ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Engin ARICAN

LOJİSTİK REGRESYON MODELİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİ PROBLEMİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2016

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOJİSTİK REGRESYON MODELİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİ PROBLEMİ

Engin ARICAN

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez .../.../2016 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE	Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Doç Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

.....	.....
Doç. Dr. Barış AŞIKGİL	Doç. Dr. Meral EBEGİL
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

LOJİSTİK REGRESYON MODELİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİ PROBLEMİ

Engin ARICAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Yıl: 2016, Sayfa: 99
Jüri : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL
: Doç. Dr. Barış AŞIKGİL
: Doç. Dr. Meral EBEGİL

Lojistik regresyon modelinde en yaygın kullanılan parametre tahmin yöntemi en çok olabilirliktir. Çoklu iç ilişkinin var olması durumunda en çok olabilirlik tahmin edicinin boyu ve asimptotik varyansı aşırı büyüktür. Bunun sonucu olarak, istatistiksel çıkarımlar hatalı olur. Çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltmak için literatürde en çok olabilirlik tahmin ediciye alternatif bazı parametre tahmin yöntemleri önerilmiştir.

Bu çalışmada ise, lojistik regresyonda çoklu iç ilişki olması durumunda birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edici, birinci-sıra $r-k$ ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin ediciler önerilmiş ve bu tahmin edicilerin özellikleri ve performansları incelenmiştir. Teorik olarak elde edilen sonuçlar, hem sayısal örneklerle hem de simülasyon çalışmaları üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lojistik regresyon, Çoklu iç ilişki, Birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edici, Birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici, Birinci-sıra $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici

ABSTRACT

PhD THESIS

MULTICOLLINEARITY PROBLEM IN THE LOGISTIC REGRESSION MODEL

Engin ARICAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Year: 2016, Pages: 99
Jury : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Assoc. Prof. Dr. Barış AŞIKGİL
: Assoc. Prof. Dr. Meral EBEGİL

In logistic regression model, the most popular parameter estimation method is maximum likelihood. In the existence of multicollinearity, the length and the asymptotic covariance of the maximum likelihood estimator are excessively large. As a result, statistical inferences become imprecise. In order to reduce the effects of multicollinearity, some alternative parameter estimation methods to maximum likelihood were proposed in the literature.

In this study, first-order jackknifed ridge logistic estimator, first-order $r-k$ and $r-d$ class logistic estimators are introduced. The properties and the performances of these estimators are examined. The theoretical results are illustrated via numerical examples and simulation studies.

Key Words: Logistic regression, Multicollinearity, First-order jackknifed ridge logistic estimator, First-order $r-k$ class logistic estimator, First-order $r-d$ class logistic estimator

TEŞEKKÜR

Vermiş olduğu desteklerin karşılığını hiç bir zaman ödeyemeyeceğim; bilgi ve birikiminden çok şey öğrendiğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı eşim Eytül'e ve oğlum Ahmet Talha'ya ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VI
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR X
1. GİRİŞ 1
2. LOJİSTİK REGRESYONDA TAHMİN EDİCİLER 5
2.1. İkili Lojistik Regresyon Modeli 5
2.2. En Çok Olabilirlik Tahmin Edici 5
2.3. Lojistik Regresyon Modelinde Çoklu İç ilişki 8
2.4. Ridge Türü Lojistik Tahmin Ediciler 10
2.5. Temel Bileşenler Türü Lojistik Tahmin Ediciler 14
2.6. Liu Türü Lojistik Tahmin Ediciler 18
3. BİRİNCİ-SIRA JACKKNIFE RIDGE LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ 21
3.1. Birinci-Sıra Jackknife Ridge Lojistik Tahmin Edicinin Performansı 23
3.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi 30
4. BİRİNCİ-SIRA $r-k$ SINIF LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ 33
4.1. Birinci-Sıra $r-k$ Sınıf Lojistik Tahmin Edicinin Performansı 35
4.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi 43
5. BİRİNCİ-SIRA $r-d$ SINIF LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ 45
5.1. Birinci-Sıra $r-d$ Sınıf Lojistik Tahmin Edicinin Özellikleri 47
5.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi 48
6. SAYISAL ÖRNEKLER 53
6.1. Sayısal Örnek - 1 53
6.2. Sayısal Örnek - 2 58
6.3. Sayısal Örnek - 3 61
7. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI 65

7.1. Simülasyon Çalışması - 1 66
7.2. Simülasyon Çalışması - 2 74
7.3. Simülasyon Çalışması - 3 80
7.4. Simülasyon Çalışması - 4 85
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 89
KAYNAKLAR 91
ÖZGEÇMİŞ 99

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 6.1. Gelir ve Yaşam Koşulları Veri Kümesi - Tahmin edilmiş katsayılar, mutlak yanlılık ve skaler MSE değerleri 55
Çizelge 6.2. Tahmin edicilerin i-inci bileşeninin yanlılık parametresi ve skaler MSE değerleri 56
Çizelge 6.3. Kanser Gerileme Verisi – Tahmin edilmiş katsayılar ve skaler MSE değerleri 59
Çizelge 6.4. Barınma Sorunu Verisi – Tahmin edilmiş katsayılar ve skaler MSE değerleri sonuçları 63

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 6.1. k ya karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri.....58

Şekil 6.2. k ya karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri.....61

Şekil 6.3. d ye karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri.....64

Şekil 7.1. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri.....68

Şekil 7.2. $\hat{k}_G$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri.....69

Şekil 7.3. $\hat{k}_M$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri.....70

Şekil 7.4. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri.....71

Şekil 7.5. $\hat{k}_G$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri.....72

Şekil 7.6. $\hat{k}_M$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri.....73

Şekil 7.7. $\hat{k}_a$ kullanımında ve $n = 500$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri.....76

Şekil 7.8. $\hat{k}_a$ kullanımında ve $n = 1000$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri.....77

Şekil 7.9. $\hat{k}_b$ kullanımında ve $n = 500$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri.....78

Şekil 7.10. $\hat{k}_b$ kullanımında ve $n = 1000$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri.....79

Şekil 7.11. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 500, p = 5,10,\ PTV = 0.90$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri 81

Şekil 7.12. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 1000, p = 5,10,\ PTV = 0.90$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri 82

Şekil 7.13. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 500, p = 5,10,\ PTV = 0.80$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri 83

Şekil 7.14. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 1000, p = 5, 10, PTV = 0.80$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri 84
Şekil 7.15. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE leri için kutu grafikleri.....86
Şekil 7.16. $\hat{k}_b$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE leri için kutu grafikleri 87

SİMGELER VE KISALTMALAR

ABIAS : Mutlak Yanlılık (Absolute Bias)
EKK : En Küçük Kareler
EMSE : Tahmin Edilmiş MSE
GYKA : Gelir ve Yaşam Koşulları Araştırması
IRLS : Yeniden Ağırlıklandırılmış İteratif En Küçük Kareler
JRL : Jackknife Ridge Lojistik
ML : En Çok Olabilirlik (Maksimum Likelihood)
MSE : Hata Kareler Ortalaması (Mean Square Error)
PCR : Temel Bileşenler Regresyon
PCLR : Temel Bileşenler Lojistik Regresyon
PMSE : Ön-Tahmin MSE
TÜFE : Tüketici Fiyat Endeksi
TÜİK : Türkiye İstatistik Kurumu

1. GİRİŞ

Regresyon analizi, açıklayıcı değişken veya değişkenler ile yanıt değişken arasındaki ilişki inceleme ve bunların arasında model oluşturma işlemidir. Regresyon analizi, mühendislik, tıp, biyoloji, ekonomi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Regresyon modelleri içerisinde ise en önemlisi ve kullanım kolaylığının vermiş olduğu avantajla en çok kullanılan, lineer regresyon modelidir. $x_i' = [1, x_{i1}, \dots, x_{iq}]$ i-inci açıklayıcı değişken vektörü, y_i i-inci gözleme karşılık gelen yanıt değişken, $\beta' = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q]$ parametre vektörü ve ε_i hata terimi olmak üzere, lineer regresyon modeli,

$$y_i = x_i'\beta + \varepsilon_i \, , \, i = 1,2, \dots, n \qquad (1.1.)$$

olarak verilmektedir. Lineer regresyon modelinde yanıt değişkenin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı bulunmaktadır. Ancak, bu varsayım pratikte bazı durumlarda sağlanamamaktadır. Örneğin, yanıt değişken, bir sınavın sonucunu "başarılı" yada "başarısız" olarak gösterebilir veya bir üretim hattında çıkan ürünün "kusurlu" veya "kusursuz" olduğu durumu ifade edebilir. Yapılan bir memnuniyet araştırmasında ise "çok memnun, memnun, memnun değil" kategorilerine göre kesikli değerler alabilir. Bunun yanı sıra, yanıt değişken bir sayım verisi de olabilir. Örneğin, mağazaya giren her 100 müşteriden deterjan alışverişi yapan müşteri sayısı, 1000 kişi başına düşen trafik kazası gibi.

Lojistik regresyon, yanıt değişkenin lineer regresyondakinin aksine sürekli değil iki ya da daha fazla değer aldığı kesikli durumlarda kullanılmakta ve diğer regresyon analizleri gibi açıklayıcı değişkenler ile yanıt değişken arasında bir model kurmayı amaçlamaktadır.

Lojistik ve lineer regresyon arasındaki temel farklılıklar özetlenecek olursa; birincisi, lojistik regresyonda yanıt değişkenin kesikli olması, lineer regresyonda ise sürekli olarak kullanılması; ikincisi, yanıt değişken üzerindeki dağılım varsayımının ikili lojistik regresyonda Bernoulli dağılımı iken, lineer regresyonda ise çoklu normal dağılım olması; üçüncüsü ise lineer regresyon analizi sonucunda yanıt değişkenin

sahip olacağı değer tahmin edilirken, lojistik regresyonda yanıt değişkenin alacağı değerlerden birinin gerçekleşme olasılığı tahmin edilmektedir.

Yanıt değişken ikili (Bernoulli) verilerden oluşuyorken, lineer regresyon kullanılırsa, çeşitli problemler ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birisi, lineer regresyonda uydurulan yanıt değişkenin değeri, yanıt değişkenin alabileceği bir değerin olasılığını tahmin etmediğinden $-\infty$ ile $+\infty$ arasında olabilmektedir. Yani 0 ile 1 arasında olma zorunluluğu yoktur. İkili veri tipi için lineer regresyon uygulanırsa, uydurulan yanıt değişken negatif ya da 1 den büyük bir değer alabilmektedir. Hâlbuki bir olasılık değerinin negatif ya da 1 den büyük olabilmesi imkânsızdır. Uydurulan yanıt değişken (0,1) aralığında olması gerektiğinden, tahminleri bu aralığa çekmek için lojistik yanıt fonksiyonu kullanılarak logit dönüşüm yapılmalıdır. Lojistik yanıt fonksiyonu, açıklayıcı değişken x in katsayısı pozitif iken monoton artan; açıklayıcı değişken x in katsayısı negatif iken monoton azalan S-şeklindedir (S-Shape).

Lojistik yanıt fonksiyonu ilk olarak Berkson (1944) tarafından biyolojik deneylerin analizinde kullanılmıştır. Daha sonralarında ise yine Berkson tarafından çalışmalarında çokça kullanılmıştır. Lojistik regresyon modelinin ilk olarak kullanımı ise Cox (1958) ve Walker ve Duncan (1967) ın çalışmalarında görülmektedir. Albert ve Anderson (1984) ve Silvapulle (1981) ise ikili yanıt değişken için en çok olabilirlik yöntemine ilişkin çalışmalar yapmışlardır.

Tıp ve epidemiyoloji alanlarında kullanılmaya başlayan lojistik regresyon modeli zamanla diğer alanlarda da popüler hale gelmiştir. Son yıllarda, veri yapısının getirdiği özellik itibariyle, lojistik regresyon mühendislik, ekonomi, sosyal ve diğer birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır. Lojistik regresyon alanında yapılan güncel çalışmalardan bazıları incelenmiştir:

Hazman (2009) vergi bilincini etkileyen muhtemel dışsal etkenlerin belirlenmesine yönelik lojistik regresyon modelini kullanmıştır. Elde etmiş olduğu sonuçlara göre, literatürde yer alan dışsal etkenler geçerli olmakla birlikte; “şeffaflığın tam olarak sağlanamaması”, “kamusal mal ve hizmet sunumunun yetersizliği”,” politik başarısızlık” gibi etkenlerin de vergi bilinci üzerinde etkileri olduğunu tespit etmiştir.

Canbay ve Selim (2010) Türkiye geneli, kentsel ve kırsal kesim için hanehalkı yoksulluk düzeyini belirleyen unsurları analiz etmişlerdir. Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından gerçekleştirilen 2004 yılı Hanehalkı Bütçe Anketi ham verilerini kullanarak yapmış oldukları analizlerde lojistik regresyon modelini kullanmışlardır. Elde etmiş oldukları sonuçlar, yoksulluğun en önemli belirleyicilerinin hanehalkı reisinin işteki durumu, çalıştığı işyerinin statüsü, işyerinin faaliyeti ve hanehalkı büyüklüğü olduğunu göstermiştir.

Öğüt ve ark. (2012) Türkiye örneğinde bankaların finansal güç reytinginin tahmini üzerine bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada, lojistik regresyon modelinin yanı sıra başka analiz teknikleri kullanarak elde ettikleri sonuçları karşılaştırmışlardır. Elde ettikleri sonuçlara göre, reyting üzerindeki en önemli etkenler kârlılık, kaynakların etkin kullanımı, varlıklar üzerindeki borçlanma oranı olarak bulunmuştur.

Benkovskis ve ark. (2012) Letonya'daki tüketici fiyatlarının belirlenmesi davranışlarının incelenmesi konusunda çalışmışlardır. Bu çalışmalarında Tüketici Fiyat Endeksi (TÜFE) mikro verilerini kullanmışlardır. Birçok açıklayıcı değişkeni göz önünde bulundurarak, fiyat değişiminin gözlenme olasılığını lojistik modellerle açıklamaya çalışmışlardır.

Manzo ve ark. (2013), İtalya-Sicilya'daki toprak kayması hassasiyetinin değerlendirilmesi için lojistik regresyon modelini kullanmışlardır. Coğrafi bilgi sistemleri için kullanılan bilgisayar programından elde edilen değişkenleri, açıklayıcı değişken olarak kullanmış ve regresyon katsayılarını tahmin edip yorumlamışlardır. Uydurulan lojistik modelle, yaklaşık % 80 lik bir doğru sınıflandırma oranı elde etmişlerdir.

Fescioğlu-Ünver ve Tanyeri (2013) şirket evlilikleri ile ilgili bir veri üzerinde hedef ve teklif veren şirketleri yapay sinir ağları ve lojistik regresyon ile analiz etmişlerdir. Elde ettikleri modeller hedef şirketler için birbirine yakın sonuç verirken, teklif veren şirketi tahmin ederken lojistik model biraz daha iyi performans göstermiştir.

Rijal ve ark. (2013) yaptıkları çalışmada Japon evlerindeki rahat hissedilen sıcaklık ve pencere açma davranışlarını lojistik modelle incelemişlerdir. Lojistik

regresyon analizi ile tahmin edilen pencere açma davranışı, ölçülen veri ile uyum içinde olduğu gözlenmiştir.

Bu örnekler ışığında, sonuç olarak, lojistik regresyon modeli birçok farklı alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada ise, ilk olarak lojistik regresyon modelinde parametre tahmin yöntemi olarak kullanılan en çok olabilirlik (ML) anlatıldıktan sonra lojistik regresyon modelinde çoklu iç ilişki olması durumunda parametre tahminlerinin kararsız olacağından ve varyansın artacağından söz edildikten sonra, çoklu iç ilişkinin olması durumunda ML tahmin ediciye alternatif olarak önerilen literatürdeki mevcut olan ridge türü, temel bileşenler türü ve Liu türü yanlı tahmin ediciler ve son yıllarda yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Sonraki kısımlarda ise sırasıyla lojistik regresyonda çoklu iç ilişki olması durumunda jackknife yanlılık azaltma prosedürü takip edilerek birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edici, birinci-sıra $r-k$ ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin ediciler önerilmiş ve bu tahmin edicilerin özellikleri ve performansları incelenmiştir. Teorik olarak elde edilen sonuçlar, hem sayısal örneklerde hem de simülasyon çalışmaları üzerinde gösterilmiştir.

2. LOJİSTİK REGRESYONDA TAHMİN EDİCİLER

2.1. İkili Lojistik Regresyon Modeli

Logit dönüşüm, $\eta_i = x_i'\beta$ ve $\eta_i = ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$ göz önüne alınarak

$$x_i'\beta = ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) \tag{2.1.}$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.1) eşitliğinin her iki tarafının üsteli alınırsa ve gerekli ara işlemler yapılıp son olarak, π_i yalnız bırakılırsa,

$$\pi_i = \frac{\exp(x_i'\beta)}{1+\exp(x_i'\beta)} = \frac{e^{x_i'\beta}}{1+e^{x_i'\beta}} = \frac{1}{1+e^{-x_i'\beta}} \tag{2.2.}$$

elde edilir. Diğer bir ifadeyle, ikili lojistik regresyon modeli, $x_i' = [1, x_{i1}, \dots, x_{iq}]$, q tane açıklayıcı değişkenli gözlem matrisi $X: n \times p$ $(p = q + 1)$ in i-inci satırı, $\beta' = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q]$ parametre vektörü ve y_i ise Bernoulli rasgele değişkeni olmak üzere, Eşitlik (2.2) de verildiği gibi ifade edilir.

2.2. En Çok Olabilirlik Tahmin Edici

Regresyon analizinde ilk adım parametre tahminidir. Parametrelerin tahmin edilmesiyle yanıt değişkeni tahmin edecek model oluşturulur. Bu yüzden, parametrelerin doğru tahmin edilmesi, yanıt değişkenin de doğru tahmin edilmesini sağlayacaktır.

İkili lojistik regresyon modeli,

$$y_i \sim Bernoulli(\pi_i) \tag{2.3.}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Lojistik regresyonda parametre tahmininde kullanılan en yaygın yöntem en çok olabilirlik yöntemidir. Her bir gözlem Bernoulli dağılımından bağımsız birer gözlem olduğundan, olasılık fonksiyonu

$$f(y_i) = \pi_i^{y_i}(1-\pi_i)^{1-y_i}\ ,\ i = 1,2,\dots,n \text{ ve } y_i = 0,1$$

olarak yazılabilir. Olabilirlik fonksiyonu ise

$$L(y,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^{y_i}(1-\pi_i)^{1-y_i}$$

şeklindedir. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^{n}[y_i\, ln(\pi_i) + (1-y_i)\, ln(1-\pi_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} ln(1-\pi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i'\beta - \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 + e^{x_i'\beta}\right) \end{aligned} \qquad (2.4.)$$

elde edilir. En çok olabilirlik tahmini bulunmak istendiğinden log-olabilirlik fonksiyonunun β ya göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{e^{x_i'\beta}}{1+e^{x_i'\beta}}\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\pi_i)x_i = 0. \qquad (2.5.)$$

Eşitlik (2.5) in β için çözülmesi gerekmektedir. Fakat $\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta}$, β 'nın lineer bir formunda olmadığından kolayca çözülemez ve Newton-Raphson metodu yardımıyla çözüm bulmaya çalışılır. Newton-Raphson metodu iteratif bir yöntem olup, gerçek köke yakınsamak istendiğinden iteratif yöntem

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + \left(-\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} \qquad (2.6.)$$

eşitliğinin uygulanması ile elde edilir. (2.5) eşitliğinden

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'} = -\sum_{i=1}^{n}\pi_i(1-\pi_i)x_i x_i'$$

bulunur. Böylece, $\hat{\pi}^{(m)}$, $\hat{\beta}^{(m)}$ değerleri kullanılarak tahmin edilen π vektörünü ve $V = diag[\hat{\pi}_i{}^{(m)}(1-\hat{\pi}_i{}^{(m)})]$ olmak üzere, (2.6) eşitliği

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = \hat{\beta}^{(m)} + (X'VX)^{-1}X'\left(y-\hat{\pi}^{(m)}\right) \quad (2.7.)$$

olarak elde edilir. Literatürde $-\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'} = X'VX$ ifadesi bilgi matrisi olarak adlandırılmaktadır (Montgomery ve ark., 2001; Dobson ve Barnett, 2008). (2.7) eşitliği, $(X'VX)^{-1}X'V$ ortak parantezine alınarak yeniden düzenlenirse,

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = (X'VX)^{-1}X'V(X\hat{\beta}^{(m)} + V^{-1}\left(y-\hat{\pi}^{(m)}\right)) \quad (2.8.)$$

yazılabilir. $\omega = X\hat{\beta}^{(m)} + V^{-1}\left(y-\hat{\pi}^{(m)}\right)$ düzeltilmiş yanıt (adjusted response) olmak üzere,

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = (X'VX)^{-1}X'V\omega \quad (2.9.)$$

olarak elde edilir. (2.9) eşitliği ağırlıklandırılmış en küçük kareler formülasyonuna benzemektedir. Şu anki $\hat{\beta}^{(m)}$ tahminleri kullanılarak her iterasyonda $\pi_i(1-\pi_i)$ ağırlıkları güncellenmektedir. Böylelikle, "yeniden ağırlıklandırılmış iteratif en küçük kareler yöntemi (IRLS)" ile $\hat{\beta}^{(m)}$, $\hat{\beta}^{(m+1)}$'e yeterince yakın olana kadar iterasyona devam edilir. Yani, ardışık iki iterasyon arasındaki parametre vektörleri arasındaki farkın normu belirlenmiş bir yakınsama kriterinden (örneğin, 1×10^{-6}) daha az ise iterasyon durdurulur.

IRLS algoritması için takip edilecek prosedür şu şekilde açıklanabilir (Myers ve ark., 2010):

1. β nın başlangıç tahminini ($\hat{\beta}^{(0)}$) elde etmek için en küçük kareler (EKK) tahminini kullanılır.
2. V ve π yi tahmin etmek için $\hat{\beta}^{(0)}$ ı kullanılır.
3. Eşitlik (2.8) kullanılır.
4. Yeni bir tahmin ($\hat{\beta}^{(1)}$) elde edilip ve uygun bir yakınsama kriteri sağlanana kadar iterasyona devam edilir.

2.3. Lojistik Regresyon Modelinde Çoklu İç İlişki

İç ilişki, iki açıklayıcı değişken arasında lineer bir ilişkinin var olması durumunda olur. Çoklu iç ilişki ise bir çoklu regresyon modelinde iki yada daha fazla açıklayıcı değişken arasında çok yüksek derecede lineer ilişkinin var olması durumunu ifade eder.

Çoklu iç ilişki olduğu zaman, tahmin edilen katsayılar istatistiksel anlamlılık, büyüklük ve işaret bakımından kararsız hale gelir (Hoerl ve Kennard, 1970a; Hoerl ve Kennard, 1970b; Hoerl ve ark. 1975; Montgomery ve ark., 2001; Özkale, 2007; vb).

Çoklu iç ilişkinin bir çok sebebi olabilir (Judge ve ark., 1985; Montgomery ve ark., 2001). Bunlardan bazıları:

- Uygulanan veri toplama metodu
- Modelin ve yığının yapısından kaynaklanan zorunluluklar
- Modelin yanlış belirlenmesi
- Gözlem sayısından daha fazla açıklayıcı değişkenin modelde olmasıdır.

Veride çoklu iç ilişki varlığını tespit etmek için lineer regresyonda, basit korelasyon matrisi, varyans şişirme faktörü, koşul sayısı ve varyans-ayrıştırma oranları irdelenmektedir (Marquardt, 1970; Webster ve ark., 1974; Belsley ve ark., 1980; Montgomery ve ark., 2001).

Lineer regresyonda çoklu iç ilişkinin tespiti için önerilen yöntemler bazı yazarlar tarafından lojistik modele uyarlanmıştır. Schaefer ve ark. (1984) $X'X$

matrisinin kötü koşullu olması durumunda yani veride çoklu iç ilişki olması durumunda $X'V_{ML}X$ in bazı köşegen elemanlarının çok büyük olacağını ifade etmişlerdir. Bu kriterlerden koşul sayısı ve varyans-ayrıştırma oranları yöntemleri, Weissfeld ve Sereika (1991) tarafından lojistik regresyon modeline taşımış ve ölçeklenmiş bilgi matrisini ($\emptyset_{\text{ölç}} = X'V_{ML}X$) inceleyerek çoklu iç ilişki teşhis yöntemleri geliştirmişlerdir. Bilgi matrisine dayalı olarak, $\lambda_{max} = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p = \lambda_{min}$, $\emptyset_{\text{ölç}}$ in sıralı öz değerleri olmak üzere, koşul sayısı

$$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{2.10.}$$

tanımlamışlardır. Weissfeld ve Sereika (1991) nın çoklu iç ilişkinin tespit edilmesi için ileri sürdükleri diğer bir yaklaşım, ölçeklenmiş varyans-kovaryans matrisine, $cov(\hat{\beta}_{ML}) = (X'V_{ML}X)^{-1}$, dayalı olarak varyans-ayrıştırma oranları lineer regresyondakine benzer mantıkla verilmesidir. Weissfeld ve Sereika (1991) yapmış oldukları ampirik sayısal örnekteki veri için koşul sayısı ve varyans-ayrıştırma oranları için eşik değerleri tespit etmiş olmalarına rağmen, literatürde genel kabul görmüş eşik değerleri yoktur.

Çoklu iç ilişkinin etkileri incelenecek olursa,

$$var(\hat{\beta}_{ML}) = (X'V_{ML}X)^{-1} \tag{2.11.}$$

ile verilen tahmin edicilerin varyansları büyüyecektir (Schaefer ve ark., 1984; Schaefer, 1986; Mansson ve Shukur, 2011). Bununla birlikte, tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlerinden uzaklaştığı görülür (Schaefer ve ark., 1984). Bu durumu Schaefer ve ark. (1984), $\hat{\beta}_{ML}$ yansız bir tahmin edici olduğundan, $bias(\hat{\beta}_{ML}) = 0$ ve,

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_{ML}'\hat{\beta}_{ML}\right) &= E[(\hat{\beta}_{ML} - \beta + \beta)'(\hat{\beta}_{ML} - \beta + \beta)] \\
&= E[(\hat{\beta}_{ML} - \beta)'(\hat{\beta}_{ML} - \beta) + 2\beta'(\hat{\beta}_{ML} - \beta) + \beta'\beta] \\
&= E[(\hat{\beta}_{ML} - \beta)'(\hat{\beta}_{ML} - \beta)] + 2\beta'[E(\hat{\beta}_{ML}) - \beta] + \beta'\beta \\
&= tr[var(\hat{\beta}_{ML})] + [bias(\hat{\beta}_{ML})]^2 + \beta'\beta
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_{ML}'\hat{\beta}_{ML}\right) &= \beta'\beta + tr\left[var\left(\hat{\beta}_{ML}\right)\right] + \left[bias\left(\hat{\beta}_{ML}\right)\right]^2 \\
&\geq \beta'\beta + \sum_{j=1}^{p} var(\hat{\beta}_{ML_{(j)}})
\end{aligned}
$$

eşitliği ile ifade etmiştir. Yani, varyansın büyümesinin etkisiyle tahminler gerçek parametre değerlerinden uzaklaşmaktadır. Bu durum, araştırmacıları oluşan kararsız tahminleri daha kararlı hale getirecek yeni tahmin metotları geliştirmeye sürüklemiştir.

2.4. Ridge Türü Lojistik Tahmin Ediciler

Schaefer ve ark. (1984) lojistik regresyon için "ridge türü bir tahmin edici"yi k yanlılık (ridge) parametresi olmak üzere,

$$
\hat{\beta}(k) = (X'V_{ML}X + kI)^{-1}X'V_{ML}X\hat{\beta}_{ML}, \quad k > 0 \tag{2.12.}
$$

şeklinde geliştirmişlerdir ve bu ridge tahmin edicinin, en çok olabilirlik tahmin ediciye göre daha küçük bir hata kareler ortalaması (MSE) değerine sahip olduğunu göstermişler, ayrıca ampirik bir örneğin sonuçlarını tartışmışlardır. Bunun yanı sıra, Lee ve Silvapulle (1988) yaptıkları çalışmada işlemsel bir yanlılık parametresi önermişlerdir ve simülasyon örneği üzerinde Schaefer ve ark. (1984) önerdikleri ridge parametresi ile karşılaştırmışlardır.

Le Cessie ve Van Houwelingen (1992) ise log-olabilirlik fonksiyonu üzerine kısıt koyarak birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciyi, $V(\beta_0)$ gerçek bir parametre değeri β_0 da değer alan ağırlık matrisi olmak üzere

$$\hat{\beta}^{(1)}(k) = (X'V(\beta_0)X + kI)^{-1}X'V(\beta_0)X\hat{\beta}^{(1)} \quad (2.13.)$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada $\hat{\pi}_i^{(0)}$, β_0 başlangıç noktasına bağlı tahmin edilmiş π_i değerleri ve $V^{(0)} = diag[\hat{\pi}_i^{(0)}(1-\hat{\pi}_i^{(0)})]$, tahmin edilmiş $\hat{\pi}_i^{(0)}$ değerlerine bağlı tahmin edilmiş ağırlık matrisi olmak üzere, $\hat{\beta}^{(1)}$:

$$\hat{\beta}^{(1)} = \beta^{(0)} + (X'V^{(0)}X)^{-1}X'(y-\hat{\pi}_i^{(0)}) \quad (2.14.)$$

ikili lojistik regresyon modeli için, birinci-sıra ML tahmin edicidir .

