XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 8-12 Eylül 2003, GAZİANTEP

VİSKOELASTİK HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Faruk Fırat Çalım ve Beytullah Temel
ÇÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana
e-mail: fcalim@cu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında davranışı Laplace uzayında incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de gözönüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, izotrop ve lineer viskoelastik kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda, mütekabiliyet prensibine göre, Laplace uzayında malzeme sabitleri kompleks karşıtları ile yerdeğiştirilmektedir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Çözümlerde Kelvin modeli uygulanmıştır. Elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmektedir. Viskoelastik modelin kuazi-statik ve dinamik davranışı için sayısal sonuçlar grafik formda sunulmuştur.

ABSTRACT

In this study, the dynamic behaviour of cylindrical helical rods made of linear viscoelastic materials under time-dependent loads are investigated in the Laplace domain. The governing equations for naturally twisted and curved spatial rods obtained using the Timoshenko beam theory are rewritten for cylindrical helical rods. The curvature of the rod axis, effect of rotary inertia and, shear and axial deformations are considered in the formulation. The material of the rod is assumed to be homogeneous, isotropic and linear viscoelastic. In the viscoelastic material case, according to the correspondence principle, the material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically with the aid of the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem. In the solutions, Kelvin model is employed. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. Numerical results for quasi-static and dynamic response of viscoelastic models are presented in the form of graphics.

1. GİRİŞ

Eğri eksenli ve helisel çubukların dinamik davranışı önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Helisel çubuklar, helisel merdivenler gibi yapı elemanı, araç süspansiyon sistemi ve araç sübop yayı gibi makina elemanı olarak kullanılmaktadır. Mühendislik problemlerinin analizlerinde, basitliği nedeniyle, malzemenin elastik olduğu kabulü yapılmaktadır. Gerçekte ise bu malzemelerin hemen hepsi, bünyelerindeki iç sürtünmeden dolayı az veya çok viskoelastik özelliğe sahiptir. Dolayısı ile malzeme davranışının doğru yansıtılması bakımından viskoelastik bünye bağıntısı, elastik bünye bağıntısından daha gerçekçi olmaktadır. Birçok araştırmacı, çeşitli modeller kullanarak viskoelastik malzemelerin dinamik davanışını incelemişlerdir.

Flügge [1], viskoelastik kirişlerin Laplace dönüşüm uygulamalarını incelemiştir. Kıral ve ark. [2], eğri eksenli viskoelastik çubukların hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Fakat bu problemi etkin olarak çözememişlerdir. Analizlerde taşıma matrisi metodunu kullanmışlardır. Ters Laplace dönüşümü için Maximum Degree of Precision yöntemini kullanmışlar, ki bu yöntem çok kısa zaman aralığı için doğru sonuç vermektedir. Findley ve ark. [3], viskoelastik kirişleri idare eden denklemleri çözmek için mütekabiliyet prensibi ve süperpoziyon prensibini kullanmışlardır. Christensen [4], Fourier dönüşümü kullanarak viskoelastik kirişlerin dinamik davranışını incelemiştir. Kompleks geometri ve bünye bağıntılarının kapalı çözümü mümkün olmadığından, sayısal çözüm tekniklerini adapte etmiştir.

Kompleks geometriler için, birçok araştırmacı tarafından sonlu eleman uygulamaları sunulmuştur. White [5], kuazi-statik bir problemi sonlu elemanlar yöntemiyle çözebilmek için, zamana bağlı terimlere sonlu farklar yaklaşımı uygulayarak, Hereditary integral tipinde bünye bağıntılarını kullanmıştır. Addey ve Brebbia [6], ortak elastik problemin ters dönüşümünü elde etmek için yaklaşık bir yöntem kullanmışlardır. Chen ve Lin [7], viskoelastik malzeme modeli için zamana bağlı sünme ifadesini kullanarak kirişlerin dinamik davranışlarını çalışmışlardır. Yamada ve ark. [8], viskoelastik kiriş ve çubukların doğal frekanslarını incelemişlerdir.

Chen [9], lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin kuazi-statik ve dinamik davranışını incelemiştir. Formülasyonda Poisson oranı sabit, sadece elastisite modülü viskoelastik olarak alınmıştır. Normal gerilme-şekil değiştirme ve kayma gerilmesi-şekil değiştirme bağıntılarını aynı Prony serisine açmıştır. Laplace dönüşümü yardımıyla zaman terimini yok etmek için Hybrid metodunu kullanmış ve ortak denklemleri sonlu elemanlar ile çözmüştür. Aköz ve Kadıoğlu [10], Gâteaux diferansiyeli kullanarak elastik dairesel kirişler için karışık sonlu elemanlar yöntemini incelemişlerdir. Benzer bir yaklaşım kullanarak, Aköz ve Kadıoğlu [11], viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişinin kuazi-statik ve dinamik davranışını çalışmışlardır. Kadıoğlu ve Aköz [12], hem Poisson oranı hem de elastisite modülünü viskoelastik alarak dairesel kirişlerin kuazi-statik ve dinamik davranışı için gevşeme modülünün genel formunu incelemişlerdir. İdare eden denklem ve sınır şartlarındaki zamana bağlı türevlerden kurtulmak için Laplace–Carson dönüşümünü kullanmışlardır. Ilyasov ve Aköz [13], plakların statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Viskoelastik bünye denklemlerini Boltzmann-Volterra formunda ifade etmişlerdir.

