ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Funda CAN

DOĞRUSAL KARMA MODELLERDE RİDGE VE KISITLI TAHMİN METOTLARI: BİR MONTE CARLO SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2015

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL KARMA MODELLERDE RİDGE VE KISITLI TAHMİN METOTLARI: BİR MONTE CARLO SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Funda CAN

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 17/09/2015 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	……	…….....
Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE	Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU	Doç. Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

..…….....	……..
Yrd. Doç. Dr. Neslihan İYİT	Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

DOĞRUSAL KARMA MODELLERDE RİDGE VE KISITLI TAHMİN METOTLARI: BİR MONTE CARLO SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Funda CAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Yıl: 2015, Sayfa: 161
Jüri : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL
: Yrd. Doç. Dr. Neslihan İYİT
: Yrd. Doç. Dr. Burcu MESTAV

Doğrusal karma model, doğrusal regresyon modelinin genişletilmiş hali olarak düşünülebilir. Doğrusal regresyon modelinde sadece sabit etkiler yer alırken, doğrusal karma modellerde sabit etkilerin yanı sıra rasgele etkiler de bulunur. Bu çalışmada doğrusal karma model türlerine ve doğrusal karma modellerin parametre tahminlerine yer verilmiştir. Varyans bileşenlerinin tahmini için kullanılan en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemleri ele alınmıştır. Doğrusal karma modellerde bağımlı değişkenin varyans-kovaryans matris yapısını belirleyen yöntemler detaylı olarak incelenmiş olup uygun model seçiminde bilgi kriterlerinden yararlanılmıştır.

Doğrusal regresyon modelinde çoklu iç ilişki problemi ve onun istatistiksel sonuçlar üzerindeki etkisi çok iyi bilinmektedir. Benzer sonuçlar doğrusal karma modellerde yer alan sabit etkili parametrelerde de görülebilir. Bu çalışmada çoklu iç ilişki olması durumunda kullanılan tahmin yöntemlerinden kısıtlı ve ridge tahmin yöntemleri karma modele alternatif olarak verilmiştir. Sabit etkili ve rasgele etkili parametrelere kısıtlar getirilerek elde edilen tahminler BLUE ve BLUP ile kıyaslanmıştır. Ayrıca ridge karma model tahmin edicisinin karma model tahmin edicisinden matris hata kareler ortalaması anlamında üstün olması için gerek ve yeter koşulları veren bir teorem geliştirilmiştir.

Çalışmanın uygulama bölümünde ise, sağlık alanındaki bir veri kümesi incelenmiş olup elde edilen teorik bulgular Matlab 2012, IBM SPSS Statistics 22 ve Excel programları yardımıyla analiz edilip yorumlanmıştır. Buna ek olarak çalışma Matlab 2012 programında uygulanan Monte Carlo simülasyon çalışması ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Karma Model, Varyans Bileşeni, Ridge Karma Model, Kısıtlı Karma Model

ABSTRACT

PhD THESIS

RIDGE AND RESTRICTED ESTIMATION METHODS IN LINEAR MIXED MODELS: A MONTE CARLO SIMULATION STUDY

Funda CAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Year: 2015, Pages: 161
Jury : Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Asst. Prof. Dr. Neslihan İYİT
: Asst. Prof. Dr. Burcu MESTAV

Linear mixed model can be thought of as extended linear regression model. Although in linear regression model only fixed effects take place, in linear mixed models both fixed effects and random efffects occur. In this study, linear mixed model types and parameter estimates are featured. The maximum likelihood and restricted maximum likelihood methods to estimate variance components are discussed. In linear mixed models, methods that identify variance-covariance structure of dependent variable are examined in detail and information criterions are utilized to select the appropriate model.

In linear regression model, multicolinearity problem and its impact on statistical results are well known. Similiar results can also be seen on fixed effect parameters that take place in linear mixed models. In this study, restricted and ridge estimation methods which are the estimation methods that are used in the case of multicollinearity are given as alternatives to linear mixed models. Estimates obtained by restricting fixed effects and random effects parameters are compared with BLUE and BLUP. Additionly, a theorem is developed that gives necessary and sufficient conditions for the ridge mixed model estimator to be superior to the mixed estimator.

In practical part of the study, a set of data in health field is examined and the theorical findings that has been obtained are interpreted and analysed with the support of Matlab 2012, IBM SPSS Statistics 22 and Excel programs. In addition, the study was supported by Monte Carlo simulation study that was implemented on Matlab 2012 program.

Key Words: Linear Mixed Models, Variance Component, Ridge Mixed Models, Restricted Mixed Models

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, kendisiyle çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. M. Revan ÖZKALE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Beni her zaman destekleyerek bu günlere gelmemi sağlayan aileme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VI
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR X
1. GİRİŞ 1
2. DOĞRUSAL KARMA MODEL 5
2.1. Doğrusal Karma Model Türleri 7
2.1.1. Gauss Doğrusal Karma Modeller 8
3. DOĞRUSAL KARMA MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNLERİ 15
3.1. En İyi Ön Tahmin Edici (BP) 15
3.2. En İyi Doğrusal Ön Tahmin Edici (BLP) 21
3.3. En İyi Doğrusal Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP) 24
3.4. Henderson'ın Karma Model Eşitlikleri 31
4. VARYANS BİLEŞENLERİ TAHMİNİ 35
4.1. En Çok Olabilirlik (ML) Yöntemi 35
4.1.1. Hartley-Rao Formu 38
4.1.2. ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Varyans-Kovaryans Matrisleri . 42
4.2. Kısıtlı En Çok Olabilirlik (REML) Yöntemi 43
4.2.1. REML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Varyans-Kovaryans Matrisleri 48
4.3. ML ile REML Yöntemlerinin Karşılaştırılması 50
5. UZUN SÜRELİ KARMA MODELLERDE VARYANS-KOVARYANS MATRİS YAPISININ MODELLENMESİ 51
5.1. Toeplitz (TOEP) Varyans-Kovaryans Modeli 52
5.2. Birinci Dereceden Otoregresif [AR(1)] Varyans-Kovaryans Modeli 53
5.3. Birinci Dereceden Anti-Bağımlı [ANTE(1)] Varyans-Kovaryans Modeli ... 53

5.4. Heterojen Birinci Dereceden Otoregresif [ARH(1)] Varyans-Kovaryans Modeli 54
5.5. ARMA(1,1) Varyans-Kovaryans Modeli 55
5.6. Bileşik Simetri (CS) Varyans-Kovaryans Modeli 55
5.7. Bileşik Simetri Korelasyonlu (CSR) Varyans-Kovaryans Modeli 56
5.8. Heterojen Bileşik Simetri (CSH) Varyans-Kovaryans Modeli 56
5.9. Köşegen [UN(1)] Varyans-Kovaryans Modeli 56
5.10. Birinci Dereceden Faktör Analitik [FA(1)] Varyans-Kovaryans Modeli 57
5.11. Heterojen Birinci Dereceden Faktör Analitik [FAH(1)] Varyans-Kovaryans Modeli 57
5.12. Huynh-Feldt (HF) Varyans-Kovaryans Modeli 58
5.13. Varyans Bileşenleri (VC) Varyans-Kovaryans Modeli 58
5.14. Heterojen Toeplitz (TOEPH) Varyans-Kovaryans Modeli 59
5.15. Yapısal Olmayan (UN) Varyans-Kovaryans Modeli 59
5.16. Yapısal Olmayan Korelasyonlu (UNR) Varyans-Kovaryans Modeli 60
6. KISITLI KARMA MODEL 63
7. RİDGE KARMA MODEL 74
7.1. Doğrusal Karma Model ve Ridge Karma Model Tahmin Edicilerinin MSEM Kriterine Göre Karşılaştırılması 74
7.2. k Yanlılık Parametresinin Seçimi 79
8. SAYISAL ÖRNEK 83
8.1. Rasgele Kesen Terimli Modelde Varyans-Kovaryans Yapısının Modellenmesi 85
8.2. Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Modelde Varyans-Kovaryans Yapısının Modellenmesi 88
9. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI 95
10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 103
KAYNAKLAR 105
ÖZGEÇMİŞ 111
EKLER 112

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 5.1. Tekrarlı ölçümler için kullanılan varyans-kovaryans yapıları 61
Çizelge 5.2. Model seçiminde kullanılan bilgi kriterleri 62
Çizelge 8.1. En çok olabilirlik (ML) yöntemine göre elde edilen tahmin değerleri 91
Çizelge 8.2. Kısıtlı en çok olabilirlik (REML) yöntemine göre elde edilen tahmin değerleri 92
Çizelge 9.1. $n_i = 5, m = 30$ ve $\hat{k}_h$ iken tahmin edilen MSE değerleri 98
Çizelge 9.2. $n_i = 5, m = 30$ ve k_{GCV} iken tahmin edilen MSE değerleri 99
Çizelge 9.3. $n_i = 10, m = 60$ ve $\hat{k}_h$ iken tahmin edilen MSE değerleri 100
Çizelge 9.4. $n_i = 10, m = 60$ ve k_{GCV} iken tahmin edilen MSE değerleri.....101
Çizelge 12.1. Rasgele etkilere ilişkin varyans-kovaryans parametre tahminleri.....130
Çizelge 12.2. Rasgele etkilere ve hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrislerinin tahminleri 135
Çizelge 12.3. y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisinin tahminleri 143
Çizelge 12.4. Uygun varyans-kovaryans yapısının seçimi.....159

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 8.1. ML için k ya karşı skaler hata kareler ortalaması (SMSE).....93
Şekil 8.2. REML için k ya karşı skaler hata kareler ortalaması (SMSE).....93

SİMGELER VE KISALTMALAR

LMM : Doğrusal Karma Model

EKK : En Küçük Kareler

BLUE : En İyi Doğrusal Yansız Tahmin Edici (Best Linear Unbiased Estimator)

BP : En İyi Ön Tahmin Edici (Best Predictor)

BLP : En İyi Doğrusal Ön Tahmin Edici (Best Linear Predictor)

BLUP : En İyi Doğrusal Yansız Ön Tahmin Edici (Best Linear Unbiased Predictor)

MSE : Hata Kareler Ortalaması (Mean Squared Error)

MSEM : Matris Hata Kareler Ortalaması (Matrix Mean Squared Error)

SMSE : Skaler Hata Kareler Ortalaması (Scaler Mean Squared Error)

MLE : En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (Maximum Likelihood Estimation)

REML : Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (Restricted Maximum Likelihood Estimation)

1. GİRİŞ

Karma model tanımı ilk olarak Eisenhart (1947) tarafından önerilmiştir. Eisenhart (1947) ve Scheffe (1959) modelde yer alan değişken (faktör) düzeylerini tanımlayan parametrelerin seçim yöntemine göre sabit etkili veya rasgele etkili olabileceğini ileri sürmüştür. Buna göre faktörün düzeyleri, faktörün mümkün tüm düzeyleri arasından araştırmacı tarafından özel olarak belirleniyorsa veya tüm düzeyleri deneye alınıyorsa (cinsiyet vb.) sabit etki, araştırmacı tarafından rasgele olarak belirleniyorsa (kalıtımsal yapı vb.) rasgele etki adını alır. Eisenhart (1947) çalışmasında sabit etkili modeli Model I, rasgele etkili modeli Model II, hem sabit hem de rasgele etkileri içeren karma etkili modellere ise Model III adını vermiştir.

Doğrusal karma modellerin teorisi Fisher (1918) tarafından tanımlanan rasgele etkili modellerin teorisine dayanmaktadır. Rasgele etkili model ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılın ortalarında astronomi alanında yapılmıştır. Doğrusal karma model ile ilgili ilk çalışmalar ise 20. yüzyılın ortalarında genetik alanında yapılmıştır.

Henderson (1950) tarafından karma model eşitlikleri olarak bilinen sabit etkilerin en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi (BLUE) ile rasgele etkilerin en iyi doğrusal yansız ön tahmin edicisi (BLUP) geliştirilmiştir. Henderson (1953) varyans bileşenlerinin tahmini için temel oluşturmuştur. Hartley ve Rao (1967) karma modelin matris formundan yararlanarak en çok olabilirlik yöntemi ile varyans bileşenlerinin tahminini elde etmiştir. Patterson ve Thompson (1971) varyans bileşenlerinin tahmininde kullanılan bir diğer metot olan kısıtlı en çok olabilirlik tahminini önermiştir. Olabilirlik metoduna dayanan yöntemler hesaplama açısından problem yarattığı için yavaş gelişme göstermiştir.

1970 lerin ortalarında, doğrusal karma model özellikle bölünmüş parseller deney düzenleri (split-plot) olmak üzere ziraat alanında uygulanmaya başlanmıştır (Brown ve Prescott, 1999). Verbyla ve Cullis (1990) uzun süreli veri seti üzerine karma modelde parametre tahmini için kısıtlı en çok olabilirlik yöntemini uygulamıştır. 1990 lardan itibaren ise biyoloji, sağlık, eğitim ve tarım alanlarında tercih edilen ve yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir.

Doğrusal karma model birçok çalışmada uygulamalı olarak incelenmiştir. Henderson (1973), doğrusal karma modeli kullanarak bir sonraki hayvan ırkı için verimli döl verecek ebeveynlerin seçimine yönelik bir çalışma yapmıştır. Fay ve Herriot (1979), 1970 yılında nüfus ve konut sayımında küçük kentlere ait kişi başına düşen geliri tahmin etmek için doğrusal karma modeli kullanmıştır. Laird ve Ware (1982), hava kirliliğinin akciğer fonksiyonları üzerine etkisini araştıran bir analiz yapmıştır. Baltimore uzun süreli çalışmasında akciğer fonksiyonunun yaş ile nasıl değiştiğini doğrusal karma model yardımıyla tespit etmiştir (Shock ve ark. 1984). Bernardo (1996), doğrusal karma modelden ve doğal ebeveynler arasındaki genetik ilişkiden yararlanarak tekil-çapraz verimliliğini BLUP ile rapor etmiştir.

Bu çalışma on bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş bölümüdür. Bu bölümde doğrusal karma modelin tanımına, önceki çalışmalara, yapılan çalışmaların uygulamalarına yer verilmiştir. İkinci bölümde, doğrusal karma modelin gösterimi ve doğrusal karma model türleri ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, doğrusal karma modelin tahmin yöntemleri detaylı olarak incelenmiştir. Dördüncü bölümde, varyans bileşenleri tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemlerine yer verilmiş olup bu bölüm sonunda iki yöntem karşılaştırılmıştır. Beşinci bölümde, uzun süreli karma modellerde varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi amacıyla kullanılan varyans-kovaryans modelleri incelenmiştir. Bilgi kriterleri yardımıyla en uygun varyans-kovaryans modeli seçilmiştir. Altıncı bölümde, $T\beta = r$ kısıtlaması altında EKK tahmin edicinin elde edilmesine benzer mantıkla doğrusal karma modelinin hem rasgele etkili hem de sabit etkili parametrelerine kısıt getirilmiştir. Yedinci bölümde, açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi -çoklu iç ilişki- dikkate alan ridge karma model tanımlanmış olup doğrusal karma model ile ridge karma modelin matris hata kareler ortalaması kriterine göre karşılaştırılmasına değinilmiştir. Sekizinci bölümde, uzun süreli karma modeller üzerine bir uygulama IBM SPSS Statistics 22, Matlab 2012 ve Excel programları yardımıyla analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Dokuzuncu bölümde, yedinci bölümde teorik olarak elde edilen sonuçları örneklendirmek için bir simülasyon çalışması yapılmış ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Onuncu

bölüm ise sonuçlar ve öneriler bölümüdür. Bu bölümde çalışmanın tamamını özetleyen bir değerlendirme yapılmıştır.