Ridge lojistik regresyon modelinde önerilmiş yanlılık parametreleri aşağıdaki gibidir:

1. $k_{S1} = \frac{1}{\max_j(T_j'\widehat{\beta}_{ML})^2}$, T_j, $X'V_{ML}X$ nin özvektörleridir (Schaefer ve ark., 1984).
2. $k_{S2} = \frac{p}{\widehat{\beta}_{ML}'\widehat{\beta}_{ML}}$, (Schaefer ve ark., 1984).
3. $k_{S3} = \frac{1}{\widehat{\beta}_{ML}'\widehat{\beta}_{ML}}$, (Schaefer ve ark., 1984).
4. $k_{LS} = \frac{tr(X'V_{ML}X)}{\widehat{\beta}_{ML}'X'V_{ML}X\widehat{\beta}_{ML}}$, (Lee ve Silvapulle, 1988).
5. $k_{MS1} = \frac{s^2}{\widehat{\alpha}_{max}^2}$, burada $s^2 = \frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{n-p}$ dır ve $\hat{\alpha}_{max}^2$, $T_j\hat{\beta}_{ML}$ nin maksimum elemanını göstermektedir (Mansson ve Shukur, 2011).
6. $k_{MS2} = \frac{s^2}{\left(\prod_{j=1}^{p}\hat{\alpha}_j^2\right)^{1/p}}$, (Mansson ve Shukur, 2011).
7. $k_{MS3} = median(m_j^2)$, $m_j = \sqrt{\frac{s^2}{\widehat{\alpha}_{max}}}$, (Mansson ve Shukur, 2011).

8. $k_{MS4} = max(u_j)$, $u_j = \frac{\lambda_j^* s^2}{(n-p)s^2 + \lambda_j^* \hat{\alpha}_j^2}$, λ_j^*, $X'X$ nin özdeğerleridir (Mansson ve Shukur, 2011).
9. $k_{MS5} = max(\frac{1}{m_j})$, (Mansson ve Shukur, 2011).
10. $k_{MS6} = \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{1}{m_j}\right)^{1/p}$, (Mansson ve Shukur, 2011).
11. $k_{MS7} = median(\frac{1}{m_j})$, (Mansson ve Shukur, 2011).

Bunların dışında, Le Cessie ve Van Houwelingen (1992) tarafından çapraz geçerlilik kriterine dayalı bir yanlılık parametresi seçimi önerilmiştir.

Daha sonraları ise, Saleh ve Kibria (2013) lojistik regresyon modelinde beş çeşit yarı-deneysel (quasi-empirical) Bayes ridge tahmin edici önermiştir:

1. Kısıtlanmamış ridge lojistik tahmin edici, $\hat{\beta}_{ML}$, β nın kısıtlanmamış ML tahmin edicisi olmak üzere,

   $$\hat{\beta}_{ML}(k) = R_n(k)\hat{\beta}_{ML}$$

   şeklinde verilmiştir. Burada $n \to \infty$ iken $R_n(k) = \left[I + k\left(\frac{1}{n}X'V_nX\right)^{-1}\right]^{-1} \to R(k) = [I + k(X'V_{ML}X)^{-1}]^{-1}$ ve $V_n \to V_{ML}$ dir.
2. Kısıtlı ridge lojistik tahmin edici, $\bar{\beta}_{ML}$, β nın $H\beta = h$ kısıtı altındaki kısıtlı ML tahmin edicisi olmak üzere,

   $$\bar{\beta}_{ML}(k) = R_n(k)\bar{\beta}_{ML}$$

   şeklinde verilmiştir. Burada,
   $\bar{\beta}_{ML} = \hat{\beta}_{ML} - (X'V_nX)^{-1}H'[H(X'V_nX)^{-1}H']\left(H\hat{\beta}_{ML} - h\right)$ dır.
3. Ön (preliminary) test ridge lojistik tahmin edici,

$$\bar{\beta}_{ML}^{PT}(k) = R_n(k)\bar{\beta}_{ML}^{PT}$$

olarak verilmiştir. Burada, $\bar{\beta}_{ML}^{PT} = \hat{\beta}_{ML} - (\hat{\beta}_{ML} - \bar{\beta}_{ML})\mathrm{I}(\mathcal{L}_n - \chi_{q,\alpha}^2)$, β nın ön test tahmin edicisi; $\chi_{q,\alpha}^2$, $\mathcal{L}_n$ nın sıfır hipotezi altındaki dağılımının α düzeyi en üst değeri; $\mathrm{I}(A)$, A kümesi için gösterge fonksiyonudur. Bu tahmin edici yarı-deneysel Bayes tahmin edicisi olarak bilinmektedir.

Ön test tahmin edici, α önemlilik düzeyine bağlıdır ve bu yüzden α nın optimum değerini elde etmek ön-test tahmin edici için bir problem oluşturmaktadır. Bu sorunun üstesinden gelmek için aşağıdaki shrinkage ridge tahmin edicileri önermişlerdir.

4. Shrinkage ridge lojistik tahmin edici,

$$\bar{\beta}_{ML}^{S}(k) = R_n(k)\bar{\beta}_{ML}^{S}$$

olarak verilmiştir. Burada, $\bar{\beta}_{ML}^{S} = \hat{\beta}_{ML} - (q-2)(\hat{\beta}_{ML} - \bar{\beta}_{ML})\mathcal{L}_n^{-1}$, β nın shrinkage tahmin edicisidir.

5. Pozitif kurallı ridge lojistik tahmin edici,

$$\bar{\beta}_{ML}^{S+}(k) = R_n(k)\bar{\beta}_{ML}^{S+}$$

olarak verilmiştir. Burada, $\bar{\beta}_{ML}^{S+}(k) = \bar{\beta}_{ML}\mathrm{I}\big(\mathcal{L}_n < (q-2)\big) + \bar{\beta}_{ML}^{S}\mathrm{I}\big(\mathcal{L}_n \geq (q-2)\big)$, β nın pozitif kurallı tahmin edicisidir.

Ayrıca, Saleh ve Kibria (2013) bu tahmin edicilerin asimptotik dağılımlarını ve özelliklerini incelemişlerdir. Önerilen tahmin edicilerin performanslarını yanlılığın karesi ve hipotez altında risk fonksiyonlarına göre değerlendirmişlerdir.

2.5. Temel Bileşenler Türü Lojistik Tahmin Ediciler

Lineer regresyon modelinde, yanlı tahmin edicilerden temel bileşenler yöntemi (PCR) ilk olarak Hotelling (1933) tarafından çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için ele alınmıştır.

T_j , bilgi matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler olmak üzere temel bileşenler $Z_j = XT_j$ $(j = 1, .., p)$ olarak tanımlanır ve X matrisinin kolonlarını maksimum varyanslı ortogonal lineer olarak gerer. $Z = XT$ ve $\alpha = T'\beta$ olmak üzere (1.1) modeli kanonik formda

$$y = Z\alpha + \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ler $X'X$ in özdeğerleri ve T özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere $T'X'XT = Z'Z = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ dir. α nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \Lambda^{-1}Z'y$$

dir ve $\hat{\alpha}$ nın kovaryans matrisi

$$var(\hat{\alpha}) = \sigma^2(Z'Z)^{-1} = \sigma^2\Lambda^{-1}$$

şeklinde yazılır. $Z'Z = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Z_i Z_j' = \Lambda$ olduğundan, özdeğer λ_j j-inci temel bileşenin varyansını göstermektedir. Tüm λ_j ler bire eşitse orijinal açıklayıcı değişkenler ortogonaldir. Eğer λ_j nin birisi tam olarak sıfıra eşitse orijinal açıklayıcı değişkenler arasında mükemmel bir lineer ilişki vardır. λ_j nin bir veya daha fazlası sıfıra yakınsa bu durum çoklu iç ilişkinin varlığını göstermektedir.

Çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltmak için, temel bileşenler lojistik regresyon modeli, temel bileşenlerin indirgenmiş bir kümesi ile oluşturulur. β nın temel bileşenler tahmin edicisi, bir ya da daha fazla temel bileşenin atılması sonuç modele

EKK uygulanmasıyla ve tekrar orijinal parametre uzayına dönüşüm yapılması ile elde edilmektedir.

Temel bileşenler tahmin ediciyi elde etmek için açıklayıcı değişkenlerin azalan özdeğerlere ($\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$) sahip şekilde sıralandığı varsayılır. Son $p-r$ tane özdeğerin yaklaşık olarak sıfıra eşit olduğu farzedilir. $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{p-r} \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_{p-r} \end{pmatrix}$, $Z = (Z_r \quad Z_{p-r})$ ve $T = (T_r \quad T_{p-r})$ olmak üzere,

$$y = Z_r\alpha_r + Z_{p-r}\alpha_{p-r} + \varepsilon$$

şeklinde parçalanarak yazılabilir. Çoklu iç ilişkinin olması durumunda, temel bileşenler regresyon analizinde sıfıra yakın özdeğere sahip temel bileşenler analizden çıkarılır ve kalan temel bileşenlere EKK uygulanır. Yani, α nın PCR tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha}_{PCR} = \Lambda_r^{-1} Z_r' y$$

olarak elde edilir. Orijinal parametrelere dönüşüm yapılırsa,

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_r\hat{\alpha}_{PCR} = T_r\Lambda_r^{-1}Z_r'y = T_rT_r'\hat{\beta}_{EKK}$$

yazılabilir (Montgomery ve ark., 2001).

Lineer modeldeki mantık takip edilerek, Schaefer (1986), Marx ve Smith (1990), Barker ve Brown (2001), Aguilera ve ark. (2006) ve Shahmandi ve ark. (2013) çalışmalarında lojistik regresyon modeli için temel bileşenler türünde tahmin ediciler kullanılmıştır.

Schaefer (1986) tarafından tek basamaklı (yani, en küçük özdeğere sahip gözlemlerin tek seferde atılmasına dayalı) temel bileşenler tahmin ediciyi,

$$\hat{\beta}^{PC} = (X'VX)^{+}X'VX\hat{\beta}_{ML} \qquad (2.15.)$$

şeklinde verilmiştir. Burada, $(X'VX)^{+}$ en küçük özdeğere sahip temel bileşen atıldıktan sonra $X'VX$ in Moore-Penrose tersini göstermektedir. Buna ek olarak, Stein tahmin ediciyi, $0 < c < 1$ olmak üzere

$$\hat{\beta}_{Stein} = c\hat{\beta}_{ML} \tag{2.16.}$$

şeklinde önermiştir. Ayrıca, bu tahmin ediciler bir simülasyon örneği ile tartışılmıştır.

Marx ve Smith (1990) ise Schaefer (1986) dan farklı olarak, lojistik regresyon modelini de içeren genelleştirilmiş lineer modeller için birden fazla temel bileşenin atılmasına dayalı iteratif temel bileşenler tahmin ediciyi önermişlerdir. Aguilera ve ark. (2006) ise lojistik regresyon modeli için iteratif temel bileşenler tahmin ediciyi vermişlerdir.

Bilgi matrisi spektral ayrışım göz önüne alınarak, $\Lambda = T'\emptyset T = Z'V_{ML}Z = diag(\lambda_j)$ $p \times p$ tipinde $X'V_{ML}X$ in sıralı özdeğerlerinden ($\lambda_1 = \lambda_{max} \geq \lambda_2 \geq \cdots > \lambda_r > \lambda_{r+1} > \cdots \geq \lambda_p = \lambda_{min}$) oluşan köşegen matirisi ve $T = \left[T_1 \ldots T_p\right]$: $p \times p$ tipinde $X'V_{ML}X$ in sıralı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin ortogonal matrisi olmak üzere $\emptyset = X'V_{ML}X = T\Lambda T'$ şeklinde ifade edilebilir (Marx ve Smith, 1990).

Logit dönüşüm, kanonik formda $L = X\beta = XTT'\beta = Z\alpha$ şeklinde gösterilsin. Z matrisi ve α vektörü, Z_{p-r} $(r \leq p)$ modelden atılan temel bileşenleri içermek üzere, $Z = [Z_r \quad Z_{p-r}]$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_{p-r} \end{bmatrix}$ şeklinde parçalanabilir. Böylece, T ve Λ ise, $Z_r'V_{ML}Z_r = T_r'X'V_{ML}XT_r = \Lambda_r$ ve $Z_{p-r}'V_{ML}Z_{p-r} = T_{p-r}'X'V_{ML}XT_{p-r} = \Lambda_{p-r}$ olmak üzere, $T = [T_r \quad T_{p-r}]$ ve $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{p-r} \end{bmatrix}$ şeklinde parçalanabilir. Bu ayrışmayı göz önüne alarak, logit dönüşüm $L = X\beta = XT_rT_r'\beta + XT_{p-r}T_{p-r}'\beta = Z_r\alpha_r + Z_{p-r}\alpha_{p-r}$ olarak tekrar yazılabilir. Temel bileşenlerin çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltabilmesi, tam logit modelden ($L = Z\alpha$), $Z_r = XT_r$ ve $\alpha_r = T_r'\beta$ olmak üzere indirgenmiş logit model $L = Z_r\alpha_r$ ye geçişiyle mümkün olmaktadır (Marx ve Smith, 1990; Aguilera ve ark., 2006).

Kanonik dönüşüm göz önüne alınarak, indirgenmiş lojistik regresyon modeli, $z'_{(r)i} = [1\ z_{i1} \dots\ z_{ir}]$, Z_r nin i-inci satırı ve $\alpha'_r = [\alpha_0\ \alpha_1 \dots\ \alpha_r]$ parametrelerin vektörü olmak üzere,

$$\pi_{(r)i} = \frac{exp\left(z'_{(r)i}\alpha_r\right)}{1+exp\left(z'_{(r)i}\alpha_r\right)} = \frac{1}{1+exp\left(-z'_{(r)i}\alpha_r\right)}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.17.}$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) ile verilen modele ait log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$l(\alpha_r) = \sum_{i=1}^{n} y_i z'_{(r)i}\alpha_r - \sum_{i=1}^{n} ln[1 + exp\left(z'_{(r)i}\alpha_r\right)] \tag{2.18.}$$

dır. $l(\alpha_r)$ nin maksimizasyonu α_r nin ML tahminini verir. $l(\alpha_r)$, α_r nin lineer formunda olmadığından, Newton-Raphson metodunun uygulanması ile iteratif algoritma elde edilir:

$$\hat{\alpha}_r^{(m)} = \hat{\alpha}_r^{(m-1)} + (Z'_r V_{ML} Z_r)^{-1} Z'_r (y - \hat{\pi}_r^{(m-1)}) \tag{2.19.}$$

$\hat{\beta}_{ML}$ nin elde edilişine benzer şekilde, son iterasondaki ML tahmin edici, $w' = [w_1 \dots\ w_n]$ ve $w_i = \ln\left(\hat{\pi}_{(r)i}\right) + (y_i - \hat{\pi}_{(r)i}) \frac{1}{\hat{\pi}_{(r)i}(1-\hat{\pi}_{(r)i})}$ olmak üzere,

$$\hat{\alpha}_r = (Z'_r V_{ML} Z_r)^{-1} Z'_r V_{ML} w \tag{2.20.}$$

şeklinde de yazılabilir. Yakınsama sağlanana kadar, tahmin edilmiş $\hat{\pi}_{(r)i}$ olasılıkları, herbir aşamada o aşamadaki parametre tahminlerine dayalı olarak tekrar hesaplanmaktadır. Orijinal parametreler açısından, sonuç

$$\hat{\beta}_r = T_r \hat{\alpha}_r \tag{2.21.}$$

olur ve iteratif temel bileşenler lojistik tahmin edici (PCLR) elde edilir.

Temel bileşenlerin seçimi için Aguilera ve ark. (2006) "toplam değişkenliğin yüzdesi" yöntemini kullanmışlardır:

$$PTV = \frac{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} \times 100. \quad (2.22.)$$

PTV için literatürde genel kabul görmüş bir eşik noktası bulunmamaktadır.

Marx ve Smith (1990) ise temel bileşenlerin seçimi için Jolliffe (1986) deki lineer model için verilmiş olan yaklaşımları referans göstermektedirler. Jolliffe (1986) nin yaklaşımlarından birisi belli bir eşik noktasının (ör: 0.01) altında değere sahip küçük özdeğerlere sahip temel bileşenlerin modelden atılmasıdır. Diğer bir yaklaşımı ise, bileşenlerin önemliliği üzerine asimptotik dağılımı kullanarak test yapmaya dayalıdır. Temel bileşenlerin tam kümesi $\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \Lambda^{-1})$ için C, $q \times (p + 1)$ boyutlu sabitlerin matrisi olmak üzere $H_0: C\alpha = 0$ hipotezi test edilmek istenir. Test istatistiği ise $\hat{\alpha}' C' (C\Lambda^{-1}C')^{-1} C\hat{\alpha} \sim \chi_q^2$ olarak verilir. Tek bir bileşen için test istatistiği ise $\hat{\alpha}_j^2 \lambda_j \sim \chi_1^2$ olur. Bu test istatistikleri asimptotik ki-kare dağılımının uygun bir yüzdelik noktası ile karşılaştırılır. Anlamsız olan bileşenler modelden atılır.

2.6. Liu Türü Lojistik Tahmin Ediciler

Mansson ve ark. (2012) ise lineer regresyonda çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltmak için Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin ediciyi, lojistik modele uyarlayarak Liu lojistik tahmin ediciyi,

$$\hat{\beta}(d) = (X' V_{ML} X + I)^{-1} (X' V_{ML} X + dI) \hat{\beta}_{ML} \quad (2.23.)$$

olarak ifade etmişlerdir. Burada $0 < d < 1$ yanlılık parametresidir. Liu lojistik tahmin edici için yanlılık parametresinin farklı seçim yöntemleri aşağıda verilmiştir:

1. $d_{MKS1} = max\left(0, \frac{\hat{\alpha}_{max}^2 - 1}{\frac{1}{\lambda_{max}} + \hat{\alpha}_{max}^2}\right)$ (Mansson ve ark., 2012).
2. $d_{MKS2} = max\left(0, median\left(\frac{\hat{\alpha}_j^2 - 1}{\frac{1}{\lambda_j} + \hat{\alpha}_j^2}\right)\right)$ (Mansson ve ark., 2012).
3. $d_{MKS3} = max\left(0, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_j^2 - 1}{\frac{1}{\lambda_j} + \hat{\alpha}_j^2}\right)$ (Mansson ve ark., 2012).
4. $d_{MKS4} = max\left(0, max\left(\frac{\hat{\alpha}_j^2 - 1}{\frac{1}{\lambda_j} + \hat{\alpha}_j^2}\right)\right)$ (Mansson ve ark., 2012).
5. $d_{MKS5} = max\left(0, min\left(\frac{\hat{\alpha}_j^2 - 1}{\frac{1}{\lambda_j} + \hat{\alpha}_j^2}\right)\right)$ (Mansson ve ark., 2012).
6. $d_{MKS6} = max\left(0, median(q_j)\right)$ (Mansson ve ark., 2015).
7. $d_{MKS7} = max\left(0, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} q_j\right)$ (Mansson ve ark., 2015).
8. $d_{MKS6} = max\left(0, max(q_j)\right)$ (Mansson ve ark., 2015).
9. $d_{MKS6} = max\left(0, min(q_j)\right)$ (Mansson ve ark., 2015).

Burada, $q_j = \frac{\hat{\alpha}_j^2 - 1}{max\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) + \hat{\alpha}_j^2}$ dir.

Huang (2012) tarafından ridge ve Liu lojistik tahmin edicileri içeren bir Liu-türü lojistik tahmin ediciyi ise

$$\hat{\beta}_{k,d} = (X'V_{ML}X + kI)^{-1}(X'V_{ML}X + kdI)\hat{\beta}_{ML},\ k > 0,\ 0 < d < 1 \qquad (2.24.)$$

ile vermiştir. Yeni tahmin edicinin ML ve ridge lojistik tahmin ediciye üstün olması için gerek ve yeter koşulları elde etmiştir. Teorik sonuçları Monte Carlo simülasyon çalışmasında göstermiştir.

İnan ve Erdoğan (2013), lineer regresyon modelinde Liu (2003) tarafından önerilen Liu-türü tahmin ediciyi lojistik modele uyarlayarak Liu-türü lojistik tahmin ediciyi,

$$\hat{\beta}(k,d) = (X'V_{ML}X + kI)^{-1}(X'V_{ML}X - dI)\hat{\beta}_{ML} \quad (2.25.)$$

ile vermişlerdir. Burada $k > 0$ ve $-\infty < d < +\infty$ dir. Tahmin ediciyi gerçek bir veri kümesinde ve simülasyon çalışmasında kullanıp (2.12) ile verilen ridge lojistik tahmin ediciden skaler değerli MSE kriterine göre üstün olduğunu göstermişlerdir.

3. BİRİNCİ-SIRA JACKKNIFE RIDGE LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ

Bir tahmin edici üzerindeki jackknife prosedürü, bir veri kümesinden herbir gözlemin sistematik olarak dışarı atılması ve tahminin hesaplanması ve sonra bu hesaplamaların ortalamasının bulunması ile uygulanmaktadır.

Araştırmacılar lineer regresyon modelinde çoklu iç ilişkiden kaynaklanan yanlılığı azaltmak için Quenouilla (1956) ve Tukey (1958) tarafından geliştirilen jackknife prosedürünü kullanmaktadırlar. Örneğin, Singh ve ark. (1986) genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edicinin yanlılığı azaltmak için jackknife prosedürünün uygulanması ile hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin ediciyi önermiştir. Ohtani (1986) ve Singh ve Chaubey (1987) jackknife ridge tahmin edicinin özelliklerini incelemişlerdir. Nomura (1988), Singh ve ark. (1986) tarafından önerilmiş hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin ediciyi skaler değerli MSE kriteri açısından EKK ve genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edici ile karşılaştırmış ve işlemsel bir ridge parametresi önermiştir. Gruber (1991) sıradan ve jackknife ridge tipi tahmin edicileri farklı iyilik ölçüleri altında karşılaştırmıştır. Özkale (2008), Trenkler (1984) tarafından önerilmiş ridge tahmin ediciye jackknife prosedürü uygulayarak yeni bir tahmin edici önermiş ve özelliklerini tartışmıştır.

Ancak, lojistik regresyon modelinde ise jackknife prosedürü yeterince dikkat çekmemiştir. ML, asimptotik olarak yansız parametre tahminleri vermektedir. Ancak, küçük örnek çaplarında parametre tahminlerinin mutlak yanlılığı artış eğiliminde olmaktadır (Anderson ve Richardson, 1979). ML tahminlerindeki yanlılığı azaltmak için, ML tahmin edicide bir basamaklı jackknife uygulamaları küçük örnek çaplı yapıda Farewell (1978), Parr ve Tolley (1982) ve Jewell (1984) in çalışmalarında ele alınmıştır. Ancak bu çalışmalar çoklu lojistik regresyon modeli için yeterli çözüm üretememiştir (Bull ve ark., 1994). Bull ve ark. (1994) lojistik regresyon modelinde ML tahmin edicide bir ve iki basamak jackknife prosedürünü araştırmıştır. Yanlılık azaltmakta Taylor serisine dayalı iki basamaklı yaklaşımın iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir. Bull ve ark. (1997) çoklu lojistik regresyon

modelinde yanlılığı azaltılmış tahminlerin pratik ilişkilerini örneklerle göstermişlerdir.

Bu çalışmada ise, yanlılığı azaltmak için birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciye jackknife prosedürünün uygulanması ile birinci-sıra jackknife ridge lojistik (JRL) tahmin edici olarak adlandırılan yeni bir tahmin edici önerilmiştir.

Birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin ediciyi elde etmek için, örneklemden i-inci gözlemin silinmesi ile elde edilen $\hat{\beta}_{-i}^{(1)}(k)$ tahmin ediciye ihtiyaç duyulur.

Özkale ve ark. (baskıda) i-inci gözlemin silindiği durumdaki $\hat{\beta}^{(1)}(k)$ yı, $h_{ii}(k) = v_{ii}^{(0)} x_i'(X'V^{(0)}X + kI)^{-1}x_i$ ve $v_{ii}^{(0)} = \hat{\pi}_i^{(0)}(1-\hat{\pi}_i^{(0)})$ olmak üzere,

$$\hat{\beta}_{-i}^{(1)}(k) = \hat{\beta}^{(1)}(k) - \frac{(X'V^{(0)}X+kI)^{-1}x_i}{1-h_{ii}(k)} v_{ii}^{(0)}[z_i^{(0)} - x_i'\hat{\beta}^{(1)}(k)] \qquad (3.1.)$$

olarak tanımlamışlardır. Hinkley (1977) ağırlıklandırılmış jackknife tahmin edicinin elde edilebilmesi için ağırlıklandırılmış yalancı (pseudo) değerleri önermiştir. Hinkley (1977) takip edilerek, ağırlıklandırılmış yalancı -değerler,

$$Q_i = \hat{\beta}^{(1)}(k) + n[1-h_{ii}(k)][\hat{\beta}^{(1)}(k) - \hat{\beta}_{-i}^{(1)}(k)] \qquad (3.2.)$$

ve ilgili ağırlıklandırılmış jackknife tahmin edici

$$\tilde{\beta}^{(1)}(k) = n^{-1}\sum Q_i \qquad (3.3.)$$

şeklinde verilebilir.

Eşitlik (3.1) ve (3.2), $\sum x_i v_{ii}^{(0)} z_i^{(0)} = X'V^{(0)}z^{(0)}$ ve $\sum x_i v_{ii}^{(0)} x_i' = X'V^{(0)}X$ kullanılarak Eşitlik (3.3),

$$\tilde{\beta}^{(1)}(k) = [I + k\left(X'V^{(0)}X + kI\right)^{-1}]\hat{\beta}^{(1)}(k) \qquad (3.4.)$$

olacak şekilde sadeleştirilir. Buradan Eşitlik (2.12) kullanılarak, birinci-sıra JRL tahmin edici, $\hat{\beta}^{(1)}$ in bir dönüşümü olarak

$$\tilde{\beta}^{(1)}(k) = [I - k^2\left(X'V^{(0)}X + kI\right)^{-2}]\hat{\beta}^{(1)} \tag{3.5.}$$

şeklinde elde edilir.

Buna ek olarak, $K = diag(k_1, k_2, \dots, k_p)$ yanlılık parametrelerinin köşegen matrisi ve $k_i > 0, i = 1, \dots, p$ olmak üzere birinci-sıra genelleştirilmiş ridge ve JRL tahmin ediciler,

$$\hat{\beta}^{(1)}(K) = \left(X'V^{(0)}X + K\right)^{-1}X'V^{(0)}X\hat{\beta}^{(1)}, \tag{3.6.}$$

$$\tilde{\beta}^{(1)}(K) = [I - K\left(X'V^{(0)}X + K\right)^{-2}K]\hat{\beta}^{(1)} \tag{3.7.}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.1. Birinci-Sıra Jackknife Ridge Lojistik Tahmin Edicinin Performansı

Bu bölümde, birinci-sıra JRL tahmin edicinin birinci-sıra ML ve birinci-sıra ridge lojistik tahmin edicilerle yanlılık, skaler değerli MSE ve matris değerli MSE açısından karşılaştırmaları göz önüne alınacaktır. Karşılaştırmaları kolaylaştırmak için kanonik form ifadeleri kullanılacaktır (Rao, 1973).

Birinci-sıra ridge ve JRL tahmin edicileri kanonik formda sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\hat{\alpha}^{(1)}(k) = \left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-1}Z'V^{(0)}Z\hat{\alpha}^{(1)},$$
$$\tilde{\alpha}^{(1)}(k) = [I - k^2\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-2}]\hat{\alpha}^{(1)}.$$

Burada, $\hat{\alpha}^{(1)} = \left(Z'V^{(0)}Z\right)^{-1}Z'V^{(0)}\omega^{*}$, $\omega^{*} = Z\alpha^{0} + \left(V^{(0)}\right)^{-1}\left(y_i - \hat{\pi}_i^{(0)}\right)$ ve $\hat{\pi}_i^{(0)}$, α^0 başlangıç değerinin[1] kullanımı ile tahmin edilmiş π değerlerinin vektörüdür. $\hat{\alpha}^{(1)}$ asimptotik yansızdır ve asimptotik kovaryans matrisi $cov\left(\hat{\alpha}^{(1)}\right) = \left(Z'V^{(0)}Z\right)^{-1} = \Lambda^{-1}$dir. Eşitlik (3.4) ve (3.5) den, $\hat{\alpha}^{(1)}(k)$ ve $\tilde{\alpha}^{(1)}(k)$ nin yanlılık vektörleri sırasıyla,

$$Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right) = -k\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-1}\alpha^{0} = -k(\Lambda + kI)^{-1}\alpha^{0}, \qquad (3.8.)$$

$$Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right) = -k^{2}\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-2}\alpha^{0} = -k^{2}(\Lambda + kI)^{-2}\alpha^{0} \qquad (3.9.)$$

ve asimptotik kovaryans matrisleri

$$\begin{aligned} cov\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right) &= \left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-1}\left(Z'V^{(0)}Z\right)\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-1} \\ &= (\Lambda + kI)^{-1}\Lambda(\Lambda + kI)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right) &= \left[I - k^{2}\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-2}\right]\left(Z'V^{(0)}Z\right)^{-1} \\ &\quad \times \left[I - k^{2}\left(Z'V^{(0)}Z + kI\right)^{-2}\right] \\ &= [I - k^{2}(\Lambda + kI)^{-2}]\Lambda^{-1}[I - k^{2}(\Lambda + kI)^{-2}] \end{aligned}$$

dir.

