D2

İMO Teknik Dergi, 1997 1343–1362, Yazı 99

Dinamik Yapı-Zemin Etkileşimi Problemlerinin Sonlu ve Sonsuz Elemanlar İle Çözümü

Beytullah TEMEL*
Hüseyin R. YERLİ**
Erhan KIRAL***

ÖZ

İki boyutlu veya eksenel dönel simetrik yapı-zemin etkileşimi problemleri, yakın bölgelerde standart sonlu ve uzak bölgelerde sonsuz eleman kullanılarak analiz edilmektedir. Zamanla değişen keyfi yükleme halleri ele alınmakta ve formülasyon Laplace dönüşüm uzayında yapılmaktadır. Uygun bir sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına geçilmektedir. FORTRAN dilinde hazırlanan programlar ile çözülen örneklere ait sonuçların literatürde mevcut çözümlere yakın olduğu gösterilmiştir.

ABSTRACT

2-Dimensional or axially symmetric soil-structure interaction problems are analysed by discretizing the near field with standart finite elements and the far field with infinite elements. Arbitrary transient loadings are considered and formulation is performed in the Laplace transform domain. Solution is then obtained in the time domain by an appropriate numerical inverse Laplace transformation method. Solutions of several example problems obtained by the present formulation are shown to be in a good agreement with those available in the literature.

Not : Bu yazı
- Yayın Kurulu'na 14.6.1996 günü ulaşmıştır
- 30 Nisan 1997 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* Arş.Gör.Dr. Ç.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, ADANA
** Arş.Gör. Ç.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, ADANA
*** Prof.Dr. Ç.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, ADANA

1. GİRİŞ

Makina temelleri, hareketli trafik yükleri, zemin sıkıştırmaları gibi inşaat aktiviteleri sebebi ile, yer yüzeyinde meydana gelen titreşim zemin içinde yayılan çeşitli tipte dalgalar oluşturmaktadır. Titreşim kaynağı yakınında yüksek olan genlikler, geometri ve malzeme sönümleri nedeni ile, kaynaktan uzaklaştıkça azalmaktadır. Böylece, yüzeyden gelen etkiler zemin içinde belli bir derinliğe gömülü olarak inşa edilen yapılarda, tabii olarak küçülmektedir.

Yeraltı iletişim hatları, tüneller, kanalizasyonlar, hassas aletlerin yerleştirildiği kanallar, yüksek dozlu radyoaktif artıkların depolanması gibi çeşitli nedenlerle yeraltı yapıları inşa edilmektedir. Böylece, yer yüzünde meydana gelen titreşimden dolayı yeraltı yapılarında titreşim düzeyinin tahmini önemli bir mühendislik problemini oluşturmaktadır. Benzer şekilde, yeraltında oluşan patlamalar da yer yüzünde mevcut üst yapıları etkilemektedir.

Sonsuza uzanan ve tabii haldeki zeminlere daha rasyonel bir yaklaşım, yakın bölgeden sonra sonsuz eleman kullanılması olmuştur [1]. Tüm dalga tiplerini içeren, eksenel dönel simetrik ve üç boyutlu sonsuz eleman, frekans uzayında ilk defa [2]' de geliştirilmiştir. Değişik şekil fonksiyonları seçilerek, sonlu-sonsuz dinamik eleman uygulamaları, iki boyutlu harmonik yükleme için [3] ve üç boyutlu harmonik hal için [4]' de verilmektedir. Yine tüm dalga tiplerini içeren eksenel dönel simetrik ve harmonik sonsuz eleman ile ilgili uygulamalar [5]' de bulunabilir.

Bu çalışmada, iki boyutlu düzlemsel veya eksenel dönel simetrik geometriye sahip zemin-yapı etkileşimi problemleri incelenmektedir. Zemin tabakalı, elastik ve/veya visko-elastik malzeme olarak ele alınmaktadır. Üst yapı standart sonlu elemanlarla temsil edilmektedir. Yarı sonsuz zemin ise, binaya yakın bölgelerde standart sonlu elemanlar ile, uzak bölgelerde ise sonsuz elemanlar ile modellenmektedir.

Bu çalışmada, azalan fonksiyonlu dinamik sonsuz eleman için rijitlik ve kütle matrisleri elde edilmektedir. Sonsuz elemanlar için deplasman kabulü dalga yayılışının özelliklerini taşımaktadır.

Sonsuz elemanların rijitlik ve kütle matrislerindeki sonsuz integrallerin hesabı için Gauss-Laguerre integrasyon yöntemi modifiye edilerek kullanılmaktadır.

Laplace dönüşüm uzayından zaman uzayına geçiş için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [6] uygulanmaktadır.

2. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

İki boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemleri incelenirken zemin ve üst yapı elastik ve/veya visko-elastik malzeme olarak ele alınmaktadır.

Düzlem elastisite halinde, olayı idare eden hareket denklemleri gerilmeler cinsinden,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

şeklinde verilmektedir. Burada, σ_x, σ_y normal gerilmeleri ve τ_{xy} ise, kayma gerilmesini göstermektedir. f_x, f_y, x ve y doğrultularında yayılı hacim (alan) kuvvetleri, ρ, kütlesel yoğunluk ve u, v, sırasıyla, x ve y doğrultularında deplasmanlardır.

Sınır şartları da gerilmeler cinsinden,

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned} \tag{3}$$

olarak yazılmaktadır.

Uzama oranı-deplasman ilişkisi,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

şeklindedir.

Lineer elastik ve izotrop malzemeler için bünye denklemi,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

olup, burada c_{ij}, malzeme sabitleri, düzlem şekil değiştirme halinde,

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}, c_{12} = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, c_{33} = G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{6a}$$

düzlem gerilme halinde,

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E}{(1-v^2)}, \; c_{12} = \frac{vE}{(1-v^2)}, \; c_{33} = G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{6b}$$

olarak alınmaktadır. Burada, E, Elastisite modülünü, v, Poisson oranını ve G, kayma modülünü göstermektedir.

Formülasyon dönüşüm uzayında yapılacaktır. Zamana bağlı bir f(t) fonksiyonun Laplace dönüşümü, $\bar{F}$(s),

$$L[f(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \tag{7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. s, kompleks Laplace parametresini göstermektedir.

Malzemede Kelvin tipi sönüm olduğu varsayılarak, c_{ij}, malzeme sabitlerindeki elastisite modülü, Laplace uzayında kompleks karşıtı ile değiştirilmektedir [7].

$$E^* = E(1+gs) \tag{8}$$

Burada, g viskoz sönüm oranını temsil etmektedir. (1) ve (2) hareket denklemlerinin sıfır başlangıç şartları ile Laplace dönüşümleri alınıp, herhangi bir h kalınlıklı eleman için ağırlıklı artıklar yöntemi uygulandığında,

$$h\int\int_{A_e}\psi_1\left[\frac{\partial\bar{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial y}+\bar{f}_x-\rho s^2\bar{u}\right]dA=0 \tag{9}$$

$$h\int\int_{A_e}\psi_2\left[\frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\sigma}_y}{\partial y}+\bar{f}_y-\rho s^2\bar{v}\right]dA=0 \tag{10}$$

diferansiyel denklemler integral formda yazılmaktadır. Burada, ψ_1, ψ_2, ağırlık fonksiyonları ve A_e elemanın alanımıdır.

Kısmi integrasyonlar yapıldığında (9) ve (10) denklemleri, sırasıyla,

$$h\int\int_{A_e}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\bar{\sigma}_x+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\bar{\tau}_{xy}-\psi_1\bar{f}_x+\psi_1\rho s^2\bar{u}\right]dA-h\int_{S_\sigma}\psi_1(\bar{\sigma}_x n_x+\bar{\tau}_{xy}n_y)ds=0 \tag{11}$$

$$h\int\int_{A_e}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\bar{\tau}_{xy}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\bar{\sigma}_y-\psi_2\bar{f}_y+\psi_2\rho s^2\bar{v}\right]dA-h\int_{S_\sigma}\psi_2(\bar{\tau}_{xy}n_x+\bar{\sigma}_y n_y)ds=0 \tag{12}$$

şeklini alır. Bu ifadelerde, ikinci kısımlardaki parantezin içi dönüşmüş uzayda sınır şartlarını temsil etmekte olup,

$$\begin{aligned}\bar{t}_x &= \bar{\sigma}_x n_x+\bar{\tau}_{xy}n_y\\ \bar{t}_y &= \bar{\tau}_{xy}n_x+\bar{\sigma}_y n_y\end{aligned} \tag{13}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, S_σ, eleman sınırını göstermekte, n_x ve n_y doğrultman kosinüslerini temsil etmektedir.

