Sonlu Gösterime Sahip RD-düz Modüllerin Burulmasız veya f-test Olduğu Halkaların Karakterizasyonu

Bu alt bölümde, sonlu gösterime sahip RD-düz modüllerin burulmasız veya f-test olduğu halkaların karakterizasyonu çalışılmıştır.

Her projektif olmayan sonlu gösterime sahip RD-düz sol modülün f-test modül olduğu halkaların bu özelliğini (Q) ile gösterelim.

Önerme 4.4.1 R, (Q) özelliğini sağlayan bir sağ SRDP halka olsun. R bir tek projektif olmayan basit modüle sahiptir öyle ki R ya IF (yani injektif modüller düz modüldür.) ya da $wD(R) \leq 1$ dır.

İspat Lemma 4.3.3'ten R bir tek projektif olmayan basit modüle sahiptir. Bu modüle V diyelim. Hipotezimizden $\underline{\mathfrak{Br}}^{-1}(V) = \mathfrak{F}^{-1}(Tr(V)) = \mathcal{T}\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_R$ olur. V için iki durum söz konusudur: ya $Hom_R(V,R) = 0$ ya da $Hom_R(V,R) \neq 0$ dır. Eğer $Hom_R(V,R) \neq 0$ ise V, R'ye gömülür ve böylece Lemma 3.5.3'ten R bir sağ IF olur. Eğer $Hom_R(V,R) = 0$ ise R'nin herhangi T sağ ideal için $Hom_R(V,T) = 0$ olur. Ancak V RD-projektif yani kabulümüzden T burulmasız modül olmalıdır. Böylece $wD(R) \leq 1$ olur.

Teorem 4.4.2 R, (Q) özelliğini sağlayan bir sağ C, sol $Noetherian$ ve sağ SRDP halka olsun. O zaman R aşağıdaki iki durumdan sadece birisini sağlar:

1) R sağ $Noetherian$ ve sağ kalıtsal halka veya
2) R_1 yarı-basit ($semisimple$) artinian halka ve R_2 yerel bir QF-halkası üzerinde matris halkası olan bileşenlere ayrılmaz (indecomposable) bir halka olmak üzere $R \cong R_1 \times R_2$ olur.

İspat R sağ C ve sağ SRDP halka olduğundan her bölünebilir ($fp-injektif, m-injektif$) modül injektif olduğundan R bir sağ $Noetherian$ halkadır. Önerme 4.4.1'den R bir tek tekil basit modüle sahiptir. Bu basit sağ R-modüle N diyelim. Tekrar sonuç 4.4.3'ten R ya IF halka ya da $wD(R) \leq 1$ olur. $wD(R) \leq 1$ ise R'nin $Noetherian$ oluşundan dolayı R sağ kalıtsal halkadır. Eğer R, IF halka ise R $Noetherian$ olduğundan R öz injektif (self injective) olur. Yani teorem 3.5.7'den R, QF-halka olur. Hipotezimizden $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}$(N) projektif modüllerin sınıfı olacaktır. Yani N p-yoksul (p-indigent) olur. Bu bize teorem 3.5.9'dan dolayı R'nin 2)'i sağlandığını söyler.

Sonuç 4.4.3 R bir sağ-sol $Noetherian$ ve sağ SRDP halka olsun. Eğer R, (Q) özelliğini sağlıyorsa R_1 yarı-basit (semisimple) artinian halka ve R_2 bileşenlerine ayrılmaz bir halka olmak üzere $R \cong R_1 \times R_2$ olur. Aşağıdaki durumlardan yalnızca biri sağlanır.

1) R_2 yerel QF-halkası üzerinde matris halkasıdır.
2) R_2 asal (prime) kalıtsal halkadır.

3) R_2 bir bölüm $cebiri$ (division algebra) üzerinde bir alt üç$gensel\ matris$ halkasına Morita-eşdeğerdir.