MSE, yanlılığın karesi ile varyansın toplamı şeklinde tanımlandığından, birinci-sıra ML, birinci-sıra ridge lojistik ve birinci-sıra JRL tahmin edicilerin matris değerli MSE leri (MMSE) sırasıyla;

$$MMSE(\hat{\alpha}^{(1)}) = \Lambda^{-1}, \qquad (3.10.)$$

[1] Eşitlik (2.7) den, $\hat{\alpha}^{(1)} = \hat{\alpha}^{(0)} + \left(Z'V^{(0)}Z\right)^{-1}Z'(y_i - \hat{\pi}_i^{(0)})$ dir ve $\hat{\alpha}^{(0)}$, α nın başlangıç tahminidir. İterasyona başlamak için $\hat{\alpha}^{(0)}$ bilinmelidir. Bu yüzden, bir gerçel (reel) parametre, örneğin $\alpha^0 = T'\beta_0$ kullanılabilir.

$$MMSE\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right) = (\Lambda + kI)^{-1}\Lambda(\Lambda + kI)^{-1} + k^2(\Lambda + kI)^{-1}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-1}, \quad (3.11.)$$

$$MMSE\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right) = [I - k^2(\Lambda + kI)^{-2}]\Lambda^{-1}[I - k^2(\Lambda + kI)^{-2}] + k^4(\Lambda + kI)^{-2}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-2}. \quad (3.12.)$$

Skaler değerli MSE ler (SMSE) ise matris değerli MSE lere iz (trace) operatörünün uygulanması ile elde edilir. $\hat{\alpha}_i^{(1)}$ nin skaler değerli MSE si, $\hat{\alpha}^{(1)}$ birinci-sıra ML tahmin edicinin i-inci bileşenini göstermek üzere

$$SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}\right) = {\lambda_i}^{-1}, i = 1,2,\dots,p \quad (3.13.)$$

şeklindedir. Birinci-sıra genelleştirilmiş ridge lojistik tahmin edici $\hat{\alpha}^{(1)}(K)$ ve birinci-sıra genelleştirilmiş JRL tahmin edici $\tilde{\alpha}^{(1)}(K)$ skaler değerli MSE lerinin i-inci bileşenleri sırasıyla,

$$SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) = \frac{\lambda_i + k_i^2(\alpha_i^0)^2}{(\lambda_i + k_i)^2}, i = 1,2,\dots,p \quad (3.14.)$$

ve

$$SMSE\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) = \frac{\lambda_i(\lambda_i + 2k_i)^2 + k_i^4(\alpha_i^0)^2}{(\lambda_i + k_i)^4}, i = 1,2,\dots,p \quad (3.15.)$$

dir[2].

Teorem 3.1. İkili lojistik regresyon modelinde, sabit $k > 0$ için

[2] Her ne kadar lojistik regresyon modelindeki hata kareler matrisleri kapalı formda lineer regresyon modelindekine benzese de, aynı değillerdir. Çünkü lojistik regresyonda özdeğerler ve ilişkili özvektörler iteratif form $X'V_{ML}X$ den veya birinci-sıra yaklaştırmalı $X'V^{(0)}X$ den hesaplanırken, lineer regresyonda $X'X$ den hesaplanmaktadır. Bu durum çalışmanın tamamında geçerlidir.

$$\left\|Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right)\right\|^2 < \left\|Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right)\right\|^2$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $\|.\|$ yanlılık vektörlerinin normunu göstermektedir.

İspat 3.1. Eşitlik (3.8) ve (3.9) dan, $G = k^2(\Lambda + kI)^{-2} - k^4(\Lambda + kI)^{-4}$ ve G, köşegen elemanları $\frac{k^2\lambda_i(\lambda_i+2k)}{(\lambda_i+k)^4}$ olan bir köşegen matris olmak üzere $\left\|Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right)\right\|^2 - \left\|Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right)\right\|^2 = \alpha^{0\prime}G\alpha^0$ elde edilir. $k > 0$ için, $\alpha^{0\prime}G\alpha^0$ pozitiftir. Böylece, ispat tamamlanmıştır (bkz: Groβ, 2003; Özkale, 2008).

Teorem 3.2. Sabit $k_i > 0$ için, $\tilde{\alpha}^{(1)}(K)$ nın yanlılığının i-inci bileşenin mutlak değeri, $\hat{\alpha}^{(1)}(K)$ nınkinden daha küçüktür.

İspat 3.2. Yanlılık vektörlerinin i-inci bileşenlerinin mutlak değerleri arasındaki farkı, $|\alpha_i^0|$, α^0 ın i-inci elemanının mutlak değerini göstermek üzere,

$$\left|Bias\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}(K)\right)\right| - \left|Bias\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right)\right| = \frac{k_i\lambda_i}{(\lambda_i+k_i)^2}|\alpha_i^0| \qquad (3.16.)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.16) daki fark, pozitiftir. Böylece, ispat tamamlanır (bkz: Singh ve ark., 1986; Nomura, 1988; Özkale, 2008).

Teorem 3.1 ve 3.2, yanlılık parametrelerinin stokastik olmaması varsayımı altında jackknife prosedürünün kullanılması ile yanlılığın azaldığı görülmektedir.

Eşitlikler (3.13)-(3.15) hesaba katılarak, öncelikle, birinci-sıra genelleştirilmiş JRL tahmin edici, birinci-sıra ML tahmin ediciyle, sonra birinci-sıra genelleştirilmiş ridge lojistik tahmin ediciyle skaler değerli MSE (SMSE) kriterine göre karşılaştırılmıştır:

Teorem 3.3. a) $(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1 \leq 0$ ise, $0 < k_i < \infty$ ve $i = 1, \dots, p$ için, $SMSE\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) < SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}\right)$ dir.

b) $(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1 > 0$ ise, öyle bir $k_{1i} > 0$ vardır ki, $i = 1, \dots, p$ ve $0 < k_i < k_{1i}$ için,

$$k_{1i} = \frac{2\lambda_i + \sqrt{2{\lambda_i}^2 + 2{\lambda_i}^3(\alpha_i^0)^2}}{(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1}$$

olmak üzere, $SMSE\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) < SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}\right)$ dir.

İspat 3.3. Eşitlik (3.13) ve (3.15) kullanılarak, bazı cebirsel sadeleştirmelerden sonra, $\Delta_1 = SMSE\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}\right)$ farkı alınırsa,

$$\Delta_1 = \frac{k_i^2[((\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1)k_i^2 - 4\lambda_i k_i - 2{\lambda_i}^2]}{\lambda_i(\lambda_i + k_i)^4} \qquad (3.17.)$$

elde edilir. Δ_1 in negatif olması için, Eşitlik (3.17) nin pay kısmı

$$k_i^2\left[((\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1)k_i^2 - 4\lambda_i k_i - 2{\lambda_i}^2\right] < 0$$

eşitsizliğini sağlamalıdır. $k_i^2 > 0$ ve

$$f(k_i) = \left[(\lambda_i(\alpha_i^0)^2 - 1)k_i^2 - 4\lambda_i k_i - 2{\lambda_i}^2\right]$$

k_i nin karesel bir fonksiyonu olduğundan, $f(k_i)$ i negatif yapacak k_i değerleri araştırılır. $f(k_i)$, $\frac{2\lambda_i \mp \sqrt{2{\lambda_i}^2 + 2{\lambda_i}^3(\alpha_i^0)^2}}{(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1}$ şeklinde iki köke sahiptir ve $(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1 > 0$ olduğu varsayıldığında, $\frac{2\lambda_i - \sqrt{2{\lambda_i}^2 + 2{\lambda_i}^3(\alpha_i^0)^2}}{(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1}$ negatif olur. Bundan dolayı, $f(k_i)$, $\frac{2\lambda_i + \sqrt{2{\lambda_i}^2 + 2{\lambda_i}^3(\alpha_i^0)^2}}{(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1}$ den küçük k_i değerleri için negatiftir. Diğer yandan, $(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1 \leq 0$ varsayımı altında, $f(k_i)$, 0 dan büyük k_i değerleri için negatiftir. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.

$$k_{2i} = \frac{3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2 + \sqrt{(3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2)^2 + 16\lambda_i(\alpha_i^0)^2}}{4(\alpha_i^0)^2}$$

olmak üzere, $0 < k_{2i} < k_i$ aralığındaki k_i değerleri için skaler değerli MSE açısından birinci-sıra genelleştirilmiş JRL tahmin edicinin i-inci bileşeni, birinci-sıra genelleştirilmiş ridge lojistik tahmin edicinin i-inci bileşeninden üstündür.

İspat 3.4. Eşitlik (3.14) ve (3.15) kullanılarak, bazı cebirsel sadeleştirmelerden sonra, $\Delta_2 = SMSE\left(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_i^{(1)}(K)\right)$ farkı alınırsa,

$$\Delta_2 = \frac{-\lambda_i k_i [2(\alpha_i^0)^2 k_i^2 - (3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2) k_i - 2\lambda_i]}{(\lambda_i + k_i)^4} \qquad (3.18.)$$

elde edilir. k_i ve bütün λ_i pozitif olduğunu not ederek, Eşitlik (3.18) in payı negatif olduğu zaman $\Delta_2 < 0$ olur. Aynı zamanda k_i nin karesel bir fonksiyonu olarak

$$f(k_i) = 2(\alpha_i^0)^2 k_i^2 - (3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2) k_i - 2\lambda_i > 0$$

ifade edilebilir. $f(k_i)$, $\frac{3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2 \mp \sqrt{(3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2)^2 + 16\lambda_i(\alpha_i^0)^2}}{4(\alpha_i^0)^2}$ şeklinde iki köke sahiptir. $\frac{3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2 - \sqrt{(3 - \lambda_i(\alpha_i^0)^2)^2 + 16\lambda_i(\alpha_i^0)^2}}{4(\alpha_i^0)^2}$ negatif olduğu hesaba katılırsa, ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. Sabit $k > 0$ için, birinci-sıra JRL tahmin edici matris değerli MSE açısından birinci-sıra ML tahmin ediciye göre üstün olması için gerek ve yeter koşul

$$k^2 \alpha^{0\prime} [2\Lambda + 4kI + k^2 \Lambda^{-1}]^{-1} \alpha^0 \leq 1 \qquad (3.19.)$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır.

İspat 3.5. Eşitlik (3.10) ve (3.12) kullanılarak,

$\Delta_3 = MMSE(\hat{\alpha}^{(1)}) - MMSE\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right)$ matris farkı,

$$\Delta_3 = (\Lambda + kI)^{-2} [(\Lambda + kI)^2 \Lambda^{-1} (\Lambda + kI)^2 - [(\Lambda + kI)^2 - k^2] \times \Lambda^{-1} [(\Lambda + kI)^2 - k^2] - k^4 \alpha^{0\prime} \alpha^0] (\Lambda + kI)^{-2}$$

şeklinde yazılabilir. Sadeleştirmelerden sonra

$$\Delta_3 = (\Lambda + kI)^{-2}[2k^2\Lambda + 4k^3I + k^4\Lambda^{-1} - k^4\alpha^{0\prime}\alpha^0](\Lambda + kI)^{-2}$$

olur. $2\Lambda + 4kI + k^2\Lambda^{-1}$ pozitif-tanımlı matris olduğundan, Farebrother (1976) tarafından verilen teorem kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.6. $k > 0$ için, birinci-sıra JRL tahmin edici matris değerli MSE açısından birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciye göre üstün olması için yeter koşul

$$k^2\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)(2\Lambda^2 + 3k\Lambda)^{-1}(\Lambda + kI)\alpha^0 \leq 1$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır.

İspat 3.6. Eşitlik (3.11) ve (3.12) kullanılarak,

$\Delta_4 = MMSE\left(\hat{\alpha}^{(1)}(k)\right) - MMSE\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(k)\right)$ matris farkı,

$$\Delta_4 = M - k^2(\Lambda + kI)^{-1}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-1} + k^4(\Lambda + kI)^{-2}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-2}$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} M &= (\Lambda + kI)^{-1}\Lambda(\Lambda + kI)^{-1} - [I - k^2(\Lambda + kI)^{-2}]\Lambda^{-1}[I - k^2(\Lambda + kI)^{-2}] \\ &= (\Lambda + kI)^{-2}\left(2k\Lambda^2 + 3k^2\Lambda\right)(\Lambda + kI)^{-2} \end{aligned}$$

dır. $k^4(\Lambda + kI)^{-2}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-2}$ pozitif-tanımlı olduğundan, eğer $M - k^2(\Lambda + kI)^{-1}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-1}$ pozitif yarı tanımlı ise, Δ_4 pozitif-tanımlı matristir. Farebrother (1976) tarafından verilen teorem kullanılarak, $k > 0$ için

$$k^2\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)(2\Lambda^2 + 3k\Lambda)^{-1}(\Lambda + kI)\alpha^0 \leq 1$$

ise $M - k^2(\Lambda + kI)^{-1}\alpha^0\alpha^{0\prime}(\Lambda + kI)^{-1}$ pozitif yarı tanımlı matristir.

Teorem 3.1-3.6 da elde edilen koşullar bilinmeyen α^0 ve k parametrelerine bağlıdır. Bu bilinmeyen parametrelerden dolayı, birinci-sıra JRL tahmin edicinin üstünlüğü bu parametrelerin belirli değerleri için değişebilir. α^0 ı yansız tahmin edicisi olan birinci-sıra ML tahmin edicisi $\hat{\alpha}^{(1)}$ ile ve k parametresi Bölüm 3.2 de önerilen tahmin edicileriyle yer değiştirilmiştir.

3.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi

Yanlılık parametresinin seçimi önemli bir problemdir. Optimum k değerini $\tilde{\alpha}^{(1)}(K)$ nın skaler değerli MSE sinin minimize edilmesi ile elde edilir: $SMSE\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(K)\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i[(\lambda_i+k_i)^2-k_i^2]^2+k_i^4(\alpha_i^0)^2}{(\lambda_i+k_i)^4}$ nın k_i ye göre kısmi türevi alınıp,

$$\frac{\partial}{\partial k_i}\left(SMSE\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(K)\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{4\lambda_i k_i((\alpha_i^0)^2 k_i^2-2k_i-\lambda_i)}{(\lambda_i+k_i)^5}$$

sıfıra eşitlenirse,

$$k_i^* = \frac{1+\sqrt{1+\lambda_i(\alpha_i^0)^2}}{(\alpha_i^0)^2},\ i = 1,2,..,p \qquad (3.20.)$$

de minimize olur. (3.20) ile verilen k_i^* ın harmonik ortalaması alınarak k nın bir tahmin edicisi,

$$\hat{k}_H = \frac{p}{\sum_{i=1}^{p} \frac{(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2}{1+\sqrt{1+\lambda_i(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2}}}$$

elde edilir. Burada, $\hat{\alpha}_i^{(1)}$, α nın birinci-sıra ML tahmin edicisinin i-inci bileşenidir.

Yanlılık parametresinin değeri tahmin ediciyi etkilendiğinden, harmonik ortalamanın yanı sıra, Kibria (2003) lineer regresyon modelinde yanlılık parametresinin tahmin edilmesinde geometrik ortalamayı ve medyanı kullanarak

öneri yapmştır. Kibria (2003) takip edilerek, bu çalışmada da geometrik ortalamaya ve medyana dayalı yanlılık parametreleri sırasıyla

$$\hat{k}_G = \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{1+\sqrt{1+\lambda_i(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2}}{(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$\hat{k}_M = median \left\{ \frac{1+\sqrt{1+\lambda_i(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2}}{(\hat{\alpha}_i^{(1)})^2} \right\}$$

olarak önerilmiştir.

Birinci-sıra JRL tahmin edici için sayısal örnek uygulaması Bölüm 6.1 de ve birinci-sıra JRL tahmin edicinin diğer bazı tahmin edicilerle farklı durumlar altında karşılaştırmalarını içeren simülasyon çalışmaları ise Bölüm 7.1 ve 7.4 de verilmiştir.

4. BİRİNCİ-SIRA $r-k$ SINIF LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ

Lineer regresyon modelinde çoklu iç ilişkinin olması durumunda EKK tahmin ediciye alternatif olarak Baye ve Parker (1984) ridge ve temel bileşenler tahmin edicileri birleştirerek $r-k$ sınıf tahmin ediciyi önermişlerdir. $r-k$ sınıf tahmin edici, indirgenmiş modeldeki parametrelere ridge tahmin edicinin uygulanması ve tekrar orijinal parametre uzayına dönüşüm yapılması ile elde edilmektedir. Baye ve Parker (1984) $r-k$ sınıf tahmin edicinin EKK, temel bileşenler ve ridge tahmin edicilerin genel hali olduğunu belirtmişlerdir. Skaler değerli MSE açısından $r-k$ sınıf tahmin edicinin temel bileşenler tahmin ediciden daha iyi olduğunu göstermişlerdir. Nomura ve Ohkubo (1985) $r-k$ sınıf tahmin ediciyi skaler değerli MSE açısından EKK ve ridge tahmin edicilerle karşılaştırmıştır. Sarkar (1996) ise $r-k$ sınıf tahmin ediciyi EKK, ridge ve temel bileşenler tahmin ediciler ile matris değerli MSE kriterine göre karşılaştırmıştır. Özkale ve Kaçıranlar (2008) ise $r-k$ sınıf tahmin ediciyle EKK tahmin ediciyi Pitman'ın yakınlık kriterine göre karşılaştırmıştır.

Lineer regresyon modelindeki mantık takip edilerek, bu bölümde birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici önerilmiştir. Ridge lojistik tahmin edici, $l(\beta)$ nin ceza terimi $\|\beta\|^2$ ye bağlı maksimizasyonu ile elde edilebilmektedir. $\max_\beta \left\{ l(\beta) - \frac{k}{2}\|\beta\|^2 \right\}$ şeklinde ifade edilebilir (Le Cessie ve Van Houwelingen, 1992; Bielza ve ark., 2011).

Ridge lojistik regresyon fikrinin uygulanması ile indirgenmiş modelin log-olabilirlik fonksiyonu, $\alpha_r'\alpha_r$ ye bağlı olarak maksimize edilmesi

$$\max_{\alpha_r}\{l^k(\alpha_r)\} = \max_{\alpha_r}\left\{ l(\alpha_r) - \frac{k}{2}\alpha_r'\alpha_r \right\} \qquad (4.1.)$$

olarak gösterilebilir. $\pi_r' = [\pi_{(r)1} \quad \cdots \quad \pi_{(r)n}]$ olmak üzere, $l^k(\alpha_r)$ nin birinci türevi

$$\frac{\partial l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left(l(\alpha_r) - \frac{k}{2}\alpha_r'\alpha_r \right) = \frac{\partial l(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} - k\alpha_r = Z_r'(y-\pi_r) - k\alpha_r$$

verir.

Eşitlik $\frac{\partial l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} = 0$ in köklerini bulmak için, Newton-Raphson metodu uygulanır. Çözümün komşuluğunda, bir gerçek parametre değeri α^0 etrafında birinci-sıra Taylor Serisi açılımı kullanılırsa,

$$\frac{\partial l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r}\Big|_{\alpha^0} + \left(-\frac{\partial^2 l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r' \partial \alpha_r}\right)\Big|_{\alpha^0}(\alpha_r - \alpha^0)$$
$$= Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - k\alpha^0 - (Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)(\alpha_r - \alpha^0) \qquad (4.2.)$$

olarak bulunur. Burada,

$$-\frac{\partial^2 l^k(\alpha_r)}{\partial \alpha_r' \partial \alpha_r} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{i(r)}(1 - \pi_{i(r)}) z_{(r)i} z_{(r)i}' + kI_r = Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r$$

dır. (4.2) ifadesinin sıfıra eşitlenmesi, α_r için birinci-sıra yaklaşımı sonucunu verecektir:

$$(Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)(\alpha_r - \alpha^0) = Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - k\alpha^0 \qquad (4.3.)$$

(4.3) ifadesinin her iki tarafı soldan $(Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$(Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1}\left(Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - k\alpha^0\right) = \alpha_r - \alpha^0$$

bulunur. α_r nin tahmin edicisi $\hat{\alpha}_r^{(1)}(k)$ ile gösterilerek,

$$\hat{\alpha}_r^{(1)}(k) = (Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1}\left((Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)\alpha^0 + Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - k\alpha^0\right)$$
$$= (Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1}\left(Z_r' V_{ML} Z_r \alpha^0 + Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right)\right)$$
$$= (Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1}(Z_r' V_{ML} Z_r)$$
$$\times \left(\alpha^0 + (Z_r' V_{ML} Z_r)^{-1} Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right)\right) \qquad (4.4.)$$

elde edilir. Eşitlik (2.19) göz önünde bulundurularak, α^0, α_r nin başlangıç tahmini olmak üzere α_r nin birinci-sıra tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha}_r^{(1)} = \alpha^0 + (Z_r' V_{ML} Z_r)^{-1} Z_r' \left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) \tag{4.5.}$$

elde edilir. Böylece (4.4) eşitliği,

$$\hat{\alpha}_r^{(1)}(k) = (Z_r' V_{ML} Z_r + kI_r)^{-1} (Z_r' V_{ML} Z_r) \hat{\alpha}_r^{(1)} \tag{4.6.}$$

olur ve orijinal parametrelere tekrar dönüşüm yapılırsa, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici

$$\hat{\beta}_r^{(1)}(k) = T_r (T_r' X' V_{ML} X T_r + kI_r)^{-1} T_r' X' V_{ML} X T_r T_r' \hat{\beta}^{(1)} \tag{4.7.}$$

olarak elde edilir.

Yorum: Eşitlik (2.19) ile verilen tam iterasyonlu ML tahmin edici α^0 ın bir başlangıç noktası olarak kullanıldığı zaman, tam iterasyonlu PCLR ve $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici ile sırasıyla birinci-sıra PCLR ve $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici arasında katsayı tahminlerinde küçük bir fark olmaktadır.

$r = p$ olduğu zaman, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ (2.13) ile verilen birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici olacaktır. $k \to 0$ iken, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k) \to \hat{\beta}_r$ temel bileşenler lojistik tahmin edici olur. $r = p$ ve $k = 0$ olduğu zaman ise, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k) \to \hat{\beta}^{(1)}$ olacaktır. Böylece, bu yeni tahmin edici ridge lojistik tahmin edici, temel bileşenler lojistik tahmin edici ve ML tahmin ediciyi birleştirmektedir.

4.1. Birinci-sıra $r-k$ Sınıf Lojistik Tahmin Edicinin Performansı

Bu bölümde, birinci-sıra $r-k$ tahmin edicinin birinci-sıra ML, birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici ve birinci-sıra temel bileşenler lojistik tahmin edicilerle

skaler değerli MSE ve matris değerli MSE açısından karşılaştırmaları göz önüne alınmıştır.

Asimptotik olarak $E(\hat{\beta}_{ML}) = \beta$ ve $Cov(\hat{\beta}_{ML}) = (X'V_{ML}X)^{-1}$ olduğu bilinmektedir (bkz. Myers ve ark., 2010). Bu sonuçları indirgenmiş modele göre birinci-sıra tahmin edici için

$$E\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right) = \alpha^0,\ Cov\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right) = (Z_r'V_{ML}Z_r)^{-1} = \Lambda_r^{-1} \tag{4.8.}$$

ve

$$E\left(\hat{\beta}_r^{(1)}\right) = E\left(T_r\hat{\alpha}_r^{(1)}\right) = T_r\alpha^0,\ Cov\left(\hat{\beta}_r^{(1)}\right) = Cov\left(T_r\hat{\alpha}_r^{(1)}\right) = T_r\Lambda_r^{-1}T_r' \tag{4.9.}$$

olarak güncellenebilir (bkz. Marx ve Smith, 1990; Smith ve Marx, 1990). Böylece, $\hat{\alpha}_r^{(1)}(k)$ nin asimptotik beklenen değeri ve kovaryans matrisi, $\mathrm{S_r}(k) = \Lambda_r + k\mathrm{I}_r$ olmak üzere,

$$E\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(k)\right) = S_r(k)^{-1}\Lambda_r\alpha^0$$

ve

$$Cov\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(k)\right) = S_r(k)^{-1}\Lambda_r S_r(k)^{-1}$$

olarak elde edilebilir. $\hat{\beta}_r^{(1)}(k) = T_r\hat{\alpha}_r^{(1)}(k)$ ve $\beta^0 = T_r\alpha^0$ olduğundan, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ in asimptotik yanlılığı

$$Bias\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = E\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) - \beta^0 = T_rS_r(k)^{-1}\Lambda_rT_r'\beta^0 - \beta^0$$

olur ve $I_p = T_r T_r^{'} + T_{p-r} T_{p-r}^{'}$ olduğundan, cebirsel sadeleştirmelerden sonra, $Bias\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)$ tekrar yazılırsa

$$Bias\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = \left[-kT_r S_r(k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]\beta^0 \tag{4.10.}$$

elde edilir. $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ in asimptotik kovaryansı ise

$$Cov\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = T_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r S_r(k)^{-1} T_r' \tag{4.11.}$$

şeklinde yazılır. Buradan, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ nın asimptotik matris değerli MSE si,

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = {} & T_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r S_r(k)^{-1} T_r' + \left[-kT_r S_r(k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]\beta^0 \\ & \times \beta^{0\prime}\left[-kT_r S_r(k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]' \end{aligned} \tag{4.12.}$$

ve asimptotik skaler değerli MSE si,

$$SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j + k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j + k)^2} + \sum_{j=r+1}^{p} (\alpha_j^0)^2 \tag{4.13.}$$

olur.

Eşitlik (4.12) ve (4.13) de $r = p$ olarak değiştirilirse, $\hat{\beta}^{(1)}(k)$ nın asimptotik matris değerli MSE ve skaler değerli MSE leri

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}(k)\right) = {} & \left(X'VX + kI_p\right)^{-1} X'VX\left(X'VX + kI_p\right)^{-1} \\ & + k^2\left(X'VX + kI_p\right)^{-1} \beta^0 \beta^{0\prime}\left(X'VX + kI_p\right)^{-1} \\ = {} & T\left(\Lambda + kI_p\right)^{-1} \Lambda \left(\Lambda + kI_p\right)^{-1} T' \\ & + k^2 T\left(\Lambda + kI_p\right)^{-1} T' \beta^0 \beta^{0\prime} T\left(\Lambda + kI_p\right)^{-1} T' \end{aligned} \tag{4.14.}$$

ve

$$SMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}(k)\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j + k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j + k)^2} \tag{4.15.}$$

şeklinde elde edilebilir.

$\hat{\beta}_r^{(1)}$ nin asimptotik matris değerli MSE ve skaler değerli MSE ifadeleri $k = 0$ alınarak (4.13) ve (4.15) den elde edilebilir:

$$MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}\right) = T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + T_{p-r} T_{p-r}' \beta^0 \beta^{0\prime} T_{p-r} T_{p-r}', \tag{4.16.}$$

$$SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=r+1}^{p} (\alpha_j^0)^2. \tag{4.17.}$$

Teorem 4.1. Asimptotik matris değerli MSE kriterine göre, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin birinci-sıra ML tahmin ediciden üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\beta^{0\prime}\left[T_r\left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1}\right)^{-1} T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}'\right] \beta^0 \leq 1 \tag{4.18.}$$

dir.

İspat 4.1.

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = {} & T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}' \\ & - T_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r S_r(k)^{-1} T_r' \\ & - \left[k T_r S_r(k)^{-1} T_r' + T_{p-r} T_{p-r}'\right] \beta^0 \\ & \times \beta^{0\prime}\left[k T_r S_r(k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]. \end{aligned} \tag{4.19.}$$

Bazı cebirsel sadeleştirmelerden sonra, Eşitlik (4.19)

$$MMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = k^2 T_r S_r(k)^{-1} \times \left[\left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1}\right) - T_r' \beta^0 \beta^{0\prime} T_r\right] S_r(k)^{-1} T_r' + T_{p-r}\left[\Lambda_{p-r}^{-1} - T_{p-r}' \beta^0 \beta^{0\prime} T_{p-r}\right] T_{p-r}' - k T_r S_r(k)^{-1} T_r' \beta^0 \beta^{0\prime} T_{p-r} T_{p-r}' - k T_{p-r} T_{p-r}' \beta^0 \beta^{0\prime} T_r S_r(k)^{-1} T_r' \quad (4.20.)$$

olur. $S^*(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} S_r(k) & 0 \\ 0' & I_{p-r} \end{bmatrix}$ ve $\Lambda^*(k)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0' & \Lambda_{p-r}^{-1} \end{bmatrix}$ tanımlansın, (4.20) ifadesi

$$MMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) = T\left(S^*(k)\right)^{-1} \times \left[\Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta^0 \beta^{0\prime} T\right]\left(S^*(k)\right)^{-1} T'$$

olur. Böylece, $MMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)$ ifadesinin negatif olmayan tanımlı bir matris olması için gerek ve yeter koşul $\Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta^0 \beta^{0\prime} T$ nin negatif olmayan tanımlı bir matris olmasıdır. Farebrother (1976) dan, $\Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta^0 \beta^{0\prime} T$ ifadesinin negatif olmayan tanımlı bir matris olması için gerek ve yeter koşul $\beta^{0\prime} T \Lambda^*(k) T' \beta^0 \leq 1$ olarak bulunur. Böylece, $\Lambda^*(k)$ nin değiştirilmesi ile karşılaştırma tamamlanır.

Birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin birinci-sıra ML tahmin ediciye üstünlüğünü ifade eden Teorem 4.1, lineer regresyon modelindeki Sarkar (1996) nın yaklaşımını takip etmektedir. Ridge ve temel bileşenler lojistik tahmin ediciler $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin özel durumlarıdır. Bu yüzden, birinci-sıra ridge ve temel bileşenler lojistik tahmin edicilerin birinci-sıra ML tahmin ediciye üstünlüğünü, sırasıyla $r = p$ ve $k = 0$ iken, Teorem 4.1 den çıkarılan Sonuç Teorem 4.1 ve 4.2 ile ifade edilmektedir. Sonuç Teorem 4.1 ve 4.2 de elde edilen neticeler, asimptotik matris değerli MSE karşılaştırılması ile de elde edilebilmektedir.

Sonuç Teorem 4.1. Birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici, asimptotik matris değerli MSE kriteri açısından birinci-sıra ML tahmin ediciye karşı üstündür gerek ve yeter koşul

$$k\beta^{0\prime}T(2I + k\Lambda^{-1})^{-1}T'\beta^0 \leq 1$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır.

Sonuç Teorem 4.2. PCLR tahmin edici, asimptotik matris değerli MSE kriteri açısından birinci-sıra ML tahmin ediciye karşı üstündür gerek ve yeter koşul

$$\beta^{0\prime}T_{p-r}\Lambda_{p-r}T'_{p-r}\beta^0 \leq 1$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır.

Teorem 4.2. a) $\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2\right)\geq 0$ ve bütün $j=1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2>0$ ise,

$k>0$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}\right)$ dir.

b) $\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2\right)\geq 0$ ve bazı $j=1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2<0$ ise,

$0<k<\frac{2}{\max_{j=1,\dots,r}\left((\alpha_j^0)^2-\frac{1}{\lambda_j}\right)}$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}\right)$ dir.

Burada, λ_j ler $(j=1,\dots,p)$ bilgi matrisi $X'V^{(0)}X$ nin özdeğerleridir ve α_j^0, $j=1,\dots,r$ için $\alpha_r = T_r'\beta^0$ ın elemanlarıdır.

İspat 4.2. $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ nın $\hat{\beta}^{(1)}$ ye üstünlüğü için, $\Delta_5 = SMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) - SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)$ farkı araştırılmalıdır. (3.13) ve (4.13) den,

$$\begin{aligned}\Delta_5 &= \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{\lambda_j+k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j+k)^2}\right)+\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2\right)\\ &= \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{2k+k^2\left(\lambda_j^{-1}-(\alpha_j^0)^2\right)}{(\lambda_j+k)^2}\right)+\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j}-(\alpha_j^0)^2\right)\end{aligned} \qquad (4.21.)$$

elde edilir. Eğer bütün $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 > 0$ ise Eşitlik (4.21) deki ilk terim pozitiftir. Böylece, $\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2\right) \geq 0$ ise, Δ_5 pozitiftir. Eğer bazı $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 < 0$ ise, Eşitlik (4.21) deki ilk terim pozitif olacak şekilde bir k değeri mevcuttur. Eğer $\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2\right) \geq 0$ ise, Δ_5 pozitiftir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. a) Bütün $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 > 0$ ise, $k > 0$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}_r^{(1)}\right)$ dir.

b) Bazı $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 < 0$ ise, $0 < k < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,r}\left((\alpha_j^0)^2 - \frac{1}{\lambda_j}\right)}$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}_r^{(1)}\right)$ dir.

Burada, λ_j ler $(j = 1,\dots,p)$ bilgi matrisi $X'V^{(0)}X$ nin özdeğerleridir ve α_j^0, $j = 1,\dots,r$ için $\alpha_r = T_r'\beta^0$ ın elemanlarıdır.

İspat 4.3. (4.17) ve (4.13) ten $\Delta_6 = SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}\right) - SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)$ farkı şu şekilde yazılabilir:

$$\Delta_6 = \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=r+1}^{p}\left(\alpha_j^0\right)^2 - \sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j + k^2\left(\alpha_j^0\right)^2}{\left(\lambda_j + k\right)^2} - \sum_{j=r+1}^{p}\left(\alpha_j^0\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\frac{2k + k^2\left(\lambda_j^{-1} - \left(\alpha_j^0\right)^2\right)}{(\lambda_j + k)^2}.$$

Bütün $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 > 0$ ise, $k > 0$ olduğu zaman Δ_6 daki tüm terimler pozitif olur. Ancak, bazı $j = 1,\dots,r$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2 < 0$ ise, $\left(\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2\right)k + 2 > 0$ olmalıdır. Buradan k yalnız bırakılırsa, $k < \frac{2}{(\alpha_j^0)^2 - \frac{1}{\lambda_j}}$ bulunur. Yani, $0 < k < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,r}\left((\alpha_j^0)^2 - \frac{1}{\lambda_j}\right)}$ için $(j = 1,\dots,r)$, Δ_6 pozitif olur.

Yorum: Teorem 4.2 ve 4.3 ün şartları arasındaki karşılaştırma şunu göstermektedir ki; eğer birinci-sıra $r-k$ sınıf tahmin ediciyi birinci-sıra ML tahmin ediciye skaler değerli MSE açısından üstün kılacak bir k değeri mevcutsa, aynı k değeri için, birinci-sıra $r-k$ sınıf tahmin edicinin skaler değerli MSE açısından birinci-sıra PCLR ye de üstün olduğu söylenebilir.

Teorem 4.4. a) Bütün $j = r+1,\dots,p$ için $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2 > 0$ ise, $0 < k < min_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right)$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}(k)\right)$ dir.

b) Bazı $j = r+1,\dots,p$ için $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2 < 0$ ise, $max\left\{0, max_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right)\right\} < k$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}(k)\right)$ dir.

Burada, λ_j ler $(j = 1,\dots,p)$ bilgi matrisi $X'V^{(0)}X$ nin özdeğerleridir ve α_j^0, $j = r+1,\dots,p$ için $\alpha_{p-r} = T'_{p-r}\beta^0$ ın elemanlarıdır.

İspat 4.4. (4.15) ve (4.13) ten $\Delta_7 = SMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}(k)\right) - SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)$ farkı

$$\begin{aligned}\Delta_7 &= \sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_j+k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j+k)^2} - \sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j+k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j+k)^2} - \sum_{j=r+1}^{p}(\alpha_j^0)^2 \\ &= \sum_{j=r+1}^{p}\frac{\lambda_j+k^2(\alpha_j^0)^2}{(\lambda_j+k)^2} - \sum_{j=r+1}^{p}(\alpha_j^0)^2 \\ &= \sum_{j=r+1}^{p}\frac{\lambda_j\left(1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2-2k(\alpha_j^0)^2\right)}{(\lambda_j+k)^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada, bütün $j = r+1,\dots,p$ için $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2 > 0$ ise $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2-2k(\alpha_j^0)^2 > 0$ olmalıdır. Buradan k yalnız bırakılırsa $k < \frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}$ olur. Böylece, $0 < k < min_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right)$ için Δ_7 pozitiftir. Bazı $j = r+1,\dots,p$ için $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2 < 0$ ise, $1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2-2k(\alpha_j^0)^2$ ifadesinin pozitifliği araştırılır. Buradan

k yalnız bırakılırsa, $j = r+1, \dots, p$ için $\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2} < k$ olur. Yani, $max\left\{0, max_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right)\right\} < k$ için Δ_7 pozitiftir.

Ne yazık ki, teoremlerdeki sonuçlar bilinmeyen yanlılık parametresi k ya ve α_j^0 ya bağlıdır. Bu yüzden, pratikte, bunlar uygun tahminleri ile yer değiştirilmelidir.

4.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi

Ridge yanlılık parametresi k nın türetilmesinde, Schafer ve ark. (1984) ve Lee ve Silvapulle (1988) tarafından lineer ve lojistik regresyon arasındaki benzerlikler kullanılmıştır. Literatürde, Schafer ve ark. (1984) ve Lee ve Silvapulle (1988) nin ridge lojistik tahmin edici için ridge parametresinin seçimi için önerdikleri k değerleri, k_{S1}, k_{L-S}, ve k_{S2} dir.

Birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin elde edilmesinden sonraki adım uygun bir k yanlılık parametresinin seçimidir. Uygun bir k, $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ nın skaler MSE değeri minimum yapılarak türetilebilir. Verilmiş r için

$$\frac{\partial SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right)}{\partial k} = 2\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j\left(k\left(\alpha_j^0\right)^2-1\right)}{\left(\lambda_j+k\right)^3}$$

türevini sıfır yapan değer $j = 1, \dots, r$ için $k = 1/(\alpha_j^0)^2$ dır. $\alpha_j^0 = t_j'\beta^0$ olduğundan, k parametresi

$$\hat{k}_a = \frac{1}{\max_{j=1,\dots,r}\left(t_j'\hat{\beta}^{(1)}\right)^2}$$

gibi seçilebilir. Hoerl ve ark. (1975)'e benzer mantıkla, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicide diğer bir k değeri, $j = 1, \dots, r$ için $1/(\alpha_j^0)^2$ nin harmonik ortalamasının alınması ile $\hat{k}_b = \frac{r}{\hat{\beta}^{(1)\prime}T_rT_r'\hat{\beta}^{(1)}}$ şeklinde elde edilir.

Birinci-sıra $r-k$ tahmin edici için sayısal örnek uygulaması Bölüm 6.2 de ve birinci-sıra $r-k$ tahmin edicinin diğer bazı tahmin edicilerle farklı durumlar altında karşılaştırmalarını içeren simülasyon çalışmaları ise Bölüm 7.2 ve 7.4 de verilmiştir.

5. BİRİNCİ-SIRA $r-d$ SINIF LOJİSTİK TAHMİN EDİCİ

Lineer regresyon modelinde çoklu iç ilişkinin olması durumunda alternatif bir tahmin edici olarak Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001) Liu ve temel bileşenler tahmin edicileri birleştirerek $r-d$ sınıf tahmin ediciyi önermişlerdir. Ayrıca $r-d$ sınıf tahmin ediciyi EKK, temel bileşenler ve Liu tahmin edicilerle skaler değerli MSE kriterine göre karşılaştırmışlardır. Özkale ve Kaçıranlar (2007) $r-d$ sınıf tahmin ediciyi EKK, temel bileşenler, Liu ve $r-k$ sınıf tahmin edicilerle matris değerli MSE açısından karşılaştırmıştır.

Lineer modeldeki mantık lojistik regresyon modeline taşınarak, bu bölümde birinci-sıra $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici önerilmiştir. $d\hat{\alpha}_r$ Schaefer (1986) nın Stein tahmin edicisini göstermek ve $0 < d < 1$ büzme parametresi olmak üzere, $r-d$ sınıf tahmin edici, indirgenmiş modelin log-olabilirlik fonksiyonu $l(\alpha_r)$ nin $(\alpha_r - d\hat{\alpha}_r)'(\alpha_r - d\hat{\alpha}_r)$ kısıtı altında maksimize edilmesiyle elde edilebilir:

$$max_{\alpha_r}\{l^d(\alpha_r)\} = max_{\alpha_r}\left\{l(\alpha_r) - \frac{1}{2}(\alpha_r - d\hat{\alpha}_r)'(\alpha_r - d\hat{\alpha}_r)\right\}.$$

Parametre tahmin edicisini bulmak için, verilen bir nokta etrafında Taylor serisi açılımına dayalı olan Newton-Raphson metodu kullanılır. Bir α^0 parametre değeri etrafında birinci-sıra Taylor serisi açılımı,

$$\frac{\partial l^d(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial l(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} - \alpha_r + d\hat{\alpha}_r = Z_r'(y - \pi_r) - \alpha_r + d\hat{\alpha}_r,$$

$$\frac{\partial^2 l^d(\alpha_r)}{\partial \alpha_r' \partial \alpha_r} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{i(r)}(1 - \pi_{i(r)}) z_{r(i)} z_{r(i)}' + I_r = Z_r' V_{ML} Z_r + I_r$$

ve α^0 ın kullanılmasıyla tahmin edilmiş elemanları içeren vektör $\hat{\pi}_r^{(0)} = \left[\hat{\pi}_{(r)1}^{(0)}\ \hat{\pi}_{(r)2}^{(0)} \dots\ \hat{\pi}_{(r)n}^{(0)}\right]'$ olmak üzere,

$$\frac{\partial l^d(\alpha_r)}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial l(\alpha_r)}{\partial \alpha_r}\Big|_{\alpha^0} + \left(\frac{\partial^2 l^d(\alpha_r)}{\partial \alpha_r' \partial \alpha_r}\right)\Big|_{\alpha^0}(\alpha_r - \alpha^0)$$
$$= Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - \alpha^0 + d\hat{\alpha}_r - (Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)(\alpha_r - \alpha^0) \qquad (5.1.)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.1) eşitliği sıfıra eşitlenirse α_r nin birinci-sıra yakınsaması

$$(Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)\left(\alpha_r^{(1)} - \alpha^0\right) = Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) - \alpha^0 + d\hat{\alpha}_r^{(1)} \qquad (5.2.)$$

elde edilir. Eşitlik (5.2) nin $(Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)^{-1}$ ile soldan çarpılmasıyla ve $\alpha_r^{(1)}$ nin tahmin edicisi $\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)$ ile gösterilerek,

$$\hat{\alpha}_r^{(1)}(d) = (Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)^{-1}$$
$$\times \left[(Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)\alpha^0 + Z_r'(y - \hat{\pi}_r) - \alpha^0 + d\hat{\alpha}_r^{(1)}\right]$$
$$= (Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)^{-1}\left[(Z_r' V_{ML} Z_r)\alpha^0 + Z_r'(y - \hat{\pi}_r) + d\hat{\alpha}_r^{(1)}\right] \qquad (5.3.)$$

elde edilir. Eşitlik (4.5) in kullanılmasıyla,

$$(Z_r' V_{ML} Z_r)\alpha^0 + Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right) + d\hat{\alpha}_r^{(1)} = (Z_r' V_{ML} Z_r)\alpha^0 + Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right)$$
$$+ d\alpha^0 + d(Z_r' V_{ML} Z_r)^{-1} Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right)$$
$$= (Z_r' V_{ML} Z_r + dI_r)\alpha^0$$
$$+ (Z_r' V_{ML} Z_r + dI_r)(Z_r' V_{ML} Z_r)^{-1}$$
$$\times Z_r'\left(y - \hat{\pi}_r^{(0)}\right)$$
$$= (Z_r' V_{ML} Z_r + dI_r)\hat{\alpha}_r^{(1)}$$

bulunur. Böylece Eşitlik (5.3), $\hat{\alpha}_r^{(1)}(d) = (Z_r' V_{ML} Z_r + I_r)^{-1}(Z_r' V_{ML} Z_r + dI_r)\hat{\alpha}_r^{(1)}$ haline gelir. Orijinal parametrelere geri dönüşüm yapılırsa, lojistik model için birinci-sıra $r-d$ sınıf tahmin edici

$$\hat{\beta}_r^{(1)}(d) = T_r(T_r' X' V_{ML} X T_r + I_r)^{-1}(T_r' X' V_{ML} X T_r + dI_r)T_r'\hat{\beta}_r^{(1)}$$

şeklinde elde edilir.

Yorum: Eşitlik (4.5) ile verilen tam iterasyonlu ML tahmin edici α^0 ın bir başlangıç noktası olarak kullanıldığı zaman, tam iterasyonlu PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici ile sırasıyla birinci-sıra PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici arasında katsayı tahminlerinde küçük bir fark olmaktadır.

$r = p$ olduğu zaman, $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ birinci-sıra Liu lojistik tahmin edici olacaktır. $d \to 0$ iken, $\hat{\beta}_r^{(1)}(d) \to \hat{\beta}_r$ temel bileşenler lojistik tahmin edici olur. $r = p$ ve $d = 0$ olduğu zaman ise, $\hat{\beta}_r^{(1)}(d) \to \hat{\beta}^{(1)}$ olacaktır. Böylece, bu yeni tahmin edici Liu lojistik tahmin edici, temel bileşenler lojistik tahmin edici ve ML tahmin ediciyi birleştirmektedir.

5.1. $r-d$ Sınıf Lojistik Tahmin Edicinin Özellikleri

Eşitlik (4.8) in kullanılması ile $\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)$ nin asimptotik beklenen değeri ve kovaryans matrisi, $S_r(d) = \Lambda_r + d\mathrm{I}_r$ olmak üzere,

$$E\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)\right) = S_r(1)^{-1}S_r(d)\alpha^0$$

ve

$$Cov\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)\right) = S_r(1)^{-1}S_r(d)\Lambda_r^{-1}S_r(d)S_r(1)^{-1}$$

olarak elde edilebilir. Eşitlik (4.9) yardımıyla $\hat{\beta}_r^{(1)}(d) = T_r\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)$ ve $\beta^0 = T_r\alpha^0$ gösterimleri ile

$$Bias\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) = E\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) - \beta^0 = T_rS_r(1)^{-1}S_r(d)T_r'\beta^0 - \beta^0$$

ve

$$Cov\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) = T_r S_r(1)^{-1} S_r(d) \Lambda_r^{-1} S_r(d) S_r(1)^{-1} T_r'$$

elde edilebilir. $\mathrm{I}_p = T_r T_r' + T_{p-r} T_{p-r}'$ ve $T_r S_r(1)^{-1} S_r(d) T_r' - \mathrm{I}_p = (d-1) T_r S_r(1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'$ olduğundan, $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ nin yanlılığı,

$$Bias\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) = \left[(d-1) T_r S_r(1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]\beta^0$$

olarak yazılabilir. Böylece $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ nin asimptotik matris değerli MSE ifadesi,

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) = {} & T_r S_r(1)^{-1} S_r(d) \Lambda_r^{-1} S_r(d) S_r(1)^{-1} T_r' \\ & + \left[(d-1) T_r S_r(1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right]\beta^0 \\ & \times \beta^{0\prime}\left[(d-1) T_r S_r(1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}'\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ nin skaler değerli MSE si,

$$SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(d-1)^2 \lambda_j (\alpha_j^0)^2 + (\lambda_j + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^2} + \sum_{j=r+1}^{p} (\alpha_j^0)^2. \qquad (5.4.)$$

şeklinde elde edilebilir.

$d \to 1$ iken, $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) \to \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=r+1}^{p} (\alpha_j^0)^2$ ve $d \to 0$ iken, $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right) \to \sum_{j=1}^{r} \frac{d^2 \lambda_j (\alpha_j^0)^2 + \lambda_j^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^2} + \sum_{j=r+1}^{p} (\alpha_j^0)^2$ olur.

5.2. Yanlılık Parametresinin Seçimi

d değeri, $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicinin performansını etkilediğinden, uygun bir d seçimi önemlidir. Uygun bir d, $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ nin skaler MSE değeri minimum yapılarak türetilebilir. Eşitlik (5.4) ün verilen bir r için d ye göre türevinin alınmasıyla,

$$\frac{\partial SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right)}{\partial d} = 2\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j-\lambda_j(\alpha_j^0)^2+d(1+\lambda_j\left(\alpha_j^0\right)^2)}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}$$

elde edilir ve

$$d^* = \frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j\left[(\alpha_j^0)^2+1\right]}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{1+\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}} = 1-\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{1+\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}}$$

değerinde minimumdur.

d^* ın her zaman 1 den küçük olduğu formülden görülmektedir; ancak tüm $j = 1,\dots,r$ için $(\alpha_j^0)^2 < 1$ ise pozitiftir. $(\alpha_j^0)^2$ asimptotik yansız tahmin edicisi $(\hat{\alpha}_j^{(1)})^2 - \frac{1}{\lambda_j}$ ile değiştirilirse (bkz. Schaefer ve ark., 1984; Liu, 1993), d nin (0,1) aralığındaki bir tahmin edicisi,

$$\hat{d}_h = 1 - h\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}} \qquad (5.5.)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada,

$$0 < h < \frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)}}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. h ın değerinden dolayı, (0,1) aralığındaki $\hat{d}_h$, $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(d)\right)$ değerini minimum yapmayabilir. Ancak, $\hat{d}_h$ (0,1) aralığında olmasını sağlayacak ve $SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\left(\hat{d}_h\right)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right)$ farkı negatif olacak şekilde bir h değeri Teorem 5.1 ile verilebilir.

Lemma (Stein, 1981). Varsayalım ki $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve σ^2 biliniyor olsun. $f(y)$, $E|f'(y)| < \infty$ olacak şekilde bir gerçel fonksiyon olsun, böylece $E(f'(y)) = E((y-\mu)f(y))/\sigma^2$ dir.

Teorem 5.1. $\lambda_1 = \lambda_{max} \geq \lambda_2 \geq \cdots > \lambda_r > \lambda_{r+1} > \cdots \geq \lambda_p = \lambda_{min}$ $X'V_{ML}X$ in özdeğerleri olsun. Böylece, $\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)} > \frac{2}{\lambda_r(\lambda_r+1)}$ ise

$$0 < h < min\left\{ 2 - \frac{4}{\lambda_r(\lambda_r+1)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}, \frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)}} \right\}$$

için $SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(\hat{d}_h)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right)$ negatiftir.

İspat 5.1. $\hat{\alpha}_r^{(1)}(d)$ nin i-inci elemanı $\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}(d) = \frac{\lambda_i+d}{\lambda_i+1}\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}$ şeklinde yazılabilir. Buradan, $\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}(\hat{d}_h)$ nin asimptotik matris değerli MSE si,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}(\hat{d}_h) - \alpha_i^0\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{\lambda_i+\hat{d}_h}{\lambda_i+1}\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} - \alpha_i^0\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} - \alpha_i^0\right)^2\right] + \frac{2}{\lambda_i+1}E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} - \alpha_i^0\right)(\hat{d}_h - 1)\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right] \\ &+ (\frac{1}{\lambda_i+1})^2 E\left[\left(\hat{d}_h - 1\right)^2\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (5.6.)$$

şeklinde yazılır. $A = E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} - \alpha_i^0\right)(\hat{d}_h - 1)\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right] = -hE[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} - \alpha_i^0\right)\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}}\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}]$

olduğundan, $f\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}}\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}$ olsun. Sonra Lemma'nın kullanılmasıyla,

$\hat{\alpha}_{ri}^{(1)} \sim N\left(\alpha_i^0, \lambda_i^{-1}\right)$ olmak üzere (bkz. Marx ve Smith, 1990, syf.28),

$$A = -h\lambda_i^{-1}E\left[\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}} - \frac{2\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}\right]^2}\right]$$

elde edilir.

A ile verilen ifadenin kullanılması ile (5.6) eşitliği,

$$E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}(\hat{d}_h)-\alpha_i^0\right)^2\right] = E\left[\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}-\alpha_i^0\right)^2\right] + E\Bigg(\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}}\Big[\frac{-2h}{\lambda_i(\lambda_i+1)} + \frac{4h\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2}{\lambda_i(\lambda_i+1)^3}\frac{1}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}} + \frac{h^2\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_i+1)^2}\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}}\Big]\Bigg) \quad (5.7.)$$

olarak gösterilebilir. Eşitlik (5.7) den, $\Delta = SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(\hat{d}_h)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right)$ farkı,

$$\Delta = E\Bigg\{\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}}\Big[\sum_{i=1}^{r}\frac{-2h}{\lambda_i(\lambda_i+1)} + \sum_{i=1}^{r}\frac{4h\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2}{\lambda_i(\lambda_i+1)^3}\frac{1}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}} + \sum_{i=1}^{r}\frac{h^2\left(\hat{\alpha}_{ri}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_i+1)^2}\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}}\Big]\Bigg\}$$

bulunur. Böylece,

$$\Delta \le E\left\{\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{(\lambda_j+1)^2}}h\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{-2}{\lambda_i(\lambda_i+1)} + \frac{4}{\lambda_r(\lambda_r+1)} + h\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}\right]\right\}$$

$$= E\left[\frac{\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{\alpha}_{rj}^{(1)}\right)^2}{\left(\lambda_j+1\right)^2}}\right] h\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{-2}{\lambda_i(\lambda_i+1)}+\frac{4}{\lambda_r(\lambda_r+1)}+h\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}\right]$$

olur. Δ nın negatif olmayan tanımlı bir matris olması için,

$$g(h) = h\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{-2}{\lambda_i(\lambda_i+1)}+\frac{4}{\lambda_r(\lambda_r+1)}+h\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)}\right]$$

negatif olmalıdır. $g(h)$ ın iki kökü $h_1 = 0$ ve $h_2 = 2\left[1-\frac{2}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}\right]$ dir. Eğer $\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)} > \frac{2}{\lambda_r(\lambda_r+1)}$ ise $0 < h < 2\left[1-\frac{2}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}\right]$ ve eğer $\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)} < \frac{2}{\lambda_r(\lambda_r+1)}$ ise $2\left[1-\frac{2}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}\right] < h < 0$ iken $g(h)$ pozitiftir. $2\left[1-\frac{2}{\sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{\lambda_j(\lambda_j+1)}}\right] < h < 0$ durumunda $\hat{d}_h > 1$ olduğundan ispat tamamlanır.

Yorum. Veri kümesi $\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j+1)} > \frac{2}{\lambda_r(\lambda_r+1)}$ şartını sağlamıyorsa, $SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}(\hat{d}_h)\right) - SMSE\left(\hat{\alpha}_r^{(1)}\right)$ farkını negatif yapacak (0,1) aralığında bir d değeri bulunamaz. Bu durumda, Eşitlik (5.5) kullanılabilir.

Birinci-sıra $r-d$ tahmin edici için sayısal örnek uygulaması Bölüm 6.3 de ve birinci-sıra $r-d$ tahmin edicinin diğer bazı tahmin edicilerle farklı durumlar altında karşılaştırmalarını içeren simülasyon çalışmaları ise Bölüm 7.3 ve 7.4 de verilmiştir.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu kısımda, önerilen yeni tahmin ediciler, mevcut tahmin edicilerle sayısal örnekler üzerinde karşılaştırılmış ve sonuçları incelenmiştir.

İlk olarak, Bölüm 6.1 de Gelir ve Yaşam Koşulları Araştırması (GYKA) - 2011 (Kesit) veri kümesinde birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edici, birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici ve ML tahmin ediciler incelenmiştir. Bölüm 6.2 de ise Kanser Gerileme veri kümesinde birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici, birinci-sıra temel bileşenler lojistik tahmin edici, birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici ve birinci-sıra ML tahmin ediciler incelenmiştir. Son olarak, Bölüm 6.3 te ise Barınma Sorunu veri kümesinde birinci-sıra $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici, birinci-sıra temel bileşenler lojistik tahmin edici ve birinci-sıra ML tahmin ediciler incelenmiştir.

Sayısal örnek uygulamaları Matlab programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

6.1. Sayısal Örnek - 1

Elde edilen teorik sonuçları gösterebilmek için, TÜİK[3] ten alınan GYKA - 2011 verisi kullanılmıştır. GYKA ile gelir dağılımının ölçülmesi ve yoksulluk göstergelerinin tahmin edilmesi amaçlanmaktadır. Veri kümesi birçok hanehalklarının yaşam koşulları ve gelirleri ile ilgili değişken içermektedir. Bu çalışmada yoksullukla ilişkili olabileceği düşünülen değişkenler seçilmiştir. İkili yanıt değişken y_i, eğer hanehalkı göreli olarak yoksul ise yani hanehalkı medyan gelirin %60 ından daha düşük bir eşdeğer gelire sahipse 1, diğer durumda 0 değerini almaktadır. Açıklayıcı değişkenler ise konutun oda sayısı (x_1), konutun kullanılan alanı (x_2), alınan sosyal transferlerin değerinin doğal logaritması (x_3), istihdamdaki hanehalkı üyesi fert sayısı (x_4), OECD eşdeğerlik ölçeğine[4] göre hanehalkı büyüklüğü (x_5), bilgisayara sahip olma durumu (x_6, eğer hanehalkı bilgisayara

[3] Burada yer alan yorum, görüş ve sonuçlar yazarın kendisine aittir. Hiçbir şekilde Türkiye İstatistik Kurumu'nu bağlamaz.

[4] OECD eşdeğerlik ölçeği hanehalkı büyüklüğü ve kompozisyonu ile ilgili farklılıkları yansıtmak için kullanılmaktadır. Ölçek her hanehalkı ferdi için bir ağırlık verir (ve sonra toplayarak hanehalkı büyüklüğünü elde eder): İlk yetişkin için 1; ikinci ve takip eden 14 yaş ve üstü her yetişkin için 0.5; 14 yaş altı herbir çocuk için 0.3 (bkz. Eurostat, 2014).

sahipse 1, diğer durumda 0 şeklindedir) ve otomobile sahip olma durumu (x_7, eğer hanehalkı otomobile sahipse 1, diğer durumda 0). Veri, ülkemizdeki Akdeniz Bölgesine ait 1647 hanehalkından (gözlem) oluşmaktadır. 291 tanesi ise göreli yoksul olarak belirlenmiştir. En düşük yıllık kullanılabilir eşdeğer hanehalkı geliri 798.76 TL, en yüksek yıllık kullanılabilir eşdeğer hanehalkı geliri 284802.51 TL ve medyan gelir 7636 TL dir. Böylece, göreli yoksulluk için eşik değeri 4581 TL olarak belirlenmiştir.

Hesaplamalardan önce nicel açıklayıcı değişkenler x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 standartlaştırılmıştır. Sabit terim 0 olarak alınmıştır. Son iterasyondaki $X'\hat{V}_{ML}X$ in özdeğerleri $\lambda_1 = 42.7883$, $\lambda_2 = 26.8822$, $\lambda_3 = 0.2822$, $\lambda_4 = 0.2066$, $\lambda_5 = 0.1499$, $\lambda_6 = 0.0627$ ve $\lambda_7 = 0.0341$ olarak elde edilmiştir. Tam iterasyonlu ML tahminleri elde edilirken yakınsama kriteri olarak 10^{-6}kullanılmıştır. Böylece, koşul sayısı $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min} \approx 1255$ dir ve çoklu iç ilişkiye işaret etmektedir.

Bu sayısal örnekte, Bölüm 3.2 de önerilen üç tane yanlılık parametresi kullanılmıştır. k değerleri, (3.20) eşitliği kullanılarak, $K = diag(10.0175, 168.5217, 0.6600, 0.0850, 0.0515, 0.0271, 0.0747)$ den, $\hat{k}_H = 0.0842$, $\hat{k}_G = 0.5170$ ve $\hat{k}_M = 0.0850$ olarak hesaplanmıştır.

Tahmin edilen parametre değerleri ve ilişkili skaler MSE değerleri Çizelge 6.1 de verilmiştir. Hem birinci-sıra hem de tam iterasyonlu yaklaşımlar kullanılarak ML tahminleri elde edilmiştir. Bilinmeyen α^0 parametresinin yerine skaler MSE ve yanlılık değerleri hesaplanırken birinci-sıra ML tahminleri kullanılmıştır. Çizelge 6.1, tam iterasyonlu ve birinci-sıra ML tahminleri üzerindeki çoklu iç ilişkinin etkilerini göstermektedir. Birinci-sıra ridge lojistik ve birinci-sıra JRL tahmin ediciyle karşılaştırıldığında tam iterasyonlu ve birinci-sıra ML tahmin edicinin spesifik bir katsayının işaret ve büyüklüğündeki karasızlığı görülebilir. Konutun kullanılan alanı (x_2) ve istihdamdaki hanehalkı üyesi fert sayısı (x_4) değişkenlerinin işaretleri k nın bazı değerlerinde değişmiştir. Bir açıklayıcı değişkenin işaretinin değişmesi önemlidir, çünkü bu değişiklik hanehalkının yoksulluk riski altında olup olmadığını etkilemektedir. Çizelge 6.1, tahmin edicinin ve yanlılık parametresinin bu değişikliği etkilediğini göstermektedir. Yanlılıkların mutlak değerlerinin toplamı

(ABIAS), $\tilde{\beta}^{(1)}(\hat{k}_H)$ ile tahmin edilen parametrelerde minimum değere sahiptir. $\hat{k}_H$, $\hat{k}_M$ ve $\hat{k}_G$ kullanımında birinci-sıra ML tahmin edici, birinci-sıra JRL ve ridge lojistik tahmin edicilerden daha düşük skaler MSE değerine sahiptir. Buna ek olarak, Çizelge 6.1 deki tüm k değerleri için birinci-sıra JRL tahmin edici, birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden daha küçük MSE değerine sahiptir.