Park ve Schapery [14], Prony serilerine dayanan lineer viskoelastik malzeme fonksiyonları ile modülleri arasında dönüşümü sağlayan sayısal bir metot önermişler ve bu metodu polimerik malzemeler için seçilen deneysel verileri kullanarak test etmişlerdir. Schapery ve Park [15], bir önceki çalışmalarında önerdikleri modelin doğruluğunu sayısal

örnekler üzerinde göstermişlerdir. Park [16], viskoelastik sönümleyicilerin matematiksel modeli için farklı yaklaşımları incelemiş ve diğer teorik yöntemlerle kıyaslamıştır.

Kim ve Kim [17], periyodik yük altında tabakalı kirişlerin parametrik kararsızlığını çalışmışlardır. Lineer viskoelastik bünye denklemleri için Boltzmann süperpozisyonu ile Hamilton prensibini kullanarak idare eden denklemleri elde etmişlerdir.

Yukarıda bahsedildiği gibi, viskoelastik modeller doğru eksenli çubuklar, plaklar ve kabuklar gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte, yazarların bilgisine göre, helisel çubukların viskoelastik analizi ile ilgili yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bu araştırmada, helisel çubukların viskoelastik analizi için etkin bir yöntemin uygulaması hazırlanacaktır.

Bu çalışmada, viskoelastik helisel çubukların zamana bağlı yükler altında kuazi-statik ve dinamik davranışları Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak uzaysal eğri eksenli çubukları idare eden denklemler, silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Viskoelastik malzeme durumunda, mütekabiliyet prensibine göre, Laplace uzayında malzeme sabitleri kompleks karşıtları ile yerdeğiştirilmektedir. Formülasyonda hem Poisson oranı hem de elastisite modülünün kompleks karşıtları kullanılmaktadır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak [18] problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [19-21] kullanılmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi yüzlerce eleman ile tanımlamak gerekirken, önerilen bu yöntemde sadece birkaç elemanla tanımlayarak istenilen hassasiyette kesin sonuçlar elde edilmektedir. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler de tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla Laplace uzayında istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir. Helisel çubukların elastik-statik, kuazi-statik, elastik-dinamik ve viskoelastik-dinamik davranışları için sayısal sonuçlar grafik formda sunulmuştur.

2. ÇUBUK GEOMETRİSİ

Tabii olarak eğilmiş ve burulmuş uzaysal narin bir çubuğu gözönüne alalım. Çubuk ekseni, geometrik merkezi G'nin yörüngesi olarak tanımlanır. t=0 anındaki durum vektörü $\mathbf{r}^{\circ}=\mathbf{r}^{\circ}(s, 0)$ olarak verilir (Şekil 1.a). Herhangi bir t anında, çubuk ekseninin orijini ile **t**, **n**, **b** birim vektörleri olarak tanımlanan bir hareketli koordinat takımı seçilmiştir.

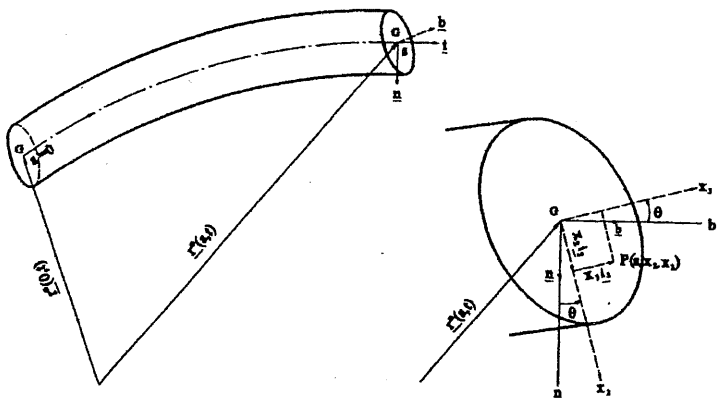
$$\mathbf{t}=\frac{\partial \mathbf{r}^{\circ}(s,t)}{\partial s} \tag{1}$$

Burada **t**, **n** ve **b** sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektör olarak tanımlanır. **t**, **n**, **b** birim vektörleri arasındaki diferansiyel bağıntılar Frenet formülleri [22] ile verilmektedir.

$$\partial \mathbf{t}/\partial s=\chi \mathbf{n}\ ,\quad \partial \mathbf{n}/\partial s=\tau \mathbf{b}-\chi \mathbf{t}\ ,\quad \partial \mathbf{b}/\partial s=-\tau \mathbf{n} \tag{2}$$

Burada, χ ve τ eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır. x_1 ekseni kesitin **t** doğrultusu ve x_2, x_3 kesitin asal eksenleri olmak üzere, ikinci bir dik takım (x_1, x_2, x_3) seçilmektedir (Şekil 1.b). $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ ve $\mathbf{i}_3$ birim vektörleri sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 eksenleri üzerindedir. (Şekil 1.b)'den (3) ifadesi yazılabilir.