İspat Önerme 4.4.1'den R ya IF halka ya da $wD(R) \leq 1$ olur. R bir tek projektif olmayan basit modüle sahip olsun. Bu modüle Z diyelim. Z tekil olduğundan her tekilsiz X modülü için Z X-altprojektif olduğunu göz önünde bulunduralım. O halde $\mathfrak{Pr}^{-1}(V) = \mathfrak{F}^{-1}(Tr(V)) = \mathcal{TF} = \mathcal{F}$ olduğundan tüm tekilsiz modüller düz modüldür. Kabul edelim ki $wD(R) \leq 1$ olsun. R iki yönlü notherian olduğundan R iki yönlü kalıtsal halkadır. O halde önerme 3.5.10'den düz modüller tekilsizdir. Bu bize burulmasız modüller, düz modüller ve tekilsiz modüllerin ailesinin aynı olduğunu söyler. Yani teorem 3.3.43'ten R_1 yarı-basit (semisimple) artinian halka ve R_2, 2) veya 3)'ü sağlayan bileşenlerine ayrılmaz bir halka olmak üzere $R \cong R_1 \times R_2$ olur. Eğer R, IF halka ise o zaman R sol $Noetherian$ olduğundan dolayı R, QF-halka olup bu yüzden Z, yalnızca projektif modüller için $altprojektiftir$. O zaman teorem 3.5.9'dan R_1 yarı-basit ($semisimple$) artinian halka ve R_2 yerel QF-halkası üzerinde matris halkası (yani 1) durumu sağlanıyor) olmak üzere $R \cong R_1 \times R_2$ olur.

4. BURULMASIZ MODÜLLER İÇİN TEST MODÜLLERİNİN BELİRLENMESİ

Mücahit BOZKURT

.

KAYNAKÇA

Alahmadi, A., Alkan, M., ve López-Permouth, S. (2010). Poor modules: the opposite of injectivity. Glasgow Mathematical Journal, 52(A), 7-17.

Albrecht, U., Dauns, J., ve Fuchs, L. (2005). Torsion-freeness and non-singularity over right p.p.-rings. Journal of Algebra, 285(1), 98-119.

Alhilali, H., Ibrahim, Y., Puninski, G., ve Yousif, M. (2017). When R is a testing module for projectivity ? Journal of Algebra, 484, 198-206.

Alizade, R., ve Durğun, Y. (2017). Test modules for flatness. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 137, 75-91.

Anderson, F. W., ve Fuller, K. R. (1992). Rings and categories of modules. New York: Springer-Verlag.

Atiyah, M. F., ve Macdonald, I. G. (1969). Introduction to commutative algebra. Reading: Addison-Wesley Series in Mathematics.

Auslander, M., ve Bridger, M. (1969). Stable module theory. Rhode Island: American Mathematical Soc.

Aydoğdu, P., ve Lopez-Permouth, S. R. (2011). An alternative perspective on injectivity of modules. Journal of Algebra, 338(1), 207-219.

Behboodi, M., Ghorbani, A., Moradzadeh-Dehkordi, A., ve Shojaee, S. H. (2013). C-pure projective modules. Communications in Algebra, 41(12), 4559-4575.

Bland, P. (2011). Rings and Their Modules. Berlin/New York: de Gruyter.

Büyükaşık, E., Enochs, E., García Rozas, J. R., Kafkas-Demirci, G., López-Permouth, S., ve Oyonarte, L. (2018). Rugged modules: The opposite of flatness. Communications in Algebra, 46(2), 764-779.

Cartan, H. P., ve Eilenberg, S. (1956). Homological algebra. Princeton: Princeton University Press.

Chase, S. (1960). Directd products of modules. Direct products of modules, 97, 457-473.

Chatters, A. W., ve Hajarnavis, C. R. (1980). Rings with chain conditions. Boston: Pitman Advanced Publishing Program.