Galerkin ağırlık fonksiyonları olarak dönüşmüş uzayda deplasmanların varyasyonları,

$$\psi_1=\delta\bar{u},\psi_2=\delta\bar{v} \tag{14}$$

alınmaktadır. Ağırlık fonksiyonları yerlerine yazıldıktan sonra (11) ve (12) eşitlikleri bir tek integral altında toplanırsa,

$$h\int\int_{A_e}\left(\begin{Bmatrix}\delta\bar{\varepsilon}_x\\ \delta\bar{\varepsilon}_y\\ \delta\bar{\gamma}_{xy}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{\sigma}_x\\ \bar{\sigma}_y\\ \bar{\tau}_{xy}\end{Bmatrix}+\rho s^2\begin{Bmatrix}\delta\bar{u}\\ \delta\bar{v}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{Bmatrix}\right)dA-h\int\int_{A_e}\begin{Bmatrix}\delta\bar{u}\\ \delta\bar{v}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{f}_x\\ \bar{f}_y\end{Bmatrix}$$

$$dA-h\int_{S_\sigma}\begin{Bmatrix}\delta\bar{u}\\ \delta\bar{v}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{t}_x\\ \bar{t}_y\end{Bmatrix}ds=0 \tag{15}$$

matris formuna dönüşmektedir. Bu ifade, Laplace uzayında virtüel iş denklemidir.

Elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar,

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & . & . & . & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & . & . & . & 0 & N_n \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{matrix} \right\} = [N]\{\bar{\Delta}\} \qquad (16)$$

dır. Burada, [N], şekil fonksiyonları matrisi ve $\{\bar{\Delta}\}$, dönüşmüş uzayda eleman düğüm deplasmanlarıdır. Buna göre, uzama oranı deplasman ilişkisi (4),

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \\ \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} \end{matrix} \right\} = [B]\{\bar{\Delta}\} \qquad (17)$$

ve gerilme deplasman ilişkisi (5) ise,

$$\{\bar{\sigma}\} = [C][B]\{\bar{\Delta}\} \qquad (18)$$

şekline gelir. Deplasman ve uzama oranlarının varyasyonları da,

$$\left\{ \begin{matrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{matrix} \right\} = [N]\{\delta\bar{\Delta}\}, \{\delta\bar{\varepsilon}\}, = [B]\{\delta\bar{\Delta}\} \qquad (19)$$

olur. (16), (18) ve (19) eşitlikleri, (15) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} &\{\delta\bar{\Delta}\}^T h \int\int_{A_e} ([B]^T[C][B] + \rho s^2[N]^T[N])dA\{\bar{\Delta}\} \\ &-\{\delta\bar{\Delta}\}^T h \int\int_{A_e} [N]^T \left\{ \begin{matrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{matrix} \right\} dA - \{\delta\bar{\Delta}\}^T h \int_{S_\sigma} [N]^T \left\{ \begin{matrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{matrix} \right\} ds = 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

şeklini almaktadır.

Buradan,

$$\begin{aligned} [k^e] &= h \int\int_{A_e} [B]^T[C][B]dA, [m^e] = \rho h \int\int_{A_e} [N]^T[N]dA \\ \{f^e\} &= h \int\int_{A_e} [N] \left\{ \begin{matrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{matrix} \right\} dA, \{t^e\} = h \int_{S_\sigma} [N]^T \left\{ \begin{matrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{matrix} \right\} ds \end{aligned} \qquad (21)$$

tarifleri yapıldığında, dönüşmüş uzayda eleman hareket denklemi,

$$s^2[m^e]\{\bar{\Delta}\} + (1+gs)[k^e]\{\bar{\Delta}\} = \{F^e\} \tag{22}$$

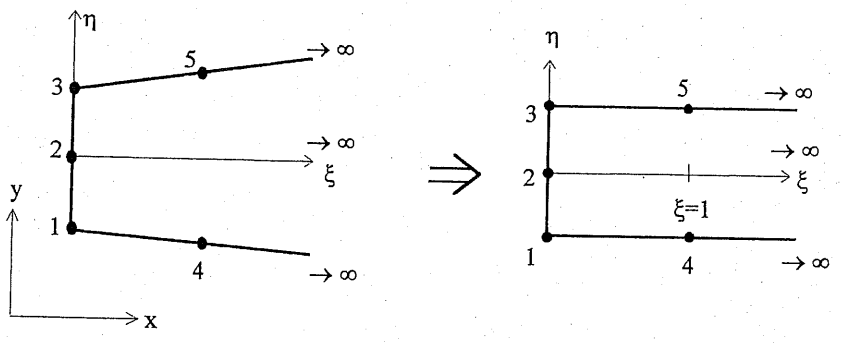
elde edilmektedir. Burada, $[k^e]$, eleman rijitlik matrisi, $[m^e]$, eleman kütle matrisi ve $\{F^e\} = \{f^e\} + \{t^e\}$ ise, eleman yük vektörü olarak adlandırılmaktadır.

Yapı-zemin etkileşimi problemlerinde üst yapı sekiz düğümlü standart sonlu elemanlarla modellenmektedir. Yarı sonsuz zemin ise, binaya yakın bölgelerde sekiz düğümlü standart sonlu elemanlar ile uzak bölgelerde ise sonsuz elemanlar ile modellenmektedir.

3. SONSUZ ELEMAN FORMÜLASYONU

Bu kısımda, azalan fonksiyonlu dinamik sonsuz eleman için formülasyon yapılırken hem düzlem gerilme/şekil değiştirme hem de eksenel dönel simetrik durumlar göz önüne alınmaktadır.

Şekil 1 a da görülen iki boyutlu bir sonsuz eleman yine iki boyutlu sonsuz bir bölgeye tasvir edilmektedir.



(a) Gerçek eleman (b) Referans elemanı

Şekil 1 Sonsuz eleman

Eleman koordinat dönüşümü,

$$x = \sum_{i=1}^{5} M_i x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{5} M_i y_i \tag{23}$$

ile tarif edilmekte ve burada M_i, geometrik şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2}(\xi-1)(\eta-1) \qquad M_4 = \frac{1}{2}\xi(1-\eta) \\ M_2 &= 0 \\ M_3 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(\eta+1) \qquad M_5 = \frac{1}{2}\xi(1+\eta) \end{aligned} \tag{24}$$

olarak verilmektedir [3]. Sonsuz elemana ait deplasman yaklaşımı,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta,s)\bar{u}_i \quad ve \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta,s)\bar{v}_i \tag{25}$$

olup, N_i interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned} N_1 &= P(\xi,s)\frac{1}{2}(-1+\eta)\eta \\ N_2 &= P(\xi,s)(1-\eta^2) \\ N_3 &= P(\xi,s)\frac{1}{2}(1+\eta)\eta \end{aligned} \tag{26}$$

şeklinde seçilmektedir. Burada, $P(\xi,s)$, deplasman yayılma fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

$$P(\xi,s) = e^{-(\alpha+s\frac{L}{c})\xi} = e^{-\alpha\xi_e-\beta\xi}, \beta = sL/c \tag{27}$$

α ve β, yerel koordinatlarda, sırasıyla, deplasman genlik azaltma faktörü ve dalga sayısıdır. Yine yerel koordinatlarda dalga yayılmasından dolayı, $e^{-\alpha\xi}$ genlikteki azalmayı gösterirken, $e^{-\beta\xi}$ terimi de faz gecikmesini ifade etmektedir. Burada, L karakteristik bir uzunluktur.