2. DOĞRUSAL KARMA MODEL

Doğrusal karma modeli anlayabilmenin en iyi yolu doğrusal regresyon analizini hatırlamaktan geçer. Genel olarak çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada y $n \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü, X $n \times p$ boyutlu sabit etkilere ilişkin tasarım matrisi, β $p \times 1$ boyutlu sabit etkilere ilişkin parametreler vektörü ve ε $n \times 1$ boyutlu rasgele hataların vektörüdür. Rasgele hata vektörü $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ dağılımına sahiptir.

(2.1) modelinde parametre vektörünün sabit olduğu kabul edilir. Ancak bu katsayılardan bazılarının rasgele olabileceği göz ardı edilmemelidir. Bu durum genellikle gözlemler arasında ilişki olduğunda ortaya çıkmaktadır. Örneğin, tıbbi çalışmalarda çoğu zaman gözlemler farklı zamanlarda aynı birey üzerinden toplanır. Bu durumda aynı bireyden alınan gözlemler arasında ilişki olduğunu varsaymak mümkündür. Benzer şekilde, eğitim ile ilgili yapılan araştırmalarda aynı öğrenciden alınan test puanları birbiriyle ilişkili olabilir. Veri yapısında yer alan tekrarlı ölçümlerin birbiri ile ilişkisiz ve homojen varyansa sahip olduğu varsayımına dayanan doğrusal modeller bu problemi çözmede yetersiz kalmaktadır. Gözlemler arasında ilişki olması durumunda hatalı modellemeye neden olan doğrusal regresyon modeli yerine doğrusal karma model tercih edilir. Dolayısıyla (2.1) modeline rasgele etki terimlerinin eklenmesiyle, doğrusal karma model elde edilir.

Genel olarak doğrusal karma bir model,

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon \tag{2.2}$$

olarak ifade edilir. Burada y $n \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü, X $n \times p$ boyutlu sabit etkilere ilişkin tasarım matrisi, β $p \times 1$ boyutlu sabit etkilere ilişkin

parametreler vektörü, Z $n' q$ boyutlu rasgele etkilere ilişkin tasarım matrisi, α $q' 1$ boyutlu rasgele etkilere ilişkin parametreler vektörü ve ε $n' 1$ boyutlu rasgele hataların bir vektörüdür. y gözlemlenebilir rasgele vektör, α ve ε ise gözlemlenemeyen rasgele vektörlerdir. (2.2) modelinde $Z = 0$ ve $Cov(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ iken çoklu doğrusal regresyon modeli elde edilir (Jiang, 2007).

Doğrusal karma modelde yer alan α ve ε rasgele vektörleri için temel varsayımlar,

i) Rasgele etkiler ve hatalar "0" ortalamalıdır: $E(\alpha) = 0, \quad E(\varepsilon) = 0$

ii) α ile ε karşılıklı olarak bağımsızdır ve her ikisi de sonlu varyansa sahiptir:

$$Cov(\alpha, \varepsilon) = 0, \; Var(\alpha) = G, \; Var(\varepsilon) = R,$$

burada G ve R bilinen pozitif tanımlı matrislerdir.

iii) Kovaryans matrisleri bilinmeyen varyans bileşenleri içermektedir.

olarak ifade edilir ve normallik varsayımı ile birlikte $\alpha \sim N(0, G)$ ve $\varepsilon \sim N(0, R)$ nın varyans-kovaryans matrisi,

$$V\begin{bmatrix}\alpha \\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}G_{qxq} & 0 \\ 0 & R_{nxn}\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

ile gösterilir. α ve ε için belirtilen varsayımlardan y bağımlı değişken vektörünün ortalama vektörünü ve varyans-kovaryans matrisini belirlemek mümkündür. Bağımlı değişken vektörünün beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(y) &= E(X\beta + Z\alpha + \varepsilon) \\ &= X\beta + ZE(\alpha) + E(\varepsilon) \\ &= X\beta \end{aligned} \tag{2.4}$$

ve varyansı,

$$\begin{aligned} Var(y) &= Var(X\beta + Z\alpha + \varepsilon) \\ &= ZGZ' + R = V \end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla normallik varsayımı ile birlikte doğrusal karma model için y bağımlı değişken $y \sim N(X\beta, V)$ dağılımına sahiptir. Buradan, α ve y nin birinci ve ikinci momentlerinden faydalanarak,

$$\begin{aligned} C = Cov(\alpha, y') &= Cov[\alpha, (X\beta + Z\alpha + \varepsilon)'] \\ &= Cov(\alpha, \alpha' Z') + Cov(\alpha, \varepsilon') \\ &= Cov(\alpha, \alpha') Z' \\ &= GZ' \end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir. α ve y rasgele değişkenleri,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ X\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G & C \\ C' & V \end{bmatrix} \right) \tag{2.7}$$

çok değişkenli dağılıma sahiptir.

2.1. Doğrusal Karma Model Türleri

Doğrusal karma modellerinin farklı türleri ve bu türlerin sınıflandırılması için farklı yöntemler bulunmaktadır. Bu sınıflandırma yöntemlerinden biri normallik varsayımının sağlanıp sağlanmadığıdır. Normallik varsayımını sağlayan modeller, normallik varsayımını sağlamayan modellere nazaran modellemede daha esnektir.

Doğrusal karma modeller gauss ve gauss olmayan doğrusal karma modeller olmak üzere iki sınıfa ayrılır (Jiang, 2007).

2.1.1. Gauss Doğrusal Karma Modeller

Gauss doğrusal karma modellerinde, (2.2) eşitliğinde yer alan rasgele etkilerin ve hataların normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu varsayıma göre doğrusal karma modelin bazı özel türlerine yer verilecektir.

1. Varyans Bileşenleri Modeli

Doğrusal karma modelde,

$$Z\alpha = [Z_1 \ \ldots \ Z_r]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r} Z_i\alpha_i$$

ifadesi yerine yerleştirildiğinde (2.2) eşitliği ile verilen doğrusal karma model

$$y = X\beta + \sum_{i=1}^{r} Z_i\alpha_i + \varepsilon \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Burada $Z_1,...,Z_r$ bilinen matrislerdir. $\alpha_1,...,\alpha_r$ ise $i = 1,...,r$ için rasgele etkiler vektörüdür. $\forall\, i$ için $E(\alpha_i) = 0$, $Var(\alpha_i) = \sigma_i^2 I_{q_i}$ ve $i \neq h$ için $Cov(\alpha_i, \alpha_h') = 0$ dır. ε hata terimi ise $E(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ ve $Cov(\alpha_i, \varepsilon') = 0$ varsayımlarına sahiptir. α_i ve ε karşılıklı olarak bağımsızdır. Burada varyans bileşenlerinin kümesi $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_1^2, ..., \sigma_r^2$ dır. Hartley ve Rao (1967) ise varyans bileşenlerini H matrisi cinsinden aşağıdaki gibi ifade etmiştir. Buna göre,

$$G = Cov(\alpha) = \begin{bmatrix} Var(\alpha_{1i}) & Cov(\alpha_{1i},\alpha_{2i}) & \cdots & Cov(\alpha_{1i},\alpha_{qi}) \\ Cov(\alpha_{1i},\alpha_{2i}) & Var(\alpha_{2i}) & \cdots & Cov(\alpha_{2i},\alpha_{qi}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\alpha_{1i},\alpha_{qi}) & Cov(\alpha_{2i},\alpha_{qi}) & \cdots & Var(\alpha_{qi}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{q_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{q_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 I_{q_r} \end{bmatrix}$$

olmak üzere bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisi,

$$V = Var(y) = \sigma_e^2 I_n + \sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i' \sigma_i^2 = \sigma_e^2 (I_n + \sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i' \gamma_i) = \sigma_e^2 H \qquad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\gamma_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_e^2}$ $i = 1,...,r$ olup varyans bileşen oranları adını alır. Dolayısıyla y bağımlı değişkenin ortalama vektörü $E(y) = X\beta$ ve varyans-kovaryans matrisi $Var(y) = \sigma_e^2 H$ olmak üzere $y \sim N(X\beta, \sigma_e^2 H)$ dağılımına sahiptir (Searle ve ark., 1992).

2. Uzun Süreli (Longitudinal) Model

Uzun süreli modeller genellikle uzun süreli verilerin analizinde kullanıldığı için bu adı almıştır (Diggle ve ark., 1996). Uzun süreli modellerde gözlemler, her bir gruba karşılık gelen bir rasgele etki (veya rasgele etkilerin bir vektörü) ile bağımsız gruplara bölünür. Uygulamada bu gruplar, uzun süreli çalışmalarda yer alan farklı bireylere karşılık gelebilir. Ayrıca rasgele etkilere ek olarak, her bir grubun içinde ilişki olabilir. (2.2) modelinde yer alan X veya Z (veya her ikisi) matrisleri bu modelde genellikle zamana bağlı değişkenlerden oluşur.

Laird ve Ware (1982), genel uzun süreli modeli

$$y_i = X_i\beta + Z_i\alpha_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,.....,m \tag{2.10}$$

olarak tanımlamışlardır. Burada $y_i = (y_{i1},...,y_{in_i})'$ n_i´ 1 boyutlu gözlemlerin vektörü, $X_i = (x_{i1},...,x_{in_i})'$ n_i´ p boyutlu sabit etkilere ilişkin tasarım matrisi, $\beta = (\beta_1,...,\beta_p)'$ p´ 1 boyutlu sabit etkilere ilişkin parametreler vektörü, $Z_i = (z_{i1},...,z_{in_i})'$ n_i´ q boyutlu rasgele etkilere ilişkin tasarım matrisi, $\alpha_i = (\alpha_{i1},...,\alpha_{iq})'$ q´ 1 boyutlu rasgele etkilere ilişkin parametreler vektörü ve $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1},...,\varepsilon_{in_i})'$ n_i´ 1 boyutlu rasgele hataların bir vektörüdür. α_i ile ε_i bağımsız olup sırasıyla $\alpha_i \sim N(0, G_i)$ ve $\varepsilon_i \sim N(0, R_i)$ dağılımlarına sahiptir. Burada $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ dir. Belirtilen varsayımlar altında, $y = \{_c y_i\}_{i=1}^m$, $X = \{_c X_i\}_{i=1}^m$, $Z = \{_d Z_i\}_{i=1}^m$, $\alpha = \{_c \alpha_i\}_{i=1}^m$ ve $\varepsilon = \{_c \varepsilon_i\}_{i=1}^m$ olmak üzere (2.10) modeli (2.2) modelinin özel bir halidir (Bkz. Ek 1). Bu durumda y bağımlı değişken vektörü, $y \sim N(X\beta, ZGZ'+R)$ dağılımına sahiptir.

Uzun süreli model kapsamında rasgele kesen terimli model ve rasgele kesen terim ve eğimli model incelenebilir. (2.10) eşitliğinde yer alan α_i i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin parametre tek bir rasgele değişkenden oluşuyorsa rasgele kesen terimli model adını alır ve

$$y_{ij} = X_{ij}'\beta + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad j = 1,...,n_i \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Burada α_i ile ε_{ij} bağımsız olup sırasıyla $\alpha_i \sim N(0,\sigma_\alpha^2)$ ve $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ dağılımlarına sahiptir. (2.11) eşitliğine göre y bağımlı değişkenin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(y_{ij}) &= Var(X_{ij}'\beta + \alpha_i + \varepsilon_{ij}) \\ &= Var(\alpha_i + \varepsilon_{ij}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

dır. y_{ij} ve y_{ik} bağımlı değişkenleri arasındaki kovaryans ise

$$\begin{aligned} Cov(y_{ij}, y_{ik}) &= Cov(X_{ij}^{'}\beta + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, X_{ik}^{'}\beta + \alpha_i + \varepsilon_{ik}) \\ &= Cov(\alpha_i + \varepsilon_{ij}, \alpha_i + \varepsilon_{ik}) \\ &= Cov(\alpha_i, \alpha_i) \\ &= \sigma_{\alpha}^{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Rasgele kesen terim ve eğimli model, rasgele kesen terimli modelin genişletilmiş halidir. Bu modelde yer alan rasgele etkilere ilişkin parametreler, α_{i1} i_inci deneğin birinci rasgele etkisi ve α_{i2} i_inci deneğin tekrarlı ölçümlerinin alındığı zaman faktörü olmak üzere iki rasgele değişkenden oluşur ve (2.10) eşitliği,

$$y_{ij} = X_{ij}^{'}\beta + \alpha_{i1} + \alpha_{i2}t_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad j = 1,...,n_i \tag{2.12}$$

olarak ifade edilir. t_{ij} i_inci denekten alınan j_ inci bağımlı değişkene karşılık gelen zamanı gösterir. α_{i1}, α_{i2} ile ε_i bağımsız olup sırasıyla $\alpha_{i1} \sim N(0, G_{11})$, $\alpha_{i2} \sim N(0, G_{22})$ ve $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ dağılımlarına sahiptir. (2.12) eşitliğine göre y bağımlı değişkenin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(y_{ij}) &= Var(\alpha_{i1} + \alpha_{i2}t_{ij} + \varepsilon_{ij}) \\ &= Var(\alpha_{i1}) + 2t_{ij}Cov(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) + t_{ij}^{2}Var(\alpha_{i2}) + Var(\varepsilon_{ij}) \\ &= \sigma_{\alpha_1}^{2} + 2t_{ij}\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} + t_{ij}^{2}\sigma_{\alpha_2}^{2} + \sigma^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. y_{ij} ve y_{ik} bağımlı değişkenleri arasındaki kovaryans ise

$$Cov(y_{ij}, y_{ik}) = \sigma_{\alpha_1}^{2} + (t_{ij} + t_{ik})\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} + (t_{ij} + t_{ik})\sigma_{\alpha_1,\alpha_2} + t_{ij}t_{ik}\sigma_{\alpha_2}^{2}$$

dir.

3. Marjinal Model

Normallik varsayımı altında (2.10) ile verilen uzun süreli modelde $\mathbf{e}_i^* = Z\mathbf{a}_i + \mathbf{e}_i$ olarak alındığında,

$$y_i = X_i\mathbf{b} + \mathbf{e}_i^* \qquad i = 1,...,m$$

marjinal model elde edilir (West ve ark., 2007). Burada $V_i = Z_i G Z_i^{'} + R_i$ olmak üzere, $\mathbf{e}_i^* \sim N(0, V_i)$ dağılımına sahiptir. Doğrusal karma modelde, G ve R_i matrislerinin pozitif tanımlı olması gerekir. Marjinal modelde ise V_i matrisinin pozitif tanımlı olması yeterlidir. Belirtilen varsayımlar altında $y_i \sim N(X_i\mathbf{b}, Z_i G Z_i^{'} + R_i)$ dağılımına sahiptir.