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}_1\,, \qquad \mathbf{n} = \mathbf{i}_2\cos\theta - \mathbf{i}_3\sin\theta\,, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{i}_2\sin\theta + \mathbf{i}_3\cos\theta \tag{3}$$



(a) (b)

Şekil 1. Çubuk geometrisi

3. HAREKET DENKLEMLERİ

Çubuk ekseni üzerinde herhangi bir s noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^o(s, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\boldsymbol{\Omega}^o(s, t)$ olarak gösterilsin. Ayrıca, çubuk ekseni üzerinde birim boyun rölatif uzaması $\boldsymbol{\gamma}^o(s, t)$ ve rölatif dönmesi $\boldsymbol{\omega}^o(s, t)$ olarak tanımlanır.

$\mathbf{T}(s, t)$ vektörü ile t anında s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(s, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(s, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(s, t)$ olsun.

Yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile, geometrik uygunluk ve hareket denklemleri [23] ile verilmektedir.

$$\boldsymbol{\gamma}^o = \frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial s} + \mathbf{t}\times\boldsymbol{\Omega}^o, \quad \boldsymbol{\omega}^o = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^o}{\partial s} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial s} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{p}^{(in)}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial s} + \mathbf{t}\times\mathbf{T}^o + \mathbf{m}^{(ex)} = \mathbf{m}^{(in)} \tag{5}$$

$\mathbf{p}^{in}$ kütlesel atalet kuvveti ve $\mathbf{m}^{in}$ kütlesel atalet momenti

$$p_i^{(in)} = -\rho A\frac{\partial^2 U_i^o}{\partial t^2}, \quad m_i^{(in)} = -\rho I_i\frac{\partial^2 \Omega_i^o}{\partial t^2} \qquad (i = t,\ n,\ b) \tag{6}$$

olmak üzere burada ρ, kütlesel yoğunluğu göstermektedir.

Çubuk kesitinin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı, normal ve binormal eksenlerin asal eksen olduğu, kesit çarpılmasının ihmal edildiği ve çubuk malzemesinin homojen, izotrop ve lineer elastik kabulü ile bünye ifadesi (7) denklemi ile verilmektedir.

$$T_i^o = A_{ij}\,\gamma_j^o, \qquad M_i^o = D_{ij}\,\omega_j^o \qquad (i, j = \mathrm{t, n, b}) \tag{7}$$

A_{ij} çubuğun eksenel ve kayma rijitliğini, D_{ij} ise çubuğun burulma ve eğilme rijitliğinis göstermektedir.

$$[A] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix}, \qquad [D] = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \tag{8}$$

A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörüdür. I_t burulma ve I_n, I_b ise eğilme atalet momentleridir. Analizlerde α_n ve α_b Reissner düzeltme faktörü 6/5 alınmıştır.

Yerdeğiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile geometrik uygunluk ve hareket denklemleri elde edilmektedir. Ayrıca, kesitin en büyük boyutu, eğrilik yarıçapı ve çubuk ekseninin burulması yanında çok küçüktür. Kesit çarpılmasının etkisi ihmal edilmektedir.

Çubuk malzemesinin bünyesine bakılmaksızın, geometrik uygunluk (4) ve hareket denklemleri (5) geçerlidir. Böylece, $\mathbf{U}^o$, $\mathbf{\Omega}^o$, $\mathbf{T}^o$, $\mathbf{M}^o$, $\boldsymbol{\gamma}^o$, $\boldsymbol{\omega}^o$ olmak üzere altı vektörel bilinmeyen ve dört vektörel denklem vardır. Bu bilinmeyenlerin hesaplanması için gerekli olan iki denklem, bünye denklemleridir.