Çizelge 6.1. Gelir ve Yaşam Koşulları Veri Kümesi - Tahmin edilmiş katsayılar, mutlak yanlılık ve skaler MSE değerleri

	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}^{(1)}$	$\hat{\beta}^{(1)}(\hat{k}_H)$	$\hat{\beta}^{(1)}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}^{(1)}(\hat{k}_M)$	$\tilde{\beta}^{(1)}(\hat{k}_H)$	$\tilde{\beta}^{(1)}(\hat{k}_G)$	$\tilde{\beta}^{(1)}(\hat{k}_M)$
x_1	-8.0116	-4.6494	-2.3955	-0.8483	-2.3860	-3.4206	-1.4545	-3.4108
x_2	0.8796	1.6612	0.0255	-0.3251	0.0204	0.5722	-0.4217	0.5643
x_3	9.4077	6.5455	5.1115	2.2121	5.1002	6.3305	3.7429	6.3261
x_4	-9.7800	-5.0117	-1.4623	0.4856	-1.4459	-3.2331	0.3096	-3.2152
x_5	31.0735	19.6163	13.1316	5.2835	13.0935	17.2395	8.9351	17.2126
x_6	-1.9109	-1.0897	-1.0776	-1.0573	-1.0775	-1.0865	-1.0689	-1.0864
x_7	-2.0983	-1.0845	-1.1102	-1.1443	-1.1103	-1.0922	-1.1307	-1.0923
ABIAS	---	---	15.3955	30.0430	15.4761	6.6990	24.1500	6.7662
SMSE	70.406	32.9917	76.0812	274.6947	76.7099	33.0081	170.0005	33.1526

Teorem 3.1 i göz önüne aldığımız zaman,

$$\left\|Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_H)\right)\right\|^2 = 11.5548 < \left\|Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_H)\right)\right\|^2 = 64.463,$$

$$\left\|Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_G)\right)\right\|^2 = 164.8081 < \left\|Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_G)\right)\right\|^2 = 272.8266,$$

$$\left\|Bias\left(\tilde{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_M)\right)\right\|^2 = 11.7909 < \left\|Bias\left(\hat{\alpha}^{(1)}(\hat{k}_M)\right)\right\|^2 = 65.1673$$

olduğu görülmüştür. Böylece, üç k değeri için de Teorem 3.1 sağlanmıştır.

$|Bias(\hat{\alpha}_i^{(1)}(K))| - |Bias(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K))| = [0.0637, 0.0237, 0.4765, 1.3251, 1.6695, 2.3243, 1.5497]'$

olduğundan tahmin edicilerin bütün i -inci bileşenleri için Teorem 3.2 sağlanmaktadır. Burada, $K = diag(k_1, k_2, \dots, k_7)$ nın her bir elemanı Eşitlik (3.20) kullanılarak seçilmiştir.

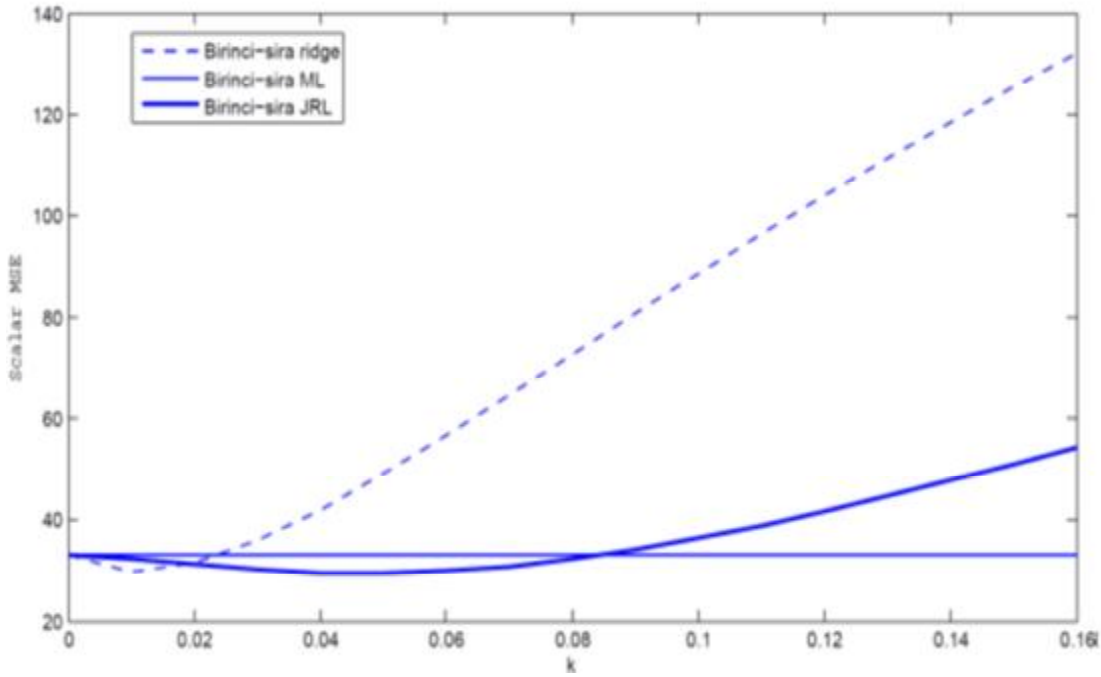
Çizelge 6.2, Teorem 3.3 ve 3.4 ü kontrol etmek için gerekli hesaplamaları vermektedir. Çizelge 6.2 ye göre, $i = 1, 3, 4, 5, 6$ ve 7 iken Teorem 3.3-b sağlanmakta iken, Teorem 3.3-a sadece $i = 2$ için sağlanmaktadır. Böylece, birinci-sıra genelleştirilmiş JRL tahmin edici, skaler değerli MSE kriterine göre birinci-sıra ML tahmin ediciden üstündür. Ayrıca, her bir $i = 1, \dots, 7$ için Teorem 3.4 sağlanmaktadır. Bu demek oluyor ki skaler değerli MSE kriteri açısından birinci-sıra genelleştirilmiş JRL tahmin edici, birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden üstündür.

Çizelge 6.2. Tahmin edicilerin i-inci bileşeninin yanlılık parametresi ve skaler MSE değerleri

i	k_i	$(\alpha_i^0)^2\lambda_i - 1$	k_{1i}	k_{2i}	$SMSE(\hat{\alpha}_i^{(1)})$	$SMSE(\hat{\alpha}_i^{(1)}(K))$	$SMSE(\tilde{\alpha}_i^{(1)}(K))$
1	10.0175	549.8344	14.4326	0.8166	0.004438	0.0085	0.004430
2	168.5217	-0.1001	-2516.5	144.0250	0.0157	0.0086	0.0074
3	0.6600	0.6972	2.6282	0.4168	2.3590	1.8452	1.4844
4	0.0850	25.1888	0.1334	0.0265	2.7905	4.5107	2.6879
5	0.0515	28.3492	0.0803	0.0154	4.3024	7.0429	4.1607
6	0.0271	26.7953	0.0423	0.0083	8.4544	13.7577	8.1608
7	0.0747	1.5683	0.1977	0.0443	15.0652	14.1799	10.8432

Çizelge 6.1, k nın özel değerleri için tahmin edicilerin performansını özetlemektedir. Diğer k değerleri için $\tilde{\beta}^{(1)}(k)$ nın diğer tahmin edicilere üstünlüğünü değerlendirmek için Şekil 6.1 verilmiştir. Şekil 6.1 teki skaler MSE değerlerinin k ya karşın grafiği, k nın yaklaşık olarak 0.02 den büyük olduğunda

birinci-sıra JRL tahmin edicinin birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden daha küçük MSE değerine sahip olduğunu göstermektedir. k sıfıra yakın olduğu zaman durum tam tersidir. Diğer yandan, k nın 0.001 ile 0.083 aralığındaki değerleri için $\tilde{\beta}^{(1)}(k)$, birinci-sıra ML tahmin ediciden daha iyidir ve k değeri 0.083 ten uzaklaştıkça $\hat{\beta}^{(1)}$, $\tilde{\beta}^{(1)}(k)$ den üstündür. Şekil 6.1 den görüldüğü üzere, birinci-sıra ridge lojistik tahmin edici, 0.001 ile 0.023 aralığında birinci-sıra ML tahmin ediciden daha düşük skaler MSE değerine sahiptir. Ayrıca Şekil 6.1 bu sonucu Çizelge 6.1 de kullanılan $\hat{k}_H = 0.0842$, $\hat{k}_G = 0.5170$ ve $\hat{k}_M = 0.0850$ için de desteklemektedir. Diğer bir deyişle, $\hat{k}_H$, $\hat{k}_G$ ve $\hat{k}_M$, 0.001 ile 0.083 aralığının dışında olduğundan bu yanlılık parametrelerinin kullanımında, birinci-sıra ML tahmin edici, hem birinci-sıra JRL hem de birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden skaler MSE açısından daha iyi sonuç vermiştir. Diğer yandan, bu aralığın içinde birinci-sıra JRL tahmin edici, birinci-sıra ML tahmin ediciden üstündür. Örneğin, bu aralıktan $\hat{k}_{min} = \min_{i=1,\dots,7}(k_i)$=0.0271 olarak seçilirse, birinci-sıra JRL tahmin edicinin skaler MSE değeri $\left(SMSE\left(\tilde{\beta}^{(1)}(k_{min})\right) = 30.4245\right)$, hem birinci-sıra ridge lojistik tahmin edicininkinden $\left(SMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}(k_{min})\right) = 34.3292\right)$ hem de birinci-sıra ML tahmin edicininkinden $\left(SMSE\left(\hat{\beta}^{(1)}\right) = 32.9917\right)$, daha düşük elde edilebilir.



Şekil 6.1. k ya karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

6. 2. Sayısal Örnek - 2

Bölüm 4 de elde edilen teorik sonuçları göstermek için, ridge lojistik tahmin edici kullanılarak Lesaffre ve Marx (1993) tarafından daha önce analiz edilmiş, Lee (1974) de verilen kanser gerileme veri kümesi göz önüne alınmıştır. İkili yanıt değişken y_i, eğer hasta tam bir kanser gerilemesi tecrübe ettiyse 1, öteki durumda 0 almıştır. Nicel açıklayıcı değişkenler, hücre endeksi (x_1), smear endeksi (x_2), infl endeksi (x_3), blast endeksi (x_4) ve sıcaklık (x_5) tır. 27 hastanın 9 u kanser gerilemesini tecrübe etmiştir.

Hesaplamalara başlamadan önce açıklayıcı değişkenler standartlaştırılmıştır. Bundan dolayı sabit terim 0 dır. Son iterasyondaki $X'\hat{V}_{ML}X$ in özdeğerleri, $\lambda_1 = 0.3576$, $\lambda_2 = 0.1464$, $\lambda_3 = 0.1180$, $\lambda_4 = 0.0874$ ve $\lambda_5 = 0.0012$ bulunmuştur. Böylece, koşul sayısı $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min} \approx 295$ olarak çoklu iç ilişkinin varlığını gösteren bir seviyede hesaplanmıştır.

Bu sayısal örnekte, toplam değişkenliğin % 90 ını hesaba katarak dört temel bileşen ($r = 4$) bırakılmıştır. Yanlılık parametresi k nın değerleri ise

$\hat{k}_a = \frac{1}{\max_{j=1,\ldots,r}\left(t_j'\hat{\beta}^{(1)}\right)^2} = 0.0473$ ve $\hat{k}_b = \frac{r}{\hat{\beta}^{(1)\prime}T_r T_r'\hat{\beta}^{(1)}} = 0.1259$ olarak hesaplanmıştır.

Tahmin edilen parametre değerleri ve bunlara ilişkin skaler MSE değerleri Çizelge 6.3 de verilmiştir. Hem birinci-sıra hem de tam iterasyonlu yaklaşımlar kullanılarak ML tahminleri elde edilmiştir. Skaler MSE değerleri hesaplanırken, bilinmeyen parametre β nın yerine birinci-sıra ML tahminleri kullanılmıştır. EKK tahmini birinci-sıra ML tahminleri için başlangıç değeri olarak kullanılmıştır. Pratik yöntem olarak, tam iterasyonlu ML tahminleri elde edilirken yakınsama kriteri olarak 10^{-6} (sıfıra yeterince yakın) kullanılmıştır. Çizelge 6.3, tam iterasyonlu ve birinci-sıra ML tahminleri üzerinde çoklu iç ilişkinin etkilerini göstermektedir. ML tahminleri yanlı tahmin edicilerle kıyaslandığında işaret ve büyüklük açısından kararsız olduğu görülmektedir. Açıklayıcı değişkenlerden hücre endeksi (x_1) ve smear endeksi (x_2) nin işareti birinci-sıra PCLR, ridge lojistik ve $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici kullanıldığında değişmektedir. Tahmin edicilerin ve yanlılık parametresinin her ikisinin bu değişimi etkilediği Çizelge 6.3 de görülmektedir. Yanlı tahmin edicilerin hepsi tam iterasyonlu ve birinci-sıra ML tahmin edicilerden daha küçük bir skaler MSE değerine sahiptir. Yanlılık parametresi k, tahmin edicilerin bu performansını da etkilemiştir.

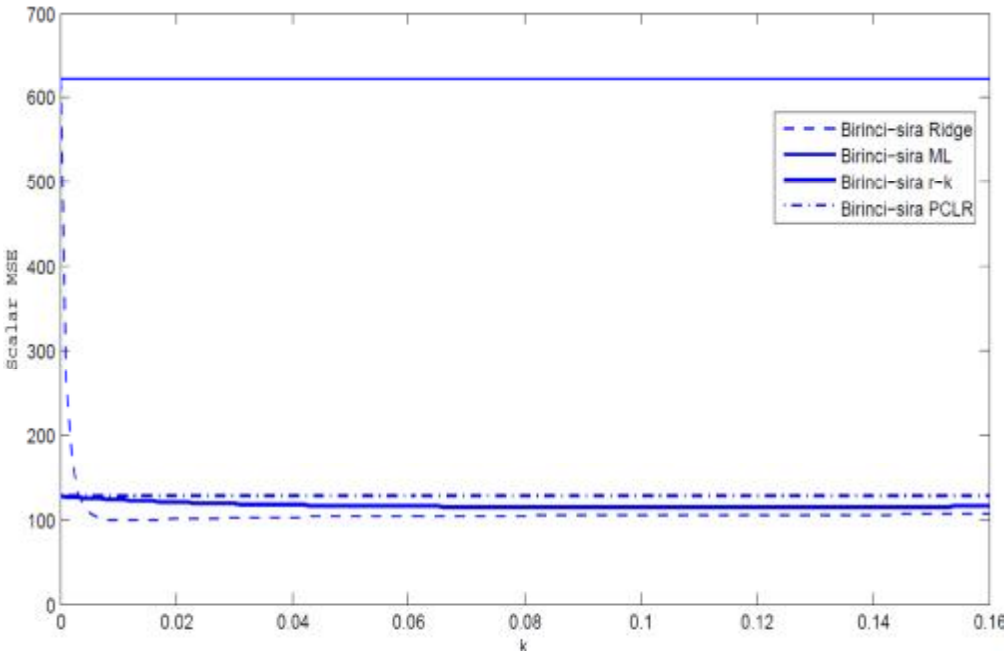
Çizelge 6.3. Kanser Gerileme Verisi – Tahmin edilmiş katsayılar ve skaler MSE değerleri

	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}^{(1)}$	$\hat{\beta}_r^{(1)}$	$\hat{\beta}^{(1)}(\hat{k}_a)$	$\hat{\beta}^{(1)}(\hat{k}_b)$	$\hat{\beta}_r^{(1)}(\hat{k}_a)$	$\hat{\beta}_r^{(1)}(\hat{k}_b)$
x_1	-1.0023	-0.7854	3.5101	1.4624	1.1914	0.6865	0.4739
x_2	-8.1365	-6.5558	-0.9535	-0.3857	-0.0090	-0.0332	0.0856
x_3	9.2490	7.4872	0.2286	0.5988	0.5508	0.1702	0.2097
x_4	6.6661	5.2172	9.8966	4.2287	3.2985	2.0194	1.3481
x_5	-2.1459	-1.6196	-3.3549	-1.2749	-0.9881	-0.6431	-0.4086
SMSE	856.4228	622.3016	127.2771	103.5186	105.7920	116.2389	114.7862

$i = 1,2,3,4$ için $\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2$ sırasıyla $-1.0904, 3.8013, -2.8438, -14.9394$ ve $\sum_{j=r+1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_j} - (\alpha_j^0)^2\right) = 507.8771$ olarak hesaplanmıştır. Böylece, Teorem 4.2 (b) ve Teorem 4.3 (b) den, $0 < k_a = 0.0473 < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,r}\left((\alpha_j^0)^2 - \frac{1}{\lambda_j}\right)} = 0.1339$ ve $0 < k_b = 0.1259 < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,r}\left((\alpha_j^0)^2 - \frac{1}{\lambda_j}\right)} = 0.1339$ için $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}\right)$ ve $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}_r^{(1)}\right)$ dir.

$i = 5$ için $1 - \lambda_j(\alpha_j^0)^2$, 0.8386 olarak hesaplanmıştır. Bunun sonucu olarak, $min_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right) = 0.0043 < k_a = 0.0473$ ve $min_{j=r+1,\dots,p}\left(\frac{1-\lambda_j(\alpha_j^0)^2}{2(\alpha_j^0)^2}\right) = 0.0043 < k_b = 0.1259$ olduğundan Teorem 4.4 $SMSE\left(\hat{\beta}_r^{(1)}(k)\right) < SMSE\left(\widehat{\beta}^{(1)}(k)\right)$ olacak şekilde sağlanmamaktadır.

Çizelge 6.3, k nın özel değerleri için tahmin edicilerin performanslarını özetlemektedir. Bu veri kümesi için diğer k değerleri için $\hat{\beta}_r^{(1)}(k)$ nın diğer tahmin ediciler üzerindeki üstünlüğüne göz atmak için Şekil 6.2 verilmiştir. Şekil 6.2 deki skaler MSE değerlerinin k ya karşın grafiği, k nın tüm değerleri için birinci-sıra $r-k$ sınıf tahmin edicinin, birinci-sıra ML ve PCLR tahmin ediciden daha küçük MSE değerine sahip olduğunu göstermektedir. k sıfır ile yaklaşık olarak 0.0035 arasında iken birinci-sıra $r-k$ sınıf tahmin edici, birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden de daha iyi sonuç vermektedir. Diğer yandan, k nın bütün değerleri için tüm yanlı tahmin ediciler, birinci-sıra ML tahmin ediciden daha düşük skaler MSE değerine sahiptir.



Şekil 6.2. k ya karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

6.3. Sayısal Örnek - 3

Sayısal Örnek-3 te Zahid ve Ramzan (2012) tarafından kullanılmış, UCI veri ambarından (http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Housing Erişim tarihi: 20.07.2013) alınan barınma sorunu verisi kullanılmıştır. Yanıt değişken (MEDV), Boston'daki kenar mahallede ev sahibi olup da kendi evinde ikamet edilen konutların medyan değeri hakkındadır. Zahid ve Ramzan (2012) dan farklı olarak, \$1000 olarak ölçülen yanıt değişken 2 farklı fiyat kategorisine bölünmüştür. İkili yanıt değişken y_i, eğer MEDV $\geq$ 17 ise 1, diğer hallerde 0 olarak belirlenmiştir. Açıklayıcı değişkenler, (CRIM) kasabadaki kişi başına suç oranı, (ZN) ikamet için ayrılmış arsa oranı, (INDUS) kasaba başına perakende ticaret dışındaki iş sahası oranı, (CHAS) Charles Nehri gösterge değişkeni (CHAS nehir sınırlanmışsa 1, diğer hallerde 0), (NOX) Nitrikoksit konsantrasyonu, (RM) ikamet eden kişi başına ortalama oda sayısı, (AGE) 1940 dan önce inşa edilmiş birimlerde mülk sahibi olanların oranı, (DIS) Boston'daki 5 adet işe alma merkezine ağırlıklı uzaklıkları, (RAD) merkezden yayılan otobanlara ulaşılabilirliğin endeksi, (TAX) \$10000 başına tam değer özel vergi oranı, (PTRATIO) kasaba başına öğrenci-öğretmen oranı, (B) 1000(Bk-0.63)2,

burada Bk, kasabadaki siyahilerin oranı, (LSTAT) düşük statüdeki nüfusun yüzdesidir. 506 tane ölçüm vardır, bunlardan 380 tanesinde MEDV≥17 dir.

Hesaplamalardan önce, açıklayıcı değişkenler standartlaştırılmıştır. Son iterasyondaki $X'\hat{V}_{ML}X$ in özdeğerleri, $\lambda_1 = 0.4203$, $\lambda_2 = 0.1222$ $\lambda_3 = 0.1177$, $\lambda_4 = 0.0686$, $\lambda_5 = 0.0435$, $\lambda_6 = 0.0361$, $\lambda_7 = 0.0339$, $\lambda_8 = 0.0212$, $\lambda_9 = 0.0181$, $\lambda_{10} = 0.0131$, $\lambda_{11} = 0.0090$ ve $\lambda_{12} = 0.0033$ bulunmuştur. Pratik yöntem olarak, tam iterasyonlu ML tahminleri elde edilirken yakınsama kriteri olarak 10^{-6} (sıfıra yeterince yakın) kullanılmıştır. Koşul sayısı $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min} \approx 128$ olarak çoklu iç ilişkinin varlığını gösteren bir seviyede hesaplanmıştır.

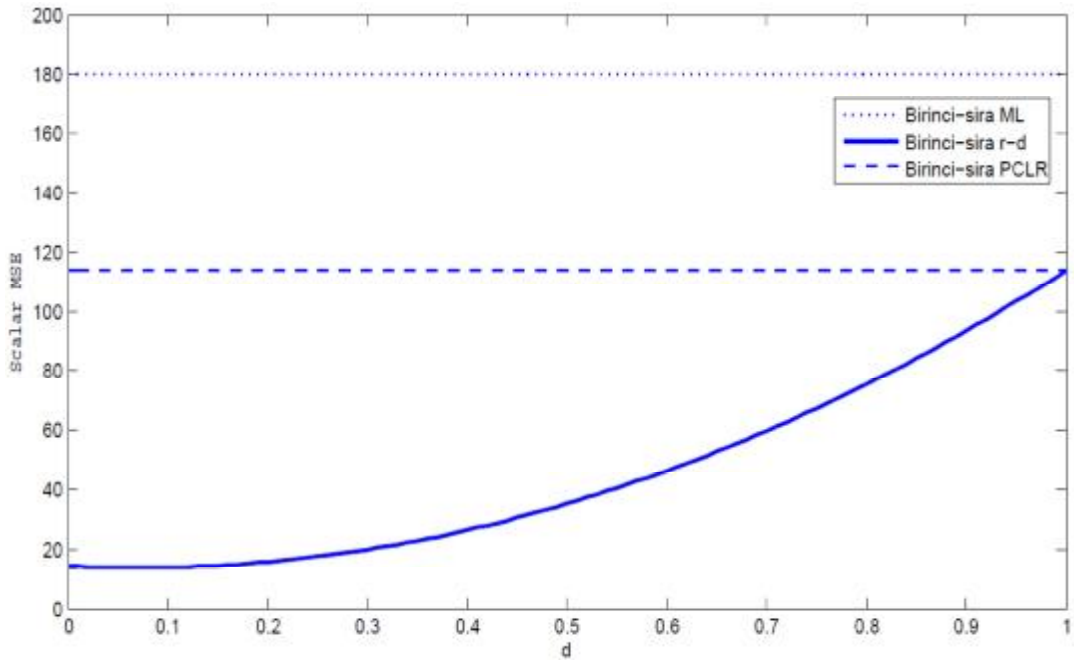
Toplam değişkenliğin % 90 ını hesaba katacak şekilde temel bileşenlerin sayısı $r = 7$ olarak elde edilmiştir. Yanlılık parametresi $\hat{d}_h = 0.6021$ olarak hesaplanmıştır.

Birinci-sıra $r - d$ sınıf, birinci-sıra ML ve birinci-sıra PCLR tahmin ediciler kullanılarak elde edilen tahmin edilen parametre değerleri ve bunlara ilişkin skaler MSE değerleri Çizelge 6.4 de verilmiştir. Burada, literatürde birinci-sıra Liu lojistik tahmin edici henüz bulunmadığından hesaplamalarda bu tahmin ediciye yer verilmemiştir. İlk olarak, tam iterasyonlu yaklaşım kullanılarak ML tahminleri elde edilmiştir. Skaler MSE değerleri hesaplanırken bilinmeyen parametre β nın yerine indirgenmiş modelin EKK tahminleri kullanılmıştır. Bunun yanı sıra EKK tahmini β nın başlangıç tahmini olarak da kullanılmıştır. Çizelge 6.4, ML tahminleri üzerinde çoklu iç ilişkinin etkilerini göstermektedir. ML tahminleri yanlı tahmin edicilerle kıyaslandığında işaret ve büyüklük açısından kararsız olduğu görülmektedir. Açıklayıcı değişkenlerden x_2, x_4, x_5, x_8 ve x_{10} nun işareti $\hat{\beta}_r^{(1)}(d)$ kullanıldığında değişmektedir. Birinci-sıra $r - d$ sınıf lojistik tahmin edici, PCLR ve ML tahmin edicilerden daha küçük bir skaler MSE değerine sahiptir.

Çizelge 6.4. Barınma Sorunu Verisi – Tahmin edilmiş katsayılar ve skaler MSE değerleri

	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}^{(1)}$	$\hat{\beta}_r^{(1)}$	$\hat{\beta}_r^{(1)}(\hat{d}_h)$
x_1	-130.4595	-7.7457	-9.9362	-6.4917
x_2	0.5109	-2.7862	-5.9215	-2.9921
x_3	12.5786	4.7343	19.5248	10.6928
x_4	-19.7760	-11.0952	2.1250	0.2121
x_5	-12.0166	-4.7488	15.2708	10.1889
x_6	-1.0594	-1.3544	-42.9296	-27.1958
x_7	-11.3249	-3.2937	-15.3871	-8.5331
x_8	51.4059	6.6189	-29.7281	-19.4023
x_9	-13.4685	-6.8088	-12.8207	-9.1261
x_{10}	-10.3607	-4.9449	1.0548	-0.0019
x_{11}	10.9948	6.5799	51.7684	32.4496
x_{12}	-36.5827	-21.4091	-51.3941	-32.4779
SMSE	708.4002	180.3103	113.8155	46.5719

Çizelge 6.4, $\hat{d}_h = 0.6021$ için tahmin edicilerin performanslarını özetlemektedir. Diğer d değerleri için $\hat{\beta}_r^{(1)}(\hat{d}_h)$ nın diğer tahmin ediciler üzerindeki üstünlüğüne göz atmak için Şekil 6.3 verilmiştir. Şekil 6.3 teki skaler MSE değerlerinin d ye karşın grafiği, d nin (0,1) aralığında birinci-sıra $r-d$ sınıf tahmin edicinin, ML, PCLR ve Liu lojistik tahmin ediciden daha küçük MSE değerine sahip olduğunu göstermektedir. d nin 1 den büyük olduğu durumda birinci-sıra PCLR tahmin edici, yaklaşık olarak 1.3 den büyük olduğu durumda ise birinci-sıra ML tahmin edici, birinci-sıra $r-d$ sınıf tahmin ediciden daha iyi sonuç vermektedir.



Şekil 6.3. d ye karşın tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

7. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Bu kısımda, tez çalışmasında önerilmiş olan birinci-sıra JRL, birinci-sıra $r-k$ ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicilerin farklı durumlar altında literatürdeki mevcut tahmin edicilere karşı performansları simülasyon çalışmaları ile incelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

İlk olarak, w_{ij} bağımsız standart normal yalancı-rasgele sayılar ve γ^2 ise iki değişken arasındaki korelasyon olmak üzere açıklayıcı değişkenler

$$x_{ij} = (1-\gamma^2)^{1/2} w_{ij} + \gamma w_{ip+1}, i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,p$$

şeklinde üretilmiştir (McDonald ve Galarneau, 1975).

Lineer regresyonda, Newhouse ve Oman (1971), eğer MSE β, σ^2 (hata teriminin varyansı için bilinmeyen parametre), k ve sabit açıklayıcı değişkenlerin bir fonksiyonu olarak kabul edilirse, $\beta'\beta = 1$ kısıtı altında, β, $X'X$ in en büyük özdeğerine ait normalleştirilmiş özvektörü olduğu zaman MSE nin minimize edildiğini söylemişlerdir. Buradan haraket ederek Schaefer (1986) lineer ve lojistik regresyonda güçlü benzerliklerin olduğunu belirtmiştir. Böylece lojistik regresyonda simülasyon tasarımına kısmen lineer regresyondaki simülasyonların sonuçlarıyla karar vermiştir.

Bu çalışmada Schaefer (1986) takip edilerek, her bir açıklayıcı değişken kümesi için, β parametre vektörü, birim ölçeklendirilmiş $X'X$ in en büyük özdeğerine ait özvektör alınarak seçilmiştir. Böylece, $\beta'\beta = 1$ sağlanmıştır. Aslında burada ideal olan $X'V_{ML}X$ matrisini kullanmaktır. Ancak, β elde edilmeden V_{ML} matrisi elde edilemeyeceğinden $X'X$ kullanılmaktadır (Schaefer, 1986). Bu yüzden, β yı oluşturmak için $X'X$ kullanılmıştır. Ayrıca, sabit terim sıfır olarak alınmıştır.

n tane gözlem için $\pi_i = \frac{1}{1+exp(-x_i'\beta)} = \frac{1}{1+exp(-\beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_q x_{iq})}$ parametreli bir Bernoulli dağılımından ikili yanıt değişken üretilmiştir.