4. Hiyerarşik Model

Bayesian bakış açısına göre, doğrusal karma modeller üç aşamalı hiyerarşik bir yapıya sahiptir. İlk aşamada, rasgele etkiler verilmişken gözlemlerin dağılımı tanımlanır. İkinci aşamada, parametreler verilmişken rasgele etkilerin dağılımı tanımlanır. Son aşamada ise, parametreler için önsel dağılım varsayımı yapılır. Normallik varsayımı altında bu aşamalar belirlenebilir. Doğrusal karma model ile Bayesian hiyerarşik model arasındaki tek fark önsel dağılımdır (Jiang, 2007).

Hiyerarşik verilere; bitki, hayvan veya insanların büyüme eğrileri, farklı okullarda eğitim gören öğrencilerin sınav puanları vb. durumlar örnek gösterilebilir. Farklı okullarda eğitim gören öğrencilerin sınav puanları iki seviyeli veri yapısında olup hiyerarşik veri yapılarına genişletilebilir.

Örneğin;

10 şehir

® Her şehirde 5 okul

® Her okulda 2 sınıf

® Her sınıfta 5 öğrenci

® Her öğrenciden alınan iki farklı sınav puanı

hiyerarşik veri yapısındadır.

3. DOĞRUSAL KARMA MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNLERİ

Doğrusal regresyon modelinde sabit etkilere ilişkin parametreler vektörünün tahmini en küçük kareler (EKK) ve en çok olabilirlik (ML) yöntemleri ile elde edilebiliyordu. Doğrusal karma modele rasgele etki terimlerinin ilave edilmesi ile parametre tahminleri daha karmaşık bir hale gelir. Doğrusal regresyon modelinde β ve σ^2 tahmin edilirken, doğrusal karma modelinde β ve σ^2 nin tahminlerine ek olarak α ve varyansın bilinmediği durumlarda ise G ve R tahmin edilir. Rasgele etkiler, doğrusal karma modelinde rasgele değişkenlere karşılık geldiği için bu etkilerin tahminlerine ön tahmin, tahmin edicilerine ise ön tahmin edici adı verilir (McCulloch ve Searle, 2001). Rasgele etkilere ilişkin parametreler vektörünü ifade eden α nın ön tahmininin elde edilmesinde en iyi ön tahmin edici (BP), en iyi doğrusal ön tahmin edici (BLP), en iyi doğrusal yansız ön tahmin edici (BLUP)[1] ve Henderson (1953) tarafından geliştirilen karma model eşitliklerinden elde edilen tahmin ediciler gibi çeşitli ön tahmin ediciler kullanılır.

3.1. En İyi Ön Tahmin Edici (BP)

α verildiğinde y rasgele değişken vektörünün çok değişkenli koşullu normal dağılımı (2.7) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} E(y/\alpha = \alpha_1) &= E(y) + Cov(y,\alpha)[Var(\alpha)]^{-1}[\alpha - E(\alpha)] \\ &= X\beta + C'G^{-1}(\alpha - 0) \end{aligned}$$

ve $C' = ZG$ iken,

$$\begin{aligned} E(y/\alpha = \alpha_1) &= X\beta + ZGG^{-1}\alpha \\ &= X\beta + Z\alpha \end{aligned} \qquad (3.1)$$

[1] BLUP da α ve β birlikte tahmin edilir.

$$Var(y/\alpha=\alpha_1)=\{Var(y)-Cov(y,\alpha)[Var(\alpha)]^{-1}Cov(\alpha,y')\}$$
$$=[V-C'G^{-1}C]$$

bulunur (Bkz. Ek 2). $C=GZ'$ olmak üzere,

$$Var(y/\alpha=\alpha_1)=[V-ZGG^{-1}GZ'] \\ =[V-ZGZ'] \tag{3.2}$$

elde edilir. (2.5) eşitliği dikkate alınırsa,

$$Var(y/\alpha=\alpha_1)=R$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla α verildiğinde y rasgele değişken vektörünün koşullu dağılımı $y/\alpha \sim N(X\beta+Z\alpha,R)$ olarak bulunur. α ve y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y,\alpha)=f(y/\alpha)f(\alpha)$ olmak üzere,

$$f(y,\alpha)=\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|R|^{1/2}}e^{-(y-X\beta-Z\alpha)'R^{-1}(y-X\beta-Z\alpha)/2}\right]\left[\frac{1}{(2\pi)^{q/2}|G|^{1/2}}e^{-\alpha'G^{-1}\alpha/2}\right]$$

$$f(y,\alpha)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left[(y-X\beta-Z\alpha)'R^{-1}(y-X\beta-Z\alpha)+\alpha'G^{-1}\alpha\right]}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n+q)}|R|^{1/2}|G|^{1/2}} \tag{3.3}$$

elde edilir (Bkz. Ek 3).

$f(y,\alpha)$, α ve y rasgele vektörlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α nın ön tahmin edicisi $\tilde{\alpha}$ olmak üzere ön tahminin hata kareler ortalaması,

$$E(\tilde{\alpha} - \alpha)^2 = \int\int (\tilde{\alpha} - \alpha)^2 f(y,\alpha)\,dy\,d\alpha \qquad (3.4)$$

dır. Hata kareler ortalamasını en küçük yapan değere en iyi ön tahmin edici adı verilir. Burada bahsedilen "en iyi" ifadesi varyansın en küçük olması anlamında değil, hata kareler ortalamasının en küçük olması anlamına gelir. Varyans sabit bir değere göre değişimi ifade eder. α ise sabit bir değer olmadığı için (3.4) eşitliğinde yer alan ifade $\tilde{\alpha}$ nın varyansı değildir. Bu nedenle sabit etkilere ilişkin parametreler vektörünün tahmininde en küçük varyans kriteri kullanılırken, rasgele etkilere ilişkin parametreler vektörünün ön tahmini için en küçük hata kareler ortalaması kullanılır. Dolayısıyla (3.4) eşitliğini en küçük yapacak $\tilde{\alpha}$ nın en iyi ön tahmin edicisi,

$$\tilde{\alpha} = E(\alpha / y) = CV^{-1}(y - X\beta) \qquad (3.5)$$

olarak elde edilir. Burada $E(\alpha / y)$, y verildiğinde α nın koşullu beklenen değeridir (Bkz. Ek 2). y verildiğinde α nın varyansı ise,

$$Var(\alpha / y) = G - CV^{-1}C'$$

olarak bulunur (McCulloch ve Searle, 2001).

(3.5) eşitliğinin hata kareler ortalamasını en küçük yaptığı aşağıdaki gibi gösterilebilir. $\alpha_0 = E(\alpha / y)$ olsun. $E(\tilde{\alpha} - \alpha)^2 = E(\tilde{\alpha} - \alpha)'(\tilde{\alpha} - \alpha)$ ifadesine α_0 teriminin eklenip çıkartılması ile,

$$\begin{aligned} E(\tilde{\alpha} - \alpha)'(\tilde{\alpha} - \alpha) &= E(\tilde{\alpha} - \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha)'(\tilde{\alpha} - \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha) \\ &= E(\tilde{\alpha} - \alpha_0)'(\tilde{\alpha} - \alpha_0) + 2E(\tilde{\alpha} - \alpha_0)'(\alpha_0 - \alpha) \\ &\quad + E(\alpha_0 - \alpha)'(\alpha_0 - \alpha) \end{aligned} \qquad (3.6)$$

elde edilir. Burada amaç $E(\tilde{a} - a)'(\tilde{a} - a)$ yı en küçük yapan $\tilde{a}$ değerini bulmaktır. (3.6) eşitliğinde yer alan 3. terim a yı içermediği için göz ardı edilebilir. 2. terim ise $a_0 = E_a(a / y)$ olduğu için,

$$\begin{aligned} E(\tilde{a} - a_0)'(a_0 - a) &= E_y\{E_a[(\tilde{a} - a_0)'(a_0 - a)/y]\} \\ &= E_y\{(\tilde{a} - a_0)'[a_0 - E_a(a / y)]\} \\ &= E_y\{(\tilde{a} - a_0)'(a_0 - a_0)\} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.6) eşitliği,

$$E(\tilde{a} - a)'(\tilde{a} - a) = E(\tilde{a} - a_0)'(\tilde{a} - a_0)' + \tilde{a} \text{ dan bağımsız terim}$$

şeklinde gösterilir. Burada $E(\tilde{a} - a)'(\tilde{a} - a)$ ifadesi negatif olamayacağı için en küçük değeri sıfır olur. Dolayısıyla $\tilde{a} = a_0$ eşitliğinden en iyi ön tahmin edici, $\tilde{a} = E(a / y)$, elde edilir.

En iyi ön tahmin edicinin özelliklerinden biri de, y rasgele vektörüne göre yansız olmasıdır. $f(y,a)$, y ve a nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu; $f(a / y)$, y verildiğinde a nın olasılık yoğunluk fonksiyonu; E_a ve V_a, a dağılımına ait sırasıyla beklenen değer ve varyans olmak üzere,

$$\begin{aligned} E[a] &= \int\int a f(y,a)\,da\,dy \\ &= \int\int a f(a / y) f(y)\,da\,dy \\ &= \int\left[\int a f(a / y)\,da\right] f(y)\,dy \\ &= \int E(a / y) f(y)\,dy \\ &= E_y[E(a / y)] \end{aligned}$$

dır. Buna göre E_y, y rasgele vektörüne göre beklenen değeri göstermek üzere en iyi ön tahmin edicinin beklenen değeri,

$$E_y(\tilde{\mathbf{a}}) = E_y[E_{\mathbf{a}/y}(\mathbf{a}/y)] = E(\mathbf{a})$$

şeklinde ifade edilir. Burada bahsedilen yansızlık ifadesi literatürde var olan parametre tahmininin yansızlığı tanımından farklıdır. Sabit etkilere ilişkin parametreler vektörü $\mathbf{b}$ nın yansız bir tahmin edicisi olabilmesi için $E(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = 0$ olmalıdır. Burada $\mathbf{b}$ değeri sabit olduğu için $E(\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{b}$ dır. Rasgele etkilere ilişkin parametreler vektörü $\mathbf{a}$ nın yansız ön tahmin edicisi ise ön tahmin edici değeri ile gerçek değer arasındaki farkın beklenen değerinin sıfıra eşit olması olarak tanımlanır. Bu durum $E(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) = 0$ şeklinde gösterilir. Burada $\mathbf{a}$ rasgele vektör olduğu için $E(\tilde{\mathbf{a}}) = E(\mathbf{a})$ olarak ifade edilir.

Ön tahmin edicinin diğer bir özelliği ise, ön tahmin hatası olan $(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$ nın varyansının, y verildiğinde $\mathbf{a}$ nın varyansının beklenen değerine eşit olmasıdır. Bu durumda,

$$Var(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) = E_y[Var(\mathbf{a}/y)] \tag{3.7}$$

dır. Ayrıca,

$$Cov(\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{a}') = Var(\tilde{\mathbf{a}}) \text{ ve } Cov(\tilde{\mathbf{a}}, y') = Cov(\mathbf{a}, y') \tag{3.8}$$

elde edilir. $Var(g) = E_y[Var(g/y)] + Var_y[E(g/y)]$ eşitliği yardımıyla (3.7) eşitliği bulunur (Bkz. Ek 4). Burada $g = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) &= E_y\{Var[(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})/y]\} + Var_y\{E[(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})/y]\} \\ &= E_y\{Var[(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})/y]\} + Var_y[E(\tilde{\mathbf{a}}/y) - E(\mathbf{a}/y)] \end{aligned}$$

elde edilir. $E(\tilde{\alpha} / y) = \tilde{\alpha} = E(\alpha / y)$ eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{\alpha} - \alpha) &= E_y\{Var[(\tilde{\alpha} - \alpha)/y]\} + Var_{\alpha}(0) \\
&= E_y\{E[(\tilde{\alpha} - \alpha)^2/y]\} - E_y\{E[(\tilde{\alpha} - \alpha)^2/y]^2\} \\
&= E_y\{E[(\tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha}\alpha + \alpha^2)/y]\} - E_y[E(\tilde{\alpha}/y) - E(\alpha/y)]^2 \\
&= E_y\{E(\tilde{\alpha}^2/y - 2\tilde{\alpha}\alpha/y + \alpha^2/y)\} \\
&= E_y\{[E(\alpha/y)]^2/y - 2E[(E(\alpha/y)\alpha)/y)] + E(\alpha^2/y)\} \\
&= E_y\{[E(\alpha/y)]^2 - 2E(\alpha/y)E(\alpha/y) + E(\alpha^2/y)\} \\
&= E_y\{E(\alpha^2/y) - [E(\alpha/y)]^2\} \\
&= E_y[Var(\alpha/y)] \\
&= E_y[G - CV^{-1}C'] \\
&= G - CV^{-1}C'
\end{aligned}$$

bulunur. (3.8) eşitliğinde verilen ifadeler ise,

$$Cov(g,h) = E_y[Cov(g/y, h/y)] + Cov_y[E(g/y), E(h/y)]$$

eşitliği (Bkz. Ek 4) yardımıyla elde edilir. Burada $g = \tilde{\alpha}$ ve $h = \alpha'$ iken,

$$Cov(\tilde{\alpha}, \alpha') = E_y[Cov(\tilde{\alpha}/y, \alpha'/y)] + Cov_y[E(\tilde{\alpha}/y), E(\alpha'/y)]$$

şeklindedir. Eşitlikte verilen ilk terim, (α / y) ile beklenen değeri $E(\alpha / y) = \tilde{\alpha}$ arasındaki kovaryans olduğundan sıfıra eşittir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
Cov(\tilde{\alpha}, \alpha') &= Cov_y[E(\tilde{\alpha}/y), E(\alpha'/y)] \\
&= Cov_y(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}') = Var(\tilde{\alpha}) \\
&= Var[X\beta + CV^{-1}(y - X\beta)] \\
&= CV^{-1}Var(y - X\beta)V^{-1}C' \\
&= CV^{-1}C'
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde verilen ikinci ifade ise,

$$Cov(\mathbf{a}, y') = E_y[Cov(\mathbf{a} / y, y' / y)] + Cov_y[E(\mathbf{a} / y), E(y' / y)]$$

şeklinde bulunur (Bkz. Ek 4). Eşitlikte verilen ilk terim, $(\mathbf{a} / y)$ ile sabit olan y' / y arasındaki kovaryans olduğundan sıfıra eşittir. Buna göre,

$$Cov(\mathbf{a}, y') = Cov_y[E(\mathbf{a} / y), E(y' / y)] = Cov_y(\tilde{\mathbf{a}}, y')$$

elde edilir (Searle ve ark., 1992).

3.2. En İyi Doğrusal Ön Tahmin Edici (BLP)

En iyi ön tahmin edicinin y ye göre doğrusal olması zorunlu değildir. $\mathbf{a}$ nın en iyi ön tahmin edicisini elde etmek için, $\mathbf{a}$ nın ön tahmin edicisi $\tilde{\mathbf{a}}$ nın, y nin doğrusal bir fonksiyonu olduğu varsayılır. a $q \times 1$ boyutlu bir vektör, B ise $q \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{a}} = a + By \tag{3.9}$$

olsun. En iyi doğrusal ön tahmin ediciyi belirlemek için, $E(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})'(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$ ifadesini en küçük yapan a vektörü ve B matrisi bulunur. En küçük değeri elde etmek için hata kareler ortalamasının, sırasıyla a vektörü ve B matrisine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir.