4. HAREKET DENKLEMLERİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Zorlanmış titreşim durumu için, $\mathbf{Y}(s, t)$ kolon matrisi

$$\mathbf{Y}(s,t)=\left\{U_t^o,\ U_n^o,\ U_b^o,\ \Omega_t^o,\ \Omega_n^o,\ \Omega_b^o,\ T_t^o,\ T_n^o,\ T_b^o,\ M_t^o,\ M_n^o,\ M_b^o\right\}^T \qquad (9)$$

olarak tanımlanmaktadır. (9) denklemlerinin zamana göre Laplace dönüşümü,

$$\overline{\mathbf{Y}}(s,z)=L\left[\mathbf{Y}(s,t)\right] \qquad (10)$$

olup burada Laplace dönüşüm parametresi z kompleks bir sayıdır. Laplace dönüşüm uzayında elde edilen birinci mertebeden oniki adet adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{Y}}(s,z)}{\mathrm{d}\,s}=\overline{\mathbf{F}}(s,z)\overline{\mathbf{Y}}(s,z)+\overline{\mathbf{B}}(s,z) \qquad (11)$$

$\overline{\mathbf{F}}(s,z)$ katsayılar matrisinin bazı elemanlarında bulunan ikinci türev ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınırsa

$$L\left[\rho A\frac{\partial^2 U_k^\circ}{\partial t^2}\right]=\rho A\left[z^2\overline{U}_k^\circ-zU_k^\circ(s,0)-\frac{\partial U_k^\circ(s,0)}{\partial t}\right]$$

$$L\left[\rho I_k\frac{\partial^2 \Omega_k^\circ}{\partial t^2}\right]=\rho I_k\left[z^2\overline{\Omega}_k^\circ-z\Omega_k^\circ(s,0)-\frac{\partial \Omega_k^\circ(s,0)}{\partial t}\right] \qquad (k=t,\ n,\ b) \qquad (12)$$

olur. (12) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anında verilen başlangıç şartlarıdır. $\overline{\mathbf{B}}(s,z)$ kolon matrisinin elemanları (13) denkleminde verilmiştir.

$$\overline{B}_i(s,z)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ 6)$$

$$\overline{B}_{6+j}(s,z)=-\left(\overline{p}_k^{(ex)}\right)-\rho A\left[zU_k^\circ(s,0)+\frac{\partial U_k^\circ(s,0)}{\partial t}\right] \qquad (j=1,\ 2,\ 3) \qquad (13)$$

$$\overline{B}_{9+j}(s,z)=-\left(\overline{m}_k^{(ex)}\right)-\rho I_k\left[z\Omega_k^\circ(s,0)+\frac{\partial \Omega_k^\circ(s,0)}{\partial t}\right] \qquad (k=t,\ n,\ b)$$

(12) ifadesinde görülen başlangıç şartları, $\overline{\mathbf{B}}(s,z)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

5. SÖNÜM ETKİSİ

Kelvin viskoelastik modelinin bünye ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir [24].

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} + g\frac{d\,e_{ij}}{d\,t}) \tag{14}$$

Burada, G kayma modülü ve g viskoz sönüm oranıdır. s_{ij} deviatorik gerilme tansörü ve e_{ij} deviatorik şekil değiştirme tansörü, gerilme σ_{ij} ve şekil değiştirme ε_{ij} tansörünün bileşenleri cinsinden yazılabilir.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{kk}\ , \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \tag{15}$$

Burada δ_{ij} birim matrisin bileşenleridir. Laplace dönüşüm uzayında elastik sabitler G ve λ (Lamè sabiti), mütekabiliyet prensibine göre [24],

$$G_v = G(1 + g\,z)\,, \qquad \lambda_v = \lambda + \frac{2}{3}(G - G_v) \tag{16}$$

kompleks karşıtları alınmakta ve elastik sabitler E ve ν,

$$E_v = \frac{E(1+g\,z)}{1+\dfrac{(1-2\nu)}{3}g\,z}, \qquad \nu_v = \frac{3\nu-(1-2\nu)g\,z}{3+(1-2\nu)g\,z} \tag{17}$$

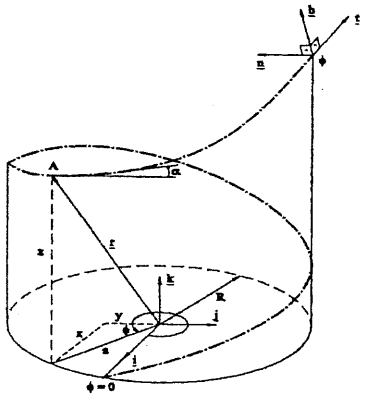
E_v ve ν_v, viskoelastik malzeme sabitleri ile yerdeğiştirilmektedir.

6. ÖZEL DURUM

Helisel çubuklar, eğri eksenli uzaysal çubukların özel durumu olarak ele alınmıştır. Helisin parametrik denklemi [18] ile verilmektedir (Şekil 2).

$$x = a\cos\phi\ ,\ y = a\sin\phi\ ,\ z = h\phi \tag{18}$$

Burada, ϕ helisi çevreleyen silindirin taban dairesinde x-ekseninden itibaren ölçülen açıdır.