Simülasyon çalışmalarında $\gamma^2 = 0.8, 0.9, 0.95$ ve 0.99 , örnek çapı $n = 500$ ve 1000; açıklayıcı değişken sayısı ise $p = 5$ ve 10 olacak şekilde alınmıştır. n, p ve γ^2 nin her bir seçiminde, deney 1000 kez tekrarlanmıştır.

Lojistik regresyon modelinde yapılan istatistiksel çıkarımlar asimptotik olarak elde edildiğinden küçük örnek çapları yerine büyük örnek çapları bu çalışmada tercih edilmiştir. Bunun yanı sıra, örnek çapının açıklayıcı değişken sayısına oranının (n/p) da bilgi matrisinin tersinin alınabilmesinde önemli bir yer tuttuğu gözlemlenmiştir.

7.1. Simülasyon Çalışması - 1

Bu bölümde, birinci-sıra ridge lojistik ve birinci-sıra JRL tahmin ediciyi karşılaştırmak için simülasyon çalışmaları tartışılmıştır.

Bu çalışmada regresyon katsayılarının tahmininde birinci-sıra yaklaşımı kullanılmıştır. Yanlılık parametresi, $\hat{k}_H$, $\hat{k}_G$ ve $\hat{k}_M$ olarak seçilmiştir.

Daha sonra, β nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için ABIAS ve tahmin edilmiş MSE ler (EMSE) sırasıyla

$$ABIAS(\tilde{\beta}) = \sum_{j=1}^{p} \left|\bar{\tilde{\beta}}_j - \beta_j\right|, \bar{\tilde{\beta}}_j = \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000} \tilde{\beta}_{j(r)}$$

ve

$$\begin{aligned} EMSE(\tilde{\beta}) &= \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}\left(\tilde{\beta}_{(r)} - \beta\right)'\left(\tilde{\beta}_{(r)} - \beta\right) \\ &= \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}\sum_{j=1}^{p}\left(\tilde{\beta}_{j(r)} - \beta_j\right)^2 \end{aligned} \qquad (7.1.)$$

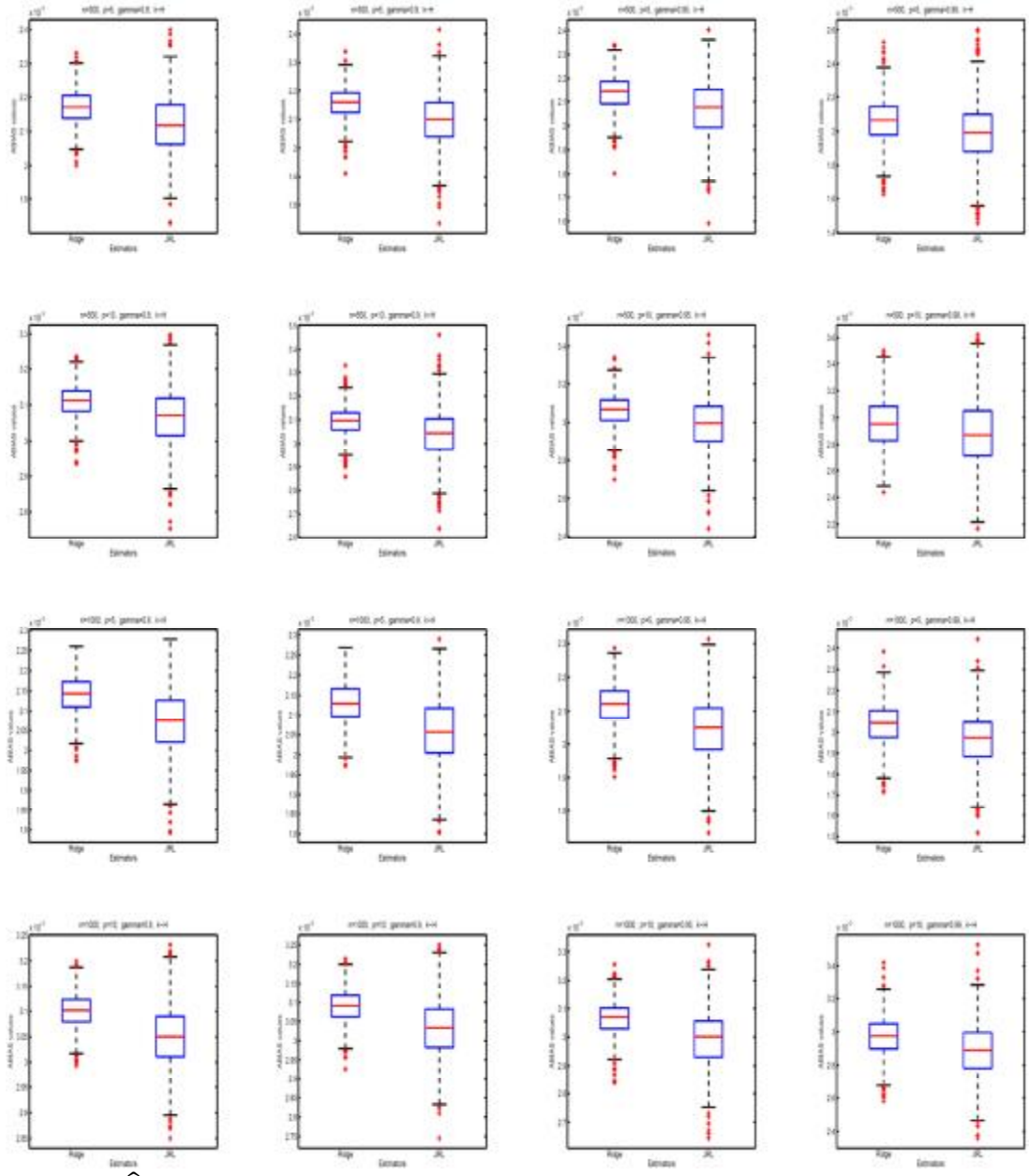
şeklinde elde edilmiştir. Burada, alt indis r, r -inci tekrar ve $\tilde{\beta}_{j(r)}$, r -inci tekrardaki β_j nin tahminini göstermektedir.

Simülasyon sonuçları Şekil 7.1 - 7.6 de özetlenmiştir. Mutlak yanlılıkla ilgili Şekil 7.1 - 7.3 için yorumlar aşağıdaki gibidir:

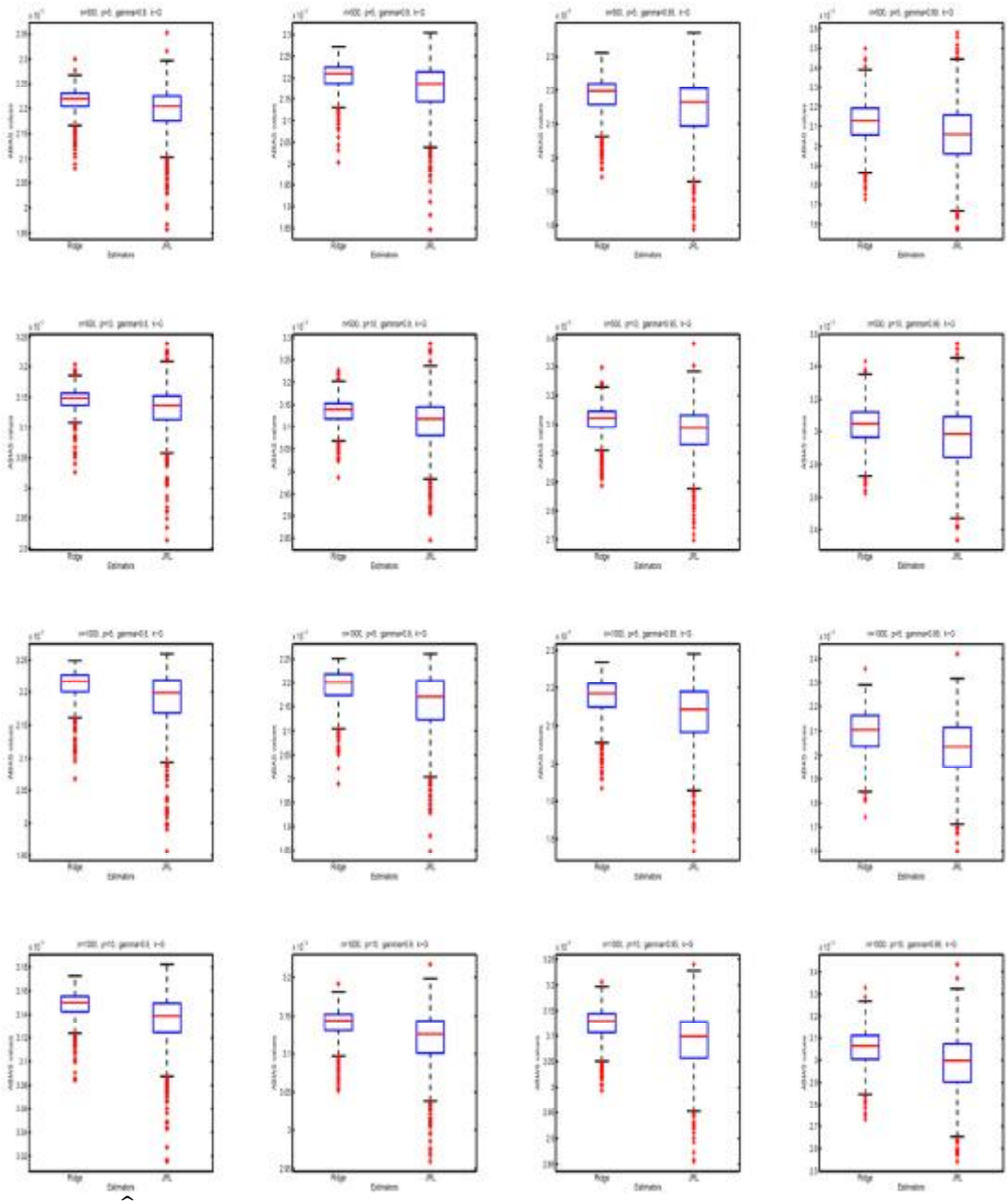
1. Bütün durumlarda, birinci-sıra JRL tahmin edici, mutlak yanlılık kriterine göre birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden üstündür.
2. Mutlak yanlılık kriterine göre, $\hat{k}_H$ değerinin kullanımında, birinci-sıra JRL tahmin edicinin birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciye göre üstünlüğü daha açıktır.
3. Örnek çapı arttıkça, mutlak yanlılık kriterine göre birinci-sıra JRL tahmin edicinin birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciye göre üstünlüğü daha da belirginleşmektedir.

   Tahmin edilmiş MSE ile ilgili Şekil 7.4 - 7.6 için yorumlar:

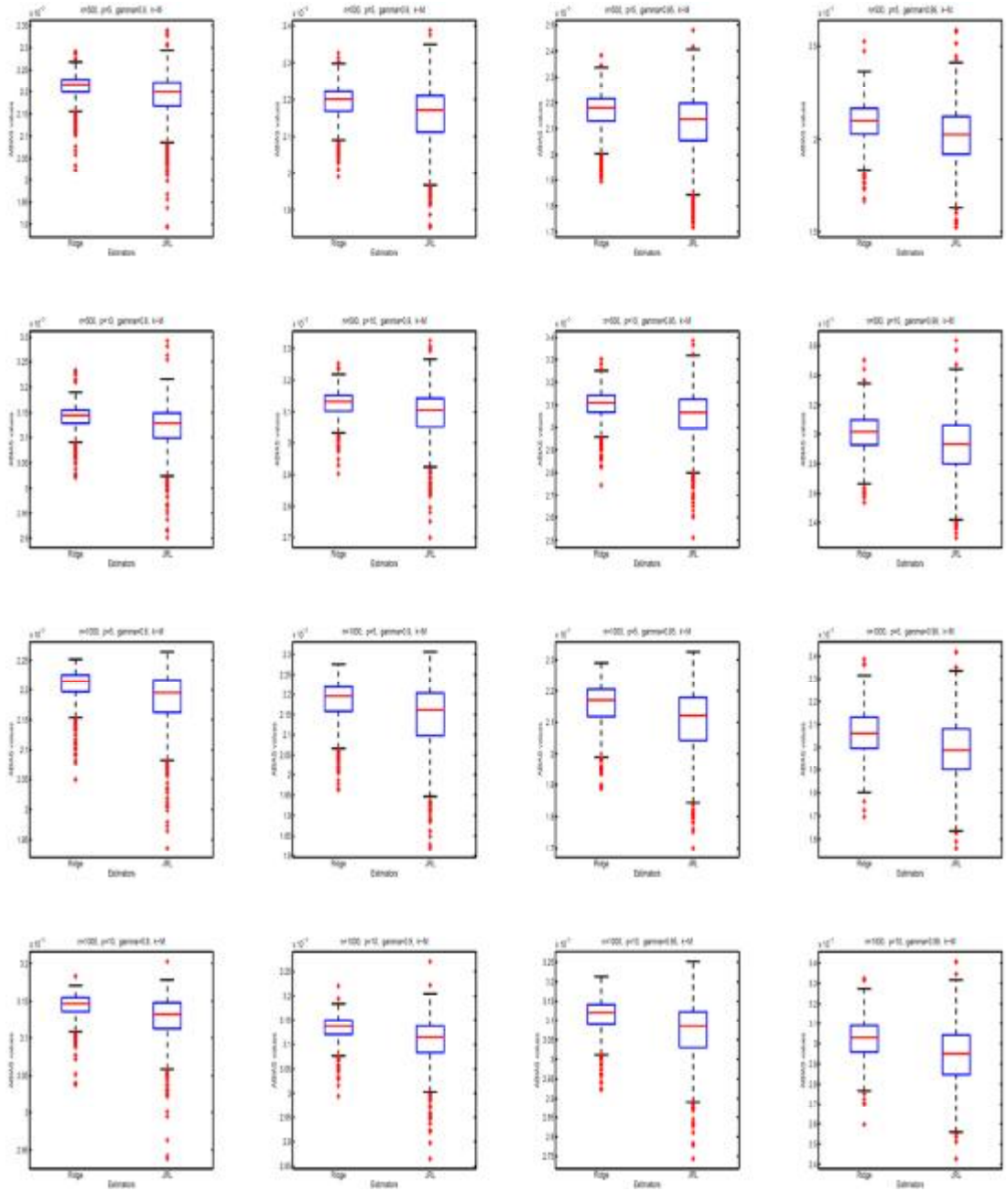
1. Yaklaşık olarak tüm durumlarda, birinci-sıra JRL ve ridge lojistik tahmin ediciler MSE kriterine göre birinci-sıra ML den üstündür. Ancak, birinci-sıra ML tahmin edicinin birinci-sıra JRL tahmin ediciye göre daha baskın olduğu düşük iç ilişkili, yüksek örnek çaplı ve düşük açıklayıcı değişken sayısına sahip birkaç durum da bulunmaktadır.
2. Çoklu iç ilişki derecesi arttıkça, MSE kriteri açısından birinci-sıra JRL tahmin edicinin birinci-sıra ML tahmin ediciye göre üstünlüğü daha da belirginleşmektedir.
3. Bütün durumlarda, birinci-sıra JRL tahmin edici MSE kriterine göre birinci-sıra ridge tahmin ediciden az bir oranda üstündür.



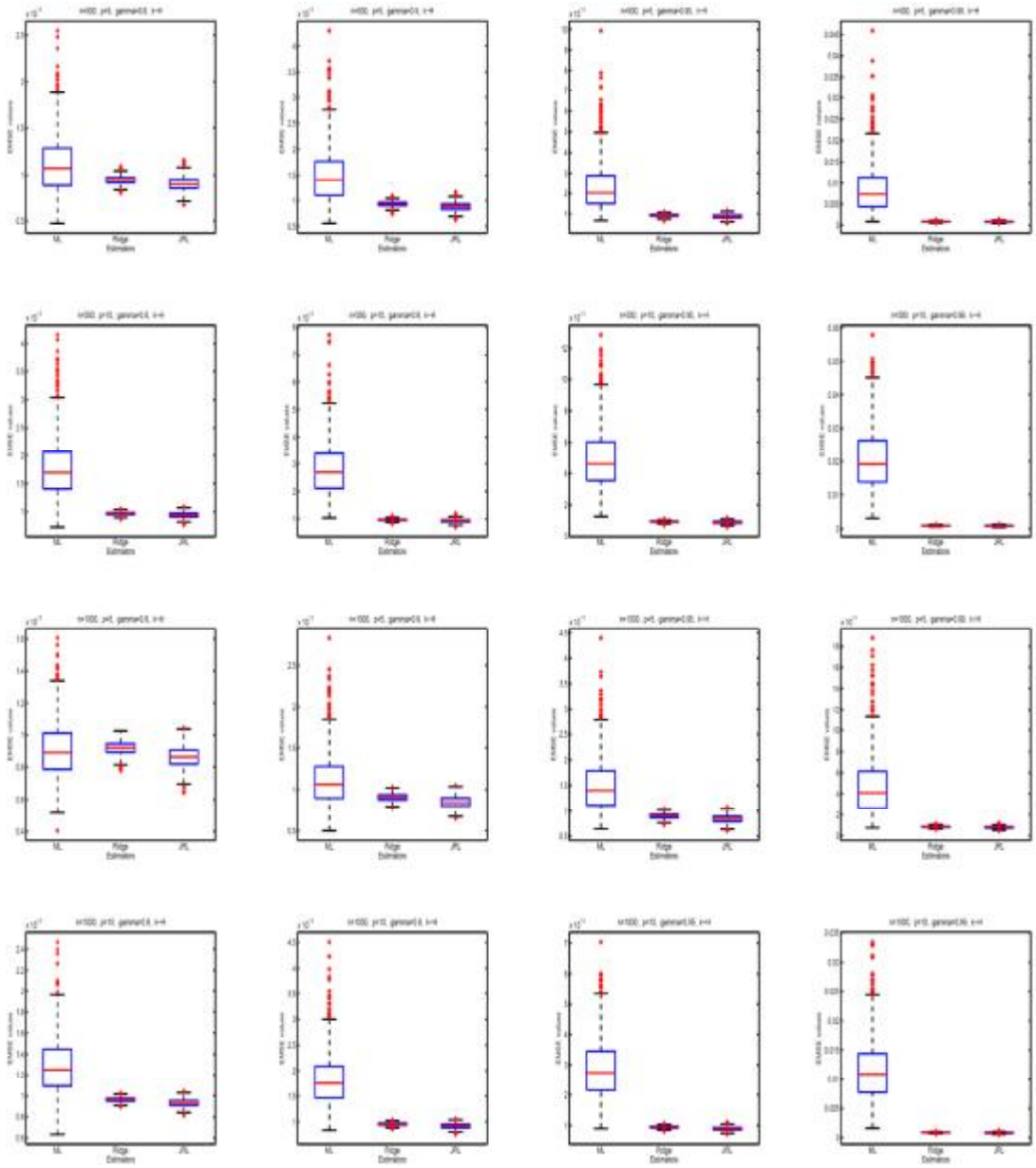
Şekil 7.1. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri



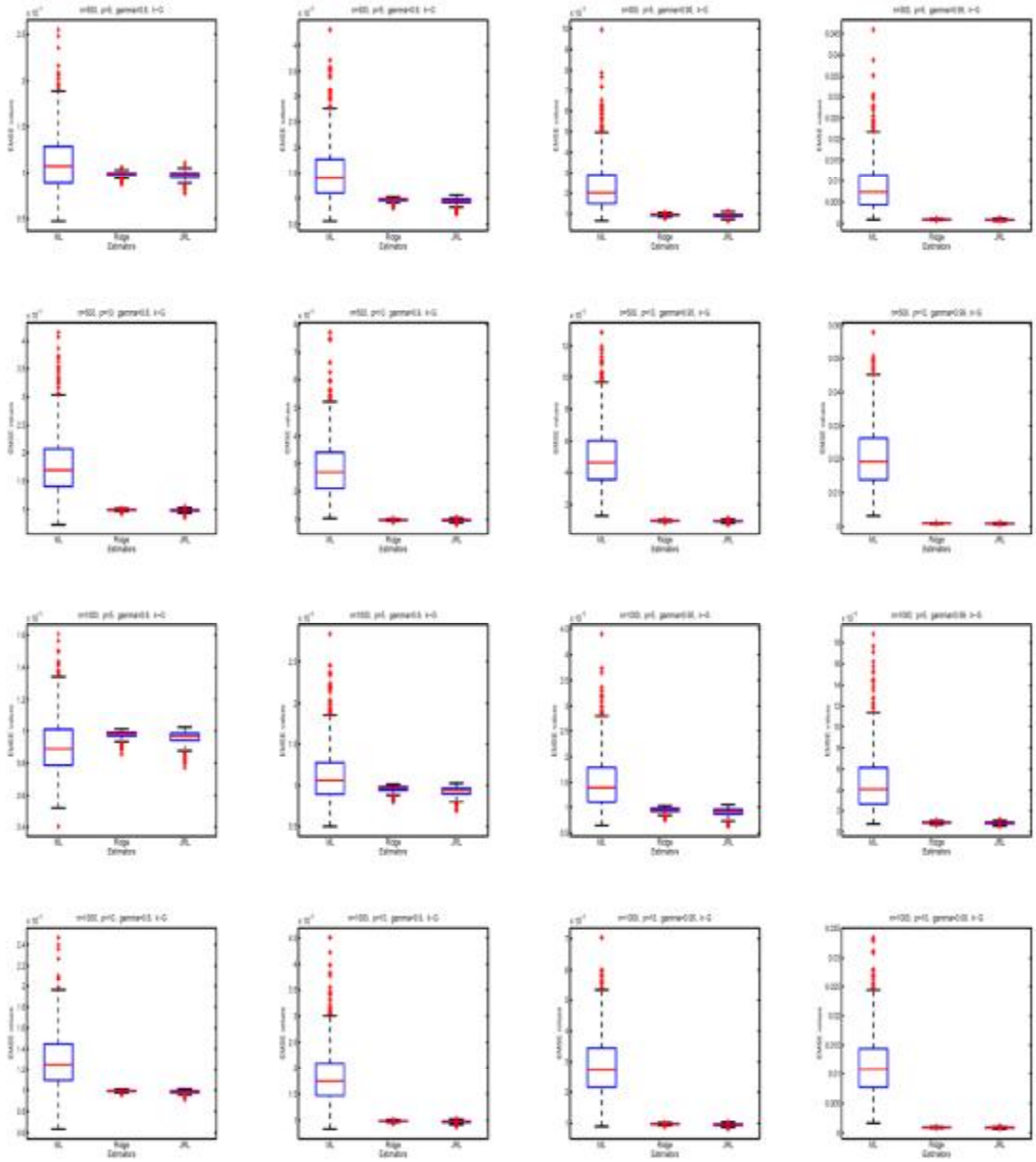
Şekil 7.2. $\hat{k}_G$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri



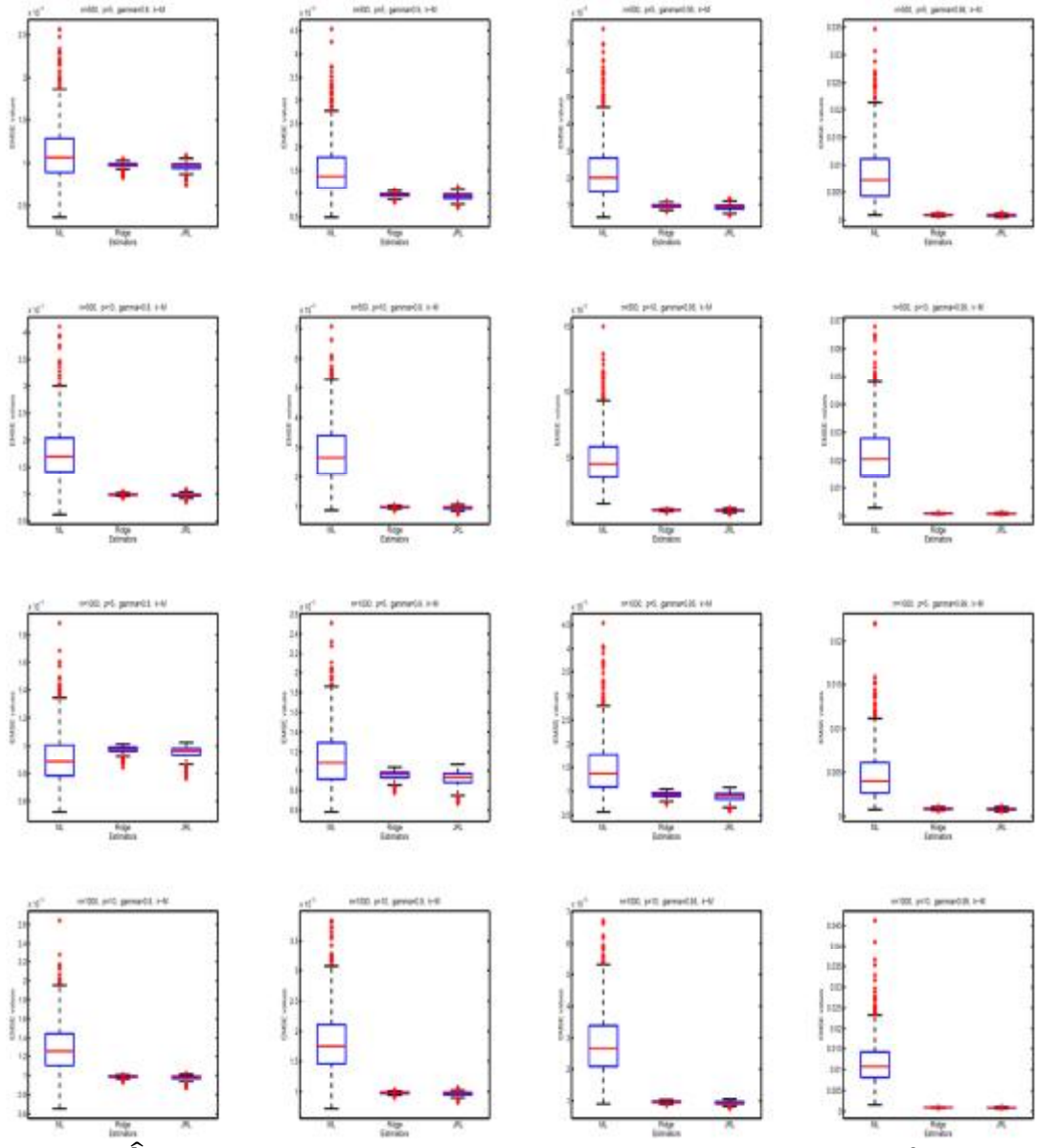
Şekil 7.3. $\hat{k}_M$ kullanımında tahmin edicilerin ABIAS değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.4. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.5. $\hat{k}_G$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.6. $\hat{k}_M$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE değerlerinin kutu grafikleri

7.2. Simülasyon Çalışması - 2

Bu bölümde, simülasyon sonuçları birinci-sıra ML, birinci-sıra PCLR, birinci-sıra ridge ve birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicileri karşılaştrmak için kullanılmıştır.

Temel bileşenlerin seçimi için ise "toplam değişkenliğin yüzdesi" $PTV = 0.90$ olarak alınmıştır. Yanlılık parametresi k ise $\hat{k}_a$ ve $\hat{k}_b$ olarak seçilmiştir.

Birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik modelde regresyon katsayılarının tahmin edilmesinde, indirgenmiş modelin tam iterasyonlu ML tahmin edicisi başlangıç noktası olarak kullanılmış ve yakınsama kriteri olarak 1×10^{-6} belirlenmiştir. İndirgenmiş modelin tam iterasyonlu ML tahmin edicisi elde edildikten sonra, bu tahmin, $r-k$ sınıf lojistik tahmin ediciyi hesaplamak için başlangıç noktası olarak kullanılmıştır.

Birinci-sıra ML ve birinci-sıra ridge lojistik tahmin edicilerde ise başlangıç değeri olarak EKK tahminleri, PCLR de ise indirgenmiş modele ait EKK tahminleri kullanılmştır.

β nın bir tahmini $\tilde{\beta}$ için tahmin edilmiş MSE ler (EMSE) Eşitlik (7.1) de verildiği şekilde ve toplam ön-tahmin MSE (PMSE),

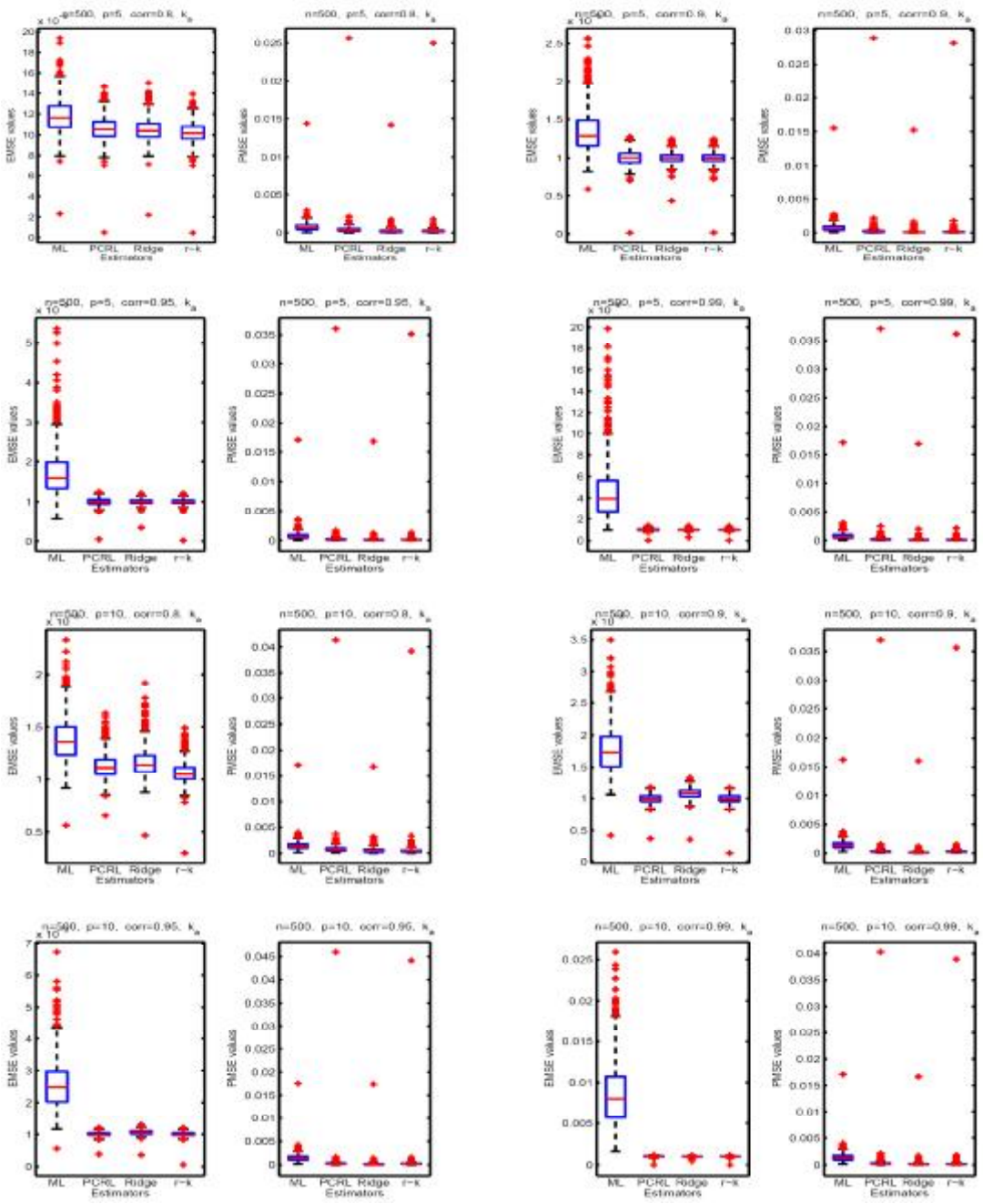
$$PMSE(\tilde{\beta}) = \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}\sum_{j=1}^{p}\left(\pi_{i(r)}(\tilde{\beta}) - \pi_i(\tilde{\beta})\right)^2 \qquad (7.2.)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

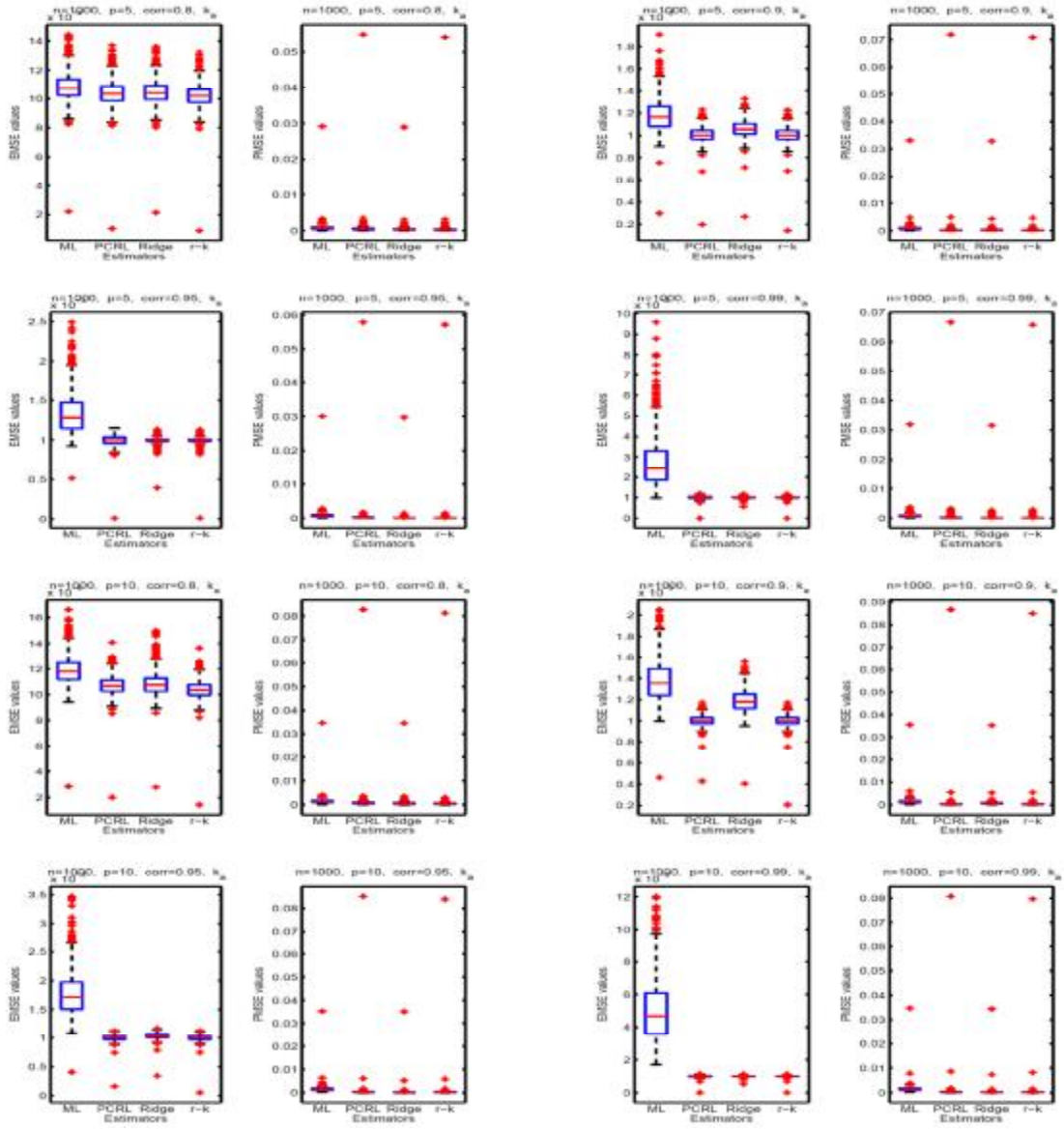
Simülasyon sonuçları Şekil 7.7 - 7.10 da özetlenmiştir. Hem EMSE hem de PMSE değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Tüm durumlarda, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici, birinci-sıra ML, PCLR ve birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciden daha iyidir.
2. İç ilişki arttıkça, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin, birinci-sıra ML tahmin ediciye üstünlüğü daha belirginleşmektedir.
3. Örnek çapındaki değişimin etkisi konusunda yeterli kanıt bulunamamıştır.

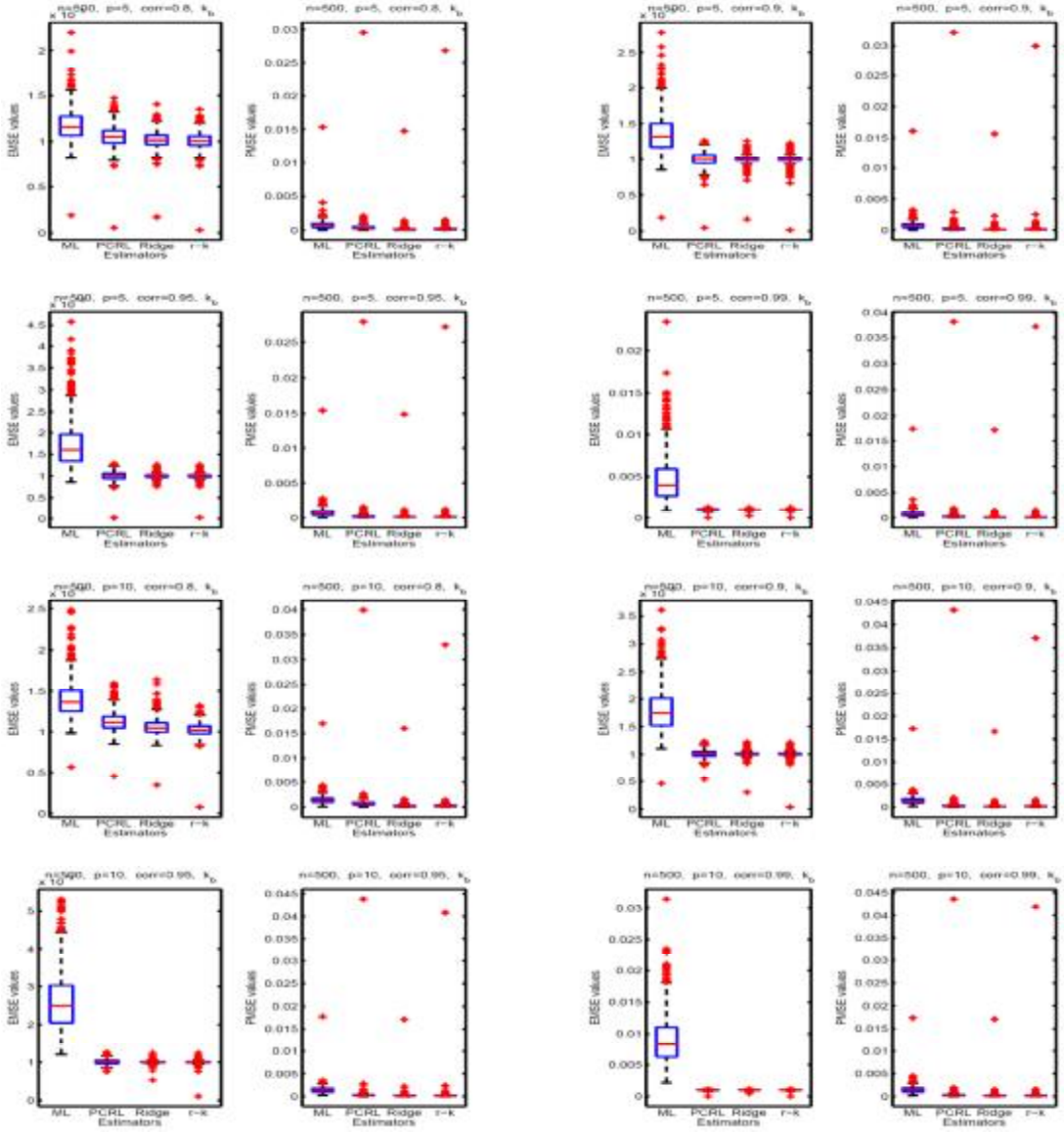
4. Açıklayıcı değişken sayısı arttıkça, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin, birinci-sıra ML tahmin ediciye üstünlüğü artmaktadır. Yüksek iç ilişki ve örnek çapı değerlerinde ise, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin üstünlüğü daha da belirgin görülmektedir.
5. $\hat{k}_a$ ve $\hat{k}_b$ kullanımı benzer sonuçlar üretmiştir.



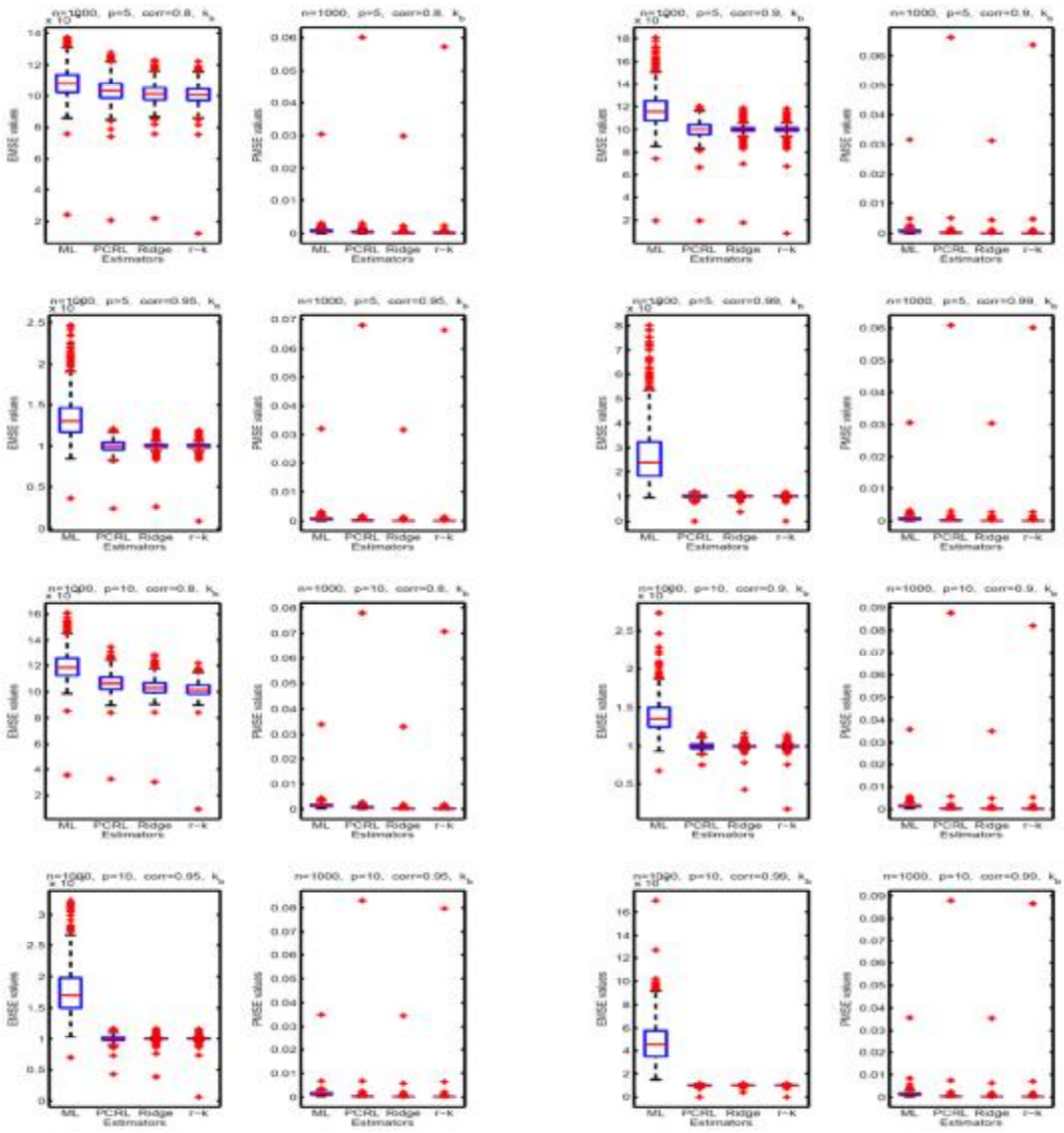
Şekil 7.7. $\hat{k}_a$ kullanımında ve $n = 500$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.8. $\hat{k}_a$ kullanımında ve $n = 1000$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.9. $\hat{k}_b$ kullanımında ve $n = 500$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri



Şekil 7.10. $\hat{k}_b$ kullanımında ve $n = 1000$ iken EMSE ve PMSE değerlerinin kutu grafikleri

7.3. Simülasyon Çalışması - 3

Bu bölümde, simülasyon sonuçlarını ML, PCLR, Liu lojistik ve birinci-sıra $r-d$ sınıf lojistik tahmin ediciyi karşılaştrmak için kullanacağız.

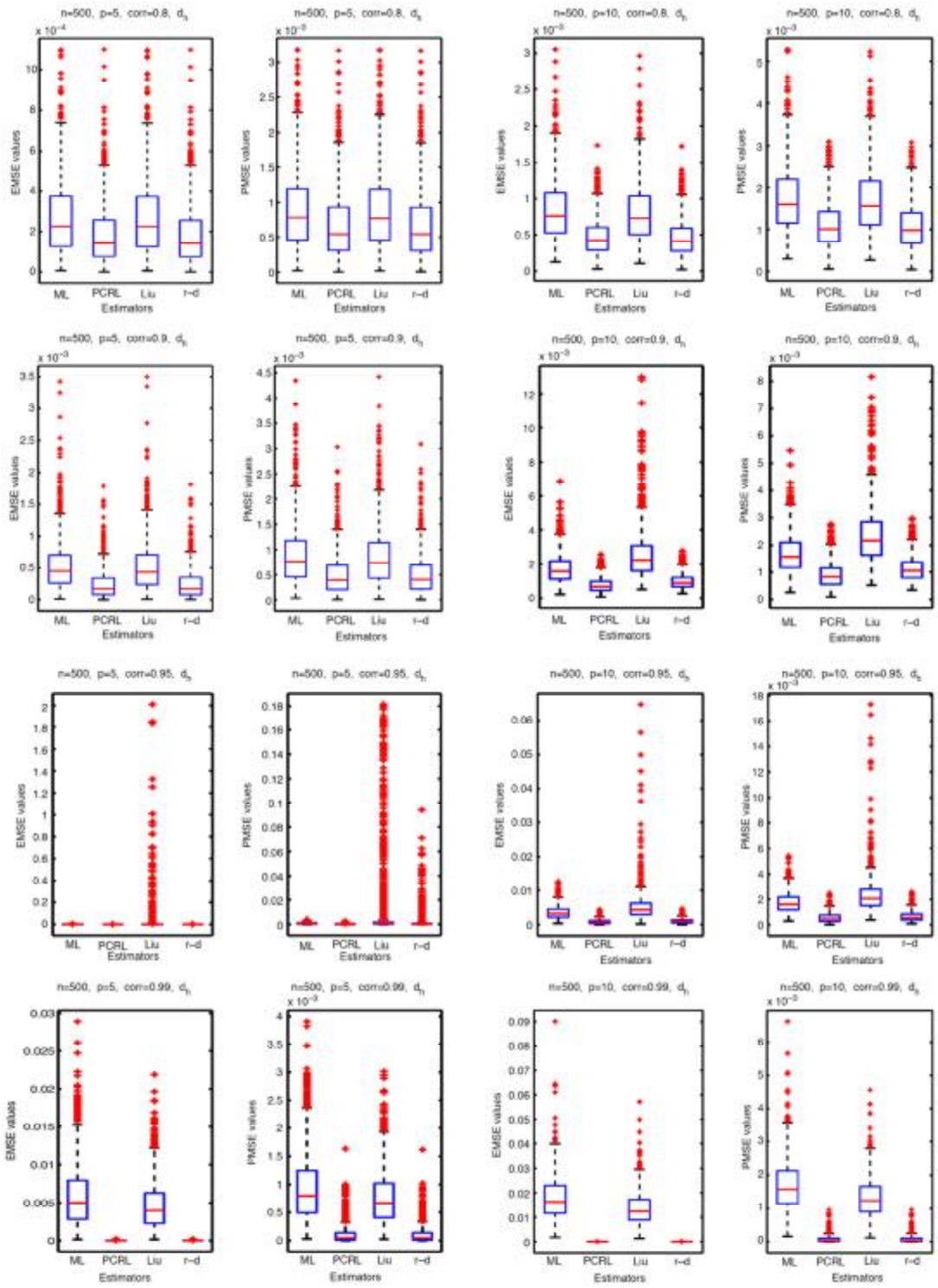
Temel bileşenlerin seçimi için ise "toplam değişkenliğin yüzdesi" PTV, 0.80 ve 0.90 olarak seçilmiştir. Yanlılık parametresi d ise $\hat{d}_h$ olarak seçilmiştir.

Regresyon katsayılarının tahmin edilmesinde, indirgenmiş modelin tam iterasyonlu ML tahmin edicisi başlangıç noktası olarak kullanılmış ve yakınsama kriteri olarak 1×10^{-6} belirlenmiştir. İndirgenmiş modelin tam iterasyonlu ML tahmin edicisi elde edildikten sonra, bu tahmin, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin ediciyi hesaplamak için başlangıç noktası olarak kullanılmıştır.

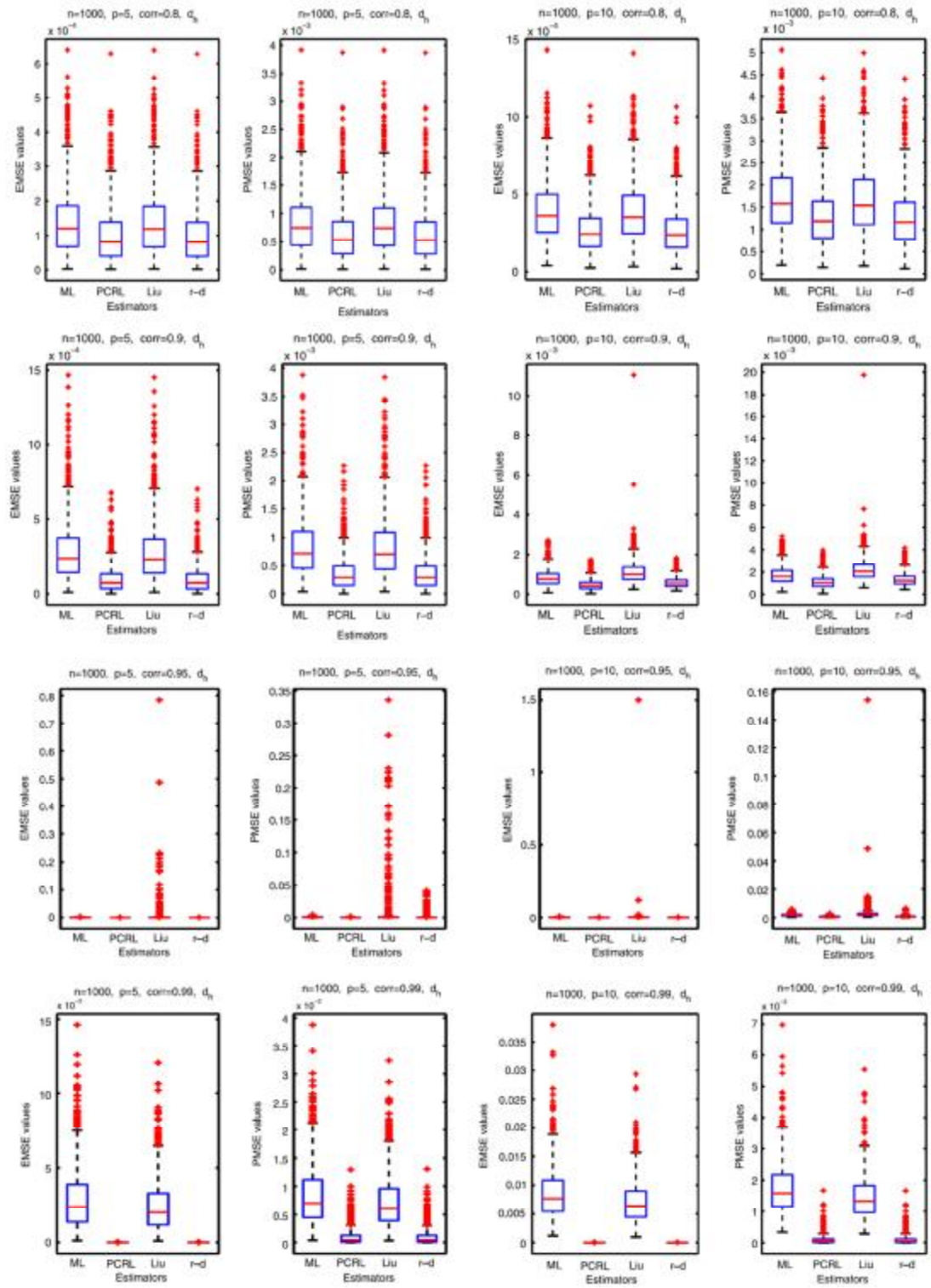
β nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için tahmin edilmiş MSE ler (EMSE) ve ön-tahmin edilmiş MSE ler (PMSE) sırasıyla Eşitlik (7.1) ve (7.2) de verildiği şekilde hesaplanmıştır.

Simülasyon sonuçları Şekil 7.11 - 7.14 de özetlenmiştir. Bu şekillerden yapılan ana çıkarımlar hem EMSE hem de PMSE için geçerlidir:

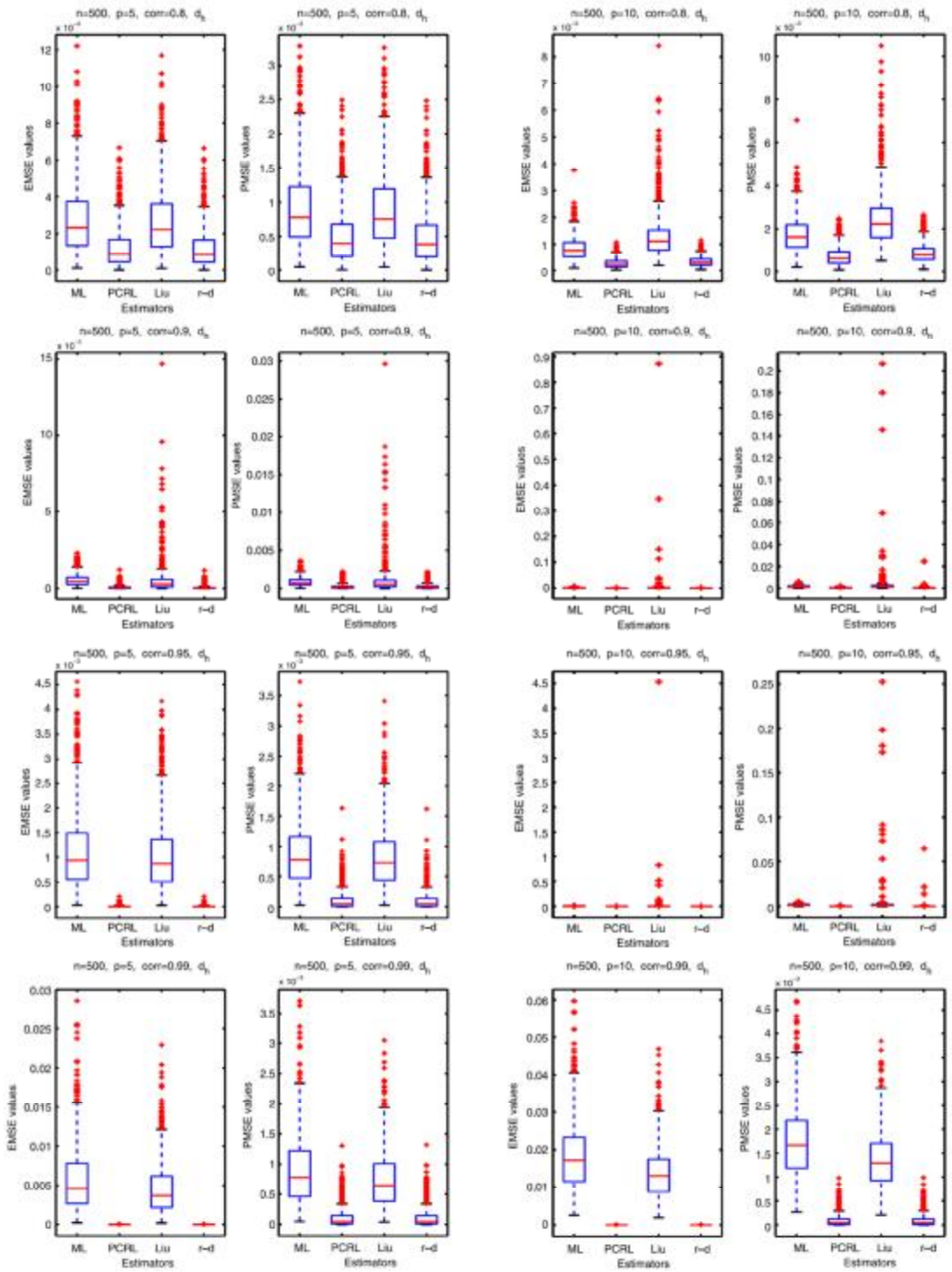
1. Tüm durumlarda, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici, ML ve Liu lojistik tahmin ediciden daha iyidir. Ancak, $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicinin PCLR üzerindeki üstünlüğü konusunda herhangi bir sonuca varılamamıştır.
2. İç ilişki arttıkça, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicinin, ML ve Liu lojistik tahmin ediciye üstünlüğü daha belirginleşmektedir.
3. Örnek çapı arttıkça, tahmin edicilerin EMSE ve PMSE değerlerinin medyan ve aralık (range) değerleri küçülmektedir.
4. Açıklayıcı değişken sayısı arttıkça, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicinin, ML ve Liu lojistik tahmin ediciye üstünlüğü artmaktadır. Yüksek iç ilişki ve örnek çapı değerlerinde ise, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicinin üstünlüğü daha da belirgin görülmektedir.
5. PTV eşik değeri 0.90 dan 0.80 e düşerken, PCLR ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin edicilere ait kutu grafiklerinin genişliği $\gamma^2 = 0.8, 0.9$ iken düşmektedir. Fakat, PTV eşik değerinin $\gamma^2 = 0.95, 0.99$ deki etkisine yönelik kanıt yoktur.