Visko-elastik zemin olması halinde, Kelvin tipi viskoz sönüm göz önüne alınmaktadır. Bu durumda, visko-elastik kayma modülü ve Lame' sabiti,

$$G^* = G(1+gs), \lambda^* = \lambda(1+gs) \tag{28}$$

şeklinde ifade edilmektedir [7]. Burada, g viskoz sönüm oranını göstermektedir. Bunlara bağlı olarak dalga hızı da,

$$c^* = c\sqrt{(1+gs)} \tag{29}$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Azalan fonksiyonlu elemana ait uzama oranı deplasman ilişkisi şöyledir:

$$\bar{\varepsilon} = [B_1, B_2, B_3]\{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{u}_3, \bar{v}_3\}^T = [B]\{\bar{\Delta}\} \tag{30}$$

Düzlem gerilme/şekil değiştirme halinde bir i düğümüne ait $[B_i]$ şekil değiştirme matrisi,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{31}$$

şeklinde yazılmaktadır. Sonsuz eleman rijitlik ve kütle matrisleri ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$[k^e]_{(6\times6)} = h \int_{\eta=-1}^{1} \int_{\xi=0}^{\infty} [B]^T[C][B]det[J]d\xi d\eta, [m^e]_{(6\times6)} = h\rho \int_{\eta=-1}^{1} \int_{\xi=0}^{\infty} [N]^T[N]det[J]d\xi d\eta \tag{32}$$

Bu hal için [C] malzeme matrisinin elemanları (6a-b) den alınmaktadır.

Eksenel dönel simetrik hal için bir i düğümüne ait $[B_i]$ şekil değiştirme matrisi ise,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{33}$$

olur. Burada r, sonsuz elemanın herhangi bir noktasının simetri eksenine olan uzaklığıdır.

$$r = \sum_{i=1}^{5} M_i r_i \tag{34}$$

Böylece, dönel simetrik sonsuz eleman rijitlik ve kütle matrisleri ifadesi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$[k^e]_{(6\times6)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{1} \int_{\xi=0}^{\infty} [B]^T[C][B]rdet[J]d\xi d\eta, [m^e]_{(6\times6)} = 2\pi\rho \int_{\eta=-1}^{1} \int_{\xi=0}^{\infty} [N]^T[N]rdet[J]d\xi d\eta \tag{35}$$

Her iki halde de, $det[J], M_i$ geometrik şekil fonksiyonlarına bağlı olan Jacobian dönüşüm matrisinin determinantıdır. Bu hal için malzeme matrisi [C] aşağıda verilmektedir.

$$[C] = \begin{bmatrix} (1-v)p & vp & vp & 0 \\ & (1-v)p & vp & 0 \\ & & (1-v)p & 0 \\ simetrik & & & G \end{bmatrix}; p = \frac{E^*}{(1+v)(1-2v)}, G = \frac{E^*}{2(1+v)} \tag{36}$$

(32) ve (35) deki integraller, sonlu yönde Gauss-Legendre ile 3 nokta, sonsuz yönde ise modifiye Gauss-Leguerre sayısal integrasyon yöntemi ile 17 nokta seçilerek hesaplanmaktadır.

3.1. Modifiye Gauss-Laguerre İntegrasyon Yöntemi

Gauss-Laguerre sayısal integral formülü, $0 \leq u \leq \infty$ aralığı için,

$$\int_0^{\infty} f(u)e^{-u}du \cong \sum_{i=1}^{M} w_i f(u_i) \tag{37}$$

şeklinde tarif edilmektedir. Eleman matrislerinde sonsuza uzanan doğrultudaki tipik bir integral ise,

$$I = \int_0^{\infty} f(\xi)e^{-2(\alpha+\beta)\xi}d\xi, \beta = sL/c \tag{38}$$

şeklindedir. Bu integralde, $u = 2(\alpha+\beta)\xi$ değişken dönüşümü yapılırsa, $du = 2(\alpha+\beta)d\xi$ olur. (37) ifadesi, (38) eşitliği için düzenlenirse, Gauss-Laguerre integrali aşağıdaki gibi modifiye edilmektedir.

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{2(\alpha+\beta)}\right)e^{-u}\frac{du}{2(\alpha+\beta)} \cong \sum_{i=1}^{M}\frac{w_i}{2(\alpha+\beta)}f(\frac{u_i}{2(\alpha+\beta)}) = \sum_{i=1}^{M} w_i^* f(u_i^*) \tag{39}$$

$$u_i^* = \frac{u_i}{2(\alpha+\beta)}, w_i^* = \frac{w_i}{2(\alpha+\beta)} \tag{40}$$

Buradaki, u_i ve w_i sırasıyla, Gauss-Laguerre apsis ve ağırlık değerleridir. M ise sonsuz yönde integrasyon nokta sayısıdır.

3.2. Hareket Denklemleri

Visko-elastik bir ortamda sonlu ve sonsuz elemanların rijitlik ve kütle matrisleri uygun bir şekilde birleştirilirse, Laplace dönüşüm uzayında ve sıfır başlangıç şartları altında sistem hareket denklemi,

$$s^2[M]\{\bar{V}\} + (1+gs)[K]\{\bar{V}\} = \{\bar{F}\} \tag{41}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada, [M] ve [K], sırasıyla sistem kütle ve rijitlik matrisleridir. $\{\bar{V}\}$ ve $\{\bar{F}\}$, sırasıyla, düğüm deplasmanları ve sistem yük vektörlerinin Laplace dönüşümleridir. Sonlu elemanlar bölgesinde, eleman matrisleri s parametresine bağlı olmadığı için sonlu bölgeye ait sistem matrislerinin bir kez oluşturulması yeterli olmaktadır.

Laplace dönüşüm uzayında çeşitli s parametreleri için çözümler sayısal olarak bulunmaktadır. Bu değerlerden zaman uzayına geçiş için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşümü [6] uygulanmaktadır. Bu ters dönüşüm, Sonlu Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümleri birlikte kullanılarak,

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\{\bar{F}(a)\} + Re\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(A(k)+iB(k))W^{jk}\right\}\right]$$

$$A(k) = \sum_{1=0}^{L} Re\left\{\bar{F}\left(a+i(k+1N)\frac{2\pi}{T}\right)\right\} \qquad (42)$$

$$B(k) = \sum_{1=0}^{L} Im\left\{\bar{F}\left(a+i(k+1N)\frac{2\pi}{T}\right)\right\}$$

formülü ile yapılmaktadır. Burada, $w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ olup, $s_k = a+i\frac{2\pi k}{T}$, dönüşüm parametresini göstermektedir. T, çözüm aralığı olmak üzere, N adet eşit zaman aralığı, $t_j = j\Delta t$ =jT/N, (j=0,1,2,...,N-1), için f(t) hesaplanmaktadır. (42) eşitliğinde,

$$\sum_{k=0}^{N-1}[A(k)+iB(k)]W^{jk} \qquad (43)$$

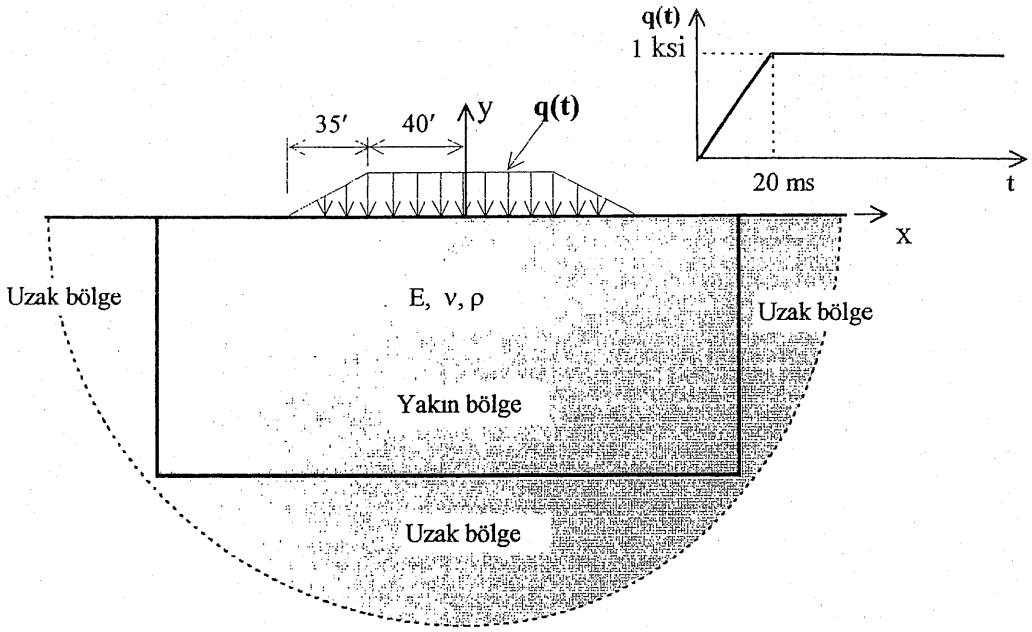
ifadesi, FFT (Fast Fourier Transform) alt programı yardımıyla kolayca hesaplanabilmektedir.