Şekil 2. Silindirik helisin geometrisi

Helis üzerinde çok küçük bir eleman uzunluğu için

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}\ ,\ \mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\phi\ ,\ \cos\alpha = \frac{a}{c}\ ,\ \sin\alpha = \frac{h}{c} \tag{19}$$

tarifleri yapılmaktadır. Burada, α ve a sırasıyla yükselme açısı ve helisin sarıldığı silindirin yarıçapıdır. Silindirik helisel yayın eğrilikleri ise

$$\chi = \frac{a}{c^2} = \text{sabit} \ , \ \tau = \frac{h}{c^2} = \text{sabit} \tag{20}$$

şeklindedir. Hareketli koordinat takımı (**t**, **n**, **b**) ile ortak koordinat takımı (**i**, **j**, **k**) arasında aşağıdaki ilişki vardır (Şekil 2).

$$\{V\}_{tnb} = [B]\{V\}_{ijk} \quad \begin{Bmatrix} V_t \\ V_n \\ V_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a/c)\sin\phi & (a/c)\cos\phi & (h/c) \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ (h/c)\sin\phi & -(h/c)\cos\phi & (a/c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix} \tag{21}$$

V_i, V_j, V_k ortak koordinat takımında V_t, V_n, V_b ise hareketli koordinat takımında herhangibir vektörün bileşenleridir. Laplace uzayında boyutsuzlaştırma parametreleri (22) ifadeleri ile tanımlanmaktadır.

$$\overline{U}_i = \frac{1}{c}U_i^o \ , \ \overline{\Omega}_i = \Omega_i^o \ , \ \overline{T}_i = \frac{c^2}{EI_n}T_i^o \ , \ \overline{M}_i = \frac{c}{EI_n}M_i^o \quad (i = \text{t, n, b}) \tag{22}$$

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse **n, b** eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli viskoelastik çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler, dönüşmüş uygunluk denklemi (4), dönüşmüş bünye denklemleri (7) ile birlikte dönüşmüş hareket denklemleri (5) kullanılarak elde edilmektedir. Sonuç olarak (19), (20) ve (22) ifadeleri yardımı ile silindirik helisel çubukları idare eden denklemler kanonik formda aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{d\overline{U}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\overline{U}_n + \frac{EI_n}{E_v Ac^2}\overline{T}_t \tag{23a}$$

$$\frac{d\overline{U}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\overline{U}_t + \frac{h}{c}\overline{U}_b + \overline{\Omega}_b + \frac{\alpha_n EI_n}{G_v Ac^2}\overline{T}_n \tag{23b}$$

$$\frac{d\overline{U}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\overline{U}_n - \overline{\Omega}_n + \frac{\alpha_b EI_n}{G_v Ac^2}\overline{T}_b \tag{23c}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\overline{\Omega}_n + \frac{EI_n}{G_v I_t}\overline{M}_t \tag{23d}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\overline{\Omega}_t + \frac{h}{c}\overline{\Omega}_b + \frac{E}{E_v}\overline{M}_n \tag{23e}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\overline{\Omega}_n + \frac{EI_n}{E_v I_b}\overline{M}_b \tag{23f}$$

$$\frac{d\overline{T}_t}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_t + \frac{a}{c}\overline{T}_n + \overline{B}_7 \tag{23g}$$

$$\frac{d\overline{T}_n}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_n - \frac{a}{c}\overline{T}_t + \frac{h}{c}\overline{T}_b + \overline{B}_8 \tag{23h}$$

$$\frac{d\overline{T}_b}{d\phi} = \frac{\rho Ac^4 z^2}{EI_n}\overline{U}_b - \frac{h}{c}\overline{T}_n + \overline{B}_9 \tag{23i}$$

$$\frac{d\overline{M}_t}{d\phi} = \frac{\rho I_t c^2 z^2}{EI_n}\overline{\Omega}_t + \frac{a}{c}\overline{M}_n + \overline{B}_{10} \tag{23j}$$

$$\frac{d\overline{M}_n}{d\phi} = \frac{\rho c^2 z^2}{E}\overline{\Omega}_n + \overline{T}_b - \frac{a}{c}\overline{M}_t + \frac{h}{c}\overline{M}_b + \overline{B}_{11} \tag{23k}$$

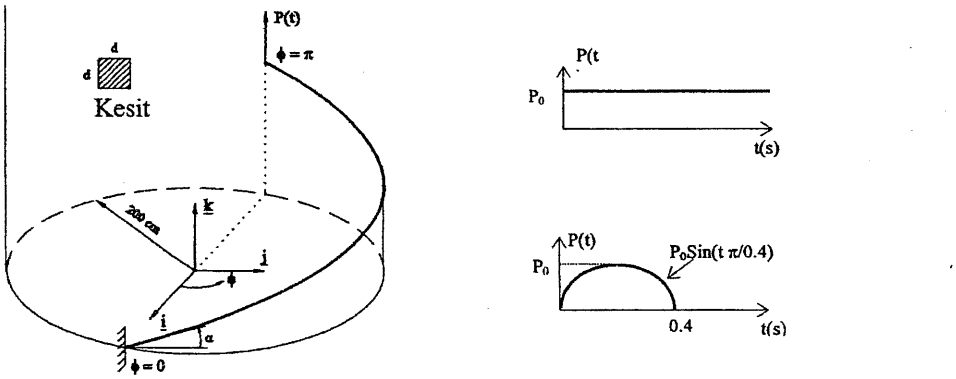
$$\frac{d\overline{M}_b}{d\phi} = \frac{\rho I_b c^2 z^2}{EI_n}\overline{\Omega}_b - \overline{T}_n - \frac{h}{c}\overline{M}_n + \overline{B}_{12} \tag{23l}$$