(3.9) eşitliği $q = E(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})'(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$q = E(a + By - \mathbf{a})'(a + By - \mathbf{a})$$

elde edilir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
q &= E(a+By-\alpha)'(a+By-\alpha) \\
&= E[a'a+2a'(By-\alpha)+(By-\alpha)'(By-\alpha)] \\
&= E(a'a)+2a'E(By-\alpha)+E[(By-\alpha)'(By-\alpha)] \\
&= a'a+2a'BE(y)-2a'E(\alpha)+E[(By-\alpha)'(By-\alpha)] \\
&= a'a+2a'BE(y)-2a'E(\alpha)+E(y'B'By)-E(y'B'\alpha)-E(\alpha'By)+E(\alpha'\alpha)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

şeklindedir. $Var(y)=V$ ve $E(y)=\mu_y$ olmak üzere Ek 5 ten,

$$E(y'B'By)=tr(B'BV)+\mu_y'B'B\mu_y \tag{3.11}$$

olarak bulunur. $Cov(\alpha,y')=GZ'=C, E(\alpha)=\mu_\alpha$ ve $E(y)=\mu_y$ olmak üzere (3.10) eşitliğinde verilen diğer karesel formlar Ek 5 yardımıyla,

$$E(y'B'\alpha)=tr(B'C)+\mu_y'B'\mu_\alpha=tr(B'GZ')+\mu_y'B'\mu_\alpha \tag{3.12}$$

$$E(\alpha'By)=tr(BC')+\mu_\alpha'B\mu_y=tr(BZG)+\mu_\alpha'B\mu_y \tag{3.13}$$

$$E(\alpha'\alpha)=tr(G)+\mu_\alpha'\mu_\alpha \tag{3.14}$$

olarak bulunur. (3.12), (3.13) ve (3.14) eşitlikleri (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
q = {} & a'a+2a'B\mu_y-2a'\mu_\alpha+tr(BVB')+\mu_y'B'B\mu_y-tr(B'GZ')-\mu_y'B'\mu_\alpha \\
& -tr(BZG)-\mu_\alpha'B\mu_y+tr(G)+\mu_\alpha'\mu_\alpha
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadenin a vektörüne göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial q}{\partial a}=2a+2B\mu_y-2\mu_\alpha=0$$

$$a = \mu_a - B\mu_y \tag{3.15}$$

ve B matrisine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial q}{\partial B} = 2a\mu_y' + 2BV + B(\mu_y\mu_y' + \mu_y\mu_y') - GZ' - \mu_a\mu_y' - GZ' - \mu_a\mu_y' = 0 \tag{3.16}$$

elde edilir (Bkz. Ek 6). (3.15) eşitliğinde yer alan ifade (3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial q}{\partial B} = 2(\mu_a - B\mu_y)\mu_y' + 2BV + B(\mu_y\mu_y' + \mu_y\mu_y') - GZ' - \mu_a\mu_y' - GZ' - \mu_a\mu_y' = 0$$
$$\frac{\partial q}{\partial B} = 2BV - 2GZ' = 0 \Rightarrow B = GZ'V^{-1} \tag{3.17}$$

bulunur. (3.15) ve (3.17) de elde edilen a vektörü ve B matrisi kullanılarak en iyi doğrusal ön tahmin edici,

$$\tilde{a} = a + By = \mu_a - B\mu_y + GZ'V^{-1}y = \mu_a + GZ'V^{-1}(y - \mu_y)$$

şeklindedir. $C = GZ'$ olmak üzere,

$$\tilde{a} = \mu_a + CV^{-1}(y - \mu_y) \tag{3.18}$$

olarak verilir. Dikkat edilirse (3.18) ile bulunan ifade $\mu_a = 0$ ve $\mu_y = X\beta$ iken (3.5) te verilen en iyi ön tahmin ediciye eşittir. Buna göre en iyi doğrusal ön tahmin edicinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(\tilde{\alpha}) &= E[\mu_\alpha + CV^{-1}(y - \mu_y)] \\ &= \mu_\alpha + CV^{-1}[E(y) - \mu_y] \\ &= \mu_\alpha + CV^{-1}(\mu_y - \mu_y) \\ &= \mu_\alpha \end{aligned} \tag{3.19}$$

dır. Burada $E(\alpha) = \mu_\alpha = E(\tilde{\alpha})$ olduğu için en iyi doğrusal ön tahmin edici yansız bir ön tahmin edicidir. $\tilde{\alpha}$ nın varyansı ise,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\alpha}) &= Var[\mu_\alpha + CV^{-1}(y - \mu_y)] \\ &= Var[CV^{-1}(y - \mu_y)] \\ &= CV^{-1}Var(y)V^{-1}C' \\ &= CV^{-1}C' \end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir (Searle ve ark., 1992).

3.3. En İyi Doğrusal Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP)

Rasgele modellerde en iyi ön tahmin edici ve en iyi doğrusal ön tahmin edici ile rasgele etkiye sahip değişkenlerin tahmini yapılır. Hem sabit hem de rasgele etkilerin tahminini birlikte elde edebilmek amacıyla en iyi doğrusal yansız ön tahmin edici geliştirilmiştir. (2.2) de verilen doğrusal karma model için Henderson (1984) ve Searle ve ark. (1992), $E(\alpha) = 0$ iken β ve α yı birlikte içeren rasgele vektörü,

$$w = L'\beta + \alpha \tag{3.21}$$

olarak ifade etmiştir. Burada L' $q \times p$ boyutlu bilinen herhangi bir matris, $L'\beta$ tahmin edilebilir bir fonksiyondur. Rasgele ve sabit etkilerin her ikisini içeren w rasgele değişkeni için elde edilen tahmine ön tahmin edici denir. $\tilde{w}$ ön tahmin edici olmak üzere aşağıda verilen özellikleri sağlar.

1) **En iyi:** Hata kareler ortalaması $E(\tilde{w}-w)'(\tilde{w}-w)$ yı en küçük yapan değerdir.
2) **Doğrusal:** $\tilde{w}=a+By$ ifadesi y'nin doğrusal bir fonksiyonudur.
3) **Yansızlık:** $E(\tilde{w})=E(w)$ iken $\tilde{w}$ yansızdır.

En iyi, doğrusal ve yansız ön tahmin edici $\tilde{w}$ elde edilmek istensin. w rasgele değişkeninin beklenen değeri (3.21) eşitliği yardımıyla,

$$E(w)=E(L'\beta+\alpha)=L'\beta \tag{3.22}$$

elde edilir. Dolayısıyla w ve y nin dağılımı,

$$\begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} L'\beta \\ X\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G & C \\ C' & V \end{bmatrix} \right)$$

olmak üzere ön tahmin edici $\tilde{w}$ nın beklenen değeri ise,

$$E(\tilde{w})=E(a+By)=a+BX\beta \tag{3.23}$$

dır. $\tilde{w}$ nın yansız bir ön tahmin edici olması $E(\tilde{w})=E(w)$ eşitliğinin sağlanması ile mümkündür. Dolayısıyla (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden,

$$L'\beta=a+BX\beta \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) de $a=0$ iken $L'=BX$ dir. Bu durumda ön tahmin edici ise $\tilde{w}=By$ olarak ifade edilir. Dolayısıyla,

β yansızdır $\Leftrightarrow$ $BX=L'$

dır. $BX = L'$ kısıtını sağlayan ve $E(\tilde{w} - w)'(\tilde{w} - w)$ ifadesini en küçük yapan $\tilde{w}$ değeri w nın en iyi doğrusal yansız ön tahmin edicisidir. Bu durumda,

$$Var(\tilde{w} - w) = E(\tilde{w} - w)'(\tilde{w} - w)$$
$$Var(By - L'b - a) = BVar(y)B' + Var(a) - 2BCov(a, y')$$
$$= BVB' + G - 2BC$$

fonksiyonunu $BX = L'$ kısıtı altında en küçük yapan değeri bulmak için Lagrange çarpanı m kullanılarak,

$$f(B,m) = BVB' + G - 2BC + 2m'(X'B' - L) \tag{3.25}$$

yardımcı fonksiyonu yazılır. (3.25) eşitliğinin sırasıyla B ve m 'ye türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Böylece $E(\tilde{w} - w)'(\tilde{w} - w)$ ifadesini en küçük yapan B ve m değerleri belirlenir.

$$\frac{\partial f(B,m)}{\partial B} = 2VB' - 2C + 2Xm = 0 \qquad \frac{\partial f(B,m)}{\partial m} = 2X'B' - 2L = 0$$

$$VB' = C - Xm \qquad X'B' = L$$
$$B' = V^{-1}C - V^{-1}Xm$$

$B' = V^{-1}C - V^{-1}Xm$, $X'B' = L$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$X'V^{-1}C - X'V^{-1}Xm = L$$

ve $(X'V^{-1}X)$ in tersinin olduğu (nonsingular) varsayımı altında,

$$m = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}C) - (X'V^{-1}X)^{-1}L \tag{3.26}$$

bulunur. $(X'V^{-1}X)$ ifadesinin tersinin olmadığı (singular) durumlarda Searle ve ark. (1992) m çarpanını, $m=(X'V^{-1}X)^{-}(X'V^{-1}C)-(X'V^{-1}X)^{-}L$ şeklinde göstermiştir. m çarpanı $B'=V^{-1}C-V^{-1}Xm$ ifadesinde yerine yerleştirildiğinde,

$$B'=V^{-1}C-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C+V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}L \tag{3.27}$$

elde edilir. En iyi doğrusal yansız ön tahmin edici $\tilde{w}=By$,

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= CV^{-1}y-CV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y+L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y \\ &= CV^{-1}[y-X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y]+L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak bulunur. $X\beta$ nın genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile bulunan en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi,

$$X\hat{\beta}=X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y \tag{3.29}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (3.28) de verilen en iyi doğrusal ön tahmin edici,

$$\tilde{w}=L'\hat{\beta}+C'V^{-1}(y-X\hat{\beta}) \tag{3.30}$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}=(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y$ ve $\tilde{\alpha}=CV^{-1}(y-X\hat{\beta})$ dır.

w nın ön tahmin edicisi $\tilde{w}$ iki bölümden oluşur. İlk kısım $L'\beta$ nın en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi $L'\hat{\beta}$ dan ikinci kısım ise $E(\alpha)=0$ iken $X\beta$ yerine $X\hat{\beta}$ alınarak bulunan α nın en iyi doğrusal ön tahmin edicisi $C'V^{-1}(y-X\hat{\beta})$ dan oluşur.

$Var(\tilde{w})$ nın elde edilmesini sağlayan bazı varyans-kovaryans eşitlikleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} Var(L'\hat{\beta}) &= L'Var(\hat{\beta})L \\ &= L'Var[(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y]L \\ &= L'(X'V^{-1}X)^{-}(X'V^{-1}X)(X'V^{-1}X)^{-}L \\ &= L'(X'V^{-1}X)^{-}L \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\alpha}) &= Var[CV^{-1}(y - X\hat{\beta})] \\ &= CV^{-1}Var(y - X\hat{\beta})V^{-1}C' \\ &= CV^{-1}\{Var(y) + Var(X\hat{\beta}) - 2Cov[y,(X\hat{\beta})']\}V^{-1}C' \end{aligned}$$

$Var(\tilde{\alpha})$ yı elde etmek için y ve $X\hat{\beta}$ arasındaki kovaryans bulunmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Cov[y,(X\hat{\beta})'] &= Cov\{y,[X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y]'\} \\ &= Cov(y,y')V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X' \\ &= VV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X' \\ &= X(X'V^{-1}X)^{-}X' \end{aligned}$$

dır. Bu ifade $Var(\tilde{\alpha})$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\alpha}) &= CV^{-1}[V + X(X'V^{-1}X)^{-}X' - 2X(X'V^{-1}X)^{-}X']V^{-1}C' \\ &= CV^{-1}[V - X(X'V^{-1}X)^{-}X']V^{-1}C' \\ &= CV^{-1}C' - CV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C' \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $P = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}$ $n' n$ boyutlu simetrik matris ve $C = GZ'$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\alpha}) &= GZ'V^{-1}[I - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]ZG \\ &= GZ'PZG \end{aligned} \tag{3.32}$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
Cov(L'\hat{\beta},\tilde{\alpha}') &= Cov\{L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y,[CV^{-1}(y-X\hat{\beta})]'\} \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}Cov[y,(y-X\hat{\beta})']V^{-1}C' \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}Cov\{y,[y-X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y]'\}V^{-1}C' \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}Cov(y,y')[I-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X']V^{-1}C' \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}V[I-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X']V^{-1}C' \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C'-L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C' \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C'-L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C' \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

(3.31), (3.32) ve (3.33) eşitlikleri yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
Var(\tilde{w}) &= Var(L'\hat{\beta}+\tilde{\alpha}) \\
&= Var(L'\hat{\beta})+Var(\tilde{\alpha})+2Cov(L'\hat{\beta},\tilde{\alpha}') \\
&= L'(X'V^{-1}X)^{-}L+CV^{-1}C'-CV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C'
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

şeklinde elde edilir.

$$
\begin{aligned}
Cov(\tilde{\alpha},\alpha') &= Cov[CV^{-1}(y-X\hat{\beta}),\alpha'] \\
&= CV^{-1}Cov[(y-X\hat{\beta}),\alpha'] \\
&= CV^{-1}Cov\{[y-X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y],\alpha'\} \\
&= CV^{-1}[I-X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}]Cov(y,\alpha') \\
&= CV^{-1}[I-X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}]C' \\
&= Var(\tilde{\alpha})
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\tilde{\alpha}-\alpha) &= Var(\tilde{\alpha})+Var(\alpha)-2Cov(\tilde{\alpha},\alpha') \\
&= Var(\tilde{\alpha})+Var(\alpha)-2Var(\tilde{\alpha}) \\
&= Var(\alpha)-Var(\tilde{\alpha}) \\
&= G-GZ'PZG
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

$$\begin{aligned} Cov(L'\hat{\beta},\alpha') &= Cov[L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}y,\alpha'] \\ &= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}Cov(y,\alpha') \\ &= L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C' \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$Var(\tilde{w}-w) = Var(\tilde{w}) + Var(w) - Cov(\tilde{w},w') - Cov(w,\tilde{w}')$$

Bu ifadede $Var(\tilde{w})$, (3.34) eşitliğinde verilmişti. $Var(w)$ ve $Cov(\tilde{w},w')$ terimleri ise sırasıyla,

$$Var(w) = Var(L'\beta + \alpha) = Var(\alpha) = G$$

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{w},w') &= Cov[L'\hat{\beta} + \tilde{\alpha},(L'\beta+\alpha)'] \\ &= Cov(L'\hat{\beta},\beta'L) + Cov(L'\hat{\beta},\alpha') + Cov(\tilde{\alpha},\beta'L) + Cov(\tilde{\alpha},\alpha') \\ &= Cov(L'\hat{\beta},\alpha') + Var(\tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen eşitliklerin $Var(\tilde{w}-w)$ da yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{w}-w) = {} & Var(L'\hat{\beta}) + Var(\tilde{\alpha}) - Cov(L'\hat{\beta},\alpha') - Var(\tilde{\alpha}) \\ & - Cov(\alpha,\hat{\beta}'L) \end{aligned}$$

olur. (3.31), (3.36) ve (3.37) nin yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} Var(\tilde{w}-w) &= Var(L'\hat{\beta}) - Var(\tilde{\alpha}-\alpha) - Cov(L'\hat{\beta},\alpha') - Cov(\alpha,\hat{\beta}'L) \\ &= L'(X'V^{-1}X)^{-}L - G + GZ'PZG - L'(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1}C' \\ &\quad - CV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}L \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4. Henderson ın Karma Model Eşitlikleri

Henderson ve ark. (1959), en iyi doğrusal yansız tahmin edici BLUE $(X\beta)$ ve en iyi doğrusal ön tahmin edicisi BLUP (α) yı eşanlı olarak veren bir denklem sistemi geliştirmiştir. Normallik varsayımı altında Ek 2 den $f(y/\alpha) \sim N(X\beta + Z\alpha, R)$ bulunur. Bu durumda α ve y nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (3.3) eşitliğine denk olur. Henderson ve ark. (1959), (3.3) eşitliğini olabilirlik fonksiyonu olarak tanımlamıştır. Dolayısıyla bu fonksiyonu en büyük yapan parametre tahminlerinin bulunması için önce fonksiyonun logaritmasının alınması gerekir.

$$\begin{aligned}\ln f(y,\alpha) &= -\frac{1}{2}[(y - X\beta - Z\alpha)'R^{-1}(y - X\beta - Z\alpha) + \alpha'G^{-1}\alpha] - \frac{(n+q)}{2}\ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\ln|R| - \frac{1}{2}\ln|G| \\ &= -\frac{1}{2}[y'R^{-1}y - 2y'R^{-1}X\beta - 2y'R^{-1}Z\alpha + \beta'X'R^{-1}X\beta \\ &\quad + 2\beta'X'R^{-1}Z\alpha + \alpha'Z'R^{-1}Z\alpha + \alpha'G^{-1}\alpha] - \frac{(n+q)}{2}\ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\ln|R| - \frac{1}{2}\ln|G|\end{aligned} \tag{3.38}$$

Daha sonra ise β ve α vektörlerine göre türevini alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial \ln f(y,\alpha)}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}(-2X'R^{-1}y + 2X'R^{-1}X\beta + 2X'R^{-1}Z\alpha) = 0$$

$$X'R^{-1}X\beta + X'R^{-1}Z\alpha = X'R^{-1}y \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f(y,\alpha)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2}[-2Z'R^{-1}y + 2Z'R^{-1}X\beta + (Z'R^{-1}Z + Z'R^{-1}Z)\alpha \\ &\quad + (G^{-1} + G^{-1})\alpha] = 0\end{aligned}$$

$$Z'R^{-1}X\beta + Z'R^{-1}Z\alpha = G^{-1}\alpha + Z'R^{-1}y \tag{3.40}$$

(3.39) ve (3.40) eşitliklerinin matris gösterimi β ve α yerine tahmin edicileri $\hat{\beta}$ ve $\tilde{\alpha}$ nın yazılması ile,

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \tilde{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

olarak ifade edilir. Elde edilen bu eşitliklere Henderson ın karma model eşitlikleri adı verilir.

(3.41) nin ikinci eşitliğinde yer alan $\tilde{\alpha}$ değeri çekilerek (3.39) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$X'R^{-1}X\hat{\beta} + X'R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\hat{\beta}) = X'R^{-1}y$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra,

$$X'R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}X\hat{\beta} = X'R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}y \tag{3.42}$$

olur (Bkz. Ek 7). y bağımlı değişken vektörünün varyansı $V = ZGZ'+R$ nın Schur Tümleyeni yöntemine göre tersi alınırsa,

$$V^{-1} = (ZGZ'+R)^{-1} = R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1} \tag{3.43}$$

bulunur. Bu durumda (3.42) dan, $\hat{\beta}$ sabit etkilere ilişkin parametreler vektörü,

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{3.44}$$

elde edilir (Searle ve ark., 1992). Burada $(X'V^{-1}X)$ ifadesi singüler olmayan bir yapıya sahiptir. (3.44) eşitliğine göre $\hat{b}$, b nın genelleştirilmiş en iyi tahmin edicisine (BLUE) eşittir.

(3.41) in ikinci eşitliğine göre a nın en iyi ön tahmin edicisi,

$$\tilde{a} = (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\hat{b}) \tag{3.45}$$

olarak bulunur. Schur Tümleyeni yöntemine göre $(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}$ ifadesi,

$$(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1} = G - GZ'(R + ZGZ')^{-1}ZG = G - GZ'V^{-1}ZG \tag{3.46}$$

olmak üzere (3.46) eşitliği (3.45) da yerine yazılırsa,

$$\tilde{a} = GZ'R^{-1}(y - X\hat{b}) - GZ'V^{-1}ZGZ'R^{-1}(y - X\hat{b})$$

elde edilir. Burada (2.5) eşitliğine göre $ZGZ' = V - R$ olduğu için,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= GZ'R^{-1}(y - X\hat{b}) - GZ'V^{-1}(V - R)R^{-1}(y - X\hat{b}) \\ &= GZ'R^{-1}(y - X\hat{b}) - GZ'V^{-1}VR^{-1}(y - X\hat{b}) + GZ'V^{-1}RR^{-1}(y - X\hat{b}) \\ &= GZ'V^{-1}(y - X\hat{b})\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (2.6) da verilen $C = GZ'$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\tilde{a} = CV^{-1}(y - X\hat{b}) \tag{3.47}$$

bulunur. (3.44) eşitliği dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= CV^{-1}[y - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y] \\ &= CV^{-1}[I - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]y \\ &= C[V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]y\end{aligned} \tag{3.48}$$

olarak ifade edilir.

Bölüm 4.3 te a nın en iyi doğrusal ön tahmin edicisi $\tilde{a} = CV^{-1}(y - X\hat{b})$ şeklinde elde edilmişti. Burada $\tilde{a}$, hata kareler ortalamasını en küçük yapan değer, y bağımlı değişken vektörünün doğrusal bir fonksiyonu ve ön tahmin değeri ile gerçek değer arasındaki farkın beklenen değerinin sıfır olması gibi özellikleri sağladığı için en iyi doğrusal yansız ön tahmin edicidir (Searle ve ark., 1992).

Henderson ve ark. (1959), (3.41) de verilen $\hat{b}$ değerinin genelleştirilmiş en küçük kareler çözümüne ve Henderson (1973) ise $\tilde{a}$ değerinin (3.47) de verilen ön tahmin ediciye eşit olduğunu ispatlamıştır (Bkz. Ek 8).

4. VARYANS BİLEŞENLERİNİN TAHMİNİ

Doğrusal karma modellerde rasgele etkilere karşılık gelen parametrelerin ön tahmin edicisi $\tilde{a}$ ile sabit etkilere karşılık gelen parametrelerin tahmin edicisi $\hat{b}$ nın elde edilebilmesi için bağımlı değişken vektörü y nin varyans-kovaryans matrisi V nin bilinmesi gerekir. V bilinmiyor ise, $V = ZGZ'+R$ eşitliğindeki a nın varyansı G ve hata varyansı R nin tahmin edilmesi gerekir. V yi oluşturan bu iki matrisin tahminine varyans bileşenlerinin tahmini denir.

Doğrusal karma modellerde varyans bileşenlerinin tahmini için en sık kullanılan yöntemler, en çok olabilirlik (ML) ve kısıtlı en çok olabilirlik (REML) dir. Her iki yöntem de büyük örneklem özelliklerine sahip olup normallik varsayımını sağlar.

Bu bölümde, (2.8) de verilen varyans bileşenleri modeli için, en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilecek parametreler b , s_e^2 ve $i = 1,...,r$ için s_i^2 iken kısıtlı en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilecek parametreler ise s_e^2 ve $i = 1,...,r$ için s_i^2 dir.

4.1. En Çok Olabilirlik (ML) Yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi, Hartley ve Rao (1967) tarafından önerilmiştir. En çok olabilirlik yönteminin uygulanabilmesi için X ve $i = 1,...,r$ iken Z_i tasarım matrislerinin tam ranklı, $rank(X) = p$ ve $rank(Z_i) = q_i$, olduğu ve verilerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Genellikle varyans analizinde her bir bağımlı değişken vektörü y , i_inci rasgele etkinin bir düzeyi ile ilişkilidir. Bu yüzden Z_i tasarım matrisinin her satırının bir elemanı 1, diğer q_i - 1 elemanı 0 değerini alır. Dolayısıyla Hartley ve Rao (1967), $Z_i'Z_i$ nin q_i ´ q_i boyutlu köşegen bir matris formunda olduğunu belirtmiştir.

$\alpha_0 = e, q_0 = n$ ve $Z_0 = I_n$ olmak üzere (2.8) eşitliği,

$$y = X\beta + \sum_{i=0}^{r} Z_i \alpha_i \tag{4.1}$$

olarak ifade edilir. Burada " i için $E(\alpha_i) = 0$, $Var(\alpha_i) = \sigma_i^2 I_{q_i}$ ve $i \neq h$ için $Cov(\alpha_i, \alpha_h') = 0$ dır. e hata terimi ise $E(e) = 0$, $Var(e) = \sigma_e^2 I_n$ ve $Cov(\alpha_i, e') = 0$ olarak tanımlanır. Buna göre $y_{n\times 1}$ bağımlı değişken vektörünün ortalama vektörü $X\beta$ ve varyans-kovaryans matrisi $V = \sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i' \sigma_i^2 + \sigma_e^2 I_n = \sum_{i=0}^{r} Z_i Z_i' \sigma_i^2$ olarak elde edilir. Normallik varsayımı altında,

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|V|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(y - X\beta)'V^{-1}(y - X\beta)} \tag{4.2}$$

olarak tanımlanan (4.2) eşitliği, β sabit etkilere ilişkin parametreler vektörü ile V varyans bileşenleri matrisinin parametrelerinin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

$$L = L(\beta, V / y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|V|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(y - X\beta)'V^{-1}(y - X\beta)} \tag{4.3}$$

(4.3) de verilen L fonksiyonunu maksimize edebilmek için, bu fonksiyonun logaritması alındıktan sonra $\Omega = \{(\beta, \sigma^2) : -\infty < \beta_i < \infty; \sigma_e^2 > 0 \text{ ve } \sigma_i^2 \geq 0, i = 0,1,...,r\}$ da verilen parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\ln L(\beta, V / y) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|V| - \frac{1}{2}(y - X\beta)'V^{-1}(y - X\beta) \tag{4.4}$$

Böylece (4.4) de verilen log-olabilirlik fonksiyonunun β ya göre türevi Ek 6 nın (a) ve (b) özelliğinden,

$$\frac{\partial \ln L(\beta, V/y)}{\partial \beta} = -X'V^{-1}y + X'V^{-1}X\beta = 0 \tag{4.5}$$

bulunur. $\ln L(\beta, V/y)$ fonksiyonunun $\sigma_i^2 \quad i = 0,1,...,r$ ye göre türevini almak için önce V varyans-kovaryans matrisinin σ_i^2 ye göre türevi alınır.

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_i^2} = Z_i Z_i' \quad i = 0,1,...,r \tag{4.6}$$

Buna göre (4.4) eşitliğinin $\sigma_i^2 \quad i = 0,1,...,r$ ye göre türevi Ek 6 nın (d) özelliğinden,

$$\frac{\partial \ln L(\beta, V/y)}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_i Z_i') + \frac{1}{2}(y - X\beta)'V^{-1}Z_i Z_i' V^{-1}(y - X\beta) = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.7) eşitliklerinden elde edilen en çok olabilirlik eşitlikleri sırasıyla,

$$X'\hat{V}^{-1}y - X'\hat{V}^{-1}X\hat{\beta} = 0 \tag{4.8}$$

$$tr(\hat{V}^{-1}Z_i Z_i') - (y - X\hat{\beta})'\hat{V}^{-1}Z_i Z_i'\hat{V}^{-1}(y - X\hat{\beta}) = 0 \quad i = 0,1,...,r \tag{4.9}$$

şeklinde olur. (4.9) eşitliğini daha basit bir formda ifade etmek için $P \quad n' \; n$ boyutlu simetrik matrisine gerek duyulur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1} \tag{4.10}$$

(4.8) eşitliği dikkate alındığında (4.10) eşitliği,

$$\hat{V}^{-1}(y - X\hat{b}) = \hat{P}y \tag{4.11}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.8) ve (4.9) da verilen en çok olabilirlik denklemleri,

$$X'\hat{V}^{-1}X\hat{b} = X'\hat{V}^{-1}y \tag{4.12}$$

ve $tr(\hat{V}^{-1}Z_iZ_i')$ ifadesi $(r+1)'$ 1 boyutlu bir sütun vektör olmak üzere Ek 1 deki gösterimlerin kullanılması ile,

$$\{_c tr(\hat{V}^{-1}Z_iZ_i')\}_{i=0}^{r} = \{_c y'\hat{P}Z_iZ_i'\hat{P}y\}_{i=0}^{r} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) eşitliğinde verilen $\hat{V}^{-1}$ ifadesi, varyans bileşenlerine göre doğrusal olmadığı için çözümü zordur. Bu nedenle (4.13) eşitliğine ilişkin tahminleri elde etmek için iteratif yöntemler uygulanır. Ancak bu yöntemler kullanılırken bir veya birden fazla parametre değeri negatif çıkabilmektedir. Varyans bileşenlerinin negatif tahmin problemini ortadan kaldırabilmek amacıyla Thompson (1962) bir algoritma geliştirmiştir. Bu algoritmaya göre negatif varyans değerine sahip rasgele etkilere ilişkin parametre modelden çıkarılır. İndirgenmiş model üzerinden tekrar tahmin yapılır. Ancak yeni varyans bileşenlerinin tahmini kontrol edilmelidir. Negatif varyans değerine sahip tahminler için prosedür tekrarlanır.

4.1.1. Hartley- Rao Formu

Hartley ve Rao (1967) olabilirlik fonksiyonunu H matrisi cinsinden ifade etmiştir. Buna göre (2.9) eşitliğine göre V^{-1} matrisi**,**

$$V^{-1} = H^{-1}/\sigma_e^2 \tag{4.14}$$

dır. Hartley-Rao (1967) formu kullanılarak tahmin edilecek parametreler β, σ_e^2 ve $i = 0,1,...,r$ için γ_i dir.

$i = 0$ olmak üzere $\sigma_0^2 = \sigma_e^2$ ve $Z_0 = I$ varsayımı altında (4.13) eşitliği,

$$tr(\hat{V}^{-1}) = y'\hat{P}^2 y \tag{4.15}$$

olarak ifade edilir. (4.11) eşitliği (4.15) te yerine yazılırsa,

$$tr(\hat{V}^{-1}) = (y - X\hat{\beta})'\hat{V}^{-2}(y - X\hat{\beta}) \tag{4.16}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinde verilen V^{-1} ifadesi (4.16) da yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yazılırsa,

$$tr(\hat{H}^{-1}) = (y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-2}(y - X\hat{\beta})/\hat{\sigma}_e^2 \tag{4.17}$$

elde edilir. Böylece (4.17) eşitliğinden σ_e^2 nin tahmini,

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-2}(y - X\hat{\beta})}{tr(\hat{H}^{-1})} \tag{4.18}$$

olur.

$i = 0$ dan farklı olduğu durumlar için, (4.13) eşitliğinin her iki tarafı $\hat{\sigma}_i^2$ ifadesi ile çarpılır ve tüm i değerleri için toplanırsa,

$$tr(\hat{V}^{-1}\sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i'\hat{\sigma}_i^2) = y'\hat{P}(\sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i'\hat{\sigma}_i^2)\hat{P}y \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.11), (4.14) eşitliği ve $\sum_{i=1}^{r} Z_i Z_i' \sigma_i^2 = V - \sigma_e^2 I = (H - I)\sigma_e^2$ ifadesi yardımıyla (4.19) eşitliği,

$$tr[\hat{H}^{-1}\hat{\sigma}_e^{-2}(\hat{H} - I)\hat{\sigma}_e^2] = (y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-1}(\hat{H} - I)\hat{H}^{-1}\hat{\sigma}_e^{-2}(y - X\hat{\beta}) \tag{4.20}$$

olarak bulunur. (4.20) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$n\hat{\sigma}_e^2 = (y - X\hat{\beta})'H^{-1}(y - X\hat{\beta}) + tr(\hat{H}^{-1})\left[\hat{\sigma}_e^2 - \frac{(y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-2}(y - X\hat{\beta})}{tr(\hat{H}^{-1})}\right] \tag{4.21}$$

olarak elde edilir.

(4.18) eşitliğinde verilen $\hat{\sigma}_e^2$ ifadesi (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa, bu eşitliğin sağ tarafında yer alan ifade sıfıra eşit olur. Buna göre,

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-2}(y - X\hat{\beta})}{tr(\hat{H}^{-1})} = \frac{(y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-1}(y - X\hat{\beta})}{n} \tag{4.22}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda Hartley ve Rao (1967) ya göre en çok olabilirlik denklemleri,

$$X'\hat{V}^{-1}X\hat{\beta} = X'\hat{V}^{-1}y \tag{4.23}$$

$i = 0$ için

$$\hat{\sigma}_e^2 = (y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-1}(y - X\hat{\beta})/n \tag{4.24}$$

ve $i = 1,..r$ için

$$\{_c tr(\hat{H}^{-1}Z_iZ_i')\}_{i=1}^{r} = \{_c (y - X\hat{\beta})'\hat{H}^{-1}Z_iZ_i'\hat{H}^{-1}(y - X\hat{\beta})/\hat{\sigma}_e^2\}_{i=1}^{r} \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Ancak bu tahmin edicilerin en çok olabilirlik tahmin edicisi olması için Hessian[2] matrisinin negatif tanımlı bir matris olması ve (4.4) eşitliği için verilen parametre kümesini sağlaması gerekir. Buna göre (4.4) eşitliğinin β ve σ_i^2 parametrelerine göre ikinci dereceden türevi Ek 6 dan,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\beta'} = -X'V^{-1}X \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma_i^2\partial\sigma_j^2} = \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') - (y - X\beta)'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}(y - X\beta) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\sigma_i^2} = -X'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}(y - X\beta) \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. Buna göre Hessian matrisi, H,

$$H = \begin{bmatrix} -X'V^{-1}X & -X'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}(y - X\beta) \\ sim & \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') - (y - X\beta)'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}(y - X\beta) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

olur.

[2] $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{n' n}$ olarak tanımlı matris fonksiyonuna f fonksiyonunun Hessian matrisi denir.

4.1.2. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicilerinin Asimptotik Varyans-Kovaryans Matrisleri

En çok olabilirlik yöntemi büyük örneklem özelliğine sahiptir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen tahminlerin asimptotik varyans-kovaryans matrisleri her zaman mevcuttur. Asimptotik varyans-kovaryans matrisi, bilgi matrisinin tersine eşittir ve bu matris β ve σ^2 parametreleri için,

$$I\begin{bmatrix}\beta\\ \sigma^2\end{bmatrix} = -E\begin{bmatrix}l_{\beta\beta'} & l_{\beta\sigma^2}\\ l_{\sigma^2\beta'} & l_{\sigma^2\sigma^2}\end{bmatrix} \tag{4.30}$$

şeklinde ifade edilir. Ek 5 den,

$$-E(l_{\beta\beta'}) = E(X'V^{-1}X) = X'V^{-1}X \tag{4.31}$$

$$-E(l_{\beta\sigma_i^2}) = X'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}E(y-X\beta) = 0 \qquad i = 0,1,...,r \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}-E(l_{\sigma_i^2\sigma_j^2}) &= -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') + E[(y-X\beta)'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}(y-X\beta)]\\ &= -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') + tr[V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}Cov(y-X\beta)]\\ &\quad + E(y-X\beta)'V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}E(y-X\beta)\\ &= -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') + tr[V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j'V^{-1}V]\\ &= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j') \qquad i,j = 0,1,...,r\end{aligned} \tag{4.33}$$

olarak elde edilir. Buna göre (4.30) da verilen bilgi matrisi,

$$I\begin{bmatrix}\beta\\ \sigma^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'V^{-1}X & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\{tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j')\}_{i,j=0}^{r}\end{bmatrix} \tag{4.34}$$

dır. Bilgi matrisinin tersi ise parametre tahminlerinin varyans-kovaryans matrisine eşittir:

$$Var\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\sigma}^2\end{bmatrix}\cong I\begin{bmatrix}\beta\\ \sigma^2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}(X'V^{-1}X)^{-1} & 0\\ 0 & 2[\{tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j')\}_{i,j=0}^{r}]^{-1}\end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Bu tahmin edicilerin asimptotik varyans-kovaryans matrisleri $n \to \infty$ iken,

$$Var(\hat{\beta}) \to (X'V^{-1}X)^{-1} \tag{4.36}$$

$$Kov(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2) \to 0 \tag{4.37}$$

$$Var(\hat{\sigma}^2) \to 2[\{tr(V^{-1}Z_iZ_i'V^{-1}Z_jZ_j')\}_{i,j=0}^{r}]^{-1} \tag{4.38}$$

olur (Searle ve ark., 1992).

4.2. Kısıtlı En Çok Olabilirlik (REML) Yöntemi

Kısıtlı en çok olabilirlik yöntemi, Thompson (1962) tarafından geliştirilmiş olup Patterson ve Thompson (1971) tarafından doğrusal karma modellere uyarlanmıştır.

Genel olarak, en çok olabilirlik yönteminde, yanlı ve en küçük varyansa sahip olmayan tahminler elde edildiği veya varyans bileşenlerinin tahmininin parametre

tahminlerinden daha önemli olduğu durumlarda kısıtlı en çok olabilirlik yöntemi tercih edilir.

Kısıtlı en çok olabilirlik yönteminde, sabit etkili parametreyi içermeyen y nin doğrusal kombinasyonlarının, $k'y$, olabilirlik fonksiyonu en büyük yapılır. Dolayısıyla, (2.2) modelinde $\mathbf{b}$ terimini yok etmek amacıyla model herhangi bir k vektörü ile çarpılır:

$$k'y = k'X\mathbf{b} + k'Z\mathbf{a}^{*} \tag{4.39}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}$ olmak üzere $\mathbf{a}^{*} = (\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_r)'$ formundadır. (4.39) eşitliğinin sabit etkili parametre vektörü $\mathbf{b}$ yı içermemesi için,

$$k'X\mathbf{b} = 0 \qquad \text{" } \mathbf{b} \text{ için} \tag{4.40}$$

kısıtı getirilir. Buna göre,

$$k'X = 0 \tag{4.41}$$

dır. Böylece X matrisinin sütunlarına dik bir k vektörü elde edilir (Bkz. Ek 10).

Teorem: (Searle ve ark., 1992) X $n\acute{}$ p boyutlu ve rankı r olan bir matris olmak üzere, $k'X = 0$ kısıtını sağlayan $n - r$ tane doğrusal bağımsız k' vektörü vardır. $n - r$ tane doğrusal bağımsız k' vektörü K' matrisinin satırları olmak üzere, K' $n - r$ tam satır rankına sahip olduğunda,

$$K'X = 0 \tag{4.42}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca bazı C matrisleri için $K' = C'M$ olarak gösterilir.

Teorem: (Searle ve ark., 1992) K' tam satır rankına sahip bir matris olmak üzere $K'X = 0$ ise ve V pozitif tanımlı bir matris olmak üzere, $K(K'VK)^{-1}K' = P$ olarak ifade edilir. Burada P $n \acute{} n$ boyutlu simetrik matris olup (4.10) eşitliğinde verilmiştir.

İspat: $KK^{+} = K(K'K)^{-1}K'$ ve $XX^{+} = X(X'X)^{-}X'$ matrisleri simetrik ve idempotent matrislerdir. (4.42) de verilen kısıt sağlanmak üzere $KK^{+}X = 0$ ve $XX^{+}K = 0$ eşitlikleri yazılabilir. Böylece XX^{+} ve KK^{+} matrisleri cinsinden tanımlanan T matrisi, $T = I - XX^{+} - KK^{+}$, simetrik ve idempotent bir matris olup izi,

$$\begin{aligned} tr(TT') = tr(T^2) = tr(T) &= tr(I) - tr(XX^{+}) - tr(KK^{+}) \\ &= n - r_X - r_K \\ &= n - r_X - (n - r_X) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

olarak bulunur. (4.43) de $tr(TT') = 0$ olması $T = 0$ iken mümkündür. Böylece,

$$I - XX^{+} = KK^{+} \tag{4.44}$$

eşitliği elde edilir.

V pozitif tanımlı bir matris iken her zaman $V = (V^{1/2})^2$ eşitliğini sağlayan simetrik bir $V^{1/2}$ matrisi vardır. $(V^{1/2}K)'V^{-1/2}X = 0$ ve $K'X = 0$ olduğundan K matrisi yerine $V^{1/2}K$, X matrisi yerine $V^{-1/2}X$ alınması sonucunda (4.44) eşitliğinde gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla,

$$\begin{aligned} &I - X(X'X)^{-}X = K(K'K)^{-1}K' \\ &I - V^{-1/2}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1/2} = V^{1/2}K(K'VK)^{-1}K'V^{1/2} \\ &P = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-}X'V^{-1} = K(K'VK)^{-1}K' \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

y bağımlı değişken vektörünün $y \sim N(X\beta, V)$ dağılımına sahip olduğu varsayımından ve (4.42) kısıtından yararlanarak $K'y$ vektörünün dağılımı $K'y \sim N(0, K'VK)$ dır. y vektörünün doğrusal bir kombinasyonu olan, $K'y$ vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(K'y / K'VK) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-r)/2}\left|K'VK\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(K'y)'(K'VK)^{-1}(K'y)} \tag{4.45}$$

$K'VK$ nın bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Dolayısıyla $K'y$ vektörünün kısıtlı olabilirlik fonksiyonu,

$$L_R(K'VK / K'y) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-r)/2}\left|K'VK\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(K'y)'(K'VK)^{-1}(K'y)} \tag{4.46}$$

şeklinde elde edilir. (4.46) da verilen L_R fonksiyonunu maksimize edebilmek için, bu fonksiyonun logaritması daha sonra da $\sigma^2 = [\sigma_0^2\ \sigma_1^2 ... \sigma_r^2]$ varyans bileşenlerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\begin{aligned} l_R = \ln L_R(K'VK / K'y) = &-\frac{(n-r)}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|K'VK\right| \\ &- \frac{1}{2}(y'K)(K'VK)^{-1}(K'y) \end{aligned} \tag{4.47}$$

(4.47) eşitliği, (4.10) da verilen P matrisi cinsinden yazılırsa,

$$l_R = \ln L_R(K'VK / K'y) = -\frac{(n-r)}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|K'VK\right| - \frac{1}{2}y'Py \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinin parametre kümesi,

$$W=\{\sigma^2 : \sigma_i^2 \geq 0, i=0,1,...,r\}$$

dir. (4.48) te verilen kısıtlı olabilirlik fonksiyonunun $\sigma_i^2 \quad i=0,1,...,r$ ye göre türevi alınır:

$$\frac{\partial \ln L_R(K'VK/K'y)}{\partial \sigma_i^2}=0 \qquad i=0,1,...,r \tag{4.49}$$

(4.49) eşitliğinin σ_i^2 ye göre türevini almak için önce P matrisinin σ_i^2 ye göre türevi alınır. Buna göre (4.6) eşitliği ve Ek 6 dan,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial \sigma_i^2}=\frac{\partial K(K'VK)^{-1}K'}{\partial \sigma_i^2} &= K\frac{\partial (K'VK)^{-1}}{\partial \sigma_i^2}K' \\ &= -K(K'VK)^{-1}\frac{\partial KVK'}{\partial \sigma_i^2}(K'VK)^{-1}K' \\ &= -K(K'VK)^{-1}K'\frac{\partial V}{\partial \sigma_i^2}K(K'VK)^{-1}K' \\ &= -P\frac{\partial V}{\partial \sigma_i^2}P=-PZ_iZ_i'P\end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinde verilen $\ln|K'VK|$ ifadesinin σ_i^2 ye göre türevi ise (4.6) eşitliği ve Ek 6 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma_i^2}\ln|K'VK| &= tr\left[(K'VK)^{-1}\frac{\partial (K'VK)}{\partial \sigma_i^2}\right] \\ &= tr[(K'VK)^{-1}K'Z_iZ_i'K] \qquad i=0,1,...,r\end{aligned} \tag{4.51}$$

olur. Sonuç olarak $i=0,1,...,r$ olmak üzere (4.50) ve (4.51) eşitliklerinden,

$$\frac{\partial l_R}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{1}{2} tr[(K'VK)^{-1} K'Z_i Z_i' K] - \frac{1}{2} y'PZ_i Z_i' Py$$
$$= -\frac{1}{2} tr(PZ_i Z_i') + \frac{1}{2} y'PZ_i Z_i' Py = 0 \qquad (4.52)$$

şeklinde bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$tr(\hat{P}Z_i Z_i') = y'\hat{P}Z_i Z_i'\hat{P}y \qquad i = 0,1,...,r \qquad (4.53)$$

elde edilir. Burada $\hat{P} = \hat{V}^{-1} - \hat{V}^{-1}X(X'\hat{V}^{-1}X)^{-}X'\hat{V}^{-1}$ dır. $\hat{P}$ matrisinde yer alan $\hat{V}^{-1}$ ifadesi, varyans bileşenlerine göre doğrusal olmadığı için çözümü zordur. Bu nedenle (4.53) eşitliğine ilişkin tahminleri elde etmek için iteratif yöntemler uygulanır.

(4.53) eşitliği (4.13) te verilen en çok olabilirlik eşitliği ile karşılaştırıldığında, sağ tarafta verilen ifadeler birbirine eşitken sol taraftakiler birbirinden farklıdır. Yani, $\hat{V}^{-1}$ matrisinin yerini burada $\hat{P}$ matrisi almıştır (Searle ve ark., 1992).

4.2.1. Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmin Edicilerinin Asimptotik Varyans-Kovaryans Matrisleri

Bilgi matrisi için, (4.48) eşitliğinde verilen l_R fonksiyonunun varyans bileşenlerine göre ikinci dereceden türevi,

$$\frac{\partial^2 l_R}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} = \frac{1}{2} tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i') - \frac{1}{2} y'PZ_j Z_j' PZ_i Z_i' Py - \frac{1}{2} y'PZ_i Z_i' PZ_j Z_j' Py$$
$$= \frac{1}{2} tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i') - y'PZ_j Z_j' PZ_i Z_i' Py \qquad (4.54)$$

dır. Ek 5 den (4.54) eşitliğinin negatif beklenen değeri,

$$- E\left(\frac{\partial^2 l_R}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2}\right) = -\frac{1}{2} tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i') + tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i' PV) - \beta' X' PZ_j Z_j' PZ_i Z_i' PX\beta \qquad i, j = 0,1,...,r \tag{4.55}$$

bulunur. $PX = 0$ olduğu için (4.55) eşitliği,

$$- E\left(\frac{\partial^2 l_R}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2}\right) = -\frac{1}{2} tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i') + tr(Z_j Z_j' PZ_i Z_i' PVP) \tag{4.56}$$

şeklindedir. $PVP = P$ iken gerekli işlemler yapıldığında,

$$- E\left(\frac{\partial^2 l_R}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2}\right) = \frac{1}{2} tr(PZ_j Z_j' PZ_i Z_i') \tag{4.57}$$

elde edilir. $\hat{\sigma}_R^2$, $\hat{\sigma}^2$ nin kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicisi olmak üzere,

$$Var(\hat{\sigma}_R^2) \approx [I(\sigma^2)]^{-1} \approx 2[\{_m tr(PZ_i Z_i' PZ_j Z_j')\}_{i,j=0}^{r}]^{-1} \tag{4.58}$$

bulunur. Kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisleri $n \to \infty$ iken,

$$Var(\hat{\sigma}_R^2) \to 2[\{_m tr(PZ_i Z_i' PZ_j Z_j')\}_{i,j=0}^{r}]^{-1} \tag{4.59}$$

olur. Dikkat edilirse, en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisleri ile kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik

varyans-kovaryans matrisleri benzer yapıdadır. Ancak ML yönteminde kullanılan V^{-1} matrisi yerine REML de P matrisi kullanılır (Searle ve ark., 1992).

4.3. En Çok Olabilirlik ile Kısıtlı En Çok Olabilirlik Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Her iki yöntem de, normallik varsayımı altında büyük örneklem özelliklerine sahiptir. Ancak en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak elde edilen tahminler asimptotik olarak daha etkindir ve asimptotik olarak normal dağılırlar. Ayrıca bu tahmin edicilerin birçoğu asimptotik olarak yansızdır.

En çok olabilirlik yöntemi ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemi hesaplama güçlüğü açısından değerlendirildiğinde benzerlik gösterir. Her ikisi de varyans bileşenlerine göre doğrusal olmayan bir yapı gösterir. Dolayısıyla bu yöntemlerin tahminlerini elde etmek için iteratif yöntemler uygulanır.

Kısıtlı en çok olabilirlik yönteminde; sabit etkili parametreyi içermeyen y nin doğrusal kombinasyonları ile tahmin yapılırken, en çok olabilirlik yöntemi sabit etkili parametrelerin tahmin edilmesine de olanak sağlar.

5. UZUN SÜRELİ KARMA MODELLERDE VARYANS-KOVARYANS YAPISININ MODELLENMESİ

Doğrusal karma modellerin farklı tipleri vardır. Bunlardan biri Bölüm 2 de detaylı bahsedilen uzun süreli modellerdir. Uzun süreli modeller genellikle uzun süreli verilerin analizinde kullanıldığı için bu adı almıştır (Diggle ve ark., 1996). Uzun süreli veriler, aynı birim kümesi üzerinden farklı zaman noktalarında tekrarlı ölçümlerin alındığı verilerdir.

Genel olarak uzun süreli bir karma modelde rasgele etkilerin $\mathbf{a}_i \sim N(0,\mathbf{s}_{\mathbf{a}}^2 I_q)$ ve hata teriminin ise $\mathbf{e}_{ij} \sim N(0,\mathbf{s}_{\mathbf{e}}^2 I_{n_i})$ birbirinden bağımsız rasgele değişkenler olduğu kabul edilir (Harville, 1977; Searle ve ark., 1992). Ancak aynı deney birimi üzerinden tekrarlı ölçümlerin alınması sonucu ortaya çıkan ilişkili veri yapısının göz ardı edilmeden modele dahil edilmesi gerekir (Verbeke ve Molenberghs, 2000).

Aynı deney biriminden tekrarlı gözlemlerin alındığı uzun süreli verilerde ilişkili veri yapısı ortaya çıkar. İlişkili veri yapısını göz önüne alan uygun varyans-kovaryans yapısının belirlenmesi parametre tahmini ve model kurulumu açısından önemlidir. Çünkü varyans-kovaryans yapısının seçimi parametre tahminlerini ve modelden yapılan yorumları doğrudan etkilemektedir. Uygun varyans-kovaryans yapısının seçimi etkinliği arttırmaktadır (Fitzmaurice ve ark., 2004).

Literatürde aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler arasındaki ilişkiyi dikkate alan pek çok varyans-kovaryans matris yapısı geliştirilmiştir. Jennrich ve Schluchter (1986) uzun süreli veriler için varyans-kovaryans modelleri üzerine çalışmıştır. Pourahmadi (1999) varyans-kovaryans yapısının modellemesi için esnek bir yaklaşım sunmuştur. Doğrusal karma modelllerde varyans-kovaryans matrisinin seçimi üzerine Grady ve Helms (1995), Robertson (1996), Wolfinger (1996) ve Littell ve ark. (2000) tarafından daha kapsamlı çalışmalar mevcuttur.

Doğrusal karma modellerde tekrarlı ölçüm olması durumunda ortaya çıkan ilişkili veride varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi amacı doğrultusunda her bir deney birimi farklı birer bloklama değişkeni olarak alınmak üzere, her bir bloklama değişkeni için tekrarlı ölçümlerden oluşan veri kendi içinde ilişkili olup

belli bir varyans-kovaryans matris yapısına sahiptir. $V_i \;\; i = 1,...,n \;\; i$ inci deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler arasındaki varyans-kovaryans matris yapısını belirtmek üzere (2.5) eşitliğinde verilen y bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisi,

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_n \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

formundadır. (5.1) ile verilen V matrisinin köşegen olmayan matris blokları farklı deney birimleri üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin birbiri ile ilişkisiz olduğunu göstermektedir. Tekrarlı ölçüm çalışmalarında temel varsayım farklı deney birimleri üzerinden alınan gözlemlerin birbiri ile ilişkisiz, aynı deney birimi üzerinden alınan ölçümlerin ise birbiri ile ilişkili olmasıdır. Bu durumda aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler belli varyans-kovaryans matris yapılarına sahip olmaktadır (Wolfinger, 1996; Bagiella ve ark., 2000; Fitzmaurice ve ark., 2004; İyit, 2008).

Bu bölümde aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler için (5.1) eşitliğinde verilen V matrisinin modellenmesi amacıyla $V_i \;\; i$ inci deney birimi için y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matris yapısının Çizelge 5.1. de verilen 16 farklı varyans-kovaryans modeli aracılığıyla modellenmesi üzerine çalışılacaktır.

5.1. Toeplitz (TOEP) Varyans-Kovaryans Modeli

TOEP varyans-kovaryans modeline göre aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçüm çiftleri eşit zaman aralıklarında iken aynı korelasyon değerine sahiptir. Varyans-kovaryans matrisi Toeplitz formunda ise köşegen elemanları her zaman noktasında aynıdır ve σ^2 ile ifade edilir. Buna göre tüm i ve j ler için $Corr(y_{ij}, y_{i,j+k}) = \rho_k$ olmak üzere,

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Toeplitz sadece eşit zaman aralıklarında alınan ölçümler için kullanılır (Fitzmaurice ve ark., 2004; Ye, 2005).

5.2. Birinci Dereceden Otoregresif [AR(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

Uzun süreli çalışmalarda birbirine yakın zamanlarda alınan gözlem değerleri arasında korelasyon değerinin daha kuvvetli olduğu görülmüştür. Bu durumu dikkate alan AR(1) varyans-kovaryans yapısı zaman noktaları arasındaki süre arttıkça korelasyon değerlerinin üstel olarak azaldığı varsayımına dayanmaktadır. AR(1) varyans-kovaryans matrisi tüm i ve j ler için $Corr(y_{ij}, y_{i,j+k}) = \rho^k$ olmak üzere,

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

formundadır ve $\rho \geq 0$ dır. AR(1), Toeplitz varyans-kovaryans modelinin özel bir durumudur. AR(1), Toeplitz de olduğu gibi sadece eşit zaman aralıklarında alınan ölçümler için kullanılır (Fitzmaurice ve ark., 2004).

5.3. Birinci Dereceden Anti-Bağımlı [ANTE(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler için verilen varyans-kovaryans matrisinde köşegen elemanları farklı varyans değerlerine sahip ve korelasyon yapısı zamanla değişiyor ise AR(1) ve Toeplitz varyans-kovaryans yapısı yetersiz kalmaktadır. Bu durumda ANTE(1) varyans-kovaryans modeli tercih edilir.

Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçüm çiftleri arasındaki kovaryans, varyans bileşenleri ile korelasyon değerlerinin çarpımına eşit olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_3\sigma_1\rho_1\rho_2 & \sigma_4\sigma_1\rho_1\rho_2\rho_3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_2 & \sigma_4\sigma_2\rho_2\rho_3 \\ \sigma_3\sigma_1\rho_1\rho_2 & \sigma_3\sigma_2\rho_2 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_3 \\ \sigma_4\sigma_1\rho_1\rho_2\rho_3 & \sigma_4\sigma_2\rho_2\rho_3 & \sigma_4\sigma_3\rho_3 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada σ_i^2 i_inci deneğin varyansı, ρ_k ise 0 iken k_ıncı değişkene ait otokorelasyonu ifade eder **(**Macchiavelli ve Arnold, 1994).

5.4. Heterojen Birinci Dereceden Otoregresif [ARH(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

ARH(1) varyans-kovaryans matrisinde köşegen üzerinde yer alan farklı zaman noktalarında alınan tekrarlı gözlemlerin varyansı birbirinden farklıdır. Tekrarlı ölçüm çiftleri arasındaki korelasyon değerleri üstel olarak azalır. Aynı deney birimi üzerinden alınan gözlem çiftleri arasındaki zaman arttıkça korelasyon azalıyorsa bu yapı tercih edilebilir. ARH(1) varyans-kovaryans matrisi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_3\sigma_1\rho^2 & \sigma_4\sigma_1\rho^3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_4\sigma_2\rho^2 \\ \sigma_3\sigma_1\rho^2 & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho \\ \sigma_4\sigma_1\rho^3 & \sigma_4\sigma_2\rho^2 & \sigma_4\sigma_3\rho & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

formundadır (Wolfinger, 1996; Davidian, 2007).

5.5. ARMA(1,1) Varyans-Kovaryans Modeli

ARMA(1,1) birinci dereceden otoregresif hareketli ortalama yapısını belirlemekte olup herhangi iki bağımlı değişken arasındaki ilişki otoregresif ve hareketli ortalama parametrelerine bağlıdır.

$$s^2 \begin{bmatrix} 1 & f & fr & fr^2 \\ f & 1 & f & fr \\ fr & f & 1 & f \\ fr^2 & fr & f & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Burada r otoregresif parametre, f hareketli ortalama bileşeni ve s^2 ise hata varyansıdır (Fuller, 1976).

5.6. Bileşik Simetri (CS) Varyans-Kovaryans Modeli

Bileşik simetri, tekrarlı ölçümlerin analizinde kullanılan ilk varyans-kovaryans modellerinden biridir.

Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin homojen varyans-kovaryans yapısına sahip olduğu varsayımına dayanır. Dolayısıyla aynı deney birimi üzerinden alınan tüm tekrarlı ölçüm çiftleri arasındaki korelasyon değerleri de birbirine eşit olur.

$$\begin{bmatrix} s^2+s_a^2 & s_a & s_a & s_a \\ s_a & s^2+s_a^2 & s_a & s_a \\ s_a & s_a & s^2+s_a^2 & s_a \\ s_a & s_a & s_a & s^2+s_a^2 \end{bmatrix}$$

formundadır. Burada s^2, deney birimleri içerisindeki tekrarlı ölçümlerin varyansı ve s_a^2 ise deney birimleri içerisindeki tekrarlı ölçümler arasındaki kovaryansı ifade eder (Fitzmaurice ve ark., 2004).

5.7. Bileşik Simetri Korelasyonlu (CSR) Varyans-Kovaryans Modeli

Bileşik simetri korelasyonlu varyans-kovaryans matrisine göre aynı denekten alınan tüm ölçüm çiftleri arasındaki korelasyon aynıdır ve

$$s^2 \begin{bmatrix} 1 & r & r & r \\ r & 1 & r & r \\ r & r & 1 & r \\ r & r & r & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Her zaman noktasında aynı varyans değerine sahiptir (IBM SPSS Statistics 22).

5.8. Heterojen Bileşik Simetri (CSH) Varyans-Kovaryans Modeli

CSH varyans-kovaryans matrisinin köşegen elemanları farklı varyans parametreleri içerdiği için heterojen varyans-kovaryans yapısına sahiptir. CSH modelinde tüm tekrarlı ölçüm çiftleri arasındaki korelasyon değerleri ise eşit olup,

$$\begin{bmatrix} s_1^2 & s_2 s_1 r & s_3 s_1 r & s_4 s_1 r \\ s_2 s_1 r & s_2^2 & s_3 s_2 r & s_4 s_2 r \\ s_3 s_1 r & s_3 s_2 r & s_3^2 & s_4 s_3 r \\ s_4 s_1 r & s_4 s_2 r & s_4 s_3 r & s_4^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Wolfinger, 1996).

5.9. Köşegen [UN(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin birbiri ile ilişkisiz ve heterojen varyansa sahip olduğu varsayımına dayanır ve

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

matris formundadır (Dawson ve ark., 1997).

5.10. Birinci Dereceden Faktör Analitik [FA(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

Birinci dereceden faktör analitik varyans-kovaryans modeline göre λ_j^2 ; LL' ; $t \times t$ boyutlu matrisinin ve σ_j^2 j_inci zamanda alınan tekrarlı ölçümlerin varyans bileşenleri D matrisinin köşegen elemanları olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

$LL'+D$ formunda tanımlanır (Jennrich ve Schluchter, 1986; Wolfinger, 1996; İyit, 2008).

5.11. Heterojen Birinci Dereceden Faktör Analitik [FAH(1)] Varyans-Kovaryans Modeli

Heterojen birinci dereceden faktör analitik modeli aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin heterojen varyans-kovaryans yapısına sahip olup iki parametrelidir. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 + d_1 & \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1 & \lambda_4\lambda_1 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 + d_2 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_4\lambda_2 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2 + d_3 & \lambda_4\lambda_3 \\ \lambda_4\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 & \lambda_4\lambda_3 & \lambda_4^2 + d_4 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir (IBM SPSS Statistics 22).

5.12. Huynh-Feldt (HF) Varyans-Kovaryans Modeli

HF yaryans-kovaryans modeli Huynh ve Feldt (1970) tarafından önerilmiştir. Heterojen bileşik simetri yapısına benzerdir. HF yaryans-kovaryans matrisi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_1^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}-\lambda & \sigma_2^2 & \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \sigma_3^2 & \frac{\sigma_3^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_3^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

formundadır. Burada λ kovaryans parametresidir.

5.13. Varyans Bileşenleri (VC) Varyans-Kovaryans Modeli

VC varyans-kovaryans modelinde aynı deney birimleri üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerinin birbiriyle ilişkisiz ve homojen varyansa sahip olup,

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Dawson ve ark., 1997).