4. UYGULAMALAR

Zamanla değişen keyfi yükleme halinde, sonlu elemanlar için sekiz düğümlü kuadratik izoparametrik eleman, sonsuz elemanlar için azalan fonksiyonlu eleman modelleri kullanılarak DUZSD isimli bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Program, düzlem gerilme/şekil değiştirme ile eksenel dönel simetrik halleri birlikte göz önüne almaktadır.

4.1. Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Trapez Şeklinde Şerit Yük

Elastik yarı sonsuz zemin, trapez şeklinde şerit bir yük etkisi altındadır (Şekil 2). Ortamın belirli noktalarında yer değiştirme ve gerilmelerin zamanla değişimleri aranmaktadır. Bu örnek, düzlem şekil değiştirme problemidir. Elastik zemin malzemesi olarak, E=2 $\times 10^5$ psi, v=0.15, $\rho = 1.9534 \times 10^{-4} lb - s^2/in^4$ alınmıştır. Buna göre, ortam içindeki dalga hızları, $c_s = 2.112 \times 10^4$ in/s ve $c_p = 3.288 \times 10^4$ in/s olur. Simetri nedeniyle ortamın yarısı göz önüne alınmakta ve sonlu-sonsuz eleman ağı Şekil 3' de verilmektedir. DUZSD programı ile çözüm yapılırken α=0.69, aT=6. ve Laplace parametreleri sayısı, N=2^6 alınmaktadır.



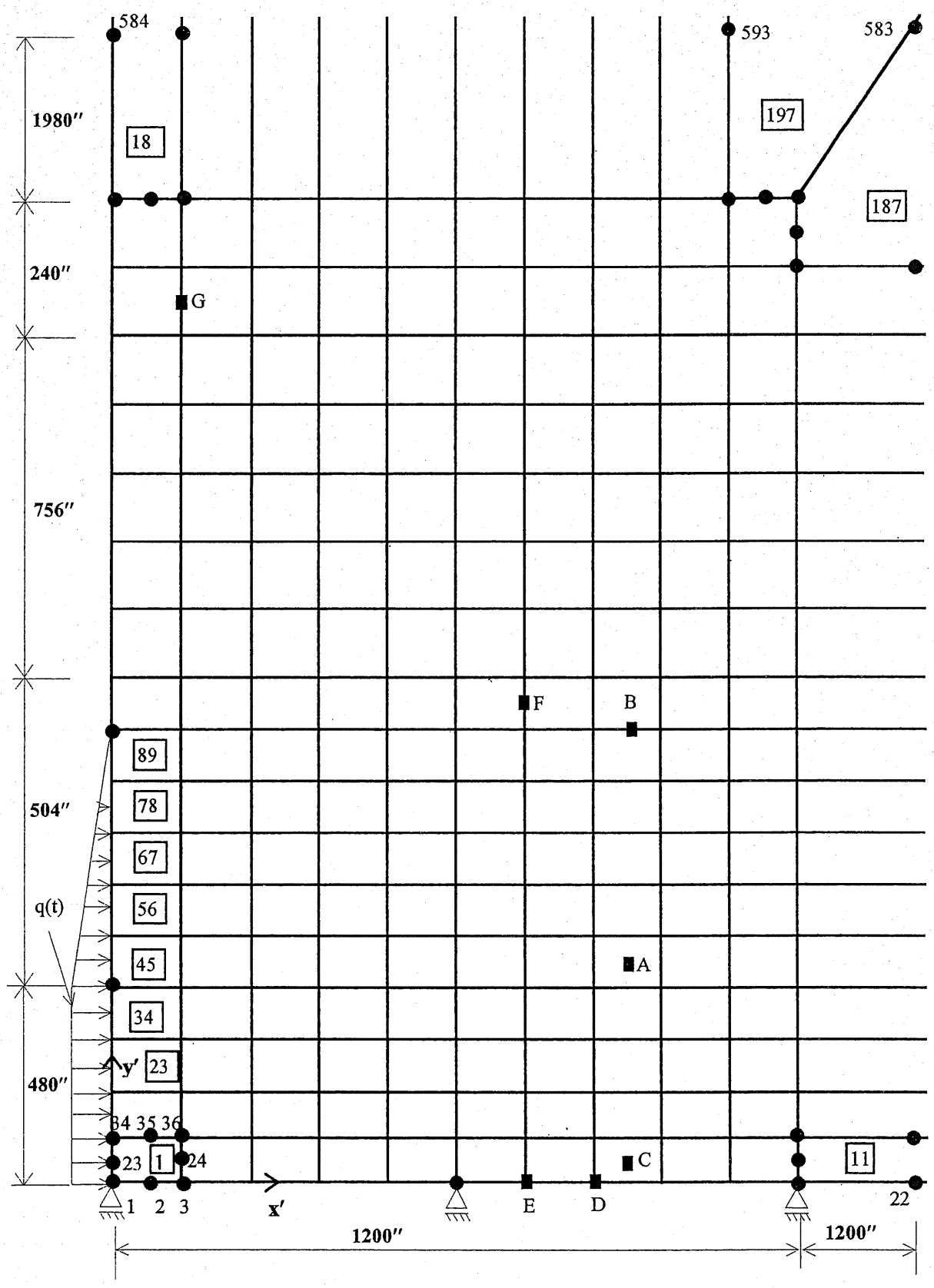
Şekil 2 Yarı sonsuz zemin üzerinde trapez şeklinde şerit yük

Bu örnek daha önce çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. [8]' de viskoz sınır şartları ile sonlu farklar yöntemi kullanılmaktadır. [9-10]' da Laplace uzayında sınır eleman yöntemi uygulanmıştır. Ayrıca bu örnek, [11-12]' de zaman uzayında sınır elemanı yöntemi ile çözülmüştür.

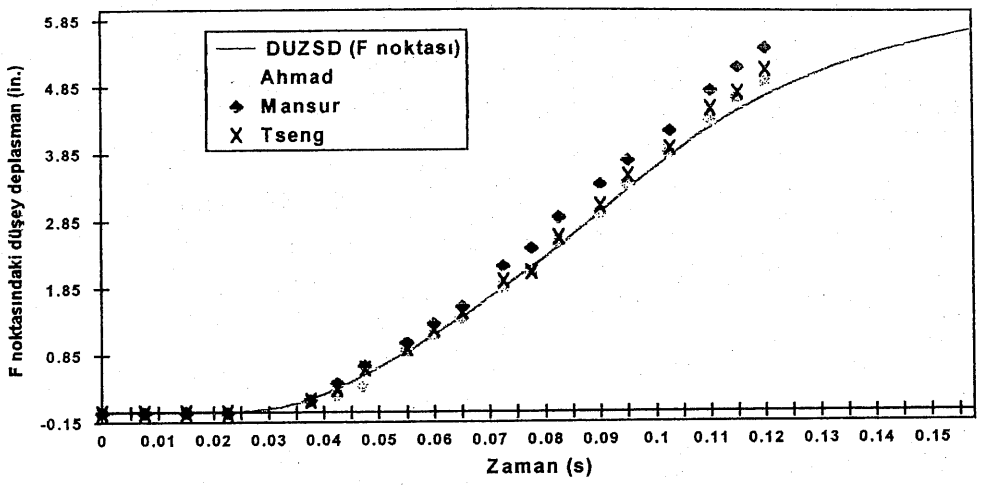
[12]' de G noktasının düşey deplasmanları ile C noktasındaki düşey gerilme bileşenlerinin zamana göre değişimleri grafik halinde verilmektedir. Grafik üzerinde ölçüm yapılarak sonuçların yakın olduğu gözlenmektedir (Şekil 4-6). Bütün grafiklerde, [11]' de bulunan değerlerin bir miktar büyük olduğu görülmektedir. [10]' da verilen sonuçların da DUZSD ile bulunan değerlere daha yakın olduğu söylenebilir.

4.2. Yarı Sonsuz Zemin Üzerine Oturan İmpulsif Şerit Yüklü Esnek Temel

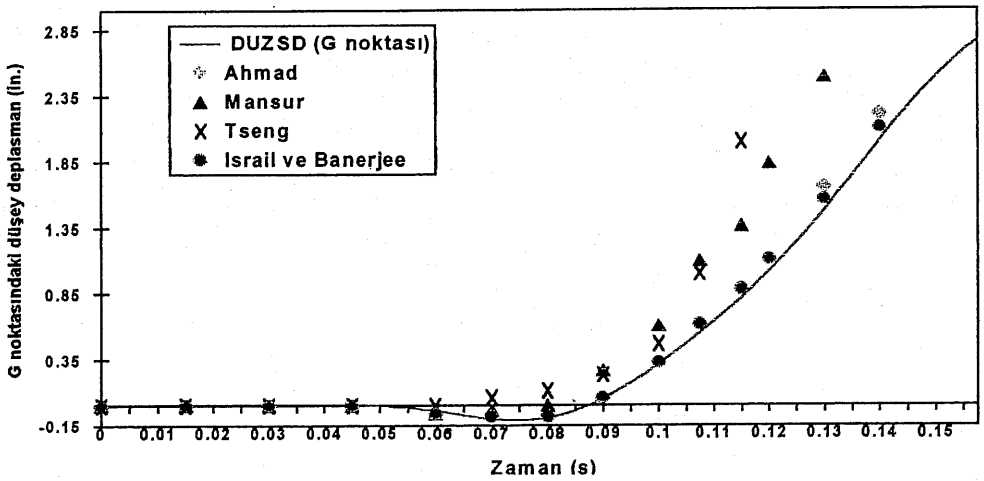
Elastik yarı sonsuz zemin üzerine esnek şerit bir temel oturmaktadır. Temelin ortasında impulsif çizgisel bir yük bulunmaktadır (Şekil 7). Temelin altında belli noktalarda deplasmanlar hesaplanmaktadır. Elastik ortamın malzemesi, $E_z = 2.66 \times 10^8 N/m^2, \nu_z = 1/3, \rho_z = 2000 kg/m^3$ dür. Buna göre, $\lambda_z = 1.995 \times 10^8 N/m^2$ ve $G_z = 9.975 \times 10^7 N/m^2$ olup, zemin içindeki dalga hızları, c_s=223.33 m/s ve c_p=446.65 m/s bulunur.



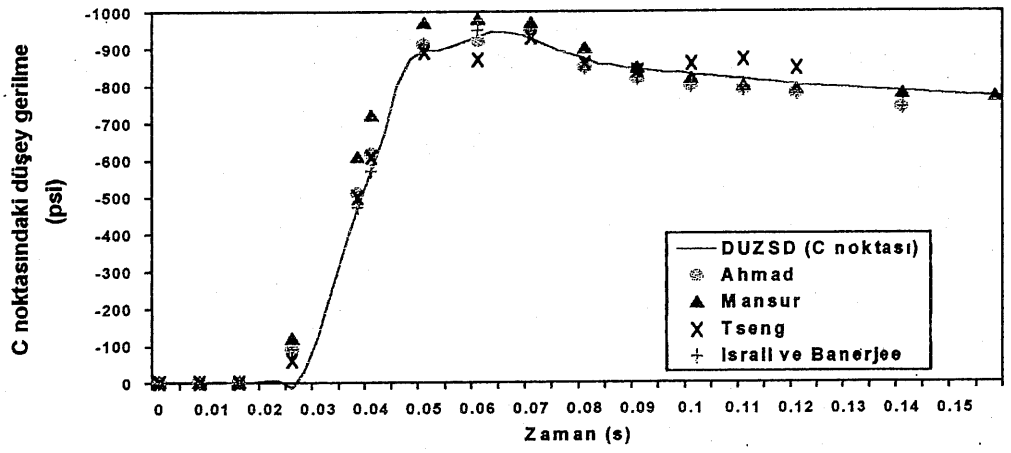
Şekil 3 Yarı sonsuz zeminin sonlu-sonsuz eleman ağı



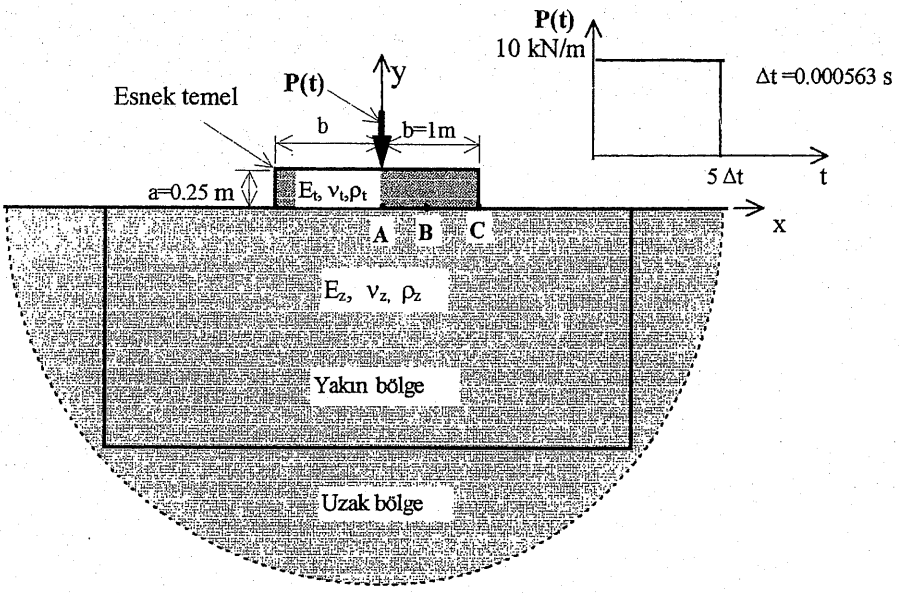
Şekil 4 F(60′,80′) noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 5 G(10′,150′) noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 6 C(75′,5′) noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi



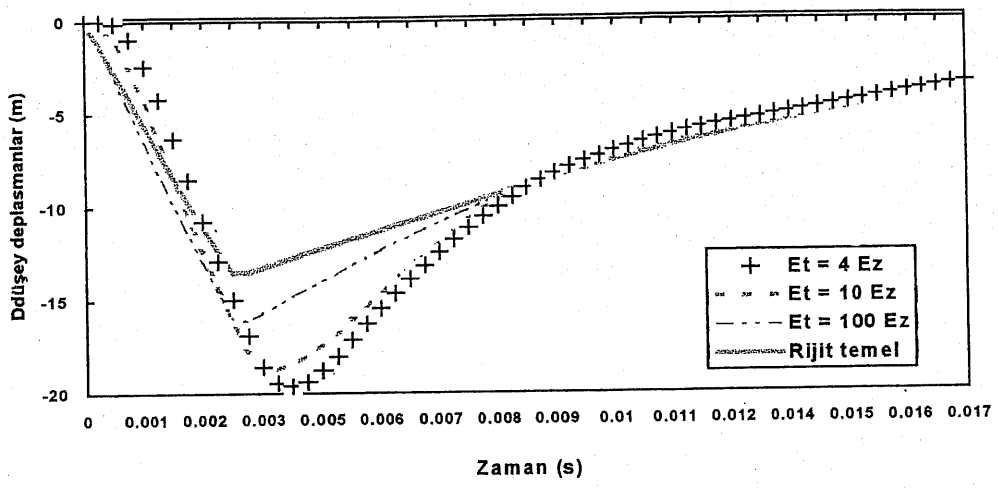
Şekil 7 Elastik yarı sonsuz zemin üzerinde esnek şerit temel

Kütlesiz ($\rho_t = 0$) temel için temel elastikliği zayıftan rijite doğru değiştirilerek ($E_t = 4E_z$, $10E_z$, $100E_z$, ∞) A, B ve C noktalarında düşey deplasmanların zamanla değişimi karşılaştırılmaktadır. Ayrıca, $E_t = 10E_z$ için, kütlesiz ($\rho_t = 0$) ve kütleli ($\rho_t = 3000kg/m^3$) temel halinde A noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimleri de karşılaştırılmaktadır. DUZSD programında, $\alpha = 0.69$, aT=6. ve parametre sayısı N=2^6 alınarak çözümler yapılmaktadır. Simetri nedeniyle ortamın yarısı göz önüne alınmaktadır. Temelde 8 adet sonlu, yakın bölgede 100 adet sonlu ve uzak bölgelerde ise 20 adet sonsuz eleman kullanılmıştır.

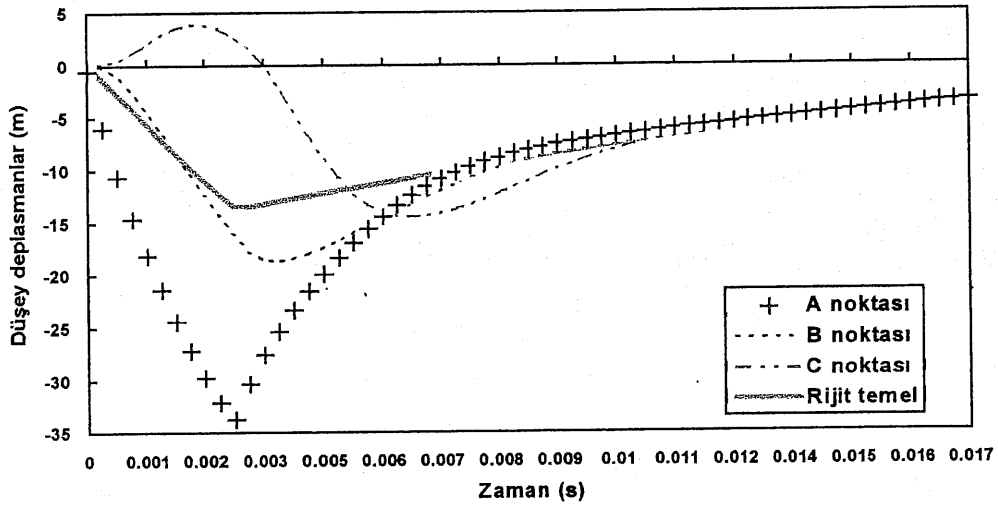
Şekil 8' den görüldüğü gibi temel rijitliği arttıkça B noktasındaki maksimum deplasmanın değeri azalmaktadır. Ayrıca, esnek temelin rijitliklerinden bağımsız olarak merkezden uzaklaştıkça maksimum deplasman değerlerinin azaldığı da gözlenmektedir (Şekil 9). Şekil 10 da ise, ($E_t = 10E_z$) ve kütleli ($\rho_t = 3000kg/m^3$) temel halinde, A, B ve C noktalarındaki düşey deplasmanların zamanla değişimi verilmektedir. Bu durum Şekil 9 ile karşılaştırıldığında maksimum değerlerde küçük bir azalma olduğu gözlenmiştir.

4.3. Tabakalı Yarı Sonsuz Visko-Elastik Zeminde Silindirik Boşluk İçinde Patlama

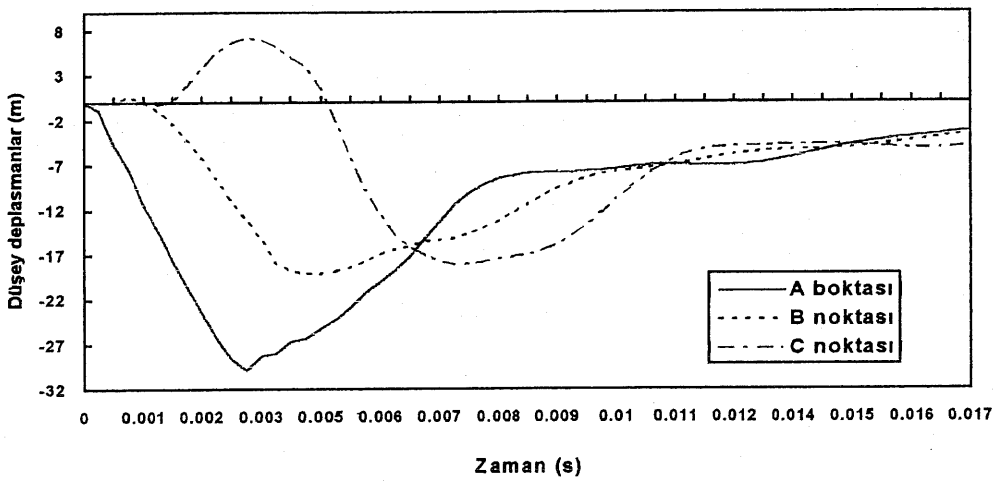
İki tabakalı yarı sonsuz visko-elastik zemin içinde silindirik bir boşluk bulunmaktadır. Silindir iç yüzeyine impulsif bir basınç etkimektedir (Şekil 11). Bu örnek, bir düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmaktadır. Visko-elastik yarı sonsuz alt tabaka malzemesi için, $E_1 = 5.17699 \times 10^9 N/m^2$, $\nu_1 = 0.3$, $\rho_1 = 2850kg/m^3$ ve sönüm oranı, g_1=0.0015 dir. Üst tabaka malzemesi için, $E_2 = 1.74744 \times 10^9 N/m^2$, $\nu_2 = 0.35$, $\rho_2 = 3250kg/m^3$ ve sönüm oranı, g_2=0.0025 seçilmiştir.



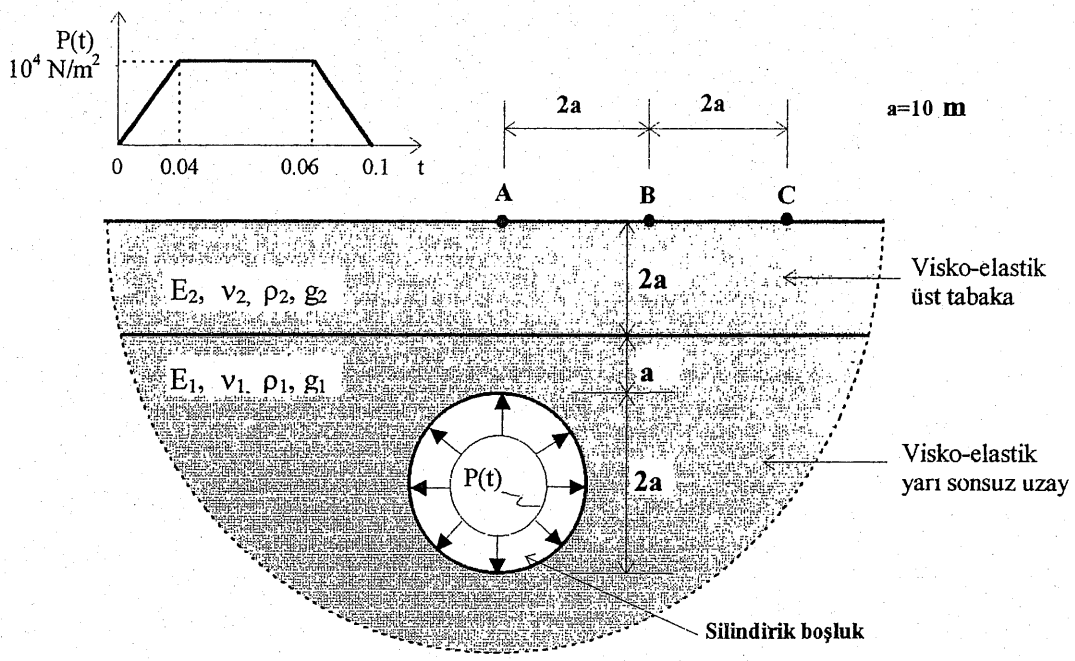
Şekil 8 Elastik ve rijit, kütlesiz temel durumlarında B noktasındaki düşey deplasman



Şekil 9 Elastik ($E_t = 10E_z$) ve rijit, kütlesiz temel durumunda düşey deplasmanlar



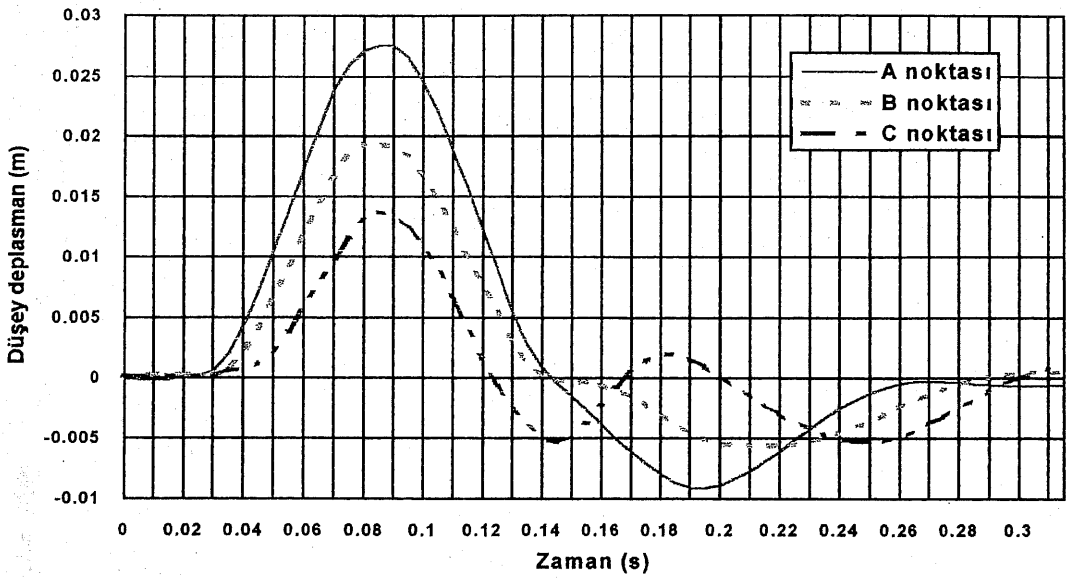
Şekil 10 $E_t = 10E_z$ ve kütleli temel olması durumunda düşey deplasmanlar



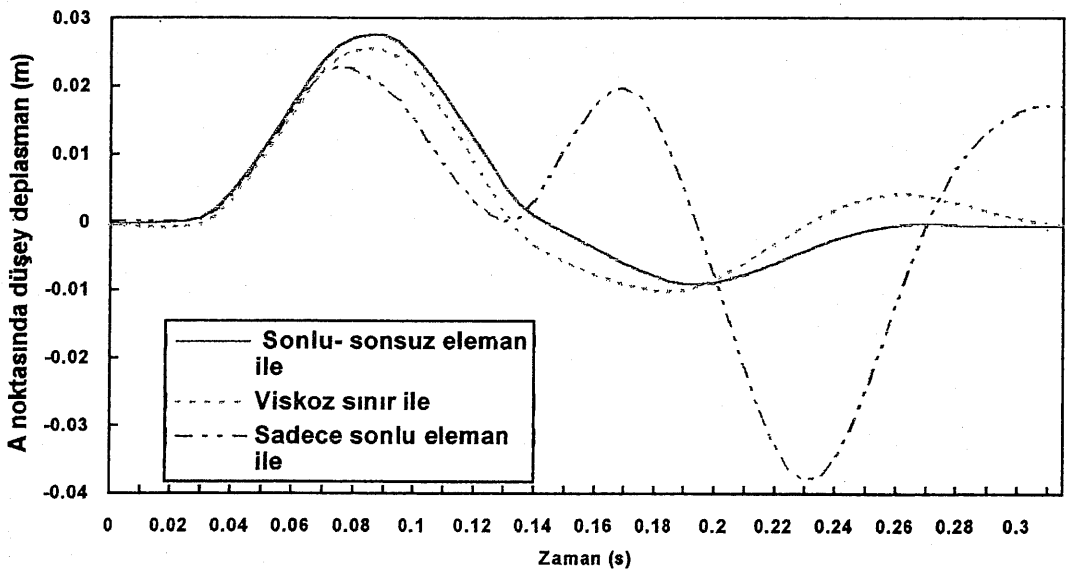
Şekil 11 İki tabanlı visko-elastik zemin içinde silindirik boşlukta patlama

Yarı sonsuz alt tabaka 108 adet sonlu ve 12 adet sonsuz eleman ile üst tabaka 24 adet sonlu ve 4 adet sonsuz eleman alınarak ağ teşkil edilmektedir. Yükleme ve geometrideki simetri nedeni ile bölgenin yarısı göz önüne alınmaktadır.

DUZSD programı ile, A, B ve C noktalarındaki deplasmanların zamanla değişimleri hesaplanmıştır. Beklendiği gibi, noktalar patlamanın bulunduğu yerden uzaklaştıkça genlikler küçülmektedir (Şekil 12). Ayrıca, basınç dalgasının iki tabakadan geçerek, A noktasına erişme zamanı, 10./1564+20/929=0.028 saniye olup, grafikle uyum göstermektedir. Karşılaştırma amacıyla bu örnek, sonsuz elemanların başladığı yerden kesilerek bir kere viskoz sınır şartları ile bir kere de sadece sonlu elemanlar alıp, sınırları tutularak çözülmüştür. Viskoz sınır şartları ve sonlu-sonsuz model ile çözüm sonuçlarının uyumlu oldukları söylenebilir. Sadece sonlu eleman kullanılması halinde dalgaların sınıra çarparak yansıması nedeniyle belli bir süreden sonra davranışın karakteri bozulmaktadır.



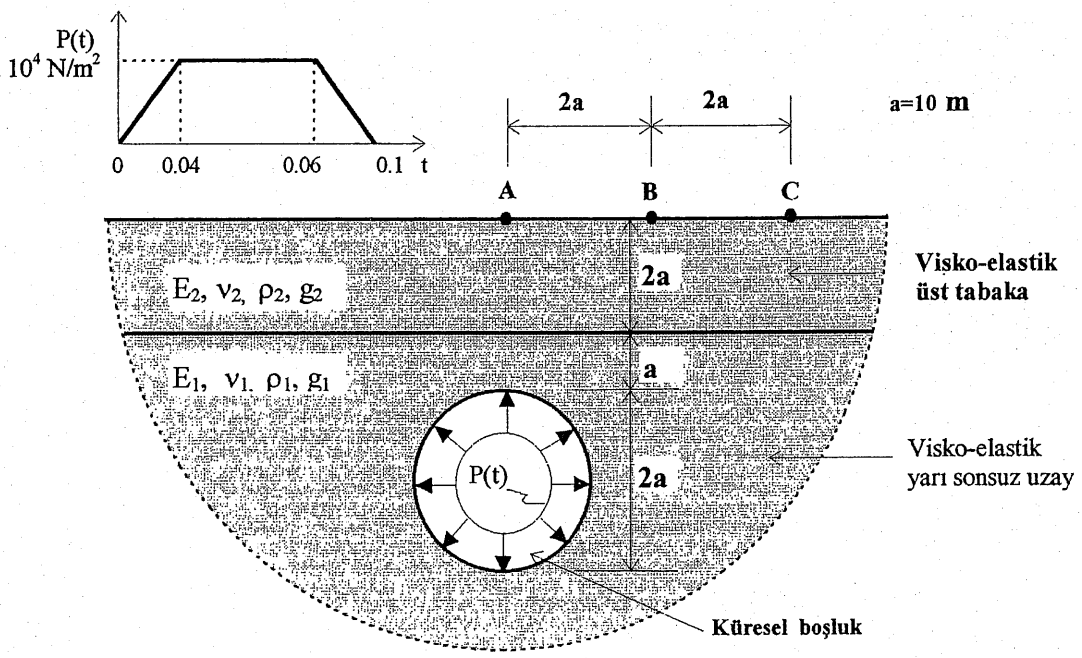
Şekil 12 A, B ve C noktalarında düşey deplasmanların zamanla değişimi



Şekil 13 Sonlu-sonsuz, viskoz sınır ve sadece sonlu eleman ile A noktasında düşey deplasmanın zamanla değişimi

4.4. Tabakalı Yarı Sonsuz Visko-Elastik Zeminde Küresel Boşluk İçinde Patlama

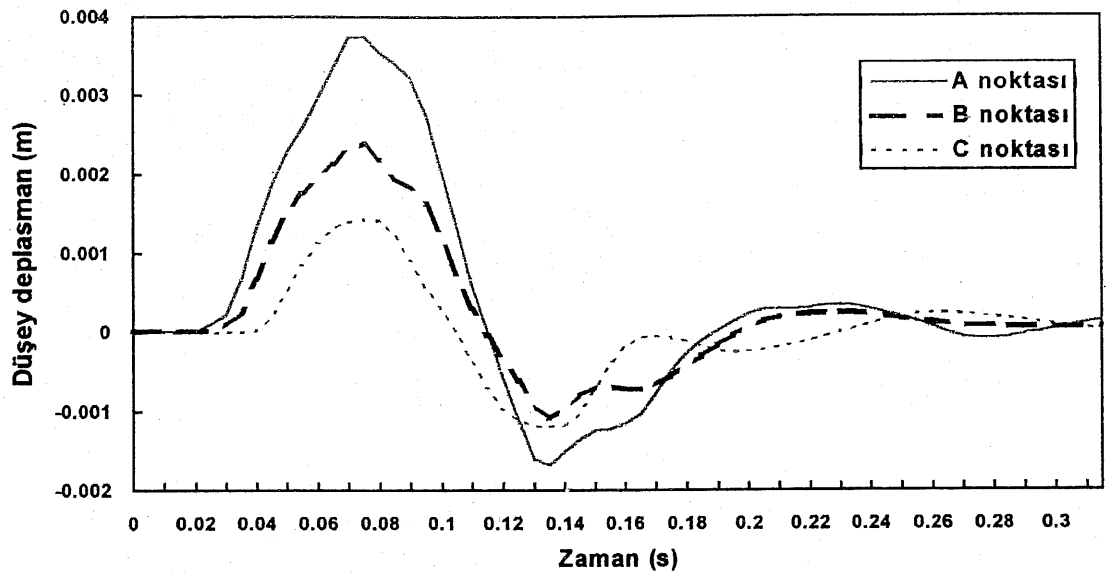
İki tabakalı yarı sonsuz visko-elastik zemin içinde küresel bir boşluk bulunmaktadır. Küresel boşluğun içinde impulsif bir basınç etkimektedir (Şekil 14). Bu örnek, eksenel dönel simetrik bir problemdir. Visko-elastik yarı sonsuz alt tabaka malzemesi için, $E_1 = 5.17699 \times 10^9 N/m^2$, $\nu_1 = 0.3$, $\rho_1 = 2850 kg/m^3$ ve viskoz sönüm oranı, $g_1 = 0.0015$ alınmaktadır. Visko-elastik üst tabaka malzemesi için, $E_2 = 1.74744 \times 10^9 N/m^2$, $\nu_2 = 0.35$, $\rho_2 = 3250 kg/m^3$ ve viskoz sönüm oranı, g_2 =0.0025 seçilmiştir.



Şekil 14 İki tabanlı visko-elastik zeminde küresel bir boşluk içinde patlama

Yarı sonsuz alt tabaka 108 adet sonlu ve 12 adet sonsuz eleman ile üst tabaka 24 adet sonlu ve 4 adet sonsuz eleman alınarak ağ teşkil edilmektedir. Yükleme ve geometrideki dönel simetri nedeni ile bölgenin yarısı göz önüne alınmaktadır.

DUZSD programı ile A, B ve C noktalarındaki deplasmanların zamanla değişimleri hesaplanarak düşey bileşenleri Şekil 15' de verilmektedir. Noktalar patlamanın bulunduğu yerden uzaklaştıkça genliklerin küçüldüğü gözlenmektedir. Silindirik boşlukta patlama halindeki sonuçlarla (Şekil 12) karşılaştırıldığında, küresel boşlukta patlama sonucunda bulunan deplasmanların çok daha küçük olduğu görülmektedir.



Şekil 15 A, B ve C noktalarındaki düşey deplasmanların zamanla değişimleri

5. SONUÇLAR

Sadece sonlu elemanlar kullanılması ile kaynaktan uzak bölgelerde, yapay sınırlar oluşturulmakta ve dalganın yansıyarak geri dönmesine sebep olunmaktadır. Bu durum, sonsuza uzanan bölgelerde dalganın gerçek davranışına uymamaktadır.

Sonsuz eleman halinde, sonsuz yönde tipik bir integralin (38) Euler formülü ile açılımı yapıldığında görülmektedir ki β nın değeri büyüdükçe integralin içi çok sık salınım yaptığından integralin hesabında titizlik gösterilmelidir. Bu nedenle, Gauss-Laguerre integral yöntemi modifiye edilerek kullanılmaktadır.

Yükten uzak bölgelerde sonlu elemanlarla kesim yapılarak viskoz sınır şartları ile alternatif çözümler bulunabilmektedir. Dalgaların bölge içinde, karmaşık bir şekilde dağılması nedeni ile sınırlarda tam bir geçirimlilik sağlanamamaktadır. Viskoz sınırların uzakta seçilmesi ile daha iyi sonuçlar alınabildiği görülmüştür.

Sonsuza uzanan ortamlarda, sonlu-sonsuz eleman kullanımı, viskoz sınırlar ile çözüme göre daha etkin olmaktadır. Bunun yanında, standart sonlu eleman formülasyonu uygulanmakta ve sistem matrisleri bant ve simetri özelliklerini korumaktadır. Ayrıca, yakın bölgede kullanılan sonlu elemanlar Laplace parametresine bağlı olmadığından bu bölgedeki eleman matrislerinin çözüm süresince bir kez hesaplanması yeterli olmaktadır.

Bunlara ilave olarak, sonlu-sonsuz eleman formülasyonu ile homojen olamayan ortamların kolaylıkla ele alınabildiği görülmektedir.

Kaynaklar

[1] BETTESS, P., "Infinite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering", Vol. 11, 53-64 (1977).

[2] MEDINA, F. and PENZIEN, J., "Infinite Elements for Elastodynamics", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 699-709 (1982).

[3] CHUHAN, Z. and CHONGBIN, Z., "Coupling Method of Finite and Infinite Elements for Strip Foundation Wave Problems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, 839-851 (1987).

[4] CHONGBIN, Z. and VALLIAPPAN, S., "A Dynamic Infinite Element for Three-Dimensional Infinite-Domain Wave Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 2567-2580 (1993).

[5] YANG, S.C. and YUN, C.B., "Axisymmetric Infinite Elements for Soil-Structure Interaction Analysis", Engineering Structure, Vol. 14, No.6, 361-370 (1992).

[6] DURBIN, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", The Computer Journal, Vol. 17, No.4, 371-376 (1974).

[7] BOLEY, B.A. and WEINER, J.H., "Theory of Thermal Stresses", Robert E.Krieger Publishing Company Malabar, Florida (1985).

[8] TSENG, M.N. and ROBINSON, A.R., "A Transmitting Boundary for Finite Difference Analysis of Wave Propagation in Solids", Project No. NR 064-183, University of Illinois, Urbana (1975).

[9] AHMAD, S., "Linear and Nonlinear Dynamic Analysis by Boundary Element Method", Ph.D. Thesis, State University of New York at Buffalo (1986).

[10] AHMAD, S. and BANERJEE, P.K., "Multi-Domain BEM for Two-Dimensional Problems of Elastodynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 891-911 (1988).

[11] MANSUR, W.J., "A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method", Ph.D. Thesis, University of Southampton (1983).

[12] ISRAIL, A.S.M. and BANERJEE, P.K., "Advanced Time-Domain Formulation of BEM for Two-Dimensional Transient Elostodynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 1421-1440 (1990).