Çubuğun geometrisine bakılmaksızın, helislerin davranışı dört ayrı durum için incelenecektir. Bu durumlar: statik yük, elastik malzeme; statik yük, viskoelastik malzeme (kuazi-statik); dinamik yük, elastik malzeme; dinamik yük, viskoelastik malzeme. Çubuk malzemesinin elastik veya viskoelastik olduğuna bakılmaksızın, statik yükleme durumunda (23g-l) denklemlerindeki kütlesel yoğunluk içeren terimler sıfır alınmaktadır. Çubuk malzemesi viskoelastik olduğu durumda, (16) ve (17) ifadelerinde görüldüğü gibi, elastik malzeme sabitleri viskoelastik karşıtları ile yerdeğiştirilmektedir.

7. SAYISAL UYGULAMALAR

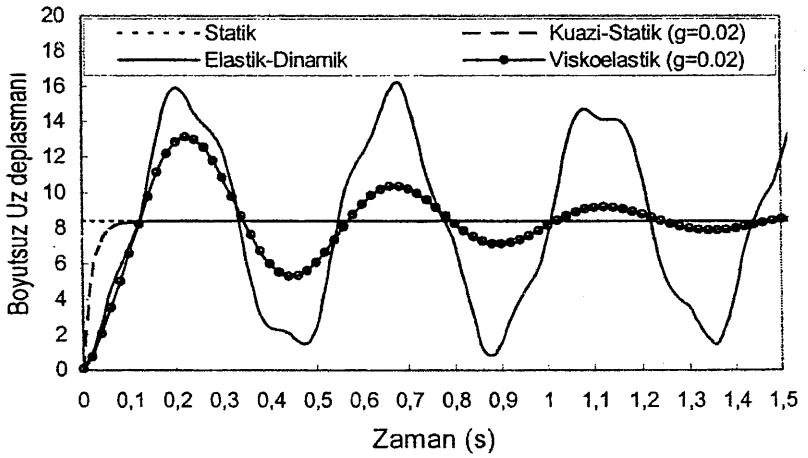
Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış zamana bağlı yükler altında silindirik helisel çubukların kuazi-statik ve dinamik analizini yapan FORTRAN dilinde genel amaçlı bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runga-Kutta algoritması [25] uygulanmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [19, 20] kullanılmıştır.

Örnek Helisel konsol bir çubuk gözönüne alınmıştır. Bu örnekte kullanılan parametreler, elastik malzeme için [18]'de kullanılan değerlerdir. Malzeme ve geometrik özellikleri: d=12 cm, $\alpha=25.52^{\circ}$, a=200 cm, $E=2.06\text{x}10^{11}$ N/m^2, $\rho=7850$ kg/m^3 ve $\nu=0.3$ (Şekil 3). Konsol helisin serbest ucuna düşey doğrultuda, $P_o=10^6$ N şiddetinde dinamik tekil yük uygulanmıştır. Hesaplarda zaman artımı olarak 0.02 s alınmıştır.

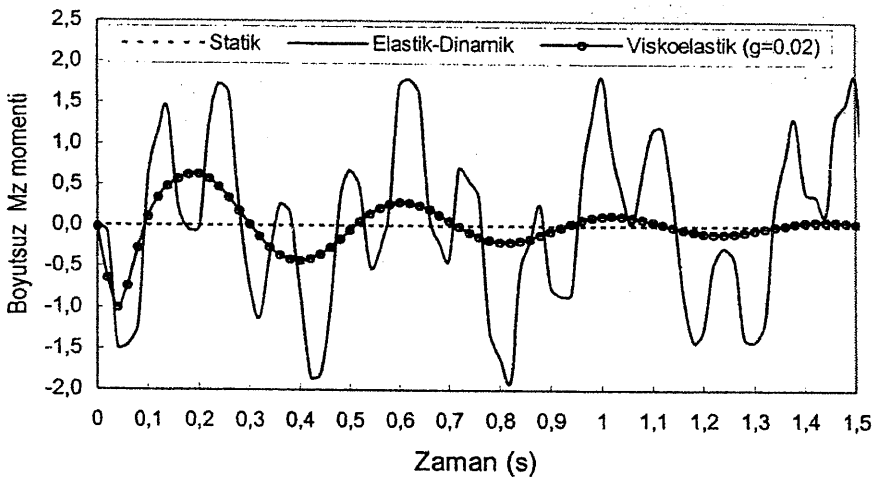


Şekil 3. Konsol helisel çubuk ve dinamik yük tipleri

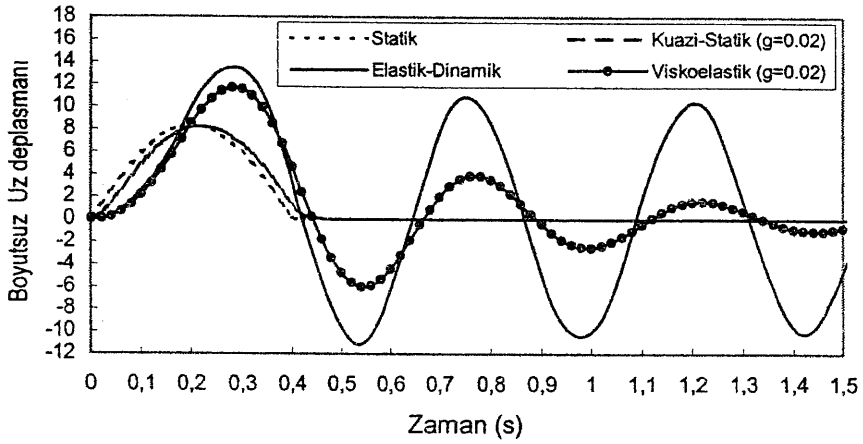
Çeşitli yükleme durumları için serbest uçtaki boyutsuz düşey deplasman ve ankastre uçtaki boyutsuz moment grafik formda gösterilmiştir (Şekil 4.a,b ve Şekil 5.a,b).



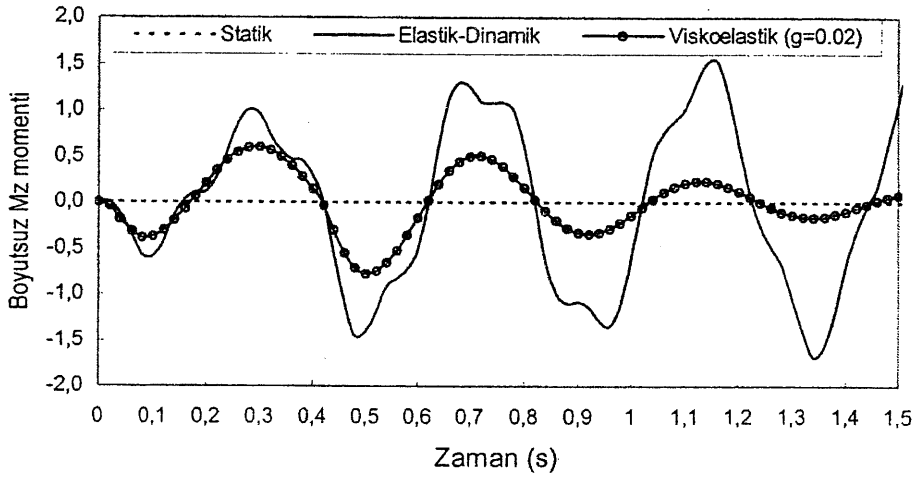
Şekil 4.a Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasman



Şekil 4.b Adım tipi yük altında ankastre uçtaki Mz momenti



Şekil 5.a Sinüzoidal impulsif yük altında serbest uçtaki düşey deplasman



Şekil 5.b Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki Mz momenti

Şekiller çeşitli sönüm oranları için statik, kuazi-statik, elastik-dinamik ve viskoelastik durumları içermektedir. Kuazi-statik davranış zamanla statik duruma yaklaşmaktadır. Viskoelastik malzeme durumunda dinamik davranış belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine yaklaşmaktadır. Statik yükleme altında Mz momenti sıfırdır. Bununla birlikte, dinamik yükleme halinde Mz, atalet kuvvetlerinden dolayı sıfırdan farklı değerler almaktadır (Şekil 4.b ve Şekil 5.b).

8. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların Laplace uzayında kuazi-statik ve dinamik davranışları etkin bir yöntem kullanarak incelenmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda, mütekabiliyet prensibine göre, malzeme sabitleri Laplace uzayında kompleks karşıtları ile yerdeğiştirilmektedir. Formülasyonda hem Poisson oranı hem de elastisite modülünün kompleks karşıtları kullanılmıştır.

Dinamik rijitlik matrisi, Laplace uzayında kanonik formdaki diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak hesaplanmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip fiziksel problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Tamamlayıcı fonksiyonlara dayalı çözüm yapmanın diğer bir avantajı da, değişken kesit ve geometriye sahip helisel çubukların çözümünün yapılabilmesidir. Uygun integrasyon adım aralığı seçilerek, tamamlayıcı fonksiyonlar yardımıyla diferansiyel denklemler istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir.