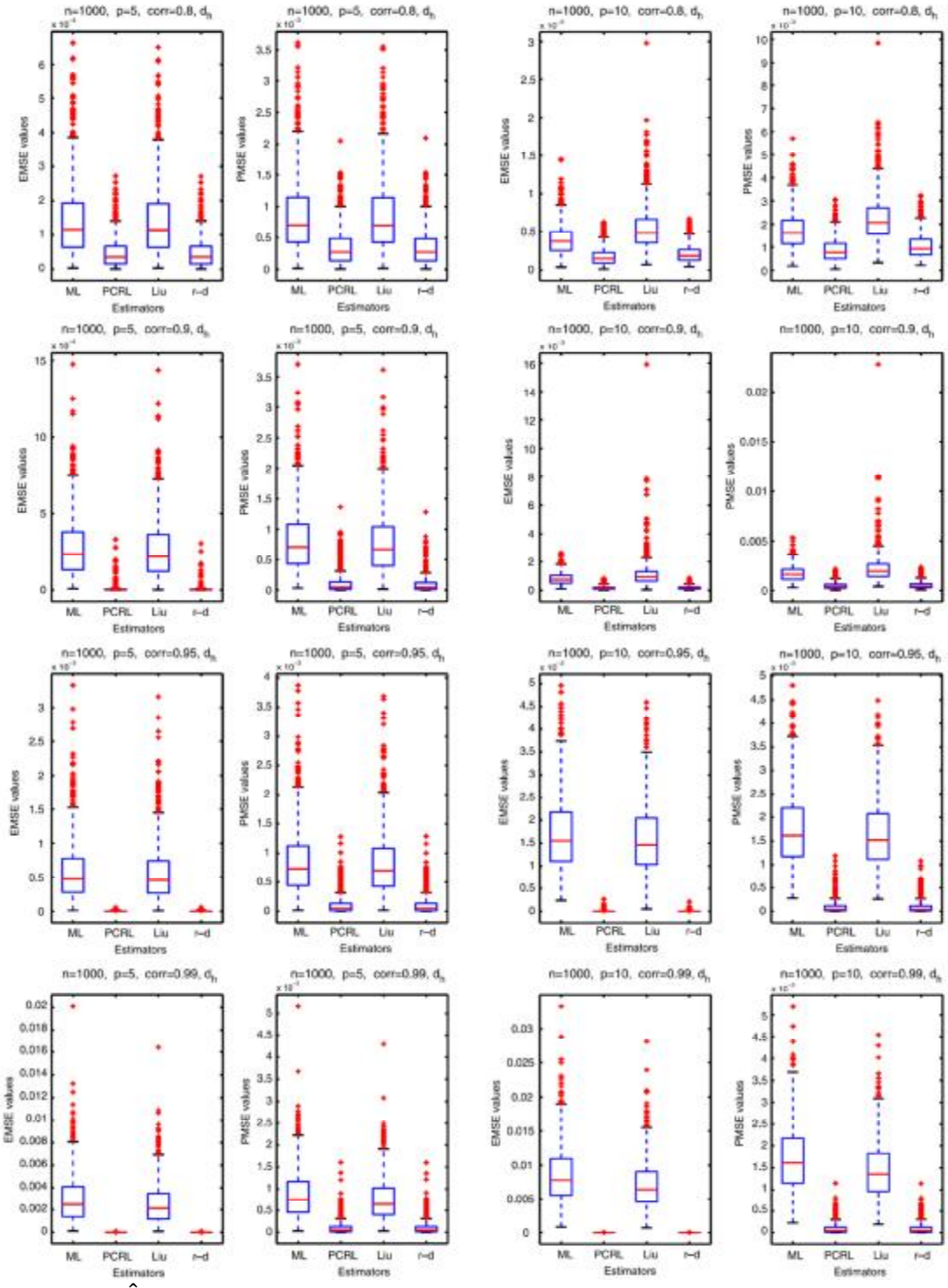
Şekil 7.11. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 500, p = 5, 10,$ $PTV = 0.90$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri



Şekil 7.12. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 1000, p = 5, 10,$ $PTV = 0.90$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri



Şekil 7.13. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 500, p = 5, 10,\ PTV = 0.80$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri



Şekil 7.14. $\hat{d}_h$ kullanımında ve $n = 1000, p = 5, 10,\ PTV = 0.80$ iken tahmin edicilerin EMSE ve PMSE leri için kutu grafikleri

7.4. Simülasyon Çalışması - 4

Bu bölümde, birinci-sıra jackknife ridge, birinci-sıra $r-d$ sınıf ve birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin ediciler ile birinci-sıra ML tahmin edici EMSE kriterine göre karşılaştırılmıştır.

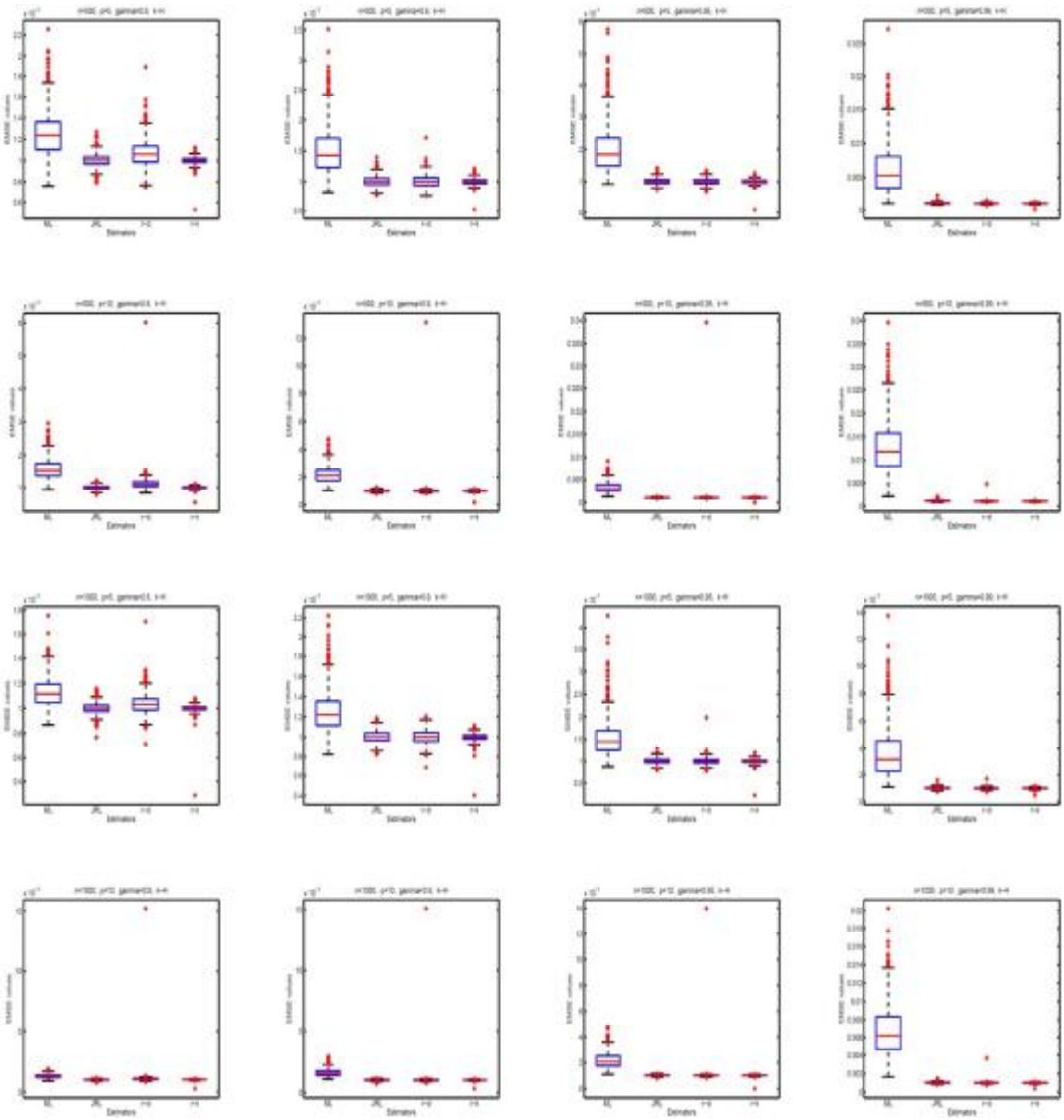
PTV = 0.90 olarak seçilmiştir. Yanlılık parametresi olarak, $\hat{k}_H$ ve $\hat{k}_b$ kullanılırken, Liu yanlılık parametresi olarak $\hat{d}_h$ kullanılmıştır.

Birinci-sıra $r-d$ ve $r-k$ sınıf lojistik modelde regresyon katsayılarının tahmin edilmesinde, indirgenmiş modelin EKK tahminleri kullanılırken, birinci-sıra ML ve birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edicilerde ise başlangıç değeri olarak EKK tahminleri alınmıştır.

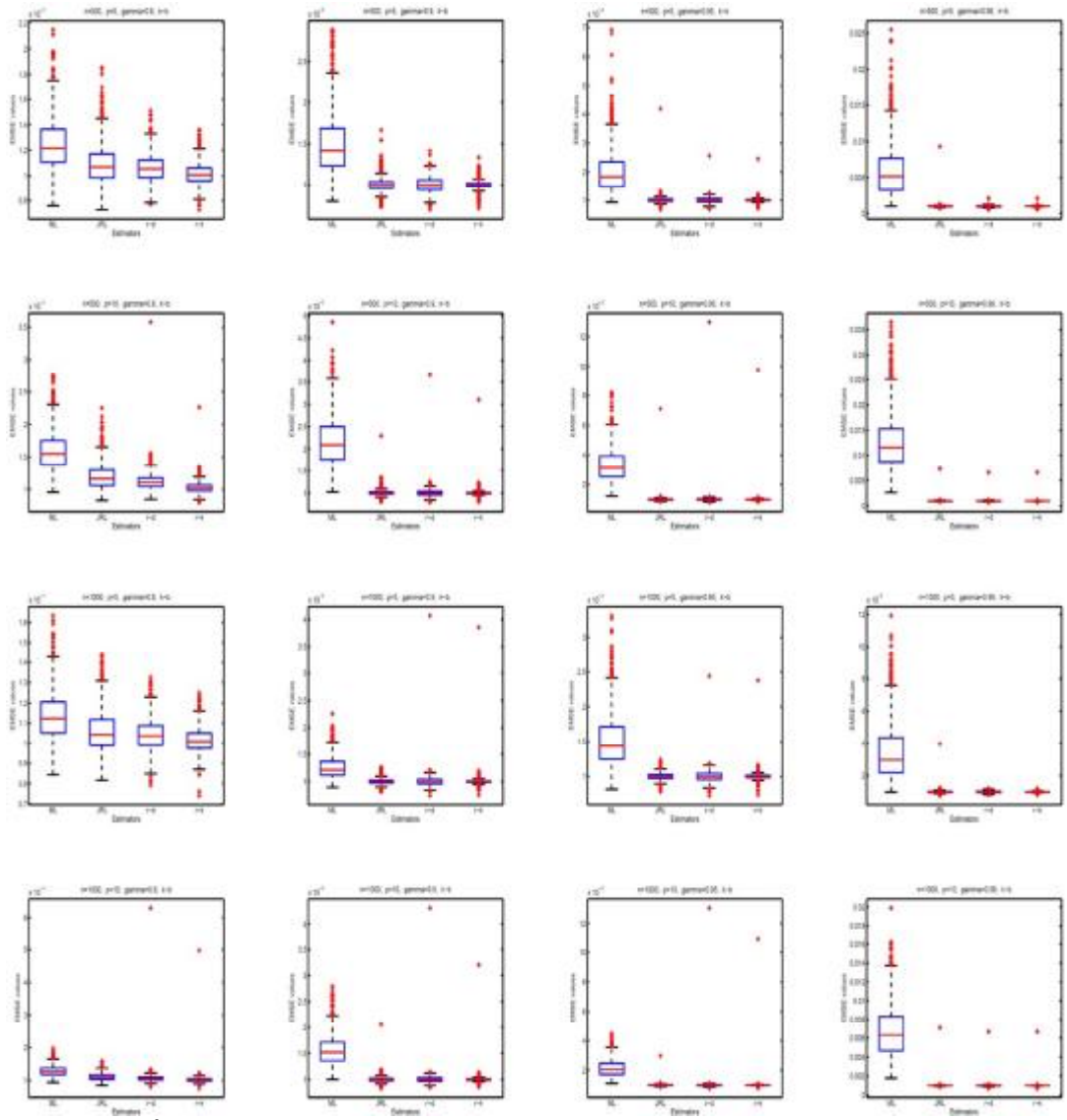
β nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için tahmin edilmiş MSE ler (EMSE) Eşitlik (7.1) de verildiği şekilde hesaplanmıştır.

Simülasyon sonuçları Şekil 7.15 ve 7.16 da özetlenmiştir:

1. Tüm durumlarda, birinci-sıra jackknife ridge, birinci-sıra $r-d$ sınıf ve birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin ediciler, birinci-sıra ML tahmin ediciden EMSE kriterine göre daha iyi performans vermiştir.
2. İç ilişki arttıkça, birinci-sıra jackknife ridge, birinci-sıra $r-d$ sınıf ve birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicilerin, birinci sıra ML tahmin ediciye üstünlüğü daha belirginleşmektedir.
3. $\hat{k}_H$ kullanımında ve düşük iç ilişki seviyesinde en iyi performansı birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici verirken birinci-sıra $r-d$ sınıf ve birinci-sıra ridge jackknife lojistik tahmin edici birbirine yakın sonuç vermiştir. $\hat{k}_b$ kullanımında ve düşük iç ilişki seviyesinde ise yine en iyi performansı birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edici verirken birinci-sıra $r-d$ sınıf lojistik tahmin edici, birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edici EMSE kriterine göre daha iyi sonuç vermiştir.



Şekil 7.15. $\hat{k}_H$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE leri için kutu grafikleri



Şekil 7.16. $\hat{k}_b$ kullanımında tahmin edicilerin EMSE leri için kutu grafikleri

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lojistik regresyon modelinde çoklu iç ilişki problemi son yıllarda araştırmacıların çokça dikkatini çekmektedir. Bu çalışmada da lojistik regresyon modelinde çoklu iç ilişki problemi incelenmiştir. İlk olarak, lojistik regresyonun kullanımına neden ihtiyaç duyulduğundan ve kullanım alanlarından bahsedildikten sonra kullanım alanlarına ilişkin örnek çalışmalar ve ML tahmin edici hakkında bilgi verilmiştir. Lojistik regreson modelinde çoklu iç ilişkinin var olması durumunda ML tahmin ediciye alternatif olarak önerilen literatürdeki mevcut tahmin ediciler incelenmiştir.

Bu çalışmada ise, hem ML hem de literatürdeki mevcut yanlı tahmin edicilere alternatif olabilecek birinci-sıra jackknife ridge lojistik, birinci-sıra $r-k$ ve $r-d$ sınıf lojistik tahmin ediciler ve bu tahmin ediciler için yanlılık parametresi seçim yöntemleri de ileri sürülmüştür. İleri sürülen bu tahmin ediciler, hem ML hem de mevcut yanlı tahmin edicilerle sayısal örnekler (Gelir ve Yaşam Koşulları Araştırması, Kanser Gerileme ve Barınma Sorunu veri kümeleri) ve simülasyon çalışmaları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, birinci-sıra jackknife ridge lojistik tahmin edicinin, birinci-sıra ML ve birinci-sıra ridge lojistik tahmin edicilerden matris ve skaler değerli MSE kriterine göre üstün olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Buna ek olarak, birinci-sıra $r-k$ sınıf lojistik tahmin edicinin, birinci-sıra ML, birinci-sıra ridge ve temel bileşenler lojistik tahmin ediciye göre skaler değerli MSE açısından üstün olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Simülasyon çalışmalarında elde edilen sonuçlara göre, bu çalışmada önerilen üç tahmin edici, hem birinci-sıra ML hem de literatürdeki mevcut tahmin edicilerden MSE kriterine göre daha iyi sonuç vermiştir. Önerilen üç tahmin edicinin birinci-sıra ML tahmin ediciye üstünlüğü çoklu iç ilişki artıkça belirginleşmektedir. Yanlılık parametrelerinin seçiminin de sonuçları etkilediği gözlemlenmiştir. Birinci-sıra JRL tahmin edicinin mutlak yanlılık kriterine göre birinci-sıra ridge lojistik tahmin ediciyi domine ettiği tespit edilmiştir.

Sonuç olarak, bu karşılaştırmalarda elde edilen sonuçlara göre ileri sürülen tahmin ediciler, ML ve mevcut yanlı tahmin edicilere alternatif olarak

kullanılabilirler. Çünkü yapılan çalışmalar, önerilen tahmin edicilerle çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltan daha kararlı parametre tahminleri ve daha küçük skaler MSE değerleri elde edildiğini göstermiştir. Ancak unutulmamalıdır ki, ileri sürülen tahmin edicilerin performansı yanlılık parametrelerine (k ve d), örnek çapına (n), açıklayıcı değişken sayısına (p) ve çoklu iç ilişki derecesine (γ^2) bağlıdır.

Üzerinde çalışılmayı bekleyen, çoklu iç ilişkinin olması durumnda alternatif tahmin yöntemleri, değişken seçim yöntemleri ve etkin gözlem teşhis yöntemleri gibi birçok konu bulunmaktadır.

KAYNAKLAR

AGUILERA, A. M., ESCABIAS, M., and VALDERRAMA, M. J., 2006. Using Principal Components for Estimating Logistic Regression with High-Dimensional Multicollinear Data. Computational Statistics & Data Analysis, 50: 1905-1924.

ALBERT, A., ANDERSON, J. A., 1984. On the Existence of Maximum Likelihood Estimates in Logistic Regression Models. Biometrika, 71(1), 1-10.

ANDERSON, J. A., RICHARDSON, S. C., 1979. Logistic Discrimination and Bias Correction in Maximum Likelihood Estimation. Technometrics, 21: 71-78.

BARKER, L., BROWN, C., 2001. Logistic Regression when Binary Predictor Variables are Highly Correlated. Statistics in Medicine, 20: 1431-1442.

BAYE, M. R., PARKER, F., 1984. Combining Ridge and Principal Component Regression: A Money Demand İllustration. Communications in Statistics - Theory and Methods, 13(2): 197-205.

BELSLEY, D. A., KUH, E., and WELSCH, R. E., 1980. Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity. John Wiley and Sons, New York, 292p.

BENKOVSKIS, K., FADEJEVA, L., and KALNBERZINA, K., 2012. Price Setting Behaviour in Latvia: Econometric Evidence From CPI Micro Data. Economic Modelling, 29(6): 2115-2124.

BERKSON, J., 1944. Application of the Logistic Function to Bio-Assay. Journal of the American Statistical Association, 39: 357-365.

BIELZA, C., ROBLES, V., and LARRAÑAGA, P., 2011. Regularized Logistic Regression without a Penalty Term: An Application to Cancer Classification with Microarray Data. Expert Systems with Applications, 38(5): 5110-5118.

BULL, S. B., HAUCK, W. W., and GREENWOOD, C. M. T., 1994. Two-Step Jackknife Bias Reduction for Logistic Regression MLEs. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 23(1): 59-88.

BULL, S. B., SHELLEY B., GREENWOOD, C. M. T., and HAUCK, W. W., 1997. Jackknife Bias Reduction for Polychotomous Logistic Regression. Statistics in Medicine, 16(5): 545-560.

CANBAY, T., SELİM, S., 2010. Türkiye'de Hanehalkı Yoksulluğu. Ege Akademik Bakış, 10(2): 627-649.

COX, D. R., 1958. The Regression Analysis of Binary Sequences (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society B, 20(2): 215-242.

DOBSON, A. J., BARNETT, A. G., 2008. An Introduction to Generalized Linear Models, Third Edition. Chapmann and Hall/CRC Press, New York, 320p.

EUROSTAT, 2014. Living Conditions in Europe. Publication Office of the European Union, Belgium, 129p.

FAREBROTHER, R. W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 38(3): 248-250.

FAREWELL, V. T., 1978. Jackknife Estimation with Structured Data. Biometrika, 65: 444-447.

FESCİOĞLU-ÜNVER, N., TANYERİ, B., 2013. A Comparison of Artificial Neural Network and Multinomial Logit Models in Predicting Mergers. Journal of Applied Statistics, 40(4): 712-720.

GROß, J., 2003. Linear Regression. Springer-Verlag, New York, 394p.

GRUBER, M. H. J., 1991. The Efficiency Of Jack-Knifed And Usual Ridge Type Estimators: A Comparison. Statistics and Probability Letters, 11(1): 49-51.

HAZMAN, G. G., 2009. Vergi Bilincini Etkileyen Muhtemel Dışsal Etkenlerin Lojistik Regresyon Analizi ile Tespiti. Akademik İncelemeler, 4(1): 53-71.

HINKLEY, D. V., 1977. Jackknifing in Unbalanced Situations. Technometrics, 19: 285 292.

HOERL, A. E., KENNARD, R. W., 1970a. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12(1): 55-67.

HOERL, A. E., KENNARD, R. W., 1970b. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12(1): 69-82.

HOERL, A. E., KENNARD, R. W., and BALDWIN, K. F., 1975. Ridge Regression: Some Simulation. Communications in Statistics, 4: 105-123.

HOTELLING, H., 1933. Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components. Journal of Educational Pschology, 24:417-441 and 489-520.

HUANG, J., 2012. A Simulation Research on a Biased Estimator in Logistic Regression Model. Computational Intelligence and Intelligent Systems - Communications in Computer and Information Science, 316: 389-395.

İNAN, D., ERDOĞAN, B. E., 2013. Liu-Type Logistic Estimator. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 42(7): 1578-1586.

JEWELL, N. P., 1984. Small-sample Bias of Point Estimators of the Odds Ratio From Matched Sets. Biometrics, 40: 421-435.

JOLLIFFE, I. T., 1986. Principal Component Analysis. Springer-Verlag, New York, 487p.

JUDGE, G. G., GRIFFITHS, W. E., HILL, R. C., LÜTKEPOHL, H., and LEE, T-C., 1985. The Theory and Practice of Econometrics. John Wiley and Sons, New York, 1018p.

KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., 2001. Combining the Liu Estimator and the Principal Component Regression Estimator. Communications in Statistics - Theory and Methods, 30(12): 2699-2705.

KIBRIA, B. M. G., 2003. Performance of Some New Ridge Regression Estimators. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 32(2): 419-435.

LE CESSIE, S., VAN HOUWELINGEN J. C., 1992. Ridge Estimators in Logistic Regression. Applied Statistics, 41(1): 191-201.

LEE, E. T., 1974. A Computer Program for Linear Logistic Regression Analysis. Computer Programs in Biomedicine, 4(2): 80-92.

LEE, A. H., SILVAPULLE, M. J., 1988. Ridge Estimation in Logistic Regression. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 4: 1231-1257.

LESAFFRE, E., MARX, B. D., 1993. Collinearity in Generalized Linear Regression. Communications in Statistics - Theory and Methods, 22: 1933 -1952.

LIU, K., 1993. A New Class of Biased Estimate in Linear Regression. Communications in Statistics – Theory and Methods, 22: 393-402.

LIU, K., 2003. Using Liu-Type Estimator to Combat Collinearity. Communications in Statistics – Theory and Methods, 32(5): 1009-1020.

MANSSON, K., SHUKUR, G., 2011. On Ridge Parameters in Logistic Regression. Communications in Statistics – Theory and Methods, 40: 3366-3381.

MANSSON, K., KIBRIA, B. M. G., and SHUKUR, G., 2012. On Liu Estimators for the Logit Regression Model. Economic Modelling, 29: 1483-1488.

MANSSON, K., KIBRIA, B. M. G., and SHUKUR, G., 2015. Performance of Some Weighted Liu Estimators for Logit Regression Model: An Application to Swedish Accident Data. Communications in Statistics – Theory and Methods, 44(2): 363-375.

MANZO, G., TOFANI, V., SEGONI, S., BATTISTINI, A., and CATANI, F., 2013. GIS Techniques for Regional-Scale Landslide Susceptibility Assessment: the Sicily (Italy) Case Study. International Journal of Geographical Information Science, 27(7): 1433-1452.

MARQUARDT, D. W., 1970. Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation. Technometrics, 12: 591-612.

MARX, B. D., SMITH, E. P., 1990. Principal Component Estimation for Generalized Linear Regression. Biometrika, 77(1): 23-31.

MCDONALD, G. C., GALARNEAU, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation Of Ridge-Type Estimators. Journal of the American Statistical Association, 70: 407-416.

MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A., and VINING, G. G., 2001. Introduction to Linear Regression Analysis, Third Edition. John Wiley and Sons, Canada, 641p.

MYERS, R. H., MONTGOMERY, D. C., VINING, G. G., and ROBINSON, T. J., 2010. Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences, Second Edition. John Wiley and Sons, New Jersey, 496p.

NEWHOUSE, J. P., OMAN, S. D., 1971. An Evaluation of Ridge Estimators. USA Air Force Project Rand Report, No. R-716-PR, 28p.

NOMURA, M., 1988. On the Almost Unbiased Ridge Regression Estimator. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 17: 729-743.

NOMURA, M., OHKUBO, T., 1985. A Note on Combining Ridge and Principal Component Regression. Communications in Statistics – Theory and Methods, 14(10): 2489-2493.

OHTANI, K., 1986. On Small Sample Properties of the Almost Unbiased Generalized Ridge Estimator. Communications in Statistics – Theory and Methods, 15: 1571-1578.

ÖĞÜT, H., DOĞANAY, M. M., CEYLAN, N. B., and AKTAŞ, R., 2012. Prediction of Bank Financial Strength Ratings: The Case of Turkey. Economic Modelling, 29: 632-640.

ÖZKALE, M. R., 2007. Çoklu İç İlişki İle İlgili Problemler. Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi - Doktora Tezi 96 sayfa.

ÖZKALE, M. R., 2008. A Jackknifed Ridge Estimator in the Linear Regression Model with Heteroscedastic or Correlated Error. Statistics and Probability Letters, 78: 3159-3169.

ÖZKALE, M. R., KAÇIRANLAR, S., 2007. Superiority of the $r-d$ Class Estimator Over Some Estimators by the Mean Square Error Matrix Criterion. Statistics and Probability Letters, 77: 438–446.

ÖZKALE, M. R., KAÇIRANLAR, S., 2008. Comparisons of the $r-k$ Class Estimator to the Ordinary Least Squares Estimator under the Pitman's Closeness Criterion. Statistical Papers, 49: 503–512.

ÖZKALE, M. R., LEMESHOW, S., and STURDIVANT, R., (Baskıda). Logistic Regression Diagnostics in Ridge Regression.

QUENOUILLE, M. H., 1956. Notes On Bias in Estimation. Biometrika, 43:353-360.

PARR, W. C., TOLLEY, H. D., 1982. Jackknifing in Categorical Data Analysis. Australian Journal of Statistics, 24: 67-79.

RAO, C. R., 1973. Linear Statistical Inference and Its Applications: Second Edition. John Wiley and Sons, London, 625p.

RIJAL, H. B., HONJO, M., KOBAYASHI, R., NAKAYA, T., 2013. Investigation of Comfort Temperature, Adaptive Model and the Window-Opening Behaviour in Japanese Houses. Architectural Science Review, 56(1): 54-69.

SALEH, A. K. M. E., KIBRIA, B. M. G., 2013. Improved Ridge Regression Estimators for the Logistic Regression Model. Computational Statistics, 28: 2519-2558.

SARKAR, N., 1996. Mean Square Error Matrix Comparison of Some Estimators in Linear Regressions with Multicollinearity. Statistics and Probability Letters, 30: 133-138.

SCHAEFER, R. L., 1986. Alternative Estimators in Logistic Regression when the Data are Collinear. Journal of Statistical Computation and Simulation, 25: 75-91.

SCHAEFER, R. L., ROI, L. D., and WOLFE, R. A., 1984. A Ridge Logistic Estimator. Communications in Statistics Theory and Methods, 13: 99-113.

SHAHMANDI, M., FARMANESH, F., GHARAHBEIGI, M. M., and SHAHMANDI, L., 2013. Data Analyzing by Attention to Weighted Multicollinearity in Logistic Regression Applicable in Industrial Data. British Journal of Applied Science and Technology, 3(4): 748-763.

SILVAPULLE, M. J., 1981. On the Existence of Maximum Likelihood Estimates for the Binomial Response Models. Journal of the Royal Statistical Society B, 43(3): 310-313.

SINGH, B., CHAUBEY, Y. P., 1987. On Some Improved Ridge Estimators. Statistical Papers, 28: 53-67.

SINGH, B., CHAUBEY, Y. P., and DWIVEDI, T. D., 1986. An Almost Unbiased Ridge Estimator. Sankhya, 48: 342-346.

SMITH, E. P., MARX, B. D., 1990. Ill-Conditioned Information Matrices, Generalized Linear Models and Estimation of the Effects of Acid Rain. Environmetrics Press, 1(1): 57-71.

STEIN, C. M., 1981. Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. The Annals of Statistics, 9(6): 1135-1151.

TRENKLER, G., 1984. On the Performance of Biased Estimators in the Linear Regression Model with Correlated or Heteroscedastic Errors. Journal of Econometrics, 25: 179-190.

TUKEY, J. W., 1958. Bias And Confidence in Not Quite Large Samples (Abstract). The Annals of Mathematical Statistics, 29: 614.

TÜİK, 2011. Gelir ve Yaşam Koşulları Araştırması 2011 Mikro Veri Seti (Kesit). Ankara.

WALKER, S. H., DUNCAN, D. B., 1967. Estimation of the Probability of an Event as a Function of Several Independent Variables. Biometrika, 54: 167-178.

WEBSTER, J. T., GUNST, R. F., and MASON, R. L., 1974. Latent Root Regression Analysis. Technometrics, 16(4): 513-522.

WEISSFELD, L. A., SEREIKA, S. M., 1991. A Multicollinearity Diagnostic for Generalized Linear Models. Communications in Statistics - Theory and Methods, 20(4): 1183-1198.

ZAHID, F. M., RAMZAN, S., 2012. Ordinal Ridge Regression with Categorical Predictors. Journal of Applied Statistics, 39(1): 161-171.

ÖZGEÇMİŞ

Engin Arıcan, 20.05.1982 tarihinde Adana'da doğdu. İlkokulu Gaziantep Şahinbey İlkokulu'nda, ortaokulu Gaziantep Fitnat-Nuri Tekerekoğlu Anadolu Lisesi'nin ortaokul kısmında, liseyi Gaziantep Vehbi Dinçerler Fen Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında Marmara Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı. 2005 yılında mezun oldu. 2006 yılında Türkiye İstatistik Kurumu Adana Bölge Müdürlüğü'nde TÜİK uzman yardımcısı olarak çalışmaya başladı. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında yüksek lisans eğitimini "Nitel yanıt değişkene sahip regresyon modellerinde tahmin yöntemleri" başlıklı tezi ile tamamlamıştır. Aynı sene içerisinde "Hanehalkı harcama olasılıklarını sıralı regresyon modeli ile tahmin etme" başlıklı tezini tamamlayarak TÜİK Uzmanı kadrosuna atanmıştır. 2015 yılında 5 ay süreyle Avusturya İstatistik Ofisinde "Gelir ve Yaşam Koşuları İstatistikleri Veri Yönetimi" konusunda staj yapmıştır. İngilizce bilmektedir ve halen TÜİK Adana Bölge Müdürlüğü'nde Sosyal Araştırmalar Grup Sorumlusu olarak çalışmaktadır. Ayrıca, evli ve bir çocuk babasıdır.