Clark, J., Lomp, J., Vanaja, N., ve Wisbauer, R. (2006). Lifting modules: supplements and projectivity in module theory. Basel, Switzerland: Birkhauser Verlag AG.

Couchot, F. (2006). RD-flatness and RD-injectivity. Communications in Algebra, 34(10), 3675-3689.

Dauns, J., ve Fuchs, L. (2004). Torsion-freeness for rings with zero-divisors. Journal of Algebra and its Applications, 3(30), 221-237.

Dummit, D. S., ve Foote, R. M. (2004). Abstract algebra (Vol. 3). Danvers: Wiley.

Durğun, Y. (2015). Rings whose modules have maximal or minimal subprojectivity domain. Journal of Algebra and Its Applications, 14(06), 1550083.

Durğun, Y. (2016). An alternative perspective on flatness of modules. Journal of Algebra and Its Applications, 15(08), 1650145.

Eklof, P. C., ve Trlifaj, J. (2001). How to make Ext vanish. Bulletin of the London Mathematical Society, 33(1), 41-51.

Enochs, E. E., ve Jenda, O. M. (2000). Relative homological algebra. Berlin: Walter de Gruyter.

Fuchs, L., ve Salce, L. (2001). Modules over Non-noetherian Domains. Providence: American Mathematical Society.

Goodearl, K. R., ve Warfield Jr, R. B. (2004). An introduction to noncommutative Noetherian rings. New York: Cambridge university press.

Hattori, A. (1960). A foundation of torsion theory for modules over general rings. Nagoya Mathematical Journal, 17, 147-158.

Hazewinkel, M., ve Gubareni, N. (2017). Algebras, rings and modules: non-commutative algebras and rings. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Holston, C., López-Permouth, S. R., ve Ertaş, N. O. (2012). Rings whose modules have maximal or minimal projectivity domain. Journal of Pure and Applied Algebra, 216(3), 673-678.

Holston, C., López-Permouth, S. R., Mastromatteo, J., ve Simental-Rodríguez, J. E. (2015). An alternative perspective on projectivity of modules. Glasgow Mathematical Journal, 57(1), 83-99.

Hungerford, T. W. (1974). Algebra. New York: Springer-Verlag.

Jensen, C. U., ve Lenzing, H. (1989). Model theoretic algebra with particular emphasis on fields, rings, modules (Vol. 2). CRC Press.

Lam, T. Y. (1999). Lectures on modules and rings. New York: Springer-Verlag.

Mao, L. (2011). Properties of RD-projective and RD-injective modules. Turkish Journal of Mathematics, 35(2), 187-205.

Mao, L., ve Ding, N. (2008). On divisible and torsionfree modules. Communications in Algebra, 36(2), 708-731.

Moradzadeh-Dehkordi, A., ve Shojaee, S. H. (2017). Rings in which every ideal is pure-projective or FP-projective. Journal of Algebra, 478, 419-436.

Roman, S. (2005). Advanced linear algebra. New York: Springer.

Rotman, J. (1979). An introduction to homological algebra. New York: Academic Press.

Sandomierski, F. L. (1968). Nonsingular rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 19(1), 225-230.

Skljarenko, E. G. (1978). Relative homological algebra in the category of modules. Russian Mathematical Surveys, 33(3), 97-137.

Trlifaj, J. (1996). Whitehead test modules. Transactions of the American Mathematical Society, 348(4), 1521-1554.

Trlifaj, J., ve Göbel, R. (2006). Approximations and endomorphism algebras of modules. Berlin: De Gruyter.

Warfield, R. (1969). Purity and algebraic compactness for modules. Pacific Journal of Mathematics, 28(3), 699-719.

ÖZGEÇMİŞ

Mücahit BOZKURT. Lise öğrenimini Akif Palalı Anadolu Lisesinde tamamladı. 2015'te başladığı Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2019'da mezun oldu. 2019 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2022 yılında Manisa Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı.