ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Zeynep ÖZKURT

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE TAŞINABİLEN VE TAŞINAMAYAN OTOMORFİZMLER VE PRİMİTİF ELEMANLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2007

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE TAŞINABİLEN VE TAŞINAMAYAN OTOMORFİZMLER VE PRİMİTİF ELEMANLAR

Zeynep ÖZKURT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2007 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza..... Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL DANIŞMAN	İmza..... Prof.Dr. Naime EKİCİ ÜYE	İmza..... Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT ÜYE
İmza..... Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN ÜYE	İmza..... Yrd.Doç.Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU ÜYE	

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE TAŞINABİLEN VE TAŞINAMAYAN OTOMORFİZMLER VE PRİMİTİF ELEMANLAR

Zeynep ÖZKURT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Yıl: 2007, Sayfa: 79
Jüri: Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
Yrd.Doç.Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

Bu çalışmada serbest metabelyen Lie cebirlerinde verilen bir kümenin primitif bir sisteme taşınabilirliğini inceleyip rankın 3 olması durumunda primitif bir elemana taşınabilen belirli tipteki elemanları inceledik . Sonra bir serbest nilpotent Lie cebirinin bir primitif sistemine taşınabilen kümelerini araştırdık . F bir serbest Lie cebiri olmak üzere $F/\gamma_{c+1}(F)$ serbest nilpotent Lie cebirinin $F/\gamma_{c+1}(F)'$ serbest Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan bir otomorfizmini belirleyip, rankı n olan serbest metabelyen Lie cebirlerinin n ranklı ve 3 türetilmiş uzunluklu serbest çözülebilir Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlerini inceledik. Daha sonra F nin bir endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerekli koşulları belirleyen bir kriter verdik. Bu kriter F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinde verilen bir otomorfizmin taşınamazlığını tespit eden ve temel çıkış noktası Dieudonné determinantına dayanan bir tekniktir. Bu tekniği taşınamayan otomorfizmlerin dolayısıyla taşınamayan üreteç kümelerinin belirlenmesinde kullandık. Ayrıca R , F nin bir ideali olmak üzere F/R' cebirinin F nin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlere sahip olduğunu gösterdik. Son olarak da F/R nin F/R' Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlere sahip olduğunu gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie cebirleri, primitif taşınabilirlik, otomorfik taşınabilirlik, Dieudonné Determinantı

ABSTRACT

PhD THESIS

TAME AND NON-TAME AUTOMORPHISMS AND PRIMİTIVE ELEMENTS OF FREE LIE ALGEBRAS

Zeynep ÖZKURT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Year: 2007, Pages: 79
Jury: Assist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Prof.Dr. Naime EKİCİ
Assist.Prof.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
Assist.Prof.Dr. Ela AYDIN
Assist.Prof.Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

In this thesis we establish primitive lifting in free metabelian Lie algebras and primitive lifting of a single element in case rank 3. We also establish the systems of sets which can be lifted to a primitive systems of the free nilpotent Lie algebra free nilpotent Lie algebras. Then we present an automorphism of $F/\gamma_{c+1}(F)$ which cannot be lifted to an automorphism of $F/(\gamma_{c+1}(F))'$ and we show that there are automorphisms of the free metabelian Lie algebras of rank n, which cannot be lifted to automorphisms of the free solvable Lie algebras of rank n and derived length 3, where F is a free Lie algebra. Furthermore, we give a necessary condition for an endomorphism of F to be an automorphism. This condition is explicitly based on the Dieudonné determinant and it yields a method to detecting non-tame automorphisms of a free metabelian Lie algebra. Finally we show that if R is an ideal of F then free Lie algebra F/R' has automorphisms which cannot be lifted to an automorphism of F and F/R has automorphisms which cannot be lifted to an automorphism of F/R'

Key Words: Free Lie Algebras,primitive lifting, automorphic lifting, Dieudonné Determinant

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında değerli zamanını ayırarak bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr Zerrin ESMERLİGİL'e ve tezimin hazırlanması aşamasında her zaman yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof.Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve tüm matematik bölümü personeline sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I

ABSTRACT II

TEŞEKKÜR III

İÇİNDEKİLER IV

1 GİRİŞ 1

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3

3 SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERDE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK 10
3.1 Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinde Kümelerin Primitif Taşınması . . . 10
3.2 Bir Elemanın Primitif Taşınması 16

4 SERBEST NİLPOTENT LİE CEBİRLERDE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK 21
4.1 Serbest Nilpotent Lie Cebirlerinde Kümelerin Primitif Taşınması 21
4.1.1 Rankı 3 olan Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilen Primitif Elemanları 28
4.1.2 Rankı n olan Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilen Primitif Elemanları 35
4.2 Taşınamayan Otomorfizmler 40

5 DİEUDONNÉ DETERMİNANTI VE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK 44
5.1 Dieudonné Determinantının Lie Cebirlerine Uygulanması 49
5.2 Değişmeli Olmayan Determinantların Uygulamaları: Taşınamayan Otomorfizmler 59

KAYNAKLAR 72

ÖZGEÇMİŞ 74

1. GİRİŞ

K herhangi bir cisim F, K cismi üzerinde $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $U(F)$ de F nin evrensel enveloping cebiri olsun. G.P.Kukin sonlu üretilmiş bir serbest Lie cebirinde verilen sonlu bir kümenin üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşulu $t-$dönüşümlerinden yararlanarak vermiştir (G.P.Kukin,1970). Otomorfizmlerin taşınması problemi bir serbest Lie cebirinin bir endomorfizminin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul bulma problemi ile doğal olarak bağlantılıdır. Birman , Reutenauer , Umirbaev ve Yagzhev endomorfizmler ile otomorfizmler arasındaki matris karakterizasyonunu aşağıdaki şekilde vermiştir: $Y = \{y_1, ..., y_n\}$, F nin bir alt kümesi olsun. $U(F)$ cebiri üzerinde X kümesinin Jacobian matrisini $\frac{\partial}{\partial x_j}$, x_j ye bağlı fox türevi olmak üzere $J_Y = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ şeklinde tanımlanır. O zaman Y nin bir üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşul J_Y matrisinin $U(F)$ üzerinde tersinir olmasıdır (Birman,1973,Reutenauer,1992,Umirbaev,1994,Yagzhev,1980). Bu kriter serbest Lie cebirleri için primitifliği karakterize eden ve *mxn* tipindeki bir Jacobian matrise bağlı olarak ifade eden oldukça kullanışlı bir kriterdir. Serbest Lie cebirlerinde primitif elemanların ve primitif sistemlerin belirlenmesi problemi, üzerinde çok çalışılan bir problemdir. Verilen bir sistemin primitifliği algoritmik olarak belirlenebilmektedir. Böyle bir algoritma serbest gruplar için Whitehead tarafından verilmiştir(Whitehead,?). Serbest metabelyen ve serbest polinilpotent Lie cebirleri için primitiflik kriteri V.Shpilrain ve Umirbaev tarafından incelenmiştir (Shpilrain,1993, Umirbaev,1992). Bu kriterler serbest üreteç kümelerinin taşınamazlığı ile ilgili önemli koşullar elde edilmesine katkıda bulunmuştur. Kriterin benzeri serbest color Lie süpercebirleri için A.A.Mikhalev ve A.A.Zolotykh tarafından gösterilmiştir(A.A.Mikhalev , A.A.Zolotykh,1993).

Çalışmamızın ikinci bölümünde çalışmamızda kullanmış olduğumuz bazı temel tanımları ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinde verilen bir kümenin primitif bir sisteme taşınabilirliğini inceleyip rankın 3 olması durumunda primitif bir elemana taşınabilen belirli tipteki elemanları inceledik .

Drensky ve Gupta serbest nilpotent Lie cebirlerinin taşınamayan otomorfizmlere sahip olduğunu gösterdi(Drensky , Gupta,1990). Serbest metabelyen Lie cebirlerde de Bahturin ve Nabiyev taşınamayan otomorfizmlerin varlığını belirlediler (Bahturin , Nabiyev,1992).

4.bölümde önce bir serbest nilpotent Lie cebirinin bir primitif sistemine taşınabilen kümelerini araştırdık . $F/\gamma_{c+1}(F)$ serbest Lie cebirinin $F/\gamma_{c+1}(F)'$ serbest Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan bir otomorfizmini belirleyip rankı n olan serbest metabelyen Lie cebirlerinin n ranklı ve 3 türetilmiş uzunluklu serbest çözülebilir Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlerini inceledik.

Bir F serbest grubunun $Z(F)$ grup halkasında bir matrisin tersinirliğini değişmeli olmayan determinant kullanılarak belirleyen önemli bir sonuç yine Shpilrain tarafından verilmiştir (Shpilrain,1997).

5.bölümde $U(F)$ üzerindeki bir matrisin tersinirliği için zorunlu koşulları belirleyen bir kriter verdik. Bu kriter $L = F/F''$ serbest metabelyen Lie cebirinde verilen bir otomorfizmin taşınamazlığını tespit eden bir tekniktir ve temel çıkış noktası Dieudonné determinantına dayanmaktadır. Bunun bir sonucu olarak R, F nin F/R serbest polinilpotent olacak şekildeki bir ideali olmak üzere $U(F/R)$ üzerindeki bir matrisin tersinirliği için de zorunlu koşulları belirleyen bir başka kriter daha bulunmuştur. Aslında $U(F/R)$ üzerinde tanımlı olan bir kare matrisin tersinir olmadığını tespit eden bir teknik geliştirilmiştir. Bu tekniği taşınamayan otomorfizmlerin dolayısıyla taşınamayan üreteç kümelerinin belirlenmesinde kullandık. Bu tekniklerin uygulamasını yaparken önce değişmeli olmayan determinant ile bilinen determinant arasındaki farkı gösteren iki örnek verdik. Sonra serbest metabelyen Lie cebirlerinin taşınamayan otomorfizmlerinin varlığını gösterip R , F nin bir ideali olmak üzere F/R' cebirinin F nin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlere sahip olduğunu gösterdik. Ayrıca $m \geq 4$ olmak üzere $F/\gamma_m(F)$ cebirinin $F/\gamma_m(F)'$ cebirine taşınamayan bir serbest üreteç kümesinin olduğu ve $m = 2$ ve $m \geq 3$ için $F/\delta^m(F)$ cebirinin özel tipteki bazı üreteç kümelerinin $F/\delta^{m+1}(F)$ cebirinin bir üreteç kümesine taşınamayacağını gösterdik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Çalışmamızdaki bütün Lie cebirlerini karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerindeki Lie cebirleri olarak düşüneceğiz.

Tanım 2.1 X bir küme, F bir Lie cebiri ve $\iota : X \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her B Lie cebiri ve her $\alpha : X \to B$ dönüşümü için aşağıdaki diagramı değişmeli yapacak şekilde bir tek $\eta : F \to B$ Lie cebir homomorfizmi varsa F ye X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve X kümesine F nin serbest üreteç kümesi denir

$$\begin{array}{ccc} X & \to & F \\ \downarrow & \swarrow & \\ B & & \end{array}$$

Çalışmamızda $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebirini F ile göstereceğiz. X kümesi tarafından üretilen bir A birleşmeli cebirinin üzerindeki bilinen uzunluk fonksiyonunu l ile, $a \in A$ için l fonksiyonuna göre a içindeki en yüksek dereceli monomiallerin toplamını a^0 ile gösterelim. $a \in A$ için $a = a^0$ ise a ya homojen eleman denir. X kümesine bir " $<$ " tam sıralaması verilmiş olsun. $[ab]$ de X den gelen harf sayısına $[ab]$ nin uzunluğu diyeceğiz ve bunu $l[ab]$ ile göstereceğiz.

$$F^2 = \{[ab] \,|\, b < a, a, b \in X \text{ ve } l[ab] = 2\}$$

ve

$$F^m = \{[[ab]c] \,|\, b < a, b \leq c, c < [ab], a, b, c, ab \in \cup F^i \text{ve } l[[ab]c] = m\}$$

olsun. Buradaki F^m, m-uzunluklu elemanların kümesidir ve F^m nin gerdiği uzay homojen alt uzaydır. Bu uzayı $Sp(F^m)$ ile gösterelim. Dolayısıyla her $a \in Sp(F^m)$ homojen elemandır.

Bir $w \in F$ elemanının $x_1, ..., x_n$ üreteçleri cinsinden yazıldığını belirtmek için $w = w(x_1, ..., x_n)$ notasyonunu kullanacağız.

Tanım 2.2 I bir indis kümesi ve $Z = \{f_i : i \in I\}$,F nin herhangi bir alt kümesi olsun.

Aşağıdaki φ dönüşümüne Z kümesinin bir t-dönüşümü denir.

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & f_{i_0} \to \alpha f_{i_0} + g(f_{i_1}, ..., f_{i_p}), i_0 \in I \\ & f_i \to f_i, i \in I \setminus \{i_0\} \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in K\backslash\{0\}$ ve $g(f_{i_1}, ..., f_{i_p}) \in Z\backslash \{f_{i_0}\}$ kümesinin elemanlarının bir Lie polinomudur. Eğer $Z = \{f_i : i \in I\}$ kümesi F nin bir B alt cebirinin serbest üreteç kümesi ise Z nin t-dönüşümüne B cebirinin bir otomorfizmi karşılık gelir. Bu otomorfizme t-otomorfizmi denir.

Şimdi F nin sonlu ranklı olması durumunda herhangi bir otomorfizmin sonlu adımda elde edilebileceğini gösteren teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3 F sonlu bir X kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. F nin her otomorfizmi, X kümesine ardışık olarak t-dönüşümlerinin uygulanmasıyla elde edilir.

Teoremin ispatı (Cohn,1964) de bulunabilir.

F nin bir otomorfizminin bir serbest üreteç kümesini yine bir serbest üreteç kümesine dönüştürdüğü ve herhangi iki serbest üreteç kümesi arasında daima bir otomorfizmin varlığı yine Cohn tarafından gösterilmiştir(Cohn,1964).

$\gamma_m(F)$, F nin m-yinci alt merkezi terimi olsun. $\gamma_m(F)$ nin n-yinci alt merkezi terimini $\gamma_n(\gamma_m(F)) = F_{m,n}$ ile gösterelim.

Tanım 2.4 F bir serbest Lie cebiri ve $\{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$ tamsayıların bir dizisi olsun. $n_i \geq 1$ olmak üzere $F \supseteq F_{n_1} \supseteq F_{n_1,n_2} \supseteq ... \supseteq F_{n_1,n_{2,...,}n_i,n_i+1} \supseteq ....$ polisentral serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

F_{n_1}, F nin alt merkezi serisinin n_1-inci terimidir.

$F_{n_1,n_2} = (F_{n_1})_{n_2}$, F_{n_1} nin alt merkezi serisinin n_2-nci terimidir.

.

.

.

$F_{n_1,n_{2,...,}n_i,n_i+1} = (F_{n_1,n_{2,...,}n_i})_{n_i+1}, F_{n_1,n_{2,...,}n_i}$ nin alt merkezi serisinin n_i+1-inci terimidir.

Tanım 2.5 Eğer $F_{n_1,n_{2,...,}n_k} = \{0\}$ ve n_i lerin hiçbiri bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük pozitif tamsayılarla değiştirilemiyorsa F ye $\{n_1,n_{2,...,}n_k\}$ dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir. $L = F/F_{n_1,n_{2,...,}n_k}$ olacak şekilde X üzerinde bir serbest F Lie cebiri varsa L ye $\{n_1,n_{2,...,}n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir.

Şimdi de Fox türevlerini tanımlayalım.

Tanım 2.6 A, X kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. $\varepsilon : A \to K$, $1 \leq i \leq n$ için $\varepsilon(x_i) = 0$ olacak şekilde tanımlanan homomorfizme genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği, bazı X olan bir serbest sol A-modüldür. Bu modülü Δ ile gösterelim. Her $u \in \Delta$ elemanı $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ formunda tek bir şekilde yazılabilir. u nun $\{x_1,...,x_n\}$ bazına göre koordinatları olan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları fox türevleri olup bu türevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$(Kronecker delta)
2. Her $u,v \in A$ ve $\alpha,\beta \in K$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u + \beta v) = \alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta\frac{\partial v}{\partial x_i}$
3. Her $u,v \in A$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varepsilon(v) + u\frac{\partial v}{\partial x_i}$

koşullarını sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A(1 \leq i \leq n)$ dönüşümleri sol Fox türevleri olarak adlandırılır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A(1 \leq i \leq n)$ dönüşümlerine de sağ Fox türevleri denir.

1. $\frac{x_j\partial}{\partial x_i} = \delta_{ij}$(Kronecker delta)
2. Her $u,v \in A$ ve $\alpha,\beta \in K$ için $(\alpha u + \beta v)\frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha\frac{u\partial}{\partial x_i} + \beta\frac{v\partial}{\partial x_i}$
3. Her $u,v \in A$ için $(uv)\frac{\partial}{\partial x_i} = \varepsilon(u)\frac{v\partial}{\partial x_i} + \frac{u\partial}{\partial x_i}v$

Fox türevleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Fox,1953) te bulunmaktadır.

Her $x,y \in A$ için $[x,y] = xy - yx$ olsun. A nın bu elemanına x ile y nin komutatörü denir. A, $[,]$ çarpımı ile bir Lie cebiri olup bu cebir $[A]$ ile gösterilir.

Tanım 2.7 Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı birleşimli $U(F)$ cebirine F nin evrensel enveloping cebiri denir.

1. F den $[U(F)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\gamma: F \to [U(F)]$ homomorfizmi vardır.

2. K cismi üzerindeki birim elemanlı her B birleşmeli cebiri ve her $\varphi : F \to [B]$ homomorfizmi için $\psi\gamma = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\psi : [U(F)] \to B$ homomorfizmi vardır.

R, F serbest Lie cebirinin bir ideali olsun. $U(F)$ de R tarafından üretilen sol ideali Δ_R ile göstereceğiz. Δ_R nin $\varepsilon_R : U(F) \to U(F/R)$ doğal homomorfizminin çekirdeği olduğu açıktır.

Tanım 2.8 $W \subset F$ olsun. Eğer W kümesi F nin bir serbest üreteç kümesi tarafından içeriliyorsa W kümesine primitif küme ya da primitif sistem denir. Eğer W primitif kümesi $W = \{f\}$ şeklinde tek elemanlı ise f elemanına F nin bir primitif elemanı denir.

Tanım 2.9 $W = \{w_1, w_2, ..., w_m\} \subset F$ olsun. W kümesinin Jacobian matrisi $U(F)$ üzerinde $J(W) = (\frac{\partial w_i}{\partial x_j})_{\substack{1 \le i \le m \\ i \le j \le n}}$ olarak tanımlanır.

Çalışmamızın önemli bir bölümünde aşağıdaki iki temel önermeye ihtiyacımız olacaktır.

Önerme 2.10 R, F nin bir ideali ve $u \in F$ olsun. O zaman $u \in \Delta_R\Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in \gamma_2(R)$ olmasıdır.

Aşağıdaki önerme Fox türevleri için zincir kuralını verir (Fox,1953).

Önerme 2.11 $y_1, ...y_n, w \in U(F)$ ve $v = w(y_1, ...y_n)$ olsun. O zaman

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{\partial v}{\partial y_k} . \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

dir.

Şimdi Shpilrain tarafından ispatlanan aşağıdaki önemli teoremi inceleyelim.

Teorem 2.12 R,F nin bir ideali ve $Y=\{y_1,...y_n\}\subset F$ olsun. $F/\gamma_2(R)$ Lie cebirinin $\varepsilon_R(y_1),...,\varepsilon_R(y_n)$ kümesi tarafından üretilebilmesi için gerek ve yeter koşul $J(Y)$ matrisinin $U(F/R)$ de tersinir olmasıdır.

İspat: $y_1,...y_n$ elemanlarının görüntülerinin $F/\gamma_2(R)$ cebirini ürettiğini varsayalım. O zaman $v_1,...,v_n\in U(F)$ için $v_i(y_1,...y_n)\equiv x_i(mod\gamma_2(R))$ dir. Çünkü

$$J(V)=\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \\ \frac{\partial v_n}{\partial y_1} & \frac{\partial v_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

ve

$$J(Y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\sum\limits_{1\le k\le n}\frac{\partial v_i}{\partial y_k}.\frac{\partial y_k}{\partial x_k}+\Delta_R=\sum\limits_{1\le k\le n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\Delta_R\equiv\begin{cases}1\ (\mathrm{mod}\,\Delta_R) & i=j\\ 0\ (\mathrm{mod}\,\Delta_R) & i\neq j\end{cases}$ dir. Dolayısıyla $J(V)$ ile $J(Y)$ tersinirdir. $J(Y)$ matrisi $U(F/R)$ de tersinir olsun. $J(Y)$ nin tersini $J(Y)^{-1}$ ile gösterelim.

$$J(Y).X=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}x_1+...+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}x_1+...+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}x_n \end{bmatrix}$$

çarpımını düşünelim. $y_i=\sum\frac{\partial y_i}{\partial x_i}x_k(1\le i\le n)$ olup $J(Y).X=\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}=Y$ dir. Buna göre $X=J(Y)^{-1}Y$ elde edilir. Bu ise $x_1,...,x_n$ elemanlarının $U(F/R)$ de $y_1,...,y_n$ elemanları tarafından üretilen sol ideale ait olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x_1,...x_n$ elemanları

$y_1,...,y_n$ elemanları tarafından üretilen alt cebire aittir. O halde $y_1,...,y_n$ elemanları F yi üretir.

Şimdi bazı teknik önermeleri verelim.

Önerme 2.13 $u \in \Delta$ ve J, $U(F)$ nin bir ideali olsun. O zaman $u \in J\Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$, $(i = 1,..,n)$ olmasıdır.

İspat: $u \in J\Delta$ olsun. $v \in J$, $w \in \Delta$ olmak üzere $u = vw$ şeklindedir. Diğer taraftan $w \in \Delta$ olduğundan $w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Böylece,

$$u = vw = \sum_i v\frac{\partial w}{\partial x_i}x_i = v\frac{\partial w}{\partial x_1}x_1 + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}x_n$$

şeklinde olup buradan ,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(v\frac{\partial w}{\partial x_i}x_i) = v\frac{\partial w}{\partial x_i}$$

dir. Burada $v \in J$ olup J bir ideal olduğundan $v\frac{\partial w}{\partial x_i} \in J$ dir.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = v\frac{\partial w}{\partial x_2}$$

olup buradan $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in J$ elde edilir. İspatın diğer yönü için $u \in \Delta$ olmak üzere $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ olsun. $u = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ şeklinde yazıldığında $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ ve $x_i \in \Delta$ olup buradan da $u \in J\Delta$ sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.14 R, F nin bir ideali ve $u \in \gamma_{c+1}(R)$ olsun. O zaman $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \Delta_R\Delta^{c-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in \Delta_R\Delta^c$ olmasıdır.

İspat: $u \in \Delta_R.\Delta^c$ olsun. $\Delta_R.\Delta^c = \Delta_R.\Delta^{c-1}.\Delta$ olup önerme 2.13 den $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \Delta_R\Delta^{c-1}$ dır.

Önerme 2.15 $u \in \Delta$ ve R, F nin bir ideali olsun.O zaman $u \in \gamma_{c+1}(R)$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in \Delta_R\Delta^c$ olmasıdır.

İspat: İspatı c üzerinden tümevarım ile yapalım. $c = 1$ için ; $u \in \gamma_2(R)$ olup Önerme 2.10 ten $u \in \Delta_R\Delta$ dır. İddia $k < c+1$ için doğru olsun. $u \in \gamma_{c+1}(R)$ ise $v \in \gamma_c(R), w \in R$ olmak üzere $u = [v,w]$ şeklindedir. $v \in \gamma_c(R)$ olup tümevarım hipotezinden $v \in \Delta_R\Delta^{c-1}$ dir. $u = [v,w] = vw - wv, v \in \Delta_R\Delta^{c-1}$ *ve* $w \in R \subset \Delta_R$ olup $vw \in \Delta_R\Delta^c$ dir. $w \in \Delta_R$ ve $v \in \Delta_R\Delta^{c-1}$

olup $wv \in \Delta_R.\Delta_R.\Delta^{c-1}$ dir. $\Delta_R \subset \Delta$ olduğundan $wv \in \Delta_R.\Delta_R.\Delta^{c-1} \subset \Delta_R.\Delta.\Delta^{c-1} \subset \Delta_R.\Delta^c$ dir. Dolayısıyla $u \in \Delta_R.\Delta^c$ dir.

Tanım 2.16 S bir R halkasının(ya da cebirinin) sıfır içermeyen bir alt kümesi olsun. R nin S ye bağlı Lokalizasyonu $S^{-1}R =< R, s^{-1}(s \in S); ss^{-1} = s^{-1}s = 1(s \in S) >$ halkası(ya da cebiri)dır. $S^{-1}R$ üreteçlerin seçimine ve R deki bağıntılara bağlı değildir. $S^{-1}R$ nin elemanları $r_0 s_1^{-1} r_1 s_2^{-1} r_2 ... s_k^{-1} r_k (s_i \in S, r_i \in R)$ monomiallerinin tüm lineer toplamlarıdır. $S^{-1}R$ nin tüm elemanları $s^{-1}r$ formunda olsun ve $R \to S^{-1}R$ dönüşümü $r \to r = r.1^{-1}$ şeklinde tanımlanan bir içerme olsun. Bu durumda $S^{-1}R$ ye R nin S ye göre bölümlerinin sol halkası denir ve $Q_{cl}(R,S)$ ile gösterilir. Her $s \in S$ ve $r \in R$ için eğer $s_1 r = r_1 s$ olacak şekilde $s_1 \in S$ ve $r_1 \in R$ varsa S ye bağlı sol Ore koşulu R de sağlanır deriz. Yani bir Ore bölgesinde herhangi iki eleman bir ortak kata sahiptir. Serbest polinilpotent Lie cebirlerinin evrensel enveloping cebirinin Ore bölgesi olduğu Kharlampovich tarafından (Kharlampovich ,1984) te gösterilmiştir.

Teorem 2.17 $Q_{cl}(R,S)$ nin var olması için gerek ve yeter koşul S nin elemanlarının sıfır bölensiz olması ve S ye bağlı sol Ore koşulunun R de sağlanmasıdır.

Eğer S, R nin tüm regüler elemanlarının (sıfırdan farklı bölenler) bir kümesi ve $Q_{cl}(R,S)$ varsa R ye bir sol Ore halkası yada sol Ore koşulunu sağlayan halka denir.

3. SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERDE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK

Bu bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinde verilen bir kümenin primitif bir sisteme taşınabilirliğini inceleyip rankın 3 olması durumunda primitif bir elemana taşınabilen belirli tipteki elemanları inceledik.

Tanım 3.1 F de $1 \leq i \leq m$ için $u_i \in F'$ olmak üzere $\{x_1+u_1,...,x_m+u_m\}$ şeklindeki bir alt kümeye bir IA-sistemi, eğer bu sistem F nin $\{x_1+u_1,...,x_m+u_m,x_{m+1}+u_{m+1},...,x_n+u_n\}$ formundaki bir serbest üreteç kümesine genişletilebiliyorsa bu sisteme IA-primitif sistem denir.

3.1 Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinde Kümelerin Primitif Taşınması

K karakteristiği sıfır olan cisim ve F, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. X tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebirini M ile gösterelim. $F'=[F,F]$ olmak üzere F/F'' serbest metabelyen Lie cebiri olup M ile F/F'' cebirini özdeşleştireceğiz. Bu kısımda M cebirinde primitif bir sistemin F deki bir primitif sisteme hangi durumlarda taşınabileceğini inceleyeceğiz. M de bir $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ primitif sistemini düşünelim. Her bir w_i elemanı $\alpha_j \in K$ ve $u_i \in M'$ olmak üzere $w_i=\sum \alpha_j x_k+u_i$ formundadır. Eğer W sistemi modulo M' primitif ise M nin bir α otomorfizmi için $\alpha(W)=\{x_1+u_1,...,x_m+u_m\}$ dır.

Tanım 3.2 α, $F/\gamma_c(F)$ nin $i=1,2,...,n$ için $x_i \to y_i$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizmi olsun. Eğer $v_i \in \gamma_c(F)$ için $\overline{\alpha}: x_i \to y_i+v_i, i=1,2,...,n$ olacak şekilde F nin bir $\overline{\alpha}$ otomorfizmi varsa α ya tame otomorfizm denir. Bu durumda "α, F nin bir otomorfizmine taşınabilir" denir.

Tanım 3.3 $W=\{w_1,w_2,...,w_m\} \subset F, m \leq n$ olsun. Eğer $\{w_1+v_1,w_2+v_2,...,w_m+v_m\}$ primitif olacak şekilde $v_1,v_2,...,v_m \in \gamma_c(F)$ elemanları varsa W sistemine modulo $\gamma_c(F)$ primitiftir denir. Veya bu tanıma denk olarak eğer $\{w_1+\gamma_c(F),w_2+\gamma_c(F),...,w_m+\gamma_c(F)\}$ kümesi $F/\gamma_c(F)$ de primitif ise W sistemine modulo $\gamma_c(F)$ primitiftir denir.

Tanım 3.4 $W = \{w_1, w_2, ..., w_m\} \subset F, m \leq n$ olsun. Eğer bazı $v_1, v_2, ..., v_m \in \gamma_c(F)$ elemanları için $W_1 = \{w_1 + v_1, w_2 + v_2, ..., w_m + v_m\}$ kümesi $k > c$ için modulo $\gamma_k(F)$ primitif ise W sistemi $\gamma_c(F)$ yoluyla $\gamma_k(F)$ primitif sisteme taşınabilir denir.

Teorem 3.5 Eğer $u_i \in M'$ ve $m \leq n$ olmak üzere $\{x_1 + u_1, ..., x_m + u_m\}$ IA-sistemi M de primitif ise IA-primitiftir.

İspat: $i = 1, .., m$, $j = m+1, ..., n$, $\alpha_{jk} \in K$ ve $v_j \in M'$ için $y_i = x_i + u_i, z_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k + v_j$ olmak üzere $\{y_1, ..., y_m, z_{m+1}, ..., z_n\}$ kümesi M nin bir serbest üreteç kümesi olsun. M nin

$$\begin{aligned} \theta \quad : \quad & z_j \to z_j - \sum \alpha_{jk} y_k, m+1 \leq j \leq n, \\ & y_j \to y_j, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

otomorfizmini bu kümeye uygularsak $j = m+1, ..., n$ ve $v'_j \in M'$ için $z'_j = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_{jk} x_k + v'_j$ olmak üzere M nin $\{y_1, ..., y_m, z'_{m+1}, ..., z'_n\}$ serbest üreteç kümesini elde ederiz. M de primitif elemanların yapısı dolayısıyla her bir z'_j için $\alpha_{jj} \neq 0$ dır. Şimdi $j = m+1, ..., n$ için z'_j elemanlarını açık olarak yazalım.

$$\begin{aligned} z'_{m+1} &= \alpha_{(m+1)(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{(m+1)(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{(m+1)n} x_n + v'_{m+1} \\ z'_{m+2} &= \alpha_{(m+2)(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{(m+2)(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{(m+2)n} x_n + v'_{m+2} \\ &\vdots \\ z'_n &= \alpha_{n(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{n(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{nn} x_n + v'_n \end{aligned}$$

dır. $\alpha_{(m+2)k} \neq 0$ olacak şekildeki skalerler için

$$\begin{aligned} \theta_k \quad : \quad & z_{m+1} \to z_{m+1} - \alpha_{(m+1)k} \alpha^{-1}_{(m+2)k} z'_{m+2}, \; k = m+2, ..., n \\ & z_j \to z_j, \; j \geq m+1 \end{aligned}$$

elemanter dönüşümlerinin ardışık olarak uygulanmasıyla $z''_{m+1} = \beta_{m+1} x_{m+1} + v'_{m+1}$ olmak üzere $\{y_1, ..., y_m, z''_{m+1}, z'_{m+2} ..., z'_n\}$ kümesi elde edilir. Benzer şekilde $z'_{m+2} ..., z'_n$

üreteçleri de uygun elemanter dönüşümlerle $z_j'' = \beta_j x_j + v_j' , \beta_j \in K, v_j \in M'$ formundaki üreteçlere dönüştürülür. Böylece $\{y_1,...,y_m, z_{m+1}'', z_{m+2}'', ..., z_n''\}$ serbest üreteç kümesi elde edilir. Bu kümeye

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & z_j'' \to \beta^{-1} z_j'', j = m+1,....,n \\ & y_i \to y_i,\ i = 1,2,...,n \end{aligned}$$

dönüşümünün uygulanmasıyla sonuç elde edilir.

Teorem 3.6 $1 \leq m \leq p \leq n$ olsun. Her $c \geq 2$ ve $v_i \in \gamma_c(M)$ için $\{x_1+v_1, x_2+v_2, ..., x_m+v_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ IA-sistemi $w_i \in \gamma_{c+1}(M)$ olmak üzere M nin $\{x_1+v_1+w_1, x_2+v_2+w_2, ..., x_m+v_m+w_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ primitif sistemine taşınabilir olsun. O zaman her $c \geq 2$ ve $u_i \in M'$ için $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ IA-sistemi $w_i \in \gamma_{c+1}(M)$ olmak üzere M nin $\{x_1+u_1+w_1, x_2+u_2+w_2, ..., x_m+u_m+w_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ primitif sistemine taşınabilir.

İspat: c üzerinde tümevarımla M nin $u_i \in M'$ için $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ IA-sistemini, $u_{i,c} \in \gamma_c(M)$ olmak üzere $\{x_1+u_1+u_{1,c}, x_2+u_2+u_{2,c}, ..., x_m+u_m+u_{m,c}, x_{m+1}, ..., x_p\}$ sistemine dönüştüren bir α otomorfizminin bulunduğunu göstermek yeterlidir. $c = 2$ için α birim otomorfizm seçilsin. Bu durumda ispat biter. $c > 2$ için tümevarım hipotezinden $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ sistemi $u_{m,c-1} \in \gamma_{c-1}(M)$ olmak üzere $\{x_1+u_1+u_{1,c-1}, x_2+u_2+u_{2,c-1}, ..., x_m+u_m+u_{m,c-1}, x_{m+1}, ..., x_p\}$ sistemine taşınabilir. Bu durumda sistem $w_i \in \gamma_c(M)$olmak üzere $\{x_1+u_1+u_{1,c-1}+w_1, x_2+u_2+u_{2,c-1}+w_2, ..., x_m+u_m+u_{m,c-1}+w_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ sistemine taşınabilir. Bu sistemde $g_1 = x_1+u_1+u_{1,c-1}+w_1$, $g_2 = x_2+u_2+u_{2,c-1}+w_2, ..., g_m = x_m+u_m+u_{m,c-1}+w_m, g_{m+1} = x_{m+1}, ..., g_p = x_p$ diyelim.

$$\begin{aligned} \alpha : x_i+u_i \quad & \to \quad g_i,\ i = 1,...,m \\ x_j \quad & \to \quad x_j,\ j = m+1,...,n \end{aligned}$$

olacak şekilde ki α otomorfizmini düşünelim. $i = 1,2,...,m$ için $\alpha^{-1}(g_i) = x_i+u_i$ ve $i = m+1,...,n$ i çin $\alpha^{-1}(g_i) = x_i$ dir. $i = 1,2,...,m$ için $\alpha^{-1}(x_i+u_i+u_{i,c-1}) = \alpha^{-1}(g_i-w_i) = x_i+u_i+\alpha^{-1}(-w_i)$ ve $k = m+1,..,n$ için $\alpha^{-1}(x_k) = x_k$ olur. Bu

eşitlikteki $\alpha^{-1}(-w_i)$ lerin yerine $u_{i,c}$ yazalım. Bu durumda $\{x_1+u_1+u_{1,c}+w_1, x_2+u_2+u_{2,c}+w_2, ..., x_m+u_m+u_{m,c}+w_m, x_{m+1}, ..., x_p\}$ sisteminde $u_{i,c}+w_i = w_i'$ alınırsa sistem $\{x_1+u_1+w_1', x_2+u_2+w_2', ..., x_m+u_m+w_m', x_{m+1}, ..., x_p\}, w_i' \in \gamma_c(M)$ olur.

Teorem 3.7 $1 \leq m \leq n, c \geq 2$ için her $\{x_1+v_1, x_2, ..., x_m\}, v_1 \in \gamma_2(M)$ IA-sistemi ($\gamma_{c+1}(M)$ yoluyla) M nin bir primitif sistemine taşınabiliyorsa $u_i \in \gamma_2(M)$ olmak üzere her $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m\}$ IA-sistemi M nin bir primitif sistemine taşınabilir.

İspat: m üzerinde tümevarımla yapalım. $m=1$ ise sonuç açıktır. $m>1$ ve iddia m den az sayıda eleman içeren tüm IA-sistemleri için doğru olsun. Bu durumda $\{x_2+u_2, ..., x_m+u_m\}$, M nin bir primitif sistemine taşınabiliyor ve Teorem 3.5 den dolayı bu sistem bir IA- primitif sisteme taşınabiliyor olsun. O zaman $i=2, ..., m$ için $w_i \in \gamma_{c+1}(M)$ olmak üzere $\alpha : x_i+u_i+w_i \to x_i$ ve $v_1 \in \gamma_2(M)$ için $\alpha : x_1+u_1 \to x_1+v_1$ olacak şekilde bir α otomorfizmi vardır. O halde $\alpha, \{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m\}$ sistemini $w_i' \in \gamma_{c+1}(M)$ olmak üzere $\{x_1+v_1, x_2+w_2', ..., x_m+w_m'\}$ sistemine dönüştürür. Böylece problem $v_1' \in \gamma_2(M)$ olmak üzere $\{x_1+v_1', x_2, ..., x_m\}$ sisteminin $\gamma_{c+1}(M)$ yoluyla primitif taşınmasına indirgenmiş olur. Bu ise hipotezde verilmişti. O halde $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m\}$, M nin bir primitif sistemine taşınabilir.

Teorem 3.6 ve 3.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.8 $c \geq 2, 1 \leq m \leq n$ ve $u_1 \in \gamma_c(M)$ için eğer her $\{x_1+u_1, x_2, ..., x_m\}$ *IA*-sistemi M nin bir primitif sistemine $\gamma_{c+1}(M)$ yoluyla taşınabiliyor ise o zaman $u_i \in \gamma_2(M)$ için her $\{x_1+u_1, x_2+u_2, ..., x_m+u_m\}$ *IA*-sistemi $\gamma_{c+1}(M)$ yoluyla M nin bir primitif sistemine taşınabilir.

Teorem 3.9 $\forall \lambda_i \in \Delta^{c-2}, c \geq 3$, $\lambda_i \in U(M/M')$ için $g = \{g_1, ..., g_n\}$ sistemi g_i lerin aşağıdaki seçimiyle M nin bir serbest üreteç kümesidir.

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1 + \lambda[x_1, x_2] + \lambda[x_2, x_3] \\ g_3 &= x_3 + \lambda[x_1, x_2] + \lambda[x_2, x_3] \\ g_i &= x_i, \ i \neq 1, 3 \end{aligned}$$

İspat: g nin $J(g)$ Jacobian matrisinin tersinir olduğunu göstermek yeterlidir. $J(g)$ matrisi

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda x_2 & -\lambda x_1+\lambda x_3 & -\lambda x_2 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \lambda x_2 & -\lambda x_1+\lambda x_3 & 1-\lambda x_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. $DetJ(g) = 1$ olduğundan $J(g)$, $U(F/F')$ üzerinde tersinirdir. Böylece $g = \{g_1, ..., g_n\}$ sistemi serbest üreteç kümesidir.

Tanım 3.10 w, M nin bir elemanı olsun. Eğer bir $v \in \gamma_c(F)$ için $w+v$ elemanı modulo $\gamma_k(F)$ primitif ise w elemanına $\gamma_c(F)$ yoluyla modulo $\gamma_k(F)$ bir primitif elemana taşınabilir denir.

Teorem 3.11 $n \geq 3$ ve $c \geq 2$ olmak üzere g, M nin modulo $\gamma_{c+1}(M)$ primitif olacak şekildeki bir elemanı olsun. O zaman g, M nin bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: $u \in M'$ olmak üzere $g = x_3 + u$ formunda olduğunu varsayabiliriz. g modulo $\gamma_{c+1}(M)$ primitif olduğundan $u \in \gamma_c(M)$ olduğunu göz önüne alıp g yi

$$g = x_3 + \sum_{1\leq i<j\leq n, i,j\neq 3} \lambda_j \left[x_i, x_j\right] + \sum_{1\leq j\leq n, j\neq 3} \lambda_j \left[x_j, x_3\right] (mod \gamma_{c+1}(M)), \lambda_j \in \Delta^{c-2} \cap U(M/M')$$

olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} h_3 &= x_3 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_j \left[x_i, x_j\right] \\ h_i &= x_i, i = 1, 2, 4, ..., n \end{aligned}$$

olacak şekilde $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ kümesini tanımlayalım. $J(H) = (\partial h_i / \partial x_i)$ Jacobian matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & 1 & \frac{\partial h_3}{\partial x_4} & ... & \frac{\partial h_3}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $DetJ(H) = 1$ olduğundan $J(H)$ tersinirdir. Bu küme serbest üreteç kümesidir. O zaman $\beta : h_i \to x_i$ olacak şekilde M nin bir β otomorfizmi vardır öyle ki

$$\beta(g) = x_3 + \sum_{1 \le i < j \le n,\ i,j \ne 3} \lambda_j \left[x_j, x_3\right] (mod \gamma_{c+1}(M))$$

dir. Gerçekten g yi h_i ler cinsinden $g = h_3 + \sum \lambda_j \left[x_j, x_3\right] (mod \gamma_{c+1}(M)) = h_3 + \sum \lambda_j \left[h_j, h_3 - \lambda_j \left[h_i, h_j\right]\right] (mod \gamma_{c+1}(M)) = h_3 + \sum \lambda_j \left[h_j, h_3\right] (mod \gamma_{c+1}(M))$ olarak yazarsak $g_1 = x_3 + \sum \lambda_j \left[x_j, x_3\right]$ olduğu görülür. Bu durumda $g_1 = x_3 + \sum \lambda_j \left[x_j, x_3\right]$ nin $\gamma_{c+1}(M)$ yoluyla M nin bir primitif elemanına taşınabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Her $i \ne 3,\ j \ne 3, i$ için

$$\begin{aligned} h_{j3} &= x_j + \lambda_j \left[x_j, x_3\right] + \lambda_j \left[x_i, x_j\right] \\ h_{ji} &= x_i + \lambda_j \left[x_j, x_3\right] + \lambda_j \left[x_i, x_j\right] \\ h_{jk} &= x_k,\ k \ne 3, i \end{aligned}$$

olsun. $H^* = \{h_{j1}, \ldots, h_{jn}\}$ kümesini düşünelim.

$$\begin{aligned} \tau_i \ : \ & x_i \to x_1 \\ & x_j \to x_2 \\ & x_3 \to x_3 \\ & x_k \to x_k,\ k \ne 3, i, j \end{aligned}$$

olacak şekilde M nin bir τ_i tame otomorfizmi vardır. Bu otomorfizm $H^* = \{h_{j1}, \ldots, h_{jn}\}$ sistemini

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1 + \lambda_j [x_1, x_2] + \lambda_j [x_2, x_3] \\ g_3 &= x_3 + \lambda_j [x_1, x_2] + \lambda_j [x_2, x_3] \\ g_i &= x_i,\ i \neq 1,3 \end{aligned}$$

olmak üzere $G = \{g_1, ..., g_n\}$ sistemine dönüştürür. Teorem 3.9 dan $\{g_1, ..., g_n\}$, M nin bir serbest üreteç kümesi olup

$$\alpha_j(x_3 + \lambda_j \left[x_j, x_3\right]) = x_3 mod \gamma_{c+1}(M)$$

olacak şekilde bir α_j otomorfizmi vardır. Bu otomorfizm ardışık olarak uygulanırsa

$$\alpha_2 ... \alpha_n(x_3 + \sum \lambda_j \left[x_j, x_3\right]) = x_3 (mod \gamma_{c+1}(M))$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Bir Elemanın Primitif Taşınması

Şimdi rankı 3 olan serbest metabelyen Lie cebirlerinde belirli formdaki elemanların primitif taşınabilirliğini inceleyeceğiz.

Teorem 3.12 *M cebirinin aşağıdaki formda olan elemanları F nin bir primitif elemanına taşınabilir. $\alpha, \beta, \gamma, c, k \in K$ olmak üzere*

1. $g = x_1 + \alpha \left[\left[x_1', x_2' \right], x_2 \right] + \beta \left[\left[x_1', x_3 \right], x_3 \right] + \gamma [x_2, x_3]$,
2. $u = x_2 + \alpha \left[\left[x_1', x_2' \right], x_1 \right] + \beta [[x_2, x_3], x_3] + \gamma [x_1, x_3]$,
3. $v = x_3 + \alpha \left[\left[x_1', x_3 \right], x_1 \right] + \beta [[x_2, x_3], x_2] + k [x_1, x_2] + c \left[x_1', x_2' \right]$,
4. $h = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \alpha [x_2, x_3] + \beta \left[x_1', x_3 \right] + \gamma \left[x_1', x_2' \right]$.

Burada $x_1' = x_1 + [x_2, x_3]$ ve $x_2' = x_2 + [x_1', x_3]$ dir.

İspat:

1. α,β,γ cisim elemanlarını $\gamma = a+k, \alpha = -(-\frac{\alpha k}{k}), \beta = \frac{\beta.k}{k}$ şeklinde parçalayalım. $b = \frac{\beta}{k}$, $c = -\frac{\alpha}{k}$ olmak ü zere

$$\begin{aligned}\phi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + a\left[x_2, x_3\right], \\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right], \\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

şeklindeki ϕ tame otomorfizmini tanımlayalım. Burada $x_1^{'} = x_1 + a[x_2, x_3]$ ve $x_2^{'} = x_2 + b[x_1^{'}, x_3]$ dir. ψ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\psi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [x_2, x_3], \\ & x_2 \to x_2, \\ & x_3 \to x_3\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm olmak üzere $\psi\phi$ otomorfizmini hesaplarsak

$$\begin{aligned}\psi\phi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + a\left[x_2, x_3\right] + k\left[x_2, x_3\right] + kc\left[x_2, [x_1^{'}, x_2^{'}]\right] + kb\left[\left[x_1^{'}, x_3\right], x_3\right], \\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right], \\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

bulunur .

$$\begin{aligned}\psi\phi \quad : \quad & x_1 \to g, \\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right], \\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

dir. O halde $\psi\phi$ tame olup g, F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

2. α,β,γ cisim elemanlarını $\gamma = b+k, \alpha = -(-\frac{\alpha k}{k}), \beta = \frac{\beta.k}{k}$ şeklinde parçalayalım. $a = \frac{\beta}{k}$, $c = -\frac{\alpha}{k}$ olmak üzere ϕ dönüşümünü

$$\begin{aligned}\phi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + a\left[x_2, x_3\right], \\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right], \\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. ϕ dönüşümü tame otomorfizmidir. ψ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\psi \;:\; & x_1 \to x_1,\\ & x_2 \to x_2 + [x_1, x_3],\\ & x_3 \to x_3\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm olmak üzere $\psi\phi$ otomorfizmini hesaplarsak

$$\begin{aligned}\psi\phi \;:\; & x_1 \to x_1 + a[x_2, x_3]\\ & x_2 \to x_2 + b[x_1, x_3] + k[x_1, x_3] + (-kc)\left[\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right], x_1\right] + ka[[x_2, x_3], x_3],\\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\psi\phi$ tame olup u, F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

3. α, β cisim elemanlarını ,$\alpha = -(-\frac{\alpha k}{k}), \beta = \frac{\beta . k}{k}$ şeklinde parçalayalım. $a = \frac{\beta}{k}$, $b = -\frac{\alpha}{k}$ olmak üzere ϕ ve ψ otomorfizmlerini

$$\begin{aligned}\phi \;:\; & x_1 \to x_1 + a[x_2, x_3],\\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right],\\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi \;:\; & x_1 \to x_1,\\ & x_2 \to x_2,\\ & x_3 \to x_3 + [x_1, x_2]\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm olmak üzere $\psi\phi$ otomorfizmini hesaplarsak

$$\begin{aligned}\psi\phi \;:\; & x_1 \to x_1 + a[x_2, x_3],\\ & x_2 \to x_2 + b\left[x_1^{'}, x_3\right],\\ & x_3 \to x_3 + c\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right] + k[x_1, x_2] + ka[[x_2, x_3], x_3] - kb\left[\left[x_1^{'}, x_3\right], x_1\right]\end{aligned}$$

olup v, F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

4. α,β,γ cisim elemanlarını, $\alpha=\frac{\alpha k_1}{k_1},\beta=\frac{\beta.k_2}{k_2}$, $\gamma=\frac{\gamma k_3}{k_3}$ şeklinde parçalayalım. $a=\frac{\alpha}{k_1}$, $b=\frac{\beta}{k_2}, c=\frac{\gamma}{k_3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi \;:\; & x_1 \to x_1+\frac{\alpha}{k_1}[x_2,x_3],\\ & x_2 \to x_2+\frac{\beta}{k_2}\left[x_1^{'},x_3\right],\\ & x_3 \to x_3+\frac{\gamma}{k_3}\left[x_1^{'},x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

ve ψ otomorfizmini

$$\begin{aligned}\psi \;:\; & x_1+\frac{\alpha}{k_1}[x_2,x_3] \to k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_1\frac{\alpha}{k_1}[x_2,x_3]+k_2\frac{\beta}{k_2}\left[x_1^{'},x_3\right]+k_3\frac{\gamma}{k_3}\left[x_1^{'},x_2^{'}\right],\\ & x_2+\frac{\beta}{k_2}\left[x_1^{\prime},x_3\right] \to x_2+\frac{\beta}{k_2}\left[x_1^{'},x_3\right],\\ & x_3+\frac{\gamma}{k_3}\left[x_1^{'},x_2^{'}\right] \to x_3+\frac{\gamma}{k_3}\left[x_1^{\prime},x_2^{\prime}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde ψ tame olup h, F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

Aşağıdaki örneklerde K gerçel cisim olarak düşünülecektir.

Örnek 3.13 $g_1=x_1+3\left[\left[x_1^{'},x_2^{'}\right],x_2\right]+2\left[\left[x_1^{'},x_3\right],x_3\right]+4[x_2,x_3]$ elemanını alalım.$4=2+2,3=-((-3/2).2),2=1.2$ olmak üzere $a=2$, $b=2,c=-3/2,k=2$ alınırsa

$$\begin{aligned}\phi \;:\; & x_1 \to x_1+2[x_2,x_3],\\ & x_2 \to x_2+\left[x_1^{'},x_3\right],\\ & x_3 \to x_3+(\frac{-3}{2})\left[x_1^{'},x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi: x_1+2[x_2,x_3] &\to x_1+2[x_2,x_3]+2[x_2,x_3]+2\left[\left[x_1^{'},x_3\right],x_3\right]+2(\frac{-3}{2})\left[x_2,\left[x_1^{'},x_2^{\prime}\right]\right],\\ x_2+\left[x_1^{'},x_3\right] &\to x_2+\left[x_1^{'},x_3\right],\\ x_3+(\frac{-3}{2})\left[x_1^{'},x_2^{\prime}\right] &\to x_3+(\frac{-3}{2})\left[x_1^{'},x_2^{'}\right]\end{aligned}$$

olmak üzere ψ tame dir.

Örnek 3.14 $u_1 = x_2 + 4\left[\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right], x_1\right] + 3\left[\left[x_2, x_3\right], x_3\right] + 5\left[x_1, x_3\right]$, elemanı için $\gamma = 5 = 3+2 = b+k$, $\alpha = 4 = -(-2\cdot 2) = -(-ck)$, $\beta = 3 = \frac{3}{2}\cdot 2 = ak$ alınırsa yukarıdaki dönüşümlerle taşınabilir olduğu görülür.

4. SERBEST NİLPOTENT LİE CEBİRLERDE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK

F, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $n\geq 2$ olmak üzere X tarafından üretilen ve k-yıncı sınıftan serbest nilpotent olan Lie cebirini L ile gösterelim. L ile $F/\gamma_k(F)$ cebirini özdeşleştireceğiz.

Bir otomorfizmin ya da serbest üreteç kümelerinin taşınması problemi L serbest nilpotent Lie cebirinin bir endomorfizminin otomorfizm olması için uygun gerek ve yeter koşulun bulunması problemi ile bağlantılıdır. Bu kısımda önce L nın bir primitif sistemine taşınabilen kümelerini araştırdık. $F/\gamma_{c+1}(F)$ serbest Lie cebirinin $F/\gamma_{c+1}(F)'$ serbest Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan bir otomorfizmini belirleyip rankı n olan serbest metabelyen Lie cebirlerinin n ranklı ve 3 türetilmiş uzunluklu serbest çözülebilir Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlerini inceledik.

4.1 Serbest Nilpotent Lie Cebirlerinde Kümelerin Primitif Taşınması

Şimdi L cebirinde primitif bir sistemin F deki bir primitif sisteme hangi durumlarda taşınabileceğini inceleyeceğiz.

L de bir $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ sistemini düşünelim. Her bir w_i elemanı $\alpha_j\in K$ ve $u\in L'$ olmak üzere $w_i=\sum\alpha_j x_j+u_i$ formundadır. Eğer W sistemi modulo L' primitif ise L nin bir α tame otomorfizmi için $\alpha(W)=\{x_1+u_1,...,x_m+u_m\}$ dır. Böylece sistemlerin primitif taşınması IA-sistemlerin primitif taşınmasına indirgenir.

Teorem 4.1 Eğer $u_i\in L'$ ve $m\leq n$ olmak üzere $\{x_1+u_1,...,x_m+u_m\}$ IA-sistemi L de primitif ise IA-primitiftir.

İspat: $y_i=x_i+u_i, i=1,...,m, z_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}x_k+v_j, j=m+1,...,n, \alpha_{jk}\in K, v_j\in L'$ olmak üzere

$$\{y_1,...,y_m,z_{m+1},...,z_n\}$$

L nin bir serbest üreteç kümesi olsun. L nin aşağıdaki gibi tanımlanan bir ϕ otomor-

fizmini düşünelim.

$$\begin{aligned}\phi \;\; : \;\; & z_j \to z_j - \sum \alpha_{jk} y_k, k = 1, ..., m, \\ & y_i \to y_i, m \leq i \leq n.\end{aligned}$$

ϕ yi kullanarak $\{y_1, ..., y_m, z_{m+1}, ..., z_n\}$ serbest üreteç kümesini $z_j^{'} = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_{jk} x_k + v_j^{'}, v_j^{'} \in L^{'}$ olmak üzere $\{y_1, ..., y_m, z_{m+1}^{'}, ..., z_n^{'}\}$ serbest üreteç kümesine dönüştürelim. Her $z_j^{'}$ primitif eleman olduğundan $\alpha_{jj} \neq 0$ dır. Şimdi $j = m+1, ..., n$ için z_j' elemanlarını açık olarak yazalım.

$$\begin{aligned}
z'_{m+1} &= \alpha_{(m+1)(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{(m+1)(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{(m+1)n} x_n + v'_{m+1} \\
z'_{m+2} &= \alpha_{(m+2)(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{(m+2)(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{(m+2)n} x_n + v'_{m+2} \\
&\;\; . \\
&\;\; . \\
&\;\; . \\
z'_n &= \alpha_{n(m+1)} x_{m+1} + \alpha_{n(m+2)} x_{m+2} + ... + \alpha_{nn} x_n + v'_n
\end{aligned}$$

$\alpha_{(m+2)k} \neq 0$ olacak şekildeki skalerler için

$$\begin{aligned}\theta_k \;\; : \;\; & z'_{m+1} \to z'_{m+1} - \alpha_{(m+1)k} \alpha^{-1}_{(m+2)k} z'_{m+2}, \; k = m+2, ..., n \\ & z_j \to z_j, \; j \geq m+1\end{aligned}$$

elemanter dönüşümlerinin ardışık olarak uygulanmasıyla $z''_{m+1} = \beta_{m+1} x_{m+1} + v''_{m+1}$, $\beta_{m+1} \in K, v''_{m+1} \in L'$ olmak üzere $\{y_1, ..., y_m, z''_{m+1}, z'_{m+2} ..., z'_n\}$ kümesi elde edilir. Benzer şekilde $z'_{m+2} ..., z'_n$ üreteçleri de uygun elemanter dönüşümlerle $z''_j = \beta_j x_j + v''_j$, $\beta_j \in K, v''_j \in L'$ formundaki üreteçlere dönüştürülür. Böylece $\{y_1, ..., y_m, z''_{m+1}, z''_{m+2} ..., z''_n\}$ serbest üreteç kümesi elde edilir. Bu kümeye

$$\begin{aligned}\varphi \;\; : \;\; & z''_j \to \beta_j^{-1} z''_j, \beta_j^{-1} \in K, j = m+1, ..., n \\ & y_i \to y_i, \; i = 1, 2, ..., n\end{aligned}$$

dönüşümünün uygulanmasıyla sonuç elde edilir.

Tanım 4.2 α, F/R nin $i = 1,2,...,n$ için $x_i \to y_i$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizmi olsun. Eğer $v_i \in R$ için $\overline{\alpha} : x_i \to y_i + v_i, i = 1,2,...,n$ olacak şekilde F/R' nün bir $\overline{\alpha}$ otomorfizmi varsa α, F/R' nün bir otomorfizmine taşınabilir denir.

Önerme 4.3 $k \geq 3$ olmak üzere $F/\gamma_{k-1}(F)$ nin her otomorfizmi L nın bir otomorfizmine taşınabilir.

İspat: $F/\gamma_{k-1}(F)$ nin bir ϕ otomorfizmi $u_i \in (F/\gamma_{k-1}(F))'$ olmak üzere

$$\phi(x_i) = \sum \alpha_{ij} x_j + u_i$$

şeklindedir. Burada $\phi(x_i)$ bir otomorfizm olduğundan ϕ nin lineer kısmı tersinirdir. $w_i \in \gamma_{k-1}(F)/\gamma_k(F)$ olmak üzere

$$\psi(x_i) = \sum \alpha_{ij} x_j + u_i + w_i, i = 1,...,n$$

şeklindeki $\psi : L \to L$ homomorfizmini düşünelim. $\psi(x_i)$ nin lineer kısmı tersinir olduğundan ψ bir otomorfizm ve

$$\phi(x_i) \equiv \psi(x_i)(mod \gamma_k(F))$$

dir.

Önerme 4.4 $1 \leq m \leq n$ olsun. Her $c \geq 2 (2 \leq c < k-1)$ için $v_i \in \gamma_c(L)$ olmak üzere her

$$\{x_1 + v_1, ..., x_m + v_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

IA-sistemi L nın $w_i \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere

$$\{x_1 + v_1 + w_1, ..., x_m + v_m + w_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

primitif sistemine taşınabilir.

İspat: $L/\gamma_{c+1}(L)$ cebirinin ψ otomorfizmini aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $v_i \in \gamma_c(L)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & x_i \to x_i + v_i, i = 1,...,m, \\ & x_j \to x_j, j = m+1,...,t. \end{aligned}$$

Önerme 4.3 den, ψ otomorfizmi $L/\gamma_{c+2}(L)$ nin ψ' otomorfizmine taşınabilir. Eğer ψ' otomorfizmini $w_i \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi' \quad : \quad & x_i \to \psi(x_i) + w_i, i = 1, ..., m \\ & x_j \to \psi(x_j), j = m+1, ..., t\end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak ispat biter.

Önerme 4.5 $1 \leq m \leq n$, $c \geq 2$ için $u_i \in L'$ olmak üzere her

$$\{x_1 + u_1, ..., x_m + u_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

IA-sistemi $w_i \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere L nın

$$\{x_1 + u_1 + w_1, ..., x_m + u_m + w_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

formundaki primitif sistemine taşınabilir.

İspat: Önermeyi c üzerinde tümevarımla ispatlayalım. $c = 2$ için sonuç açıktır. $c > 2$ için inceleyelim. $u_i \in L'$ olmak üzere $\{x_1 + u_1, ..., x_m + u_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$ IA-sistemi $u_{i,c} \in \gamma_c(L)(i = 1, 2, ..., m)$ olmak üzere $\{x_1 + u_1 + u_{1,c}, ..., x_m + u_m + u_{m,c}, x_{m+1}, ..., x_t\}$ primitif sistemine taşınabiliyor olsun. Bu durumda sistem Teorem 4.4 ten dolayı $u_{i,c+1} \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere $\{x_1 + u_1 + u_{1,c} + u_{1,c+1}, ..., x_m + u_m + u_{m,c} + u_{m,c+1}, x_{m+1}, ..., x_t\}$ primitif sistemine taşınabilir. Bu sistemde $i = 1, .., m$ için $g_i = x_i + u_i + u_{i,c} + u_{i,c+1}$ ve $j = m+1, ..., t$ için $g_i = x_i$ olmak üzere L nin α otomorfizmini aşağıdaki şekilde düşünelim.

$$\begin{aligned}\alpha \quad : \quad & x_i + u_i \to g_i, i = 1, .., m \\ & x_j \to x_j, j = m+1, ..., t\end{aligned}$$

O zaman

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} \quad : \quad & g_i \to x_i + u_i, i = 1, .., m, \\ & x_j \to x_j, j = m+1, ..., t\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $i = 1, ..., m$ için $v_i \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere

$$\alpha^{-1}(x_i + u_i + u_{i,c}) = \alpha^{-1}(g_i - u_{i,c+1}) = x_i + u_i + \alpha^{-1}(-u_{i,c+1}) = x_i + u_i + v_i$$

ve $k = m+1, ..., t$ için

$$\alpha^{-1}(x_k) = x_k$$

bulunur. Bu durumda sistem

$$\{x_1 + u_1 + v_1 + u_{1,c+1}, ..., x_m + u_m + v_m + u_{m,c+1}, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

primitif sistemine dönüşür. $i = 1, ..., m$ için $w_i = v_i + u_{i,c+1}$ alınırsa

$$\{x_1 + u_1 + w_1, ..., x_m + u_m + w_m, x_{m+1}, ..., x_t\}$$

formundaki primitif sistem elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Önerme 4.6 $1 \leq m \leq n$, $c \geq 2$ için $v_i \in \gamma_2(L)$ olmak üzere her $\{x_1 + v_1, ..., x_m + v_m\}$ IA-sistemi $\gamma_{c+1}(L)$ yoluyla L nın bir primitif sistemine taşınabilir.

İspat: m üzerine tümevarım uygulayalım. $m = 1$ için sonuç açıktır. Tümevarım hipotezinden $\{x_2 + v_2, ..., x_m + v_m\}$, L nın bir primitif sistemine taşınabiliyor ve Teorem 4.1 den L nin bir IA-primitif sistemine taşınabiliyor olsun. O zaman $w_i \in \gamma_{c+1}(L)$ için

$$\alpha : x_i + v_i + w_i \to x_i, i = 2, .., m$$

ve $u_1 \in \gamma_2(L)$ için L nin

$$\alpha : x_1 + v_1 \to x_1 + u_1$$

şeklinde tanımlanan bir α otomorfizmi vardır. Böylece α, $\{x_2 + v_2, ..., x_m + v_m\}$ sistemini $\{x_1 + u_1, x_2 + w_2', ..., x_m + w_m'\}, w_i' \in \gamma_{c+1}(L)$ sistemine dönüştürür . Böylece problem $v_1' \in \gamma_2(L)$ olmak üzere $\{x_1 + v_1', ..., x_m\}$sisteminin $\gamma_{c+1}(L)$ yoluyla L bir primitif sistemine taşınmasına indirgenir. Bu ise önerme 4.4 te verilmişti.

Önerme 4.5 ve 4.6 nın önemli bir sonucu olarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.7 $1 \leq m \leq n$, $c \geq 2$ için $v_i \in \gamma_c(L)$ olmak üzere her $\{x_1 + v_1, ..., x_m + v_m\}$ IA-sistemi $\gamma_{c+1}(L)$ yoluyla L nın bir primitif sistemine taşınabilir.

Şimdi L nın bir tek elemanının primitif taşınmasını inceleyelim.

Teorem 4.8 $g \in L$ ve $n \geq 3, c \geq 2$ için g, modulo $\gamma_{c+1}(L)$ primitif olsun. O zaman g ,$\gamma_{c+1}(L)$ yoluyla L nın bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: Varsayalım ki $u \in L^{'}$ olmak üzere $g = x_1 + u$ olsun. g, modulo $\gamma_{c+1}(L)$ primitif olduğundan , g yi L nın $\{x_1 + u, y_2, ..., y_n\}$ serbest üreteç kümesine tamamlayalım.

$$\begin{aligned} \alpha \quad : \quad & x_1 + u \to x_1 + u \\ & y_i \to x_i \end{aligned}$$

olacak şekildeki α otomorfizmini tanımlayalım. Önerme 4.4 ten $\{x_1 + u, x_2, ..., x_n\}$ kümesi $\gamma_{c+1}(L)$ yoluyla L nin $w \in \gamma_{c+1}(L)$ olmak üzere $\{x_1 + u + w, x_2, ..., x_n\}$ sistemine taşınabilir. O zaman $x_1 + u + w$, L nin bir primitif elemanıdır.

Önerme 4.9 F nin

$$\begin{aligned} \varphi_{ijk} \quad : \quad & x_i \to x_i + \left[x_i, x_j\right] + \left[\left[x_k, x_j\right], x_j\right] + \left[\left[x_i, x_j\right], x_j\right] \\ & x_j \to x_j \\ & x_k \to x_k - \left[x_k, x_j\right] - \left[x_i, x_j\right] \\ & x_l \to x_l \end{aligned}$$

formundaki her endomorfizmi bir otomorfizmdir. Burada $1 \leq i, j, k \leq n$ dir.

İspat: F nin

$$\begin{aligned} \theta_{kj} \quad : \quad & x_i \to x_i + \left[x_k, x_j\right], \\ & x_l \to x_l, l \neq i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta_{ki} \quad : \quad & x_k \to x_k + x_i, \\ & x_l \to x_l, l \neq j \end{aligned}$$

otomorfizmlerini düşünelim. Bu otomorfizmlerin ve terslerinin bileşkesini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\theta_{ki}\theta_{kj}(x_i) &= \theta_{ki}(x_i+[x_k,x_j]) = x_i+[x_k,x_j]+[x_i,x_j] \\
\theta_{ki}\theta_{kj}(x_k) &= \theta_{ki}(x_k) = x_k+x_i \\
\theta_{ki}\theta_{kj}(x_l) &= x_l \\
\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_i) &= \theta_{ki}(x_i-[x_k,x_j]) = x_i-[x_k,x_j]+[x_i,x_j] \\
\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_k) &= \theta_{ki}(x_k) = x_k-x_i \\
\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_l) &= x_l
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $\theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$\theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_i) = \theta_{ki}\theta_{kj}(x_i - [x_k,x_j] + [x_i,x_j]) = x_i + [x_k,x_j] + [x_i,x_j] - [x_k,x_j] - [x_i,x_j] + [x_i,x_j] + [[x_k,x_j],x_j] + [[x_i,x_j],x_j] = x_i + [x_i,x_j] + [[x_k,x_j],x_j] + [[x_i,x_j],x_j],$

$\theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_k) = \theta_{ki}\theta_{kj}(x_k-x_i) = x_k+x_i-x_i-[x_k,x_j]-[x_i,x_j] = x_k-[x_k,x_j]-[x_i,x_j]$

ve

$$\theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}(x_l) = x_l, l \neq i,k$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1} \;:\; & x_i \to x_i+[x_i,x_j]+[[x_k,x_j],x_j]+[[x_i,x_j],x_j] \\
& x_k \to x_k-[x_k,x_j]-[x_i,x_j] \\
& x_l \to x_l, l \neq i,k
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\varphi_{ijk} = \theta_{ki}\theta_{kj}\theta_{ki}^{-1}\theta_{kj}^{-1}$ bir otomorfizmdir.

Sonuç 4.10 $1 \leq i,j \leq n$ olmak üzere, $F/\gamma_3(F)$ nin $x_i+[x_i,x_j]$ formundaki tüm elemanları F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: Önerme 4.9 dan dolayı sonuç açıktır.

4.1.1 Rankı 3 olan Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilen Primitif Elemanları

Bu kısımda $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere $F/\gamma_3(F)$ de F nin bir primitif elemanına taşınabilen primitif elemanların bir dizisini vereceğiz.

1)F nin

$$\begin{aligned} \varphi_{123} \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_2] + [[x_1, x_2], x_2] \\ & x_2 \to x_2 \\ & x_3 \to x_3 - [x_3, x_2] - [x_1, x_2] \end{aligned}$$

formundaki endomorfizmi bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \theta_{32} \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [x_3, x_2], \\ & x_i \to x_i, \ i \neq 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta_{31} \quad : \quad & x_3 \to x_3 + x_1, \\ & x_i \to x_i, \ i \neq 3 \end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmi olup

$$\begin{aligned} \theta_{31}\theta_{32}(x_1) &= \theta_{31}(x_1 + [x_3, x_2]) = x_1 + [x_3, x_2] + [x_1, x_2] \\ \theta_{31}\theta_{32}(x_2) &= x_2 \\ \theta_{31}\theta_{32}(x_3) &= \theta_{31}(x_3) = x_3 + x_1 \\ \theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}(x_1) &= \theta_{31}^{-1}(x_1 + [x_3, x_2]) = x_1 - [x_3, x_2] + [x_1, x_2] \\ \theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}(x_2) &= x_2 \\ \theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}(x_3) &= \theta_{31}^{-1}(x_3) = x_3 - x_1 \end{aligned}$$

dır. Şimdi $\theta_{31}\theta_{32}\theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım. $\theta_{31}\theta_{32}\theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}(x_1) = \theta_{31}\theta_{32}(x_1 - [x_3, x_2] + [x_1, x_2]) = x_1 + [x_3, x_2] + [x_1, x_2] - [x_3, x_2] - [x_1, x_2] + [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_2] + [[x_1, x_2], x_2] = x_1 + [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_2] + [[x_1, x_2], x_2]$

ve

$\theta_{31}\theta_{32}\theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}(x_3) = \theta_{31}\theta_{32}(x_3 - x_1) = x_3 + x_1 - x_1 - [x_3,x_2] - [x_1,x_2] = x_3 - [x_3,x_2] - [x_1,x_2]$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\theta_{31}\theta_{32}\theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1} \;:\; & x_1 \to x_1 + [x_1,x_2] + [[x_3,x_2],x_2] + [[x_1,x_2],x_2] \\ & x_2 \to x_2 \\ & x_3 \to x_3 - [x_3,x_2] - [x_1,x_2]\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\varphi_{123} = \theta_{31}\theta_{32}\theta_{31}^{-1}\theta_{32}^{-1}$ dır.

2)F nin

$$\begin{aligned}\varphi_{132} \;:\; & x_1 \to x_1 + [x_1,x_3] + [[x_2,x_3],x_3] + [[x_1,x_3],x_3] \\ & x_2 \to x_2 - [x_2,x_3] - [x_1,x_3] \\ & x_3 \to x_3\end{aligned}$$

formundaki endomorfizmi bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned}\theta_{23} \;:\; & x_1 \to x_1 + [x_2,x_3], \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{21} \;:\; & x_2 \to x_2 + x_1, \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 2\end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmidir.

$$\begin{aligned}\theta_{21}\theta_{23}(x_1) &= \theta_{21}(x_1 + [x_2,x_3]) = x_1 + [x_2,x_3] + [x_1,x_3] \\ \theta_{21}\theta_{23}(x_2) &= \theta_{21}(x_2) = x_2 + x_1 \\ \theta_{21}\theta_{23}(x_3) &= x_3 \\ \theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}(x_1) &= \theta_{21}^{-1}(x_1 + [x_2,x_3]) = x_1 - [x_2,x_3] + [x_1,x_3] \\ \theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}(x_2) &= \theta_{21}^{-1}(x_2) = x_2 - x_1 \\ \theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}(x_3) &= x_3\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{21}\theta_{23}\theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım. $\theta_{21}\theta_{23}\theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}(x_1) = \theta_{21}\theta_{23}(x_1 - [x_2,x_3] + [x_1,x_3]) = x_1 + [x_2,x_3] + [x_1,x_3] - [x_2,x_3] - [x_1,x_3] + [x_1,x_3] + [[x_2,x_3],x_3] + [[x_1,x_3],x_3]$

$= x_1 + [x_1,x_3] + [[x_2,x_3],x_3] + [[x_1,x_3],x_3]$ ve $\theta_{21}\theta_{23}\theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}(x_2) = \theta_{21}\theta_{23}(x_2 - x_1) = x_2 + x_1 - x_1 - [x_2,x_3] - [x_1,x_3] = x_2 - [x_2,x_3] - [x_1,x_3]$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \theta_{21}\theta_{23}\theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1} \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [x_1,x_3] + [[x_2,x_3],x_3] + [[x_1,x_3],x_3] \\ & x_2 \to x_2 - [x_2,x_3] - [x_1,x_3] \\ & x_3 \to x_3 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\varphi_{132} = \theta_{21}\theta_{23}\theta_{21}^{-1}\theta_{23}^{-1}$ bir otomorfizmdir.

3) F nin

$$\begin{aligned} \varphi_{213} \quad : \quad & x_1 \to x_1 \\ & x_2 \to x_2 + [x_2,x_1] + [[x_3,x_1],x_1] + [[x_2,x_1],x_1] \\ & x_3 \to x_3 + [x_3,x_1] - [x_2,x_1] \end{aligned}$$

formundaki endomorfizm bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \theta_{31} \quad : \quad & x_2 \to x_2 + [x_3,x_1], \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta_{32} \quad : \quad & x_3 \to x_3 + x_2, \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 3 \end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmidir.

$$\begin{aligned}
\theta_{32}\theta_{31}(x_1) &= x_1 \\
\theta_{32}\theta_{31}(x_2) &= \theta_{12}(x_2+[x_3,x_1]) = x_2+[x_3,x_1]+[x_2,x_1] \\
\theta_{32}\theta_{31}(x_3) &= \theta_{32}(x_3) = x_3+x_2 \\
\theta_{32}^{-1}\theta_{31}^{-1}(x_1) &= x_1 \\
\theta_{32}^{-1}\theta_{31}^{-1}(x_2) &= \theta_{12}^{-1}(x_2-[x_3,x_1]) = x_2-[x_3,x_1]+[x_2,x_1] \\
\theta_{32}^{-1}\theta_{31}^{-1}(x_3) &= \theta_{12}^{-1}(x_3) = x_3-x_2
\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{32}\theta_{13}\theta_{32}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$\theta_{32}\theta_{13}\theta_{32}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_2) = \theta_{32}\theta_{13}(x_2-[x_3,x_1]+[x_2,x_1]) = x_2+[x_3,x_1]+[x_2,x_1]-[x_3,x_1]-[x_2,x_1]+[x_2,x_1]+[[x_3,x_1],x_1]+[[x_2,x_1],x_1] = x_2+[x_2,x_1]+[[x_3,x_1],x_1]+[[x_2,x_1],x_1]$

ve

$\theta_{32}\theta_{13}\theta_{32}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_3) = \theta_{32}\theta_{13}(x_3-x_2) = x_3+x_2-x_2+[x_3,x_1]-[x_2,x_1] = x_3+[x_3,x_1]-[x_2,x_1]$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\theta_{32}\theta_{13}\theta_{32}^{-1}\theta_{13}^{-1} \;:\; & x_1 \to x_1 \\
& x_2 \to x_2+[x_2,x_1]+[[x_3,x_1],x_1]+[[x_2,x_1],x_1] \\
& x_3 \to x_3+[x_3,x_1]-[x_2,x_1]
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\varphi_{213} = \theta_{32}\theta_{13}\theta_{32}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ olup φ_{213} bir otomorfizmdir.

4)F nin

$$\begin{aligned}
\varphi_{231} \;:\; & x_1 \to x_1+[x_1,x_3]-[x_2,x_3] \\
& x_2 \to x_2+[x_2,x_3]+[[x_1,x_3],x_3]+[[x_2,x_3],x_3] \\
& x_3 \to x_3
\end{aligned}$$

formundaki endomorfizm bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\theta_{13} \;:\; & x_2 \to x_2+[x_1,x_3], \\
& x_i \to x_i,\ i \neq 2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{12} \;:\; & x_1 \to x_1 + x_2, \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 1\end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmidir.

$$\begin{aligned}\theta_{12}\theta_{13}(x_1) &= \theta_{12}(x_1) = x_1 + x_2 \\ \theta_{12}\theta_{13}(x_2) &= \theta_{12}(x_2 + [x_1,x_3]) = x_2 + [x_1,x_3] + [x_2,x_3] \\ \theta_{12}\theta_{13}(x_3) &= x_3 \\ \theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_1) &= \theta_{12}^{-1}(x_1) = x_1 - x_2 \\ \theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_2) &= \theta_{12}^{-1}(x_2 - [x_1,x_3]) = x_2 - [x_1,x_3] + [x_2,x_3] \\ \theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_3) &= x_3\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{12}\theta_{13}\theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$\theta_{12}\theta_{13}\theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_2) = \theta_{12}\theta_{13}(x_2 - [x_1,x_3] + [x_2,x_3]) = x_2 + [x_1,x_3] + [x_2,x_3] - [x_1,x_3] - [x_2,x_3] + [x_2,x_3] + [[x_1,x_3],x_3] + [[x_2,x_3],x_3] = x_2 + [x_2,x_3] + [[x_1,x_3],x_3] + [[x_2,x_3],x_3]$

ve

$\theta_{12}\theta_{13}\theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_1) = \theta_{12}\theta_{13}(x_1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_2 + [x_1,x_3] - [x_2,x_3] = x_1 + [x_1,x_3] - [x_2,x_3]$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\theta_{12}\theta_{13}\theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1} \;:\; & x_1 \to x_1 + [x_1,x_3] - [x_2,x_3] \\ & x_2 \to x_2 + [x_2,x_3] + [[x_1,x_3],x_3] + [[x_2,x_3],x_3] \\ & x_3 \to x_3\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\varphi_{231} = \theta_{12}\theta_{13}\theta_{12}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ olup φ_{231} bir otomorfizmdir.

5) F nin

$$\begin{aligned}\varphi_{312} \;:\; & x_1 \to x_1 \\ & x_2 \to x_2 - [x_2,x_1] - [x_3,x_1] \\ & x_3 \to x_3 + [x_3,x_1] + [[x_2,x_1],x_1] + [[x_3,x_1],x_1]\end{aligned}$$

formundaki endomorfizm bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned}\theta_{21} \;:\; & x_3 \to x_3 + [x_2,x_1]\,, \\ & x_i \to x_i, i \neq 3\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{23} \;:\; & x_2 \to x_2 + x_3, \\ & x_i \to x_i, i \neq 2\end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmidir.

$$\begin{aligned}\theta_{23}\theta_{13}(x_1) &= x_1 \\ \theta_{23}\theta_{13}(x_2) &= \theta_{23}(x_2) = x_2 + x_3 \\ \theta_{23}\theta_{13}(x_3) &= \theta_{23}(x_3 + [x_2,x_1]) = x_3 + [x_2,x_1] + [x_3,x_1] \\ \theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_1) &= x_1 \\ \theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_2) &= \theta_{23}^{-1}(x_2) = x_2 - x_3 \\ \theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_3) &= \theta_{23}^{-1}(x_3 - [x_2,x_1]) = x_3 - [x_2,x_1] + [x_3,x_1]\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{23}\theta_{13}\theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$\theta_{23}\theta_{13}\theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_3) = \theta_{23}\theta_{13}(x_3 - [x_2,x_1] + [x_3,x_1]) = x_3 + [x_2,x_1] + [x_3,x_1] - [x_2,x_1] - [x_3,x_1] + [x_3,x_1] + [[x_2,x_1],x_1] + [[x_3,x_1],x_1] = x_3 + [x_3,x_1] + [[x_2,x_1],x_1] + [[x_3,x_1],x_1]$

ve

$\theta_{23}\theta_{13}\theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}(x_2) = \theta_{23}\theta_{13}(x_2 - x_3) = x_2 + x_3 - x_3 - [x_2,x_1] - [x_3,x_1] = x_2 - [x_2,x_1] - [x_3,x_1]$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\theta_{23}\theta_{13}\theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1} \;:\; & x_1 \to x_1 \\ & x_2 \to x_2 - [x_2,x_1] - [x_3,x_1] \\ & x_3 \to x_3 + [x_3,x_1] + [[x_2,x_1],x_1] + [[x_3,x_1],x_1]\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\varphi_{312} = \theta_{23}\theta_{13}\theta_{23}^{-1}\theta_{13}^{-1}$ bir otomorfizmdir.

6) F nin

$$\begin{aligned}\varphi_{312} \;:\; & x_1 \to x_1 - [x_1,x_2] - [x_3,x_2] \\ & x_2 \to x_2 \\ & x_3 \to x_3 + [x_3,x_2] + [[x_1,x_2],x_2] + [[x_3,x_2],x_2]\end{aligned}$$

formundaki endomorfizmi bir otomorfizmdir.

İspat:

$$\begin{aligned}\theta_{12} \;:\; & x_3 \to x_3 + [x_1,x_2], \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 3\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{13} \;:\; & x_1 \to x_1 + x_3, \\ & x_i \to x_i,\ i \neq 1\end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmidir.

$$\begin{aligned}\theta_{13}\theta_{12}(x_1) &= \theta_{23}(x_1) = x_1 + x_3 \\ \theta_{13}\theta_{12}(x_2) &= x_2 \\ \theta_{13}\theta_{12}(x_3) &= \theta_{23}(x_3 + [x_1,x_2]) = x_3 + [x_1,x_2] + [x_3,x_2] \\ \theta_{13}^{-1}\theta_{12}^{-1}(x_1) &= \theta_{13}^{-1}(x_1) = x_1 - x_3 \\ \theta_{13}^{-1}\theta_{12}^{-1}(x_2) &= x_2 \\ \theta_{13}^{-1}\theta_{12}^{-1}(x_3) &= \theta_{13}^{-1}(x_3 - [x_1,x_2]) = x_3 - [x_1,x_2] + [x_3,x_2]\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{13}\theta_{21}\theta_{13}^{-1}\theta_{21}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$\theta_{13}\theta_{21}\theta_{13}^{-1}\theta_{21}^{-1}(x_3) = \theta_{13}\theta_{21}(x_3 - [x_1,x_2] + [x_3,x_2]) = x_3 + [x_1,x_2] + [x_3,x_2] - [x_1,x_2] - [x_3,x_2] + [x_3,x_2] + [[x_1,x_2],x_2] + [[x_3,x_2],x_2] = x_3 + [x_3,x_2] + [[x_1,x_2],x_2] + [[x_3,x_2],x_2]$

ve

$\theta_{13}\theta_{21}\theta_{13}^{-1}\theta_{21}^{-1}(x_1) = \theta_{13}\theta_{21}(x_1 - x_3) = x_1 + x_3 - x_3 - [x_1,x_2] - [x_3,x_2] = x_1 - [x_1,x_2] - [x_3,x_2]$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\theta_{13}\theta_{21}\theta_{13}^{-1}\theta_{21}^{-1} \quad : \quad & x_1 \to x_1 - [x_1,x_2] - [x_3,x_2] \\ & x_2 \to x_2 \\ & x_3 \to x_3 + [x_3,x_2] + [[x_1,x_2],x_2] + [[x_3,x_2],x_2]\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\varphi_{312} = \theta_{13}\theta_{21}\theta_{13}^{-1}\theta_{21}^{-1}$ olup φ_{312} bir otomorfizmdir.

4.1.2 Rankı n olan Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilen Primitif Elemanları

F, $X = \{x_1,...,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $a,b \in F$ için $[[...[a,b],...,],b]$,elemanını (burada b, k defa yazılmıştır) $\left[a,b^k\right]$ ile göstereceğiz. .

Teorem 4.11 F nin

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} \quad : \quad & x_i \to x_i + [x_i,x_k^m] - \left[x_j,x_k^{\frac{3m}{2}}\right] \\ & x_j \to x_j - \left[x_j,x_k^m\right] - \left[x_i,x_k^{\frac{3m}{2}}\right] + \left[x_j,x_k^{2m}\right] \\ & x_l \to x_l, l \neq i,j\end{aligned}$$

formundaki her endomorfizmi bir otomorfizmdir. Burada $1 \leq i,j,k \leq n$ ve $m \geq 1$ dir.

İspat: $m = 1$ durumu sonuç 4.10 dan sağlanır. $m = 2t+1$, $t \geq 1$ ise ;

F nin aşağıdaki şekilde verilen $\theta_{ijk}, \theta_{jik}$ endomorfizmlerini düşünelim.

$$\theta_{ijk} : x_i \to x_i + \left[x_j,x_k^{m-n}\right], x_l \to x_l, l \neq i,$$

$$\theta_{jik} : x_j \to x_j + [x_i,x_k^n], x_l \to x_l, l \neq j.$$

Bu durumda açıkça görülür ki $\theta_{ijk}, \theta_{jik}$ F nin otomorfizmleridir. $\gamma_{ij} = \theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}$

$$\begin{aligned}\theta_{jik}\theta_{ijk}\theta_{jik}^{-1}\theta_{ijk}^{-1}(x_i) &= \theta_{jik}\theta_{ijk}\theta_{jik}^{-1}(x_i - \left[x_j, x_k^{m-n}\right]) = \theta_{jik}\theta_{ijk}(x_i - \left[x_j, x_k^{m-n}\right] + [x_i, x_k^m]) \\ &= \theta_{jik}(x_i + [x_i, x_k^m] + \left[\left[x_j, x_k^{m-n}\right], x_k^m\right]) \\ &= x_i + [x_i, x_k^m] + \left[x_j, x_k^{2m-n}\right] + \left[x_i, x_k^{2m}\right]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta_{jik}\theta_{ijk}\theta_{jik}^{-1}\theta_{ijk}^{-1}(x_j) &= \theta_{jik}\theta_{ijk}\theta_{jik}^{-1}(x_j) = \theta_{jik}\theta_{ijk}(x_j - [x_i, x_k^n]) \\ &= \theta_{jik}(x_j - [x_i, x_k^n] - \left[x_j, x_k^m\right]) \\ &= x_j - \left[x_j, x_k^m\right] - \left[x_i, x_k^{m+n}\right].\end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\gamma_{ij} = \theta_{jik}\theta_{ijk}\theta_{jik}^{-1}\theta_{ijk}^{-1}$

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} \quad : \quad & x_i \to x_i + [x_i, x_k^m] + \left[x_j, x_k^{2m-n}\right] + \left[x_i, x_k^{2m}\right], \\ x_j \quad \to \quad & x_j - \left[x_j, x_k^m\right] - \left[x_i, x_k^{m+n}\right], \\ x_l \quad \to \quad & x_l, l \neq i, j.\end{aligned}$$

şeklindedir. $m = 2t$, $t \geq 1$ ise ;

$$\begin{aligned}\theta_{ijk} \quad : \quad & x_i \to x_i - \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right], \\ & x_l \to x_l, l \neq i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{jik} \quad : \quad & x_j \to x_j + \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right], \\ & x_l \to x_l, l \neq j\end{aligned}$$

otomorfizmlerini düşünelim. Bu otomorfizmlerin aşağıdaki bileşkelerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\theta_{ijk}\theta_{jik}(x_i) &= \theta_{ijk}(x_i) = x_i - \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right] \\ \theta_{ijk}\theta_{jik}(x_j) &= \theta_{ijk}(x_j + \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right]) = x_j + \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right] - \left[x_j, x_k^m\right] \\ \theta_{ijk}\theta_{jik}(x_l) &= x_l \\ \theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_i) &= \theta_{ijk}^{-1}(x_i) = x_i + \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right] \\ \theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_j) &= \theta_{ijk}^{-1}(x_j - \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right]) = x_j - \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right] - \left[x_j, x_k^m\right] \\ \theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_l) &= x_l\end{aligned}$$

Şimdi $\theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım. $\theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_i) = \theta_{ijk}\theta_{jik}(x_i + \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right]) = x_i - \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right] + \left[x_j, x_k^{\frac{m}{2}}\right] + \left[\left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right], x_k^{\frac{m}{2}}\right] - \left[\left[x_j, x_k^{m}\right], x_k^{\frac{m}{2}}\right]$

$= x_i + \left[x_i, x_k^{m}\right] - \left[x_j, x_k^{\frac{3m}{2}}\right]$ ve

$\theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_j) = \theta_{ijk}\theta_{jik}(x_j - \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right] - \left[x_j, x_k^{m}\right]) = x_j + \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right] - \left[x_j, x_k^{m}\right] - \left[x_i, x_k^{\frac{m}{2}}\right] + \left[x_j, x_k^{m}\right] - \left[x_j, x_k^{m}\right] - \left[x_i, x_k^{\frac{3m}{2}}\right] + \left[x_j, x_k^{2m}\right] =$

$= x_j - \left[x_j, x_k^{m}\right] - \left[x_i, x_k^{\frac{3m}{2}}\right] + \left[x_j, x_k^{2m}\right]$

$\theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}(x_l) = x_l, l \neq i, j$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1} \quad : \quad & x_i \to x_i + [x_i, x_k^m] - \left[x_j, x_k^{\frac{3m}{2}}\right] \\ & x_j \to x_j - \left[x_j, x_k^m\right] - \left[x_i, x_k^{\frac{3m}{2}}\right] + \left[x_j, x_k^{2m}\right] \\ & x_l \to x_l, l \neq i, j \end{aligned}$$

dır. Böylece $\gamma_{ij} = \theta_{ijk}\theta_{jik}\theta_{ijk}^{-1}\theta_{jik}^{-1}$ elde edilir. O halde γ_{ij} , F nin bir otomorfizmidir.

Sonuç 4.12 $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $F/\gamma_{m+2}(F)$ nin $x_i + \left[x_i, x_k^m\right]$, $m \geq 1$ formundaki tüm primitif elemanları F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: Teorem 4.11 den dolayı sonuç açıktır.

Teorem 4.13 u, F^m nin en fazla bir x_i içeren bir monomiali olmak üzere $F/\gamma_{m+1}(F)$ nin $x_i + u$ formundaki her elemanı F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: u , x_i harfini içermiyorsa

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & x_i \to x_i + u \\ & x_j \to x_j, j \neq i \end{aligned}$$

F nin bir bir otomorfizmi olup $x_i + u$ taşınabilir.

u , x_i harfini içersin. u_{x_j} ile u daki x_i harfinin x_j ile değiştirilmesiyle elde edilen elemanı , $u_{[x_p, x_r]}$ ile u daki x_i harfinin $[x_p, x_r]$ ile değiştirilmesiyle elde edilen elemanı , $u_{u_{x_j}}$ ile u daki x_i harfinin yerine u_{x_j} elemanının gelmesiyle elde edilen elemanı

gösterelim. Buradaki x_j harfi u yu oluşturan harflerden farklıdır.

$$\begin{aligned}\theta \ : \ & x_i \to x_i + u_{x_j}, \\ & x_l \to x_l, l \neq i\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi \ : \ & x_j \to x_j - x_i - [x_p, x_r], p, r \neq i, j \\ & x_l \to x_l, l \neq j\end{aligned}$$

otomorfizmlerini ele alıp $\gamma = \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}$ otomorfizmini oluşturalım.

$$\begin{aligned}\gamma(x_i) &= \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}(x_i) = \theta\varphi\theta^{-1}(x_i) = \theta\varphi(x_i - u_{x_j}) = \theta(x_i - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]}) \\ &= x_i + u_{x_j} - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{u_{x_j}} = x_i + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{u_{x_j}}\end{aligned}$$

dır. Burada $u_{u_{x_j}} + u_{[x_p,x_r]} \in \gamma_{m+1}(F)$ dir.

$$\begin{aligned}\gamma(x_j) &= \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}(x_j) = \theta\varphi\theta^{-1}(x_j + x_i + [x_p,x_r]) = \theta\varphi(x_j + x_i - u_{x_j} + [x_p,x_r]) \\ &= \theta(x_j - x_i - [x_p,x_r] + x_i - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + [x_p,x_r]) \\ &= \theta(x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]}) = x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{x_i,u_{x_j}}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u_{x_i,u_{x_j}} + u_{[x_p,x_r]} \in \gamma_{m+1}(F)$ dir. Dolayısıyla $\gamma = \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}$ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\gamma \ : \ & x_i \to x_i + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{u_{x_j}} \\ & x_j \to x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{x_i,u_{x_j}} \\ & x_l \to x_l, l \neq i, j\end{aligned}$$

şeklindedir. γ otomorfizmi $F/\gamma_{m+1}(F)$ nin

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} \ : \ & x_i \to x_i + u \\ & x_j \to x_j - u_{x_j} + u \\ & x_l \to x_l, l \neq i, j\end{aligned}$$

otomorfizmini belirler. Buradan $x_i + u$ nun F nin bir primitif elemanına taşınabileceği görülür.

Teorem 4.14 $\alpha_i \in K$, u_i, F^m nin en fazla bir x_i içeren bir elemanı ve $u = \sum \alpha_i u_i$ olsun. $F/\gamma_{m+1}(F)$ nın $x_i + u$ formundaki her elemanı F nin bir primitif elemanına taşınabilir.

İspat: $u = \sum \alpha_i u_i$ olsun. u , x_i harfini içermiyorsa

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & x_i \to x_i + u \\ & x_j \to x_j, j \neq i \end{aligned}$$

bir otomorfizm olup $x_i + u$ taşınabilir.

u , x_i harfini içersin. u_{x_j} ile u daki x_i harfinin x_j ile değiştirilmesiyle elde edilen elemanı , $u_{[x_p,x_r]}$ ile u daki x_i harfinin $[x_p,x_r]$ ile değiştirilmesiyle elde edilen elemanı , $u_{u_{x_j}}$ ile u daki x_i harfinin yerine u_{x_j} elemanının gelmesiyle elde edilen elemanı gösterelim. Buradaki x_j harfi u yu oluşturan harflerden farklıdır.

$$\begin{aligned} \theta \quad : \quad & x_i \to x_i + u_{x_j}, \\ & x_l \to x_l, l \neq i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & x_j \to x_j - x_i - [x_p,x_r], p,r \neq i,j \\ & x_l \to x_l, l \neq j \end{aligned}$$

otomorfizmlerini ele alıp $\gamma = \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}$ otomorfizmini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \gamma(x_i) &= \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}(x_i) = \theta\varphi\theta^{-1}(x_i) = \theta\varphi(x_i - u_{x_j}) = \theta(x_i - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]}) \\ &= x_i + u_{x_j} - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{u_{x_j}} \\ &= x_i + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{u_{x_j}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u_{u_{x_j}} + u_{[x_p,x_r]} \in \gamma_{m+1}(F)$ dir.

$$\begin{aligned}\gamma(x_j) &= \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}(x_j) = \theta\varphi\theta^{-1}(x_j + x_i + [x_p, x_r]) = \theta\varphi(x_j + x_i - u_{x_j} + [x_p, x_r]) \\ &= \theta(x_j - x_i - [x_p, x_r] + x_i - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + [x_p, x_r]) \\ &= \theta(x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]}) = x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} + u_{x_i,u_{x_j}}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u_{x_i,u_{x_j}}$ ile x_i yerine x_i veya $u_{u_{x_j}}$ lerin gelmesiyle elde edilen elemanı gösterelim. $u_{x_i,u_{x_j}} + u_{[x_p,x_r]} \in \gamma_{m+1}(F)$ dir. Dolayısıyla $\gamma = \theta\varphi\theta^{-1}\varphi^{-1}$ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\gamma \;:\; & x_i \to x_i + u + u_{u_{x_j}} + u_{[x_p,x_r]} \\ & x_j \to x_j - u_{x_j} + u + u_{[x_p,x_r]} \\ & x_l \to x_l, l \neq i, j\end{aligned}$$

şeklindedir. $\gamma, F/\gamma_{m+1}(F)$ nin

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} \;:\; & x_i \to x_i + u \\ & x_j \to x_j - u_{x_j} + u \\ & x_l \to x_l, l \neq i, j\end{aligned}$$

otomorfizmini belirler. Buradan $x_i + u \in F/\gamma_{m+1}(F)$ nin F nin bir primitif elemanına taşınabileceği görülür.

4.2 Taşınamayan Otomorfizmler

Bu kısımda n ve k nın bazı özel durumları için L cebirinin taşınamayan otomorfizmlerinin varlığını göstereceğiz.

$R = \gamma_{c+1}(F)$ olsun. $U(F)/\Delta_R$ nin tersinir elemanları $\alpha \in K$ olmak üzere $\alpha + \Delta_R$ formundadır.

Tanım 4.15 $U(F)$ nin bir v elemanı $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} - x_{i_2}...x_{i_n}x_{i_1}$ formundaki elemanlar tarafından gerilen alt uzaya ait ise v ye dengelenmiş eleman denir.

Aşağıdaki teorem $U(F)$ nin belirli tipteki otomorfizmleri ile dengelenmiş elemanlar arasındaki ilişkiyi belirtmesi bakımından önemlidir.

Teorem 4.16 (Bryant and Drensky[2]) $s \geq 2$ ve ψ, $U(F)$ nin

$$\psi(x_1) \equiv x_1 + f(mod\Delta^{s+1})$$

$$\psi(x_i) \equiv x_i(mod\Delta^{s+1}), i \neq 1$$

şeklindeki bir endomorfizmi olsun. Burada f , s-inci dereceden homojen bir polinomdur. Eğer ψ, $U(F)$ nin bir otomorfizmi ise $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ dengelenmiş elemandır.

Şimdi taşınamayan otomorfizmlerle ilgili bazı örnekler verece ğiz.

Teorem 4.17 Her $c \geq 3$ ve $n \geq 2$ için , $F/\gamma_{c+1}(F)$ nin

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [x_1, x_2^{c-1}] \\ & x_i \to x_i, 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ϕ otomorfizmi $F/\gamma_{c+1}(F)'$ nin bir otomorfizmine taşınamaz.

İspat: ϕ nin , $F/\gamma_{c+1}(F)'$ nin bir $\overline{\phi}$ otomorfizmine taşınabildiğini varsayalım. O zaman $u_i \in \gamma_{c+1}(F)$ olmak üzere

$$\overline{\phi} : x_1 \to x_1 + \left[x_1 x_2^{c-1}\right] + u_1$$

$$x_i \to x_i + u_i, 2 \leq i \leq n$$

formundadır. $\overline{\phi}$, $U(F)$ nin bir ψ otomorfizmine genişletilebilir. Yani ; $U(F)$ nin

$$\psi(x_i) = \overline{\phi}(x_i), i = 1, 2, ..., n$$

olacak şekilde bir otomorfizmi vardır. $\gamma_{c+1}(F) \subset \Delta^{c+1}$ olduğunu biliyoruz. O zaman

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + \left[x_1 x_2^{c-1}\right] (mod\Delta^{c+1}) \\ & x_i \to x_i(mod\Delta^{c+1}), c \geq 3 \end{aligned}$$

dır. Teorem 4.16 dan , $\frac{\partial\left[x_1 x_2^{c-1}\right]}{\partial x_1}$ dengeli olması gerekir. Fakat $\frac{\partial\left[x_1 x_2^{c-1}\right]}{\partial x_1} = (-1)^{c-1} x_2^{c-1}$ dengeli değildir. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 4.18 $L = F/F''$ Lie cebirinin

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ & x_1 \to x_1 + [[[x_3,x_2],x_1],x_1] \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ otomorfizmi $F/\gamma_2(F'')$ Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınamaz.

İspat: Varsayalım ki φ otomorfizmi bir ψ otomorfizmine taşınabilsin. $w_i \in F''$ olmak üzere ψ otomorfizmi

$$\begin{aligned} \psi \ : \ & x_1 \to x_1 + [[[x_3,x_2],x_1],x_1] + w_1 \\ & x_i \to x_i + w_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

formundadır. ψ nin $J(\psi)$ jacobian matrisi

$$\begin{bmatrix} 1+[[x_3,x_2],x_1]-x_1[x_3,x_2]+\frac{\partial w_1}{\partial x_1} & x_1x_1x_3+\frac{\partial w_1}{\partial x_2} & -x_1x_1x_2+\frac{\partial w_1}{\partial x_3} & . & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} & . & \frac{\partial w_2}{\partial xn} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & 1+\frac{\partial w_3}{\partial x_3} & . & \frac{\partial w_3}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \frac{\partial w_n}{\partial x_2} & \frac{\partial w_n}{\partial x_3} & . & 1+\frac{\partial w_n}{\partial xn} \end{bmatrix}$$

olup $U(F)/\Delta_{F''}$ Ore bölgesi olduğundan $J(\psi)$ elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir. Bu yazılıştaki köşegen matrise $\overline{J(\psi)}$ diyelim. Bu matriste sol üst köşedeki eleman aşağıdaki şekilde olur. $a \in U(F)/\Delta_{F''}$ olmak üzere

$$a_{11} = a(1 + [[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2] + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}).$$

$J(\psi)$ tersinir olduğundan $\overline{J(\psi)}$ de $U(F)/\Delta_{F''}$ üzerinde tersinirdir. O zaman $\overline{J(\psi)}$ nin köşegen üzerindeki elemanları da tersinirdir. Böylece bir $0 \neq \alpha \in K$ için

$$a([[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2] + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}) = \alpha - 1$$

dır. Böylece eğer $\alpha \neq 1$ o zaman $\alpha - 1$, $\Delta_{F''}$ nın elemanıdır. Bu ise imkansızdır. Eğer $\alpha = 1$ ise

$$a([[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2] + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}) = 0$$

dır. $U(F)/\Delta_{F''}$ bir tamlık bölgesi olduğundan $a \in \Delta_{F''}$ veya $[[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2] + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \in \Delta_{F''}$ dür. $a \in U(F)/\Delta_{F''}$ olduğundan $a \notin \Delta_{F''}$ dür. Dolayısıyla $[[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2] + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \in \Delta_{F''}$ dür. Burada sadece F'' nün 4 uzunluklu monomialleri ile ilgileniyoruz. Bu elemanlar için aşağıdaki durumlar sağlanır.

$$w_1 = [[x_i x_1][x_j x_1]], i, j \neq 1$$

ve

$$w_1 = [[x_i x_j][x_k x_1]], i, j, k \neq 1$$

$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}$ yı her iki durum için hesaplayalım,

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = [x_i x_1]x_j - [x_j x_1]x_i$$

ve

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = [x_i x_j]x_k.$$

Her iki durumda da $\frac{\partial w_1}{\partial x_1}$,

$$[[x_3,x_2],x_1] - x_1.[x_3,x_2]$$

kelimesine eşit değildir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

5. DİEUDONNÉ DETERMİNANTI VE PRİMİTİF TAŞINABİLİRLİK

K herhangi bir cisim , F, K cismi üzerinde $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. $m \geq 2$ olmak üzere $H_m = U(F)/\Delta^m$ diyelim. $U(F)$ de $0 \neq \alpha \in K$ ve $w \in \Delta$ olmak üzere $\alpha - w$ formundaki elemanlar modulo Δ^m tersinir olup

$$(\alpha - w)^{-1} = \alpha^{-1} + \alpha^{-2}w + \alpha^{-3}w^2 + ... + \alpha^{-m}w^{m-1}(mod\Delta^m)$$

dir . H_m nin tüm tersinir elemanları $\alpha - w$ formunda olup bu elemanların oluşturduğu çarpımsal grubu H_m^* ve $u, v \in H_m^*$ için $[u,v] = uvu^{-1}v^{-1}$ formundaki tüm elemanların alt grubunu (H_m^*, H_m^*) ile gösterelim. H_m üzerinde tersinir olan her matrisin her satır ve sütununda en az bir tane tersinir eleman vardır. Çünkü tersinir bir matrisin ε genişletme homomorfizmi altındaki görüntüsü tersinir olup bu görüntü matrisinin her satır ve sütununda sıfırdan farklı en az bir eleman bulunur. Bu ise H_m üzerindeki esas matrisin her satır ve sütununda en az bir tersinir elemanın olduğunu gösterir. Her satırdaki tersinir eleman kullanılarak bu elemanın bulunduğu sütundaki diğer bütün elemanlar elemanter işlemler uygulanarak aşağıdaki şekilde sıfır yapılabilir:

Matrisin a_{ij} bileşeninin tersinir olduğunu varsayalım. $i - yinci$ satırın $-a_{i+1,j}a_{ij}^{-1}$ katını $(i+1) - inci$ satıra ekleyerek $(i+1, j) - yinci$ bileşeni sıfır yapabiliriz. Böylece $j - yinci$ sütunda a_{ij} bileşeni dışındaki tüm elemanlar sıfır yapılabilir. O halde H_m üzerindeki her tersinir matrisin elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabileceği açıktır. Şimdi H_m üzerinde tersinir olan bir matrisin Dieudonné determinantını tanımlayacağız.

Not 5.1 Elemanter matris ile köşegen dışında sadece, sıfırdan farklı bir elemanla birim matristen farklılık gösteren matrisi anlayacağız.

F serbest Lie cebirinin her otomorfizminin elemanter Lie otomorfizmlerinin bir bileşkesi olduğu Cohn tarafından gösterilmiştir. Eğer α bir elemanter Lie otomorfizmi ise J_α nın elemanter matrislerinin bir çarpımı olduğu aşağıdaki önerme ile kolayca görülebilir.

Önerme 5.2 F nin elemanter otomorfizminin Jacobian matrisi elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: α ,F nin

$$\begin{aligned}\alpha \quad : \quad & x_i \longrightarrow c_i x_i + f(x_{j_1},...,x_{j_k}), x_{j_1},...x_{j_k} \in X\backslash\{x_i\}, 0 \neq c_i \in K \\ & x_k \longrightarrow c_k x_k, k \neq i, 0 \neq c_k \in K\end{aligned}$$

şeklindeki bir elemanter otomorfizmi olsun. O zaman J_α elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} c_1 & ... & 0 & ... & 0 \\ . & ... & . & ... & . \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & c_i & .... & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ... & c_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $t = 1,2,...,n$ ve $t \neq i$ olmak üzere t-yinci satırın $-c_t^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_t}$, katını i-yinci satıra ardışık olarak ekleyerek matrisimizi köşegen forma indirgeyebiliriz. Böylece $E_{i1},...,E_{in}$

$$E_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ . & ... & . & ... & . \\ -c_1^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & 1 & .... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}, ..., E_{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ...0 & 0 & 0 \\ . & ... & ... & ... & . \\ 0 & 0 & ...1 & 0 & -c_n^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ...0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elemanter matrisleri ve D de

$$D = \begin{bmatrix} c_1 & ... & 0 & ... & 0 \\ . & ... & . & . & . \\ 0 & ... & c_i & ... & 0 \\ . & ... & . & ... & . \\ 0 & ... & 0 & ... & c_k \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi olmak üzere Jacobian matris

$$J_\alpha = E_{i1}E_{i2}...E_{in}.D$$

formundadır. Eğer α, F nin

$$\alpha : x_i \longrightarrow c_j x_j, i \neq j, 1 \leq i \leq n, 0 \neq c_i \in K$$

şeklindeki bir otomorfizmi ise sonuç açıktır.

Önerme 5.3 E, $i \neq j$ olmak üzere i-yinci satır ve $j-$yinci sütundaki bileşeni $u \in U(F)$ olan bir elemanter matris ve $D = diag(d_1, ..., d_n)$ olsun. Burada $i = 1, ..., n$ için $0 \neq d_i \in K$ dir. O zaman $DE = E^{'}D$ olacak şekilde bir $E^{'}$ elemanter matrisi vardır.

İspat:

$$DE = \begin{bmatrix} d_1 & ... & 0 & ...0... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & d_i & ..... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & d_j & 0 \\ . & .. & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ...0... & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & ...0... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 1 & ...u... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 \\ . & .. & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ...0... & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & ... & 0 & ...0... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & d_i & ...d_i u... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & d_j & 0 \\ . & .. & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ...0... & d_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & ...0... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 1 & ...d_j^{-1} d_i u... & 0 \\ . & & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ...0... & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & ... & 0 & ...0... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & d_i & ..... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & d_j & 0 \\ . & .. & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ...0... & d_n \end{bmatrix} = E^{'}D$$

elde edilir.

Sonuç 5.4 γ, F nin bir otomorfizmi ise J_γ elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: γ, F nin bir otomorfizmi olduğundan sonlu sayıda elemanter otomorfizmlerin bileşkesi şeklinde yazılabilir. $\alpha_1,...,\alpha_k$ elemanter otomorfizmler olmak üzere $\gamma = \alpha_1 \circ ... \circ \alpha_k$ olsun. φ ve ψ F nin iki otomorfizmi ise $\overline{\varphi}, \varphi$ nin $U(F)$ ye genişlemesi olmak üzere

$$J_{\varphi\circ\psi} = \overline{\varphi}(J_\psi)J_\varphi$$

gerçeğinden hareketle

$$J_\gamma = J_{\alpha_1\circ...\circ\alpha_k} = \overline{\alpha_1 \circ ... \circ \alpha_{k-1}}(J_{\alpha_k}).\overline{\alpha_1 \circ ... \circ \alpha_{k-2}}.(J_{\alpha_{k-1}})...\overline{\alpha_1 \circ \alpha_2}(J_{\alpha_3}).\overline{\alpha_1}(J_{\alpha_2})J_{\alpha_1}$$

dir. $J_{\alpha_i}(i = 1,...,k)$ elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden bir otomorfizm altındaki görüntüsü de elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı şeklindedir. O halde E_i ler elemanter ve D_i ler köşegen matrisler olmak üzere J_γ matrisi

$$J_\gamma = E_1...E_{k_1}D_1E_{k_1+1}...E_{k_2}D_2...E_{k_m}D_m$$

şeklinde bir çarpım olarak yazılabilir. O halde Önerme 5.3 den J_γ matrisi E elemanter matrislerin bir çarpımı ve D köşegen matris olmak üzere

$$J_\gamma = ED$$

şeklinde yazılabilir.

$U(F)$ üzerindeki tersinir her *nxn* matrisinin $U(F)$ nin bir otomorfizmine karşılık geldiği ve her otomorfizmin de elemanter otomorfizmlerin bir bileşkesi olduğu gözönüne alınırsa bu matris Sonuç 5.4 ün ispatındaki J_γ gibi düşünülüp elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

Tanım 5.5 Bir σ permütasyonu için $P(\sigma) = (\delta_{i\sigma(j)})$ matrisine permütasyon matrisi denir. Burada δ_{ik} Kronecker sembolüdür.

Aşağıdaki teorem, H_m üzerindeki tersinir nxn matrislerin genel lineer grubu olan $GL_n(H_m)$ deki matrislerin bir parçalanışını belirlemesi bakımından önemlidir.

Teorem 5.6 (Bruhat Normal Formu) D bir bölüm halkası $M_n(D)$, D üzerindeki nxn matrislerin kümesi ve $A \in M_n(D)$ olsun. O zaman

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ldots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, U = diag(u_1, \ldots, u_n), V = \begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ * & .. & . \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \ \sigma \text{ bir permütasyon},$$

$P(\sigma)$ permütasyon matrisi olmak üzere

$$A = TUP(\sigma)V$$

parçalanışı vardır.

Bu teoremde D yerine H_m ve $M_n(D)$ yerine $GL_n(H_m)$ alınırsa $GL_n(H_m)$ deki matrislerin bir parçalanışı elde edilir.

Not 5.7 Teorem, bir D bölüm halkası üzerindeki nxn matrislar için verilmiş olmasına rağmen H_m üzerindeki tersinir matrisler de elemanter ve köşegen matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

Tanım 5.8 $A \in GL_n(H_m)$, $u_1, \ldots, u_n \in H_m$ ve σ permütasyonu A nın Bruhat Normal Formu ile tek bir şekilde belirlenmiş olsun. $U = diag(u_1, \ldots, u_n)$ olmak üzere $A = TUP(\sigma)V$ parçalanışını gözönüne alalım. $\delta_m : GL_n(H_m) \to H_m$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\delta_m(A) = sgn(\sigma)u_1 \ldots u_n$$

Tanım 5.9 $\pi : H_m^* \to H_m^*/(H_m^*, H_m^*)$ kanonik dönüşüm olsun. A nın Dieudonné determinantı

$$D_m(A) = \pi(\delta_m(A))$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.10 1)$\forall \tau_{ij}(t) = I + t\ e_{ij}$ için $D_m(\tau_{ij}(t)) = 1$ dir.

2)Her σ permütasyonu için $D_m(P(\sigma)) = sgn(\sigma)$ dir.

3)Dieudonné determinantı çarpımsaldır. Yani; $D_m(AB) = D_m(A)D_m(B)$ dir.

Örnek 5.11 $U = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix}$ ve $V = \begin{pmatrix} v_1 & . & 0 \\ & .. & . \\ 0 & & v_n \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $\delta_m(U) = u_1...u_n$ $\delta_m(V) = v_1...v_n$ ve $\delta_m(UV) = u_1v_1...u_nv_n$ olur. $\pi(\delta_m(UV)) = \pi(\delta_m(U))\pi(\delta_m(V))$ olduğu halde δ_m çarpımsal değildir.

Örnek 5.12 ($2x2$ Matris için Dieudonne Determinantı)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Böylece $D_m(A) = \pi(ad - aca^{-1}b)$ olur.

Not 5.13 Değişmeli determinant için geçerli olan tüm özellikler bu determinant için sağlanmaz. Örneğin;

*Satıra göre açılım formülü yoktur.

*Bir matrisin transpozunun determinantı , orijinal determinanta eşit değildir.

5.1 Dieudonné Determinantının Lie Cebirlerine Uygulanması

$u, v \in U(F)$ olmak üzere $U(F)$ de

$$(1-u)(1-v)(1+u+...+u^{m-1})(1+v+...+v^{m-1})(mod\Delta^m), (m \leq 4) \qquad (1)$$

formundaki tüm elemanları düşünelim. Şimdi $m \leq 4$ için (1) ile belirtilen ifadeyi parantezleri açarak daha sade bir şekilde yazalım:

$$(1-u)(1-v)(1+u+u^2+u^3)(1+v+v^2+v^3)(\text{ mod } \Delta^4)$$
$$1+uv-vu+u^2v-uvu+vuv-v^2u(\text{ mod } \Delta^4).$$

$f,g \in \Delta$ olmak üzere $U(F)$ de $fg-gf$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen alt uzayı (Δ,Δ) ile gösterelim. $m \leq 4$ için (H_m^*, H_m^*) komutatör alt grubu, $w \in (\Delta,\Delta)$ olmak üzere $1+w$ formundaki elemanlar tarafından üretilir. $m \geq 2$ için (H_m^*, H_m^*) komutatör alt grubu (1) formundaki elemanlar tarafından üretilir. $U(F)$ de

$$(1-u)(1-v)(1+u+u^2+...+u^{m-1})(1+v+v^2+...+v^{m-1})$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen alt yarıgrup S_m olsun.

Önerme 5.14 $A \in GL_n(U(F))$ ve $\det_m(A)$, $D_m(A)$ nın $U(F)$ deki herhangi bir ters görüntüsü olsun. O zaman her $m \geq 2$ için $0 \neq \alpha \in K, w_m \in \Delta^m, v \in \Delta/\Delta^m$ ve $g_m \in S_m$ olmak üzere

$$det_m(A) = (\alpha+v)g_m + w_m,$$

dir.

İspat: $A \in GL_n(U(F))$ olsun. O zaman A , H_m üzerinde tersinirdir. Şimdi H_m nin tüm tersinir elemanlarının H_m^* çarpımsal grubunu düşünelim. Genişleme homomorfizmi altındaki görüntüsü sıfırdan farklı olan her elemanın tersinir olduğu gerçeğini kullanarak $D_m(A)$ determinantını bulabiliriz. Böylece sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.15 φ, F nin bir otomorfizmi ve $\det_m(J_\varphi)$, $D_m(J_\varphi)$ nın $U(F)$ deki herhangi bir ters görüntüsü olsun. O zaman her $m \geq 2$ için $0 \neq \alpha \in K$ ve $w_m \in \Delta^m$ olmak üzere

$$det_m(J_\varphi) = \alpha + w_m$$

dir.

İspat: φ, F nin bir otomorfizmi olsun. Sonuç 5.4 den J_φ Jacobian matrisi, E elementer matrislerin bir çarpımı ve D, $d_1, d_2, ..., d_n$ köşegen elemanlarıyla köşegen matris olmak üzere $J_\varphi = E.D$ şeklinde yazılabilir. $U(F)$ nin tersinir elemanları K cisminin elemanları olduğundan, D nin köşegen elemanları K cismine ait olmalıdır. Şimdi de $H_m = U(F)/\Delta^m$ cebirini düşünelim. J_φ nın H_m üzerindeki görüntüsü de tersinirdir. Bu görüntü $\overline{J_\varphi} = \overline{E} \cdot \overline{D}$ olsun. $\overline{D}$ matrisinin $d_i + \Delta^m$ köşegen elemanları ve bunların

$\prod_{i=1}^{n}(d_i+\Delta^m) = d_1.d_2...d_n+\Delta^m$ çarpımları(H_m^*, H_m^*) komutatör alt grubuna ait değildir. Böylece J_φ nın Dieudonné determinantı $\alpha = d_1.d_2...d_n$ olmak üzere

$$D_m(J_\varphi) = \alpha+\Delta^m,$$

formundadır. $D_m(J_\varphi)$ nın $U(F)$ deki herhangi bir ters görüntüsü $w_m \in \Delta^m$ olmak üzere $\alpha+w_m$ formundadır.

F nin her otomorfizminin Jacobian matrisi $U(F)$ üzerinde tersinir olduğundan, bu sonuç F nin otomorfizm olmayan bir endomorfizminin otomorfizm olmadığını belirleyebilen bir koşul verir. Burada yapmamız gereken sonuçla çelişen bir durumun olup olmadığını kontrol etmektir.

Sonuç 5.16 R, F nin F/R serbest polinilpotent Lie cebiri olacak şekildeki bir ideali ve bir $m \geq 2$ için $\Delta_R \subset \Delta^m$ olsun. $A \in GL_n(U(F)/\Delta_R)$ ve $det_m(A)$, $D_m(A)$ nın $U(F)/\Delta_R$ deki bir ters görüntüsü olsun. O zaman $\Delta_R \subset \Delta^m$ olacak şekildeki her m için $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ olmak üzere

$$det_m(A) = \alpha+\Delta_R(mod\Delta^m/\Delta_R)$$

dir.

İspat: A, $U(F)/\Delta_R$ üzerinde E elemanter matrislerin bir çarpımıve D, $d_1+\Delta_R, d_2+\Delta_R, ..., d_n+\Delta_R$ köşegen elemanlarıyla köşegen matris olmak üzere $A = E\cdot D$ şeklinde yazılabilir. A tersinir ve $U(F)/\Delta_R$ nin tersinir elemanları $0 \neq \alpha \in K$ olmak üzere $\alpha+\Delta_R$ formunda olduğundan $i = 1,2,...,n$ için $0 \neq d_i \in K$ dır. Şimdi A matrisinin $H_m = (U(F)/\Delta_R)/(\Delta^m/\Delta_R)$ üzerindeki görüntüsünü düşünelim. Bu görüntü $\overline{A} = \overline{E}\cdot\overline{D}$ olsun. O zaman $d_i+\Delta_R+(\Delta^m/\Delta_R)$, $\overline{D}$ nın köşegen elemanlarıdır. Böylece A nın Dieudonné determinantı $\alpha = d_1.d_2...d_n$ olmak üzere

$$D_m(A) = \alpha+\Delta_R+(\Delta^m/\Delta_R)$$

formundadır. $D_m(A)$ nın $U(F)/\Delta_R$ deki $det_m(A)$ ters görüntüsü

$$det_m(A) = \alpha+\Delta_R(mod(\Delta^m/\Delta_R))$$

dir.

Önerme 5.14, $M_n(U(F))$ de verilen bir matrisin tersinir olmadığını göstermede kullanılan bir kriterdir. Bu kriter uygulanırken aşağıdaki yol takip edilir:

$M \in M_n(U(F))$ olsun.

1) $\varepsilon(M)$ matrisi bulunur. Eğer $\varepsilon(M)$ tersinir değilse sonuç elde edilmiş olur.

2) $\varepsilon(M)$ tersinir ise bunun anlamı M nin $H_m = U(F)/\Delta^m$ üzerindeki görüntüsünün her satır ve sütununda en az bir tersinir elemanın olmasıdır. Bu durumda $m = 1$ ile başlayıp $det_m(M)$ hesaplanır. Önerme ile çelişkili bir durum elde edinceye kadar devam edilir. Burada önemli olan nokta böyle bir çelişkili durumun elde edilip edilmeyeceğidir. Bunun için genel bir yol yoktur. Bununla birlikte serbest Lie cebirlerinde bazı örneklerde iyi sonuçlar vermektedir.

Şimdi örneklerle kriterin uygulanışını inceleyelim. Örneklerde kosetler sadece temsilci elemanlarıyla gösterilecektir.

Örnek 5.17 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \;:\; & x_1 \to x_1 + [x_2, x_3], \\ & x_2 \to x_2 + [x_1, x_3] + [[x_2, x_3]\, x_3], \\ & x_3 \to x_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan otomorfizmin Dieudonné determinantının $U(F)$ deki ters görüntüsünü bulalım. Jacobian matris

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 1 + x_3^2 & x_1 + [x_2, x_3] - x_3 x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup her $m \geq 2$ için J_α nın $H_m = U(F)/\Delta^m$ üzerindeki görüntüsüne uygun elemanter işlemlerin uygulanmasıyla I birim matrisi elde edilir. O halde her $m \geq 2$ için $det_m(J_\alpha) = 1 (mod \Delta^m)$ dir. Bu durumda α endomorfizminin otomorfizm olup olmadığı hakkında bir karara varılamaz.

Örnek 5.18 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ & x_1 \to x_1 + x_2 + x_3 + [x_2, x_3], \\ & x_2 \to x_2 + [x_1, x_3] + [x_2, x_3] + [[x_2, x_3] x_3], \\ & x_3 \to x_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan α otomorfizmi için $det_m(J_\alpha)$ değerini hesaplayalım.

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 - x_3 & 1 + x_2 \\ -x_3 & 1 - x_3 + x_3^2 & x_1 + x_2 + [x_2, x_3] - x_3 x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matriste köşegen üzerindeki elemanlar her $m \geq 1$ için modulo Δ^m tersinirdir. Uygun işlemlerle matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formuna indirgenir. $det_m(J_\alpha) = 1 (mod \Delta^m)$ olup J_α nın tersinir olup olmadığı bu yolla belirlenemez.

Örnek 5.19 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ & x_1 \to x_1, \\ & x_2 \to [x_1, x_2], \\ & x_3 \to x_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü inceleyelim. J_α Jacobian matrisi

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\varepsilon(J_\alpha)$ matrisini kontrol edelim.

$$\varepsilon(J_\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $\varepsilon(J_\alpha)$ tersinir olmadığından α otomorfizm değildir.

Örnek 5.20 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ & x_1 \to x_1 + [[x_2, x_3]x_3], \\ & x_2 \to x_2 + [x_2, x_1] + [x_2\,[x_2, x_3]], \\ & x_3 \to x_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü inceleyelim. Jacobian matrisi

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -x_3x_3 & -[x_2, x_3] + x_3x_2 \\ x_2 & 1 - x_1 - x_2x_3 - [x_2, x_3] & x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matriste köşegen üzerindeki elemanlar her m için modulo Δ^m tersinirdir. $H_2 = U(F)/\Delta^2$ cebirini düşünelim. J_α nin H_2 üzerindeki g örüntüsü

$$\overline{J_\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 - x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $D_m(\overline{J_\alpha}) = 1 - x_1$, yani $det_2(\overline{J_\alpha}) \equiv 1 - x_1 (mod \Delta^2)$ dir. α bir otomorfizm olsaydı, Sonuç5.15 den $1 - x_1 \equiv 1 (mod \Delta^2)$ olurdu. Buradan $x_1 \in \Delta^2$ çelişkisi elde edilir. O halde α otomorfizm değildir.

Örnek 5.21 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & x_1 \to \sum_{i=1}^{n} x_i - [x_1, x_2, ..., x_n], \\ & x_2 \to x_2 + x_1 - [x_1, x_2], \\ & x_i \to x_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün otomorfizm olmadığını gösterelim. ϕ nin Jacobian matrisi

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1+(-1)^{n-1}x_n x_{n-1}...x_2 & 1+(-1)^{n-2}x_n...x_3x_1 & 1+(-1)^{n-3}x_n...x_4[x_1,x_2] & ... & * \\ 1+x_1 & 1-x_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matriste köşegen üzerindeki elemanlar her $m \geq 1$ için modulo Δ^m tersinirdir. $H_2 = U(F)/\Delta^2$ cebirini düşünelim. J_ϕ, nin H_2 üzerindeki görüntüsü

$$\overline{J_\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1+x_1 & 1-x_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

olur . Uygun işlemler yapılarak matris

$$\overline{J_\phi}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & -2x_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

formuna indirgenir. Burada $D_m(\overline{J_\phi}') = -2x_1$, yani $det_2(\overline{J_\phi}') \equiv -2x_1 (mod\Delta^2)$ tür. ϕ otomorfizm olsaydıSonuç5.15 den $-2x_1 \equiv \beta (mod\Delta^2)$,$0 \neq \beta \in K$ olurdu. Buradan $-\beta - 2x_1 \in \Delta^2$ elde edilir. Bu ise mümkün değildir. O halde ϕ bir otomorfizm değildir.

Örnek 5.22 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ & x_1 \to x_1, \\ & x_2 \to x_2 + [x_1,x_2] + [x_2[x_2,x_3,x_4]] \ (3 \leq c \leq n), \\ & x_i \to x_i, i \neq 2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün bir otomorfizm olmadığını gösterelim. α nın Jacobian matrisi

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -x_2 & 1+x_1-[x_2,x_3,x_4]+x_4x_3x_2 & * & ... & * \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $H_2 = U(F)/\Delta^2$ cebirini düşünelim. J_α, nin H_2 üzerindeki görüntüsü

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -x_2 & 1+x_1 & * & ... & * \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. Bazı uygun işlemler uygulanarak matris

$$\overline{J_\alpha}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1+x_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

formuna indirgenir. $D_m(\overline{J_\alpha}') = 1+x_1$, yani $det_2(\overline{J_\alpha}') \equiv 1+x_1 (mod\Delta^2)$ dir. şimdi α nın bir otomorfizm olduğunu kabul edersek Sonuç 5.15 den $1+x_1 \equiv 1(mod\Delta^2)$ ve bu durumda $x_1 \in \Delta^2$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

$L = F/F''$ olsun. $U(L/L')$ nün polinom cebirine izomorf olduğu gözönüne alınırsa aşağıdaki örnekler alışılmış determinantın L nin otomorfizmlerini belirlemek için iyi olduğunu fakat L nin serbest metabelyen cebirden farklı olması durumunda değişmeli olmayan determinantın daha kullanışlı olduğunu gösterir.

Örnek 5.23 ψ , F nin aşağıdaki gibi tanımlanan bir endomorfizmi olsun.

$$\begin{aligned} \psi \ : \ & x_1 \to x_1 + [[x_1,[x_2,x_3]],x_4], \\ & x_i \to x_i, i \neq 1. \end{aligned}$$

J_ψ Jacobian matrisi:

$$J_\psi = \begin{bmatrix} 1+x_4.[x_2,x_3] & x_4.x_1.x_3 & -x_4.x_1.x_2 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. J_ψ nin elemanlarının $U(F/F')$ deki görüntüsü

$$\begin{bmatrix} 1 & x_4.x_1.x_3 & -x_4.x_1.x_2 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini belirler. Bu matrisin bilinen determinantı 1 olduğundan $U(F/F')$ üzerinde tersinirdir. Bu ise ψ nin L serbest metabelyen Lie cebirinin bir otomorfizmini belirlediğini gösterir. Şimdi J_ψ nin $H_4 = U(F)/\Delta^4$ üzerindeki görüntüsünü düşünelim ve $D_4(J_\psi)$ yi hesaplayalım:

$$D_4(J_\psi) = 1 + x_4.[x_2,x_3]$$

Eğer ψ , F nin bir otomorfizmi olsaydı Sonuç5.15 den $0 \neq \alpha \in K$ için

$$det_4(J_\psi) \equiv 1 + x_4.[x_2,x_3] \,(mod\Delta^4) \equiv \alpha (mod\Delta^4)$$

olurdu . Bu durumda $\alpha = 1$ ve $x_4.[x_2,x_3] \in \Delta^4$ olmalıdır. Bu ise imkansızdır. ψ bir otomorfizm olamaz.

Örnek 5.24 F nin φ endomorfizmini

$$\begin{aligned}\varphi \;\; : \;\; & x_1 \to x_1 + \left[\left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right], x_{j_3}\right], \\ & x_i \to x_i, i \neq 1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$ için $j_\alpha \neq j_\beta$ ve $\gamma = 1,2$ için $j_\gamma \neq 1$ dir. O zaman J_φ Jacobian matrisinin $U(F/F')$ üzerindeki görüntüsü altında köşegen elemanları sıfır ve köşegen üzerinde birimlere sahiptir. Dolayısıyla bilinen determinantı 1 dir. Bu durumda φ, F/F'' nün bir otomorfizmini belirler.

Şimdi J_φ matrisinin $H_4 = U(F)/\Delta^4$ üzerindeki görünütüsünü yazalım. $g = \left[\left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right], x_{j_3}\right]$ olmak üzere

$$\overline{J_\varphi} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & .. & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

dir. H_4^* ın (H_4^*, H_4^*) komutator altgrubu $v, w \in \Delta$ olmak üzere

$$(1-v)(1-w)(1+v+v^2+v^3)(1+w+w^2+w^3)$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen çarpımsal gruptur. Burada bazı hesaplamalarla bu formdaki bir eleman

$$1 + vw - wv + v^2w - vwv + wvw - w^2v$$

formunda yazılabilir. (Δ, Δ) , $U(F)$ nin $fg - gf$, $f, g \in \Delta$ formundaki elemanlar tarafından üretilen alt uzayı olsun. Böylece H_4^* ın (H_4^*, H_4^*) komutatör alt grubunun elemanları $1 + z$, $(z \in (\Delta, \Delta))$ formundadır. Şimdi $D_4(J_\varphi)$ değerini hesaplayalım:

$$D_4(J_\varphi) = \pi(1 + \left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right] \frac{\partial x_{j_3}}{\partial x_1} - x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]) = 1 - x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]$$

Böylece $D_4(J_\varphi)$ ın $U(F)$ deki herhangi bir ters görüntüsü

$$det_4(J_\varphi) \equiv 1 + \left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right] \frac{\partial x_{j_3}}{\partial x_1} - x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right] (mod \Delta^4)$$

olmalıdır. Eğer φ bir otomorfizm olsaydı,

$$1+\left[x_1,\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\right]\frac{\partial x_{j_3}}{\partial x_1}-x_{j_3}\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\equiv 1(mod\Delta^4).$$

olurdu. Buradan da

$$-x_{j_3}\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\equiv 0(mod((\Delta,\Delta)+\Delta^4))$$

sonucu bulunur. Bu ise imkansızdır. O halde φ bir otomorfizm değildir.

5.2 Değişmeli Olmayan Determinantların Uygulamaları: Taşınamayan Otomorfizmler

Bu bölümde Dieudonné determinantının bazı uygulamalarını vereceğiz. F, $\{x_1,...,x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $L=F/F''$ olsun. Bu bölümde, bir idealle olan bölüm cebirlerinin elemanları olan kosetleri, sadece temsilci elemanlarını yazarak ifade edeceğiz

Teorem 5.25 L nin aşağıdaki şekilde tanımlanan φ endomorfizmi F nin bir otomorfizmine taşınamaz.

$$\begin{aligned}\varphi \;:\; & x_1\to x_1+\left[\left[x_1,\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\right],x_{j_3}\right], j_\alpha\neq j_\beta, 1\leq\alpha,\beta\leq 3, j_\gamma\neq 1,\gamma=1,2\\ & x_i\to x_i, i\neq 1\end{aligned}$$

İspat: φ, F nin bir ψ otomorfizmine taşınabiliyor olsun. O zaman $u_j\in F''$, $j=1,2,...,n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi \;:\; & x_1\to x_1+\left[\left[x_1,\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\right],x_{j_3}\right]+u_1, j_\alpha\neq j_\beta, 1\leq\alpha,\beta\leq 3, j_\gamma\neq 1,\gamma=1,2\\ & x_i\to x_i+u_i, i\neq 1\end{aligned}$$

formundadır. ψ, F nin bir otomorfizmi olduğundan, Jacobian matrisi $g=\left[\left[x_1,\left[x_{j_1},x_{j_2}\right]\right],x_{j_3}\right], j_\alpha\neq j_\beta, 1\leq\alpha,\beta\leq 3, j_\gamma\neq 1,\gamma=1,2$ olmak üzere

$$J_\psi=\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial g}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ . & . & \dots & .\\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & 1+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$U(F)$ üzerinde tersinirdir. $R = F'$ olsun. O zaman J_ψ nin köşegen elemanları $1+v$, $v \in \Delta_R$ formundadır ve bu elemanlar modulo Δ_R^2 tersinirdir. J_ψ nin birinci satır dışında kalan elemanları sonuç 2.14 den Δ_R ye aittir. $\Delta_R^2 \subset \Delta^4$ olduğunu biliyoruz. J_ψ nin $\eta : U(F) \to U(F)/\Delta^4$ kanonik dönüşümü altındaki görüntüsünü düşünelim. $\eta(J_\psi)$ matrisinin satırlarına uygun işlemler uygulayarak köşegen forma indirgeyelim. Burada $w_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ olsun. O zaman $\eta(J_\psi)$ nin $1+w_1$ köşegen elemanının tersi $1-w_1$ dir. Şimdi aşağıdaki elemanter dönüşümleri uygulayalım :

Birinci satırı, $i = 2,...,n$ olmak üzere soldan $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(1-w_1)$ ile çarpalım ve i-yinci satırdan çıkaralım. O zaman

$$\eta(J_\psi) = \begin{bmatrix} 1+w_1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ . & . & ... & . \\ 0 & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $a_{22},...,a_{nn}$ köşegen elemanlarını kullanarak benzer işlemlerle matrisin köşegen dışındaki elemanlarını sıfır yapalım. Böylece aşağıdaki formda bir köşegen matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1+w_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1+\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Şimdi $H_4 = U(F)/\Delta^4$ cebirini düşünelim. H_4^* çarpımsal altgrubunun tersinir elemanları $0 \neq \alpha \in K, w \in \Delta$ olmak üzere $\alpha + w$ formundadır. Böylece H_4^* alt grubunun komutatör altgrubunun elemanları $0 \neq \alpha \in K,\ v \in (\Delta,\Delta)$ olmak üzere $\alpha + v$ formundadır. Sonuç 5.15 i uygularsak

$$1 + \left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right] \frac{\partial x_{j_3}}{\partial x_1} - x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right] + \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv 1 (mod \Delta^4)$$

eşitliğini elde ederiz. $\left[x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\right] \frac{\partial x_{j_3}}{\partial x_1} \in (\Delta,\Delta)$ olduğundan $-x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right] + \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv 0 (mod (\Delta,\Delta) + \Delta^4)$ olur. Biliyoruz ki $h = -x_{j_3} \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]$, $(\Delta,\Delta) + \Delta^4$ nın elemanı değildir. Dolayısıyla $\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ elemanı ile çakışıp çakışmadığını kontrol etmeliyiz. $h \in \Delta^3$

olduğundan F'' nün 4 uzunluklu monomiallerini belirleyeceğiz. h sadece $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}$ monomiallerini içerdiğinden aşağıdaki formdaki monomialleri gözönünde bulundurmak yeterli olacaktır:

$$\begin{aligned} u_{j_1} &= \left[\left[x_{j_2}, x_{j_1}\right]\left[x_{j_3}, x_{j_1}\right]\right], \\ u_{j_2} &= \left[\left[x_{j_1}, x_{j_2}\right]\left[x_{j_3}, x_{j_2}\right]\right], \\ u_{j_3} &= \left[\left[x_{j_1}, x_{j_3}\right]\left[x_{j_2}, x_{j_3}\right]\right]. \end{aligned}$$

$\frac{\partial u_{j_k}}{\partial x_{j_k}}$ yi modulo $(\Delta,\Delta)+\Delta^4 (k=1,2,3)$ belirleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_{j_1}} &\equiv \left[x_{j_2}, x_{j_1}\right] x_{j_3} - \left[x_{j_3}, x_{j_1}\right] x_{j_2} (mod(\Delta,\Delta)+\Delta^4), \\ \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_{j_2}} &\equiv \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right] x_{j_3} - \left[x_{j_3}, x_{j_2}\right] x_{j_1} (mod(\Delta,\Delta)+\Delta^4), \\ \frac{\partial u_{j_3}}{\partial x_{j_3}} &\equiv \left[x_{j_1}, x_{j_3}\right] x_{j_2} - \left[x_{j_2}, x_{j_3}\right] x_{j_1} (mod(\Delta,\Delta)+\Delta^4). \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_{j_k}}{\partial x_{j_k}} = 2\left[x_{j_1}, x_{j_3}\right] x_{j_2} (mod(\Delta,\Delta)+\Delta^4),$$

olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{\partial u_{j_k}}{\partial x_{j_k}}$ ile h nin toplamı sıfır olamaz. O halde ψ bir otomorfizm olamaz.

Teorem 5.26 $m \geq 3$ için $F/\gamma_m(F)'$ nün

$$\begin{aligned} \varphi \;:\; & x_1 \to x_1 + [\left[...x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right], ..., x_{j_m}\right], j_k \neq 1, k = 1, .., m, \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ otomorfizmi F nin bir otomorfizmine taşınamaz.

İspat: φ, F nin bir ψ otomorfizmine taşınabilir olsun. O zaman $j = 1, 2, ..., n$ için $u_j \in \gamma_m(F)'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi \;:\; & x_1 \to x_1 + g + u_1, \\ & x_i \to x_i + u_i,\ i \neq 1. \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $g = [\left[...x_1, \left[x_{j_1}, x_{j_2}\right], ..., x_{j_m}\right]$ dir. $H_{m+1} = U(F)/\Delta^{m+1}$ olsun. J_ψ Jacobian matrisinin $H_{m+1} = U(F)/\Delta^{m+1}$ üzerindeki görüntüsünü düşünelim. Teorem

5.25 ün ispatındakine benzer hesaplar sonucunda

$$det_{m+1}(J_\psi) \equiv 1 - v(mod\Delta^{m+1})$$

elde edilir. Sonuç 5.15 ' i uygularsak

$$v = \left[\left[...\left[x_{j_1}, x_{j_2}\right], ...\right], x_{j_m}\right] \equiv 0(mod\Delta^{m+1})$$

bulunur. Bu ise imkansızdır. O halde φ, F nin bir ψ otomorfizmine taşınamaz.

Teorem 5.27 R, F nin bir ideali, $R \subseteq \gamma_m(F)$ ve $m \geq 3$ için $R \subsetneq \gamma_{m+1}(F)$ olsun. Varsayalım ki x_1 serbest üretecine bağlı olmayan bir $r \in R$, $r \notin \gamma_{m+1}(F)$ elemanı var olsun. O zaman $F/R^{'}$ cebiri F nin bir otomorfizmine taşınamayan otomorfizmlere sahiptir.

İspat: $F/R^{'}$ nün

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [[x_1, r], x_1], \\ & x_i \to x_i, \ i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ otomorfizmini gözönünde bulunduralım. J_φ Jacobian matrisi :

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} 1 + [x_1, r] - x_1 r & -x_1 x_1 \frac{\partial r}{\partial x_2} & ... & -x_1 x_1 \frac{\partial r}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . \quad . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. J_φ, $U(F/R)$ üzerinde tersinirdir. Bu da φ nin F/R' nün bir otomorfizmi olduğunu gösterir. Eğer φ taşınabilir ise

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [[x_1, r], x_1] + u_1, \\ & x_i \to x_i + u_i, \ i \neq 1 \end{aligned}$$

dönüşümü F nin otomorfizmi olacak şekilde $u_j \in R'(j = 1, 2, ..., n)$ elemanları vardır. J_ψ Jacobian matrisini hesaplayalım.

$$J_\psi = \begin{bmatrix} 1+[x_1,r]-x_1r+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -x_1x_1\frac{\partial r}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & -x_1x_1\frac{\partial r}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ . & . \quad . \quad . & \dots & . \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & 1+\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

J_ψ nin elemanlarının $H_{m+2} = U(F)/\Delta^{m+2}$ deki görüntüsünü düşünelim. $R \subseteq \gamma_m(F)$ ve $r \notin \gamma_{m+1}(F)$ olduğundan Sonuç 5.15 den

$$1+[x_1,r]-x_1r+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv 1+[x_1,r]-x_1r(mod\Delta^{m+2}),$$

$$\frac{\partial(x_1+[[x_1,r],x_1]+u_1)}{\partial x_j} \equiv -x_1x_1\frac{\partial r}{\partial x_j}(mod\Delta^{m+2}), j \geq 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_i+u_i)}{\partial x_j} &\equiv 0\ (mod\Delta^{m+2})\ i \neq j, i \neq 1, \\ \frac{\partial(x_i+u_i)}{\partial x_i} &= 1\ (mod\Delta^{m+2}), i \neq 1. \end{aligned}$$

Böylece J_ψ nin H_{m+2} üzerindeki görüntüsü :

$$\begin{bmatrix} 1+[x_1,r]-x_1r & -x_1x_1\frac{\partial r}{\partial x_2} & \dots & -x_1x_1\frac{\partial r}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . \quad . \quad . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi $D_{m+2}(J_\psi)$ yi hesaplayalım:

$$D_{m+2}(J_\psi) = \pi(1+[x_1,r]-x_1r)$$

Sonuç 5.15 i uygularsak

$$1+[x_1,r]-x_1r \equiv 1(mod\Delta^{m+2})$$

elde edilir. Böylece

$$-x_1r \equiv 0(mod\Delta^{m+2})$$

dir. Bu ise $m \geq 3$ olması durumunda imkansızdır. Böylece ψ, F nin bir otomorfizmi değildir.

Teorem 5.28 u homojen eleman , $l(u) = 2n_1n_2...n_{k-1}$ ve $u \in F_{n_1,...,n_{k-1},2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + u, \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F_{n_1,...,n_k}$ $(n_k > 2)$ serbest polinilpotent Lie cebirinin φ endomorfizmi F nin bir otomorfizmine taşınamaz.

İspat: $R = F_{n_1,...,n_{k-1}}$ diyelim ve φ nin bir otomorfizm olduğunu gösterelim. φ nin Jacobian matrisi $U(F)/\Delta_R$ üzerinde tersinir olmalıdır. φ nin Jacobian matrisini hesaplayalım.

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$u \in F_{n_1,...,n_{k-1},2}$ olduğundan $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \Delta_R$ dir. J_φ, $U(F)/\Delta_R$ üzerinde

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan tersinirdir. φ bir otomorfizmdir.

Şimdi de φ nin F nin bir ψ otomorfizmine taşınabileceğini varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + u + v_1 \\ & x_i \to x_i + v_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmi olacak şekilde $v_1, v_i \in F_{n_1,...,n_k}$ vardır. ψ bir otomorfizm olduğundan , Jacobian matrisi

$$J_\psi = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u}{\partial x_n}+\frac{\partial v}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ . & . & ... & . \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial x_2} & ... & 1+\frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $m = n_1...n_k - 1$ diyelim. J_ψ nin $H_m = U(F)/\Delta^m$ üzerindeki görüntüsü

$$\overline{J_\psi} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sonuç 5.15 den $\det_m(\overline{J_\psi}) = 1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 1(mod\Delta^m)$ olur. Bu ise $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \Delta^m$ çelişkisine neden olur.

Teorem 5.29 $n_k > 2$, $k \geq 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ & x_1 \to x_1 + u, \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F_{n_1,...,n_k}$, serbest polinilpotent Lie cebirinin φ endomorfizmi $F/F_{n_1,...,n_{k+1}}$ in bir otomorfizmine taşınamaz. Burada $u \in F_{n_1,...,n_{k-1},2}$, $l(u) = 2n_1n_2...n_{k-1}$ ve u homojen elemandır.

İspat: $R = F_{n_1...n_{k-1}}$ diyelim ve φ nin bir otomorfizm olduğunu gösterelim. φ nin Jacobian matrisi $U(F)/\Delta_R$ üzerinde tersinir olmalıdır. φ nin Jacobian matrisini hesaplayalım.

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$u \in F_{n_1,...,n_{k-1},2}$ olduğundan $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \Delta_{F_{n_1,...,n_{k-1}}}$ dir. J_φ, $U(F)/\Delta_{F_{n_1,...,n_{k-1}}}$ üzerinde

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan tersinirdir. φ bir otomorfizmdir.

Şimdi de φ nin $F/F_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ nin bir ψ otomorfizmine taşınabileceğini varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned}\psi \;&:\; x_1 \to x_1+u+v\\ &\quad x_i \to x_i+v_i, i\neq 1\end{aligned}$$

F nin bir otomorfizmi olacak şekilde $v\in F_{n_1,\ldots,n_k,t}$, $1\leq t<n_{k+1}$vardır. Jacobian matrisi incelersek

$$J_\psi=\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n}+\frac{\partial v}{\partial x_n}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n}\\ . & . & \ldots & .\\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial x_2} & \ldots & 1+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

dir. ψ otomorfizm olduğundan J_ψ , $U(F)/\Delta_R$ üzerinde tersinirdir. $\Delta_R\subset\Delta^m$ olacak şekilde bir m seçelim. $m=n_1\ldots n_k-1$ alınırsa J_ψ nin $H_m=(U(F)/\Delta_R)/(\Delta^m/\Delta_R)$ üzerindeki görüntüsü $\frac{\partial v}{\partial x_i}\in\Delta^{n_1\ldots n_kt-1}\subseteq\Delta^{n_1\ldots n_k-1}$ olduğundan

$$\overline{J_\psi}=\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n}\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ . & . & \ldots & .\\ 0 & .. & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sonuç 5.16 dan dolayı $\det_m(\overline{J_\psi})\equiv 1+\frac{\partial u}{\partial x_1}+\Delta_R\equiv 1+\Delta_R(mod\Delta^m/\Delta_R)$ dir Bu durumda $\frac{\partial u}{\partial x_1}+\Delta_R\in\Delta^m/\Delta_R$ ve dolayısıyla $\frac{\partial u}{\partial x_1}\in\Delta^m$ dir. Halbuki $\frac{\partial u}{\partial x_1}\in\Delta_{F_{n_1,\ldots,n_{k-1}}}$ ve $l(\frac{\partial u}{\partial x_1})=2n_1n_2\ldots n_{k-1}-1$ olduğundan $\frac{\partial u}{\partial x_1}\notin\Delta^m$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.30 $j=2,\ldots,n_k-1$ için v_j, x_1 içermeyen elemanlar ve $l(v_j)=n_1n_2\ldots n_{k-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi \;&:\; x_1 \to x_1+[[x_1,v_1]\ldots v_{n_k-1}]\\ &\quad x_i \to x_i, i\neq 1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F_{n_1,\ldots,n_k}$ serbest polinilpotent Lie cebirinin φ endomorfizmi $F/F_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ in bir otomorfizmine taşınamaz. Burada $v_i\in F_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$, dir.

İspat: $R = F_{n_1 \dots n_k}$ diyelim ve φ nin bir otomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \quad : \quad & x_1 \to x_1 - [[x_1, v_1] \dots v_{n_k - 1}] \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\varphi\varphi^{-1}(x_1) = \varphi(x_1 - [[x_1, v_1] \dots v_{n_k-1}]) = x_1 - [[[[x_1, v_1] \dots v_{n_k-1}]\, v_1] \dots v_{n_k-1}]$$

dır. Her $v_i \in F_{n_1 \dots n_{k-1}}$ ve $2(n_k - 1) + 1 > n_k$ olduğundan $[[[[x_1, v_1] \dots v_{n_k-1}]\, v_1] \dots v_{n_k-1}] \in F_{n_1 \dots n_k}$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \varphi\varphi^{-1} \quad : \quad & x_1 \to x_1 \\ & x_i \to x_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

dir. φ bir otomorfizmdir.

Şimdi de φ nin $F/F_{n_1,\dots,n_{k+1}}$ nin bir ψ otomorfizmine taşınabileceğini varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & x_1 \to x_1 + [[x_1, v_1] \dots v_{n_k - 1}] + w \\ & x_i \to x_i + w_i, i \neq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $F/F_{n_1,\dots,n_{k+1}}$ nın bir otomorfizmi olacak şekilde $w \in F_{n_1,\dots,n_k,t}$, $1 \leq t < n_{k+1}$ vardır. Jacobian matrisi

$$J_\psi = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial w}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_2}{\partial x_n} \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \frac{\partial w_n}{\partial x_2} & \dots & 1 + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $u = [[x_1, v_1] \dots v_{n_k-1}]$ dir. ψ otomorfizm olduğundan J_ψ, $U(F)/\Delta_R$ üzerinde tersinirdir. $\Delta_R \subset \Delta^m$ olacak şekilde bir m seçelim. $m = n_1 \dots n_k - 1$ alınırsa

J_ψ nin $H_m = (U(F)/\Delta_R)/(\Delta^m/\Delta_R)$ üzerindeki görüntü matrisi $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in \Delta^{n_1 \ldots n_k t-1} \subseteq \Delta^m$ olduğundan

$$J_\psi = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & .. & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sonuç 5.16 dan dolayı $\det_m(\overline{J_\psi}) \equiv 1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \Delta_R \equiv 1 + \Delta_R (mod \Delta^m/\Delta_R)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \Delta_R \in \Delta^m/\Delta_R$ olur. Dolayısıyla $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in \Delta^m$ dir. Halbuki $\frac{\partial u}{\partial x_1} = v_{n_k-1}....v_1$ ve $l(v_{n_k-1}....v_1) = n_1...n_{k-1}(n_k-1)$ olduğundan $\frac{\partial u}{\partial x_i} \notin \Delta^m$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 5.31 $m \geq 4$ olmak üzere $F/\gamma_m(F)$ cebirinin $\{x_1 + [[x_1,x_2],x_2],x_2,..,x_m\}$ serbest üreteç kümesi, $F/\gamma_m(F)'$ cebirinin bir serbest üreteç kümesine taşınamaz.

İspat: $K = \{x_1 + [[x_1,x_2],x_2],x_2,..,x_m\}$ kümesinin lineer kısmı tersinir olup bu küme $F/\gamma_m(F)$ cebirinin bir serbest üreteç kümesidir. Şimdi $\{x_1 + [[x_1,x_2],x_2],x_2,..,x_m\}$ serbest üreteç kümesinin $F/\gamma_m(F)'$ cebirinin bir $L = \{x_1 + [[x_1,x_2],x_2] + u_1, x_2 + u_2,..,x_m + u_m\}$, $u_i \in \gamma_m(F)$ serbest üreteç kümesine taşınabildiğini varsayalım. $R = \gamma_m(F)$ diyelim. O zaman L nin Jacobian matrisi

$$J_L = \begin{bmatrix} 1+x_2^2+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & [x_1,x_2]-x_2x_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & . & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & . & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & . & 1+\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

olup J_L , $U(F)/\Delta_R$ üzerinde tersinirdir . $\Delta_R \subset \Delta^3$ olduğunu gözönüne alalım ve $H_3 = (U(F)/\Delta_R)/(\Delta^3/\Delta_R)$ cebirini düşünelim. J_L, nin H_3 üzerindeki görüntüsü

$$\overline{J_L} = \begin{bmatrix} 1+x_2^2 & [x_1,x_2]-x_2x_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

olup $det_3(\overline{J_L}) \equiv 1 + x_2^2 + \Delta_R (mod \Delta^3/\Delta_R)$ dir. Sonuç 5.16 dan $1 + x_2^2 + \Delta_R \equiv 1 + \Delta_R (mod \Delta^3/\Delta_R)$ olur. Buradan $x_2^2 + \Delta_R \in \Delta^3/\Delta_R$ ve $x_2^2 \in \Delta^3$ elde edilir. Çelişki ispatı

tamamlar.

Teorem 5.32 F/F'' cebirinin $K = \{x_1 + [[x_3, x_2], x_1], x_2, .., x_m\}$ serbest üreteç kümesi F/F''' cebirinin bir serbest üreteç kümesine taşınamaz.

İspat: $K = \{x_1 + [[x_3, x_2], x_1], x_2, .., x_m\}$ kümesinin F/F'' cebirinin bir serbest üreteç kümesi olduğunu gösterelim. K kümesinin Jacobian matrisi

$$J_K = \begin{bmatrix} 1+[x_3,x_2] & -x_1x_3 & x_1x_2 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

formunda olup J_K nın $U(F)/\Delta_{F'}$ deki görüntüsü

$$\begin{bmatrix} 1 & -x_1x_3 & x_1x_2 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

dır. $J_K, U(F)/\Delta_{F'}$ üzerinde tersinir olup K , F/F'' cebirinin bir serbest üreteç kümesidir. Şimdi K kümesinin $u_i \in F''$ olmak üzere F/F''' cebirinin $L = \{x_1 + [[x_3, x_2], x_1] + u_1, x_2 + u_2, .., x_m + u_m\}$ serbest üreteç kümesine taşınabildiğini varsayalım. O zaman L nin Jacobian matrisi

$$J_L = \begin{bmatrix} 1+[x_3,x_2]+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -x_1x_3+\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & x_1x_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3} & . & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & . & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & . & 1+\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

dir. Sonuç 5.16 da $R = F''$ ve $m = 3$ seçilirse, J_L nin $H_3 = (U(F)/\Delta_R)/(\Delta^3/\Delta_R)$ üzerindeki görüntü matrisi

$$\overline{J_L} = \begin{bmatrix} 1+[x_3,x_2] & -x_1x_3 & x_1x_2 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre $det_3(\overline{J_L}) \equiv 1+[x_3,x_2]+\Delta_R(mod\Delta^3/\Delta_R)$ dır. Sonuç 5.16 dan $[x_3,x_2]+\Delta_R \in \Delta^3/\Delta_R$ ve dolayısıyla $[x_3,x_2] \in \Delta^3$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 5.33 $m \geq 3$ olmak üzere ,v , $\delta^{m-1}(F)$ nin x_1 içermeyen bir elemanı ve $l(v) = 2^{m-1}$ olsun. O zaman $F/\delta^m(F)$ cebirinin $\{x_1+[[v,x_1],x_1],x_2,..x_m\}$ serbest üreteç kümesi $F/\delta^{m+1}(F)$ cebirinin bir serbest üreteç kümesine taşınamaz.

İspat: Öncelikle $K = \{x_1+[[v,x_1],x_1],x_2,..,x_m\}$ kümesinin $F/\delta^m(F)$ cebirinin bir serbest üreteç kümesi olduğunu gösterelim. K nın Jacobian matrisi

$$J_K = \begin{bmatrix} 1+[v,x_1]-x_1v & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & . & \frac{\partial g}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $g = [[v,x_1],x_1]$ dir.J_K matrisinin $U(F)/\Delta_{\delta^{m-1}(F)}$ üzerindeki görüntüsü tersinir olduğundan K, $F/\delta^m(F)$ nin serbest üreteç kümesidir. Şimdi $\{x_1+[[v,x_1],x_1],x_2,..,x_m\}$ serbest üreteç kümesinin, $u_i \in \delta^m(F)$, $u_i \notin \delta^{m+1}(F)$ olmak üzere $F/\delta^{m+1}(F)$ cebirinin $L = \{x_1+[[v,x_1],x_1]+u_1,x_2+u_2,..,x_m+u_m\}$ serbest üreteç kümesine taşınabildiğini varsayalım. $R = \delta^m(F)$ diyelim. O zaman L nın Jacobian matrisi

$$J_L = \begin{bmatrix} 1+[v,x_1]-x_1v+\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3} & . & \frac{\partial g}{\partial x_m}+\frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & . & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \frac{\partial u_m}{\partial x_3} & . & 1+\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

dir. $\Delta_R \subset \Delta^{2^m-1}$ olduğunu göze alalım ve $H_{2^m-1} = (U(F)/\Delta_R)/(\Delta^{2^m-1}/\Delta_R)$ cebirini düşünelim. J_L nin $(U(F)/\Delta_R)/(\Delta^{2^m-1}/\Delta_R)$ üzerindeki görüntü matrisi

$$\overline{J_L} = \begin{bmatrix} 1+[v,x_1]-x_1v & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & . & \frac{\partial g}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre $det_{2^{m}-1}(\overline{J_L}) \equiv 1+[v,x_1]-x_1v+\Delta_R(mod\Delta^{2^{m}-1}/\Delta_R)$ olur. Sonuç 5.16 dan $[v,x_1]-x_1v+\Delta_R \in \Delta^{2^{m}-1}/\Delta_R$ ve dolayısıyla $[v,x_1]-x_1v \in \Delta^{2^{m}-1}$ dir. Burada $[v,x_1]-x_1v$ in uzunluğu $2^{m-1}+1$ ve $2^{m-1} < 2^{m}-1$ olduğundan $[v,x_1]-x_1v \notin \Delta^{2^{m}-1}$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

KAYNAKLAR

BİRMAN, J.S., (1973). An Inverse Function Theorem for Free Groups, Proc. Amer. Math. Soc, 41, 634-638.

BRYANT, R.M., DRENSKY, V., (1993). Obstructions to Lifting Automorphisms of Free Algebras, Communication in Algebra, 12, 4361-4389.

COHN, P.M.,(1964). Subalgebras of Free Associative Algebra, Proc.London Math.Soc, 14(3), 618-632.

DRAXL, P.K., (1983). "Skew Fields",London Mathematical Society Lecture Notes Series, 83, Cambridge Univ. Press.

DRENSKY, V., GUPTA, C.K., (1990). Automorphisms of Free Nilpotent Lie Algebras, Can J. Math. XI(2), 259-279.

FOX, R.H., (1953). Free differantial calculus,I.Derivation in the free group ring, Ann. of Math. 2, 547-560.

GUPTA, C.K., GUPTA, N.D., ROMAN'KOV, V.A., (1992). Primitivity in Free Groups and Free Metabelian Groups, Can. J. Math , Vol 44(3), 516-523.

GUPTA, C.K., GUPTA, N.D., (1992). Lifting Primitivity of Free Nilpotent Groups , Proc. Amer. Math . Soc. , Vol 114(3).

KUKİN, G.P., (1970). Primitive Elements of Free Lie Algebras, Algebrai-Logika, 9(4), 458-472,

LYNDON, R.C., SCHUPP, P.E., (1977). Combinatorial Group Theory. Ergebnisse Math. Grenzgeb.89, Springer Verlag.

MİKHALEV, A.A., ZOLOTYKH, A.A., (1993). Combinatorial Aspects at Lie Superalgebras, Communication in Algebra 12,4361-4389., New York, CRC Pres.

REUTENAUER, C., (1992). Applications of a Noncommutative Jacobian Matrix, J. Pure Appl. Alg. 77, 169-181.

SHPİLRAİN, V., (1993). On Generators of L/R^2 Lie Algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 119, 1039-1043.

SHPİLRAİN, V., (1997). Non-commutative Determinants and Automorphisms of Groups, Comm. Algebra 25 559-574.

UMİRBAEV, U.U., (1992). Partial Derivatives and Endomorphisms of some Relatively Free Lie Algebras, Sib. Math. Zh 34, 179-188.

UMİRBAEV, U.U., (1994). On Schreier Varieties of Algebras. Algebra i Logika 33 (3), 317-340. English translation: Algebra and Logic33(3), 180-193.

YAGZHEV, A.V.,(1980). Endomorphism of Free Algebras, Sibirsk. Math.Zh.,(21) 181-192. English translation Siberian Math.J, 21(1), (1980), 133-141.

YUNUS, I.A., (1984). On the Fox Problem for Lie Algebras, Uspekhi Math.Nauk 39 251-252, Englih translation: Russian Math. Surveys, 39 (1984) 221-222.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Adana'da doğdum. İlk orta ve lise eğitimimi tamamladıktan sonra 1993 te Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. İlk yıl YADEM de ingilizce hazırlık programını tamamladım. 1998 yılında mezun olup aynı yıl Çukurova Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisans öğrenimime,2000 yılında da araştırma görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı görevde bulunmaktayım.