Viskoelastik malzeme bünyesi için Kelvin modeli kullanılarak silindirik helisel çubukların kuazi-statik ve dinamik davranışı araştırılmıştır. Viskoelastik helisel çubukların dinamik davranışı belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine ulaşmaktadır. Statik davranışa ulaşma zamanı sönüm oranı ile orantılıdır. Viskoelastik malzeme halinde sönüm etkisi, dinamik davranışın pik değerini azaltacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Flügge, W., "Viscoelasticity" 2nd edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

[2] Kıral, E., Tokdemir, T., and Ural, S., "Transient Response of an Elastic or/and Viscoelastic Curved Rod under Arbitrary Time Dependent Loading" METU Journal of Pure and Applied Sciences 9, 63-86, 1976.

[3] Findley, W.N., Lai, J.S., and Onaran, K., "Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Material" North-Holland, New York, pp. 109, 1976.

[4] Christensen, R.M., "Theory of Viscoelasticity" 2nd edition, Academic Press, New York, pp. 24, 1982.

[5] White, J.L., "Finite Element in Linear Viscoelasticity" Proceeding 2nd Conferance On Matrix Method in Structural Mechanics AFFDL-TR-68-150, 489-516, 1986.

[6] Adey, R.A., and Brebbia, C.A., "Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problem" Journal of Engineering Mechanics Division- ASCE 99, 1119-1127, 1973.

[7] Chen, W.H., and Lin, T.C., "Dynamic Analysis of Viscoelastic Structure Using Incremental Finite Element Method" Computers and Structures 4, 271-276, 1982.

[8] Yamada, Y., Takabatake, H., and Sato, T., "Effect of Time Dependent Material Properties or Dynamic Response" International Journal for Numerical Methods in Engineering 8, 403-414, 1974.

[9] Chen T., "The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams" International Journal for Numerical Methods in Engineering 38, 509-522, 1995.

[10] Aköz, A.Y., and Kadıoğlu, F., "The Mixed Finite Element Solutions of Circular Beam on Elastic Foundation" Computers and Structures 60(4), 643-651, 1996.

[11] Aköz, A.Y., and Kadıoğlu, F., "The Mixed Finite Element Method for the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams" International Journal for Numerical Methods in Engineering 44, 1909-1932, 1999.

[12] Kadıoğlu, F., and Aköz, A.Y., "The Mixed Finite Element Method for the Dynamic Analysis of Viscoelastic Circular Beams" Fourt International Conference on Vibration Problems, Calcutta-India, November 27-30, pp. 40-52, 1999.

[13] Ilyasov, M.H., and Aköz, A.Y., "The Vibration and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates" International Journal of Engineering Sciences 38, 695-714, 2000.

[14] Park, S.W., and Schapery, R.A., "Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Function. Part I-A Numerical Method Based on Prony Series" International Journal of Solids and Structures 36, 1653-1675, 1999.

[15] Schapery, R.A., and Park, S.W., "Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Function. Part II- An Approximate Analytical Method" International Journal of Solids and Structures 36, 1677-1699, 1999.

[16] Park, S.W., "Analytical Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural and Vibration Control" International Journal of Solids and Structures 38, 8065-8092, 2001.

[17] Kim, T.W., and Kim, J.H., "Parametric Instability of a Cross-Ply Laminated Beam with Viscoelastic Properties under a Periodic Force" Composite Structures 51, 205-209, 2001.

[18] Temel, B., and Çalım, F. F., "Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads" Journal of Applied Mechanics-ASME 70(2), 281-291, 2003.

[19] Durbin, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method" Computer Journal 17, 371-376, 1974.

[20] Narayanan, G.V., "Numerical Operational Methods in Structural Dynamics" Ph.D. thesis, University. of Minnesota, Minneapolis, Minn, 1979.

[21] Yerli, H.R., Temel, B., and Kıral, E., "Transient infinite elements for 2D soil-structure interaction analysis" Journal of Geotecnical Geoenviromental Engineering 124/10, 976-988, 1998.

[22] Sokolnikoff, I.S., and Redheffer, R.M., "Mathematics of Physics and Modern Engineering" Tokyo : McGraw-Hill, 1958.

[23] Kıral, E., and Ertepınar, A., "Studies on elastic rods subject to diverse external agencies- Part III Vibrational analysis of space rods" METU Journal of Pure and Applied Science, 7(1), 55-69, 1974.

[24] Boley, B.A., and Weiner, J.H., "Theory of Thermal Stresses" John Wiley & Sons, New York, 1960.

[25] Chapra, S.C., and Canale, R.P., "Numerical Methods for Engineers" McGraw-Hill, Third edition, 1998.