5.14. Heterojen Toeplitz (TOEPH) Varyans-Kovaryans Modeli

Heterojen Toeplitz modeline göre köşegen üzerinde farklı varyans değerlerini içerir. Eşit zaman aralıklarında bulunan tekrarlı ölçüm çiftleri aynı korelasyon değerine sahip olup,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_4\sigma_1\rho_3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 \\ \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 \\ \sigma_4\sigma_1\rho_3 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

formunda gösterilir (Wolfinger, 1996).

5.15. Yapısal Olmayan (UN) Varyans-Kovaryans Modeli

Yapısal olmayan varyans-kovaryans matrisi farklı varyanslar ve kovaryanslar içerir. Her bir zaman noktası için bir tane olmak üzere n tane farklı varyansı ve her bir zaman çifti için farklı kovaryansları gösterir. Yapısal olmayan varyans-kovaryans modeli genellikle dengeli ve örneklem ölçümünün küçük olduğu veri yapısında tercih edilir. Yapısal olmayan varyans-kovaryans matrisi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir (Fitzmaurice ve ark., 2004).

5.16. Yapısal Olmayan Korelasyonlu (UNR) Varyans-Kovaryans Modeli

Yapısal olmayan korelasyonlu varyans-kovaryans matrisinin tüm varyans ve korelasyon değerlerinin farklı olduğu varsayımına dayanır ve

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_4\sigma_1\rho_{41} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} \\ \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} \\ \sigma_4\sigma_1\rho_{41} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler için elde edilen tüm varyans-kovaryans yapılarını özetleyen tablo t deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçüm sayısını göstermek üzere Çizelge 5.1. de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Tekrarlı ölçümler için kullanılan varyans-kovaryans yapıları

Varyans-Kovaryans Modeli	Parametre Sayısı	(j, j') _inci elemanı	Varyans-Kovaryans Modeli	Parametre Sayısı	(j, j') _inci elemanı
TOEP	t	$\sigma^2 \quad (j = j')$ $\sigma^2 \rho_{\lvert j-j' \rvert} \quad (j \neq j')$	UN(1)	t	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $0 \quad (j \neq j')$
AR(1)	2	$\sigma^2 \quad (j = j')$ $\sigma^2 \rho^{\lvert j-j' \rvert} \quad (j \neq j')$	FA(1)	t+1	$\lambda_j^2 + d \quad (j = j')$ $\lambda_j \lambda_{j'} \quad (j \neq j')$
ANTE(1)	2t-1	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_j \sigma_{j'} \prod_{k=\min(j,j')}^{\max(j,j')-1} \rho_k \quad (j \neq j')$	FAH(1)	2t	$\lambda_j^2 + d_j \quad (j = j')$ $\lambda_j \lambda_{j'} \quad (j \neq j')$
ARH(1)	t+1	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_j \sigma_{j'} \rho^{\lvert j-j' \rvert} \quad (j \neq j')$	HF	t+1	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $(\sigma_j^2 + \sigma_{j'}^2)/2 - \lambda \quad (j \neq j')$
ARMA(1,1)	3	$\sigma^2 \quad (j = j')$ $\sigma^2 (\phi \rho^{\lvert j-j' \rvert - 1}) \quad (j \neq j')$	VC	1	$\sigma^2 \quad (j = j')$ $0 \quad (j \neq j')$
CS	2	$\sigma^2 + \sigma_\alpha^2 (j = j')$ $\sigma_\alpha^2 (j \neq j')$	TOEPH	2t-1	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_j \sigma_{j'} \rho_{\lvert j-j' \rvert} \quad (j \neq j')$
CSR	2	$\sigma^2 \quad (j = j')$ $\sigma^2 \rho \quad (j \neq j')$	UN	t(t+1)/2	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_{jj'} \quad (j \neq j')$
CSH	t+1	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_j \sigma_{j'} \rho \quad (j \neq j')$	UNR	t(t+1)/2	$\sigma_j^2 \quad (j = j')$ $\sigma_j \sigma_{j'} \rho_{\max(j,j')\min(j,j')} \quad (j \neq j')$

Doğrusal karma modellerde veri yapısındaki değişkenliğin Çizelge 5.1. ile verilen varyans-kovaryans modelleri kullanılarak modellenmesinin sağladıgı en önemli avantaj; doğrusal modellerde varsayım bozulması olarak nitelendirilen veri yapısındaki heterojenliği giderebilmek için uygun dönüşümlerin yapılmasına ihtiyaç duyulmamasıdır (Wolfinger, 1996; İyit, 2008). Çizelge 5.1. de verilen varyans-kovaryans modelleri dengeli uzun süreli tekrarlı ölçüm verileri için uygundur ve çoğunun eşit zaman aralıklı ölçüm çiftlerini içeren tekrarlı veriler için kullanılması önerilir (Fitzmaurice ve ark., 2004).

Uygun Varyans-Kovaryans Modelinin Seçimi

Tekrarlı ölçümlerde varyans-kovaryans yapısını modelleyen pek çok yöntem vardır. Uygun varyans-kovaryans yapısının belirlenmesi parametre tahmini ve model kurulumu açısından önemlidir. Çünkü varyans-kovaryans yapısının seçimi parametre tahminlerini ve modelden yapılan yorumları doğrudan etkilemektedir. Varyans-kovaryans yapısının belirlenmesine yardımcı olan yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerden biri farklı zamanlarda gözlemler arasındaki korelasyon yapısını gösteren grafikler diğer yöntem ise modelleri karşılaştıran bilgi kriterleridir (IC). Bilgi kriterleri iç içe olmayan modellerin karşılaştırılmasında sık kullanılan bir yöntemdir (Fitzmaurice ve ark., 2004).

Uygun varyans-kovaryans modelinin seçimi amacıyla kullanılan bilgi kriterleri, Akaike Bilgi Kriteri (AIC) (Akaike, 1974), Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC) (Schwarz, 1978), Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC) (Bozdogan, 1987) ile Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC) (Hurvich ve ark., 1989) olmak üzere sıralanabilir.

Doğrusal karma modellerde uygun varyans-kovaryans modelinin belirlenebilmesi amacıyla öne sürülen modelleri karşılaştırmada kullanılan bilgi kriterleri l maksimum kısıtlı log-olabilirlik fonksiyonunun değeri, d parametre sayısı, n gözlem sayısı olmak üzere Çizelge 5.2. de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Model seçiminde kullanılan bilgi kriterleri

	Formül	**Referans**
AIC	$-2l+2d$	Akaike (1974)
BIC	$-2l+d\log n$	Schwarz (1978)
CAIC	$-2l+d(\log n+1)$	Bozdogan (1987)
AICC	$-2l+2dn/(n-d-1)$	Hurvich ve Tsai (1989)

Çizelge 5.2. ye göre en iyi varyans-kovaryans modeli için sıfıra yakın değeri veren bilgi kriterine göre seçilir (Littell ve ark., 2000).

6. KISITLI KARMA MODEL

Doğrusal karma modellerde, sabit etkili parametrelere ve rasgele etkili parametrelere kısıt getirilebilir. Literatürde doğrusal karma modellere getirilen kısıtlar ile ilgili yayınlanmış pek fazla kaynak yoktur. Ancak Edwards ve ark. (2001), doğrusal karma modelin sabit ve rasgele etkili parametrelerine aynı anda kısıt getirmiştir. Li (2011) ise, doğrusal kısıt altında uzun süreli modellerin parametre tahminlerine değinmiştir. Bu bölümde yukarıda bahsedilen kısıtlara ek olarak yeni bir kısıt çalışmasına yer verilecektir.

Uzun süreli model (2.10) eşitliğinde ifade edilmişti. Li (2011), uzun süreli model için β nın tahmini problemini ele almıştır. β üzerinde J doğrusal kısıtlamanın olduğu varsayılsın:

$$T\beta = r \tag{6.1}$$

Burada r $J \times 1$ boyutlu bir vektör, T $J \times p$ boyutlu rankı J olan bilinen bir matristir. Bu durumda (6.1) kısıtlaması verilmişken (2.10) modelindeki β nın tahmini ile ilgilenilir. Li (2011), $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ projeksiyon matris olmak üzere (2.10) modelini her iki taraftan $P_{Z^\wedge} = I - P_Z$ ifadesi ile çarparak modeli rasgele etki parametresinden arındırmıştır. Böylece (2.10) modeli,

$$\begin{aligned} P_{Z^\wedge} y &= P_{Z^\wedge} X\beta + P_{Z^\wedge} Z\alpha + P_{Z^\wedge}\varepsilon \\ &= P_{Z^\wedge} X\beta + (I - Z(Z'Z)^{-1}Z')Z\alpha + P_{Z^\wedge}\varepsilon \\ &= P_{Z^\wedge} X\beta + P_{Z^\wedge}\varepsilon \end{aligned} \tag{6.2}$$

olarak elde edilir. (6.2) modeli görüldüğü gibi (2.1) de verilen doğrusal regresyon modeli yapısındadır. Dolayısıyla en küçük kareler tahmin edicinin elde edilmesine benzer mantıkla $T\beta = r$ kısıtlaması altında hata kareler toplamı minimum yapılır. Yani λ Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$q(\beta,\lambda) = (P_{Z^\wedge} y - P_{Z^\wedge} X\beta)'(P_{Z^\wedge} y - P_{Z^\wedge} X\beta) + 2\lambda'(T\beta - r)$$

fonksiyonunun sırasıyla β ve λ ya göre türevi alındığında (6.3) ve (6.4) de verilen normal denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda} = T\beta - r = 0$$

$$T\beta = r \qquad (6.3)$$

Burada (6.3) eşitliği kısıtın sağlandığını gösterir

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = -X'P_{Z^\wedge}'P_{Z^\wedge} y - X'P_{Z^\wedge}'P_{Z^\wedge} y + 2X'P_{Z^\wedge}'P_{Z^\wedge} X\beta + 2T'\lambda = 0$$

$$-2X'P_{Z^\wedge}'(P_{Z^\wedge} y - P_{Z^\wedge} X\beta) + 2T'\lambda = 0$$

ve $P_{Z^\wedge}$, simetrik ve idempotent bir matris olduğundan,

$$X'P_{Z^\wedge} X\beta + T'\lambda = X'P_{Z^\wedge} y \qquad (6.4)$$

dır. (6.3) ve (6.4) te verilen normal denklemlerinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} X'P_{Z^\wedge}'X & T' \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'P_{Z^\wedge} y \\ r \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

olarak ifade edilir. (6.5) eşitliğinin sol tarafında verilen parçalanmış matrisin tersinin olduğu varsayımı altında ve $rank(X'P_{Z^\wedge}) = p$ ile $rank(L) = J$ olmak üzere Ek 9 dan,

$$\begin{bmatrix} X'P_{\hat{Z}}X & T' \\ T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}\{I - T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}\} & (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1} \\ [T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1} & -[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

elde edilir. Bu durumda (6.5) eşitliğinden β ve λ nın tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_L \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}\{[I - T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}]X'P_{\hat{Z}}y + T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}r\} \\ [T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}X'P_{\hat{Z}}y - [T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}r \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$\hat{\beta} = (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}X'P_{\hat{Z}}y$ olmak üzere (6.7) eşitliğinden $\hat{\beta}_L$ tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_L &= \hat{\beta} - (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}T'\beta + (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}r \\ &= \hat{\beta} - (X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T'[T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}(T\hat{\beta} - r) \end{aligned} \tag{6.8}$$

ve $\hat{\lambda}$ değeri ise,

$$\hat{\lambda} = [T(X'P_{\hat{Z}}X)^{-1}T']^{-1}(T\hat{\beta} - r) \tag{6.9}$$

şeklinde elde edilir.

Edwards ve ark. (2001), Li (2011) nin çalışmasından farklı olarak (2.10) modelinin hem rasgele etkili hem de sabit etkili parametrelerine,

$$\begin{aligned} R_1\beta &= r_1 \\ R_2\alpha_i &= 0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

kısıtlarını getirmiştir. Burada R_1 $c_1 \acute{}$ p boyutlu $rank(R_1) = c_1$ ve R_2 $c_2 \acute{}$ q boyutlu $rank(R_2) = c_2$ olan matrisler, r_1 ise $c_1 \acute{}$ 1 boyutlu bir vektördür. Burada $R_1\mathbf{b} = r_1$ kısıtı tutarlı denklem sistemlerini gerektirir. Rasgele etkiler için yapılan $R_2\mathbf{a}_i = 0 \quad i = 1,2,....,m$ kısıtı ise her zaman tutarlıdır.

Edwards ve ark. (2001), (6.10) eşitliğinde verilen kısıtlar altında (2.10) ile verilen modelin $y_{R_i} = X_{R_i}\mathbf{b}_R + Z_{R_i}\mathbf{a}_{R_i} + \mathbf{e}_i$ formunda yazılabileceğini ve dolayısıyla kısıtlı parametre tahmininin doğrusal karma modelde kullanılan yöntemler ile yapılabileceğini ifade etmişlerdir.

(6.1) ve (6.10) eşitliklerinde verilen kısıtlara ek olarak, bu bölümde yeni bir kısıt çalışmasına yer verilecektir. Henderson ve ark. (1959), en iyi doğrusal yansız tahmin edici BLUE$(X\mathbf{b})$ ve en iyi doğrusal ön tahmin edicisi BLUP$(\mathbf{a})$ yı eşanlı olarak veren bir denklem sistemi geliştirmiştir. Bu bölümde normallik varsayımı altında $\mathbf{a}$ ve y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan yola çıkarak Henderson ve ark. (1959) nın çalışması genişletilmiştir.

$\mathbf{a}$ ve y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (3.3) eşitliğinde verilmişti. Henderson ve ark. (1959), (3.3) eşitliğinde verilen ifadeyi olabilirlik fonksiyonu olarak tanımlamıştır. Bu fonksiyona (6.1) kısıtı ve

$$L\mathbf{a} = l \tag{6.11}$$

şeklinde ikinci bir kısıt getirildiği varsayılsın. Burada l $J \acute{}$ 1 boyutlu bir vektör ve L $J \acute{}$ p boyutlu rankı J olan bilinen bir matristir. Bu fonksiyonu en büyük yapan parametre tahminlerinin bulunması için önce fonksiyonun logaritmasının alınır. $\mathbf{l}$ ve m Lagrange çarpanı olmak üzere (3.38) eşitliğinde verilen $\ln f(y,\mathbf{a})$ nın kullanılması ile,

$$\ln f(y,\beta) = -\frac{1}{2}[y'R^{-1}y - y'R^{-1}X\beta - y'R^{-1}Z\alpha - \beta'X'R^{-1}y + \beta'X'R^{-1}X\beta + \beta'X'R^{-1}Z\alpha - \alpha'Z'R^{-1}y + \alpha'Z'R^{-1}X\beta + \alpha'Z'R^{-1}Z\alpha + \alpha'G^{-1}\alpha] - \frac{(n+q)}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|R| - \frac{1}{2}\ln|G| + \lambda'(T\beta - r) + m'(L\alpha - l)$$

dır. Bu fonksiyonun sırasıyla β, α, λ ve m ye göre türevlerini alındığında,

$$X'R^{-1}y - X'R^{-1}X\beta - X'R^{-1}Z\alpha + \lambda T' = 0 \tag{6.12}$$

$$Z'R^{-1}y - Z'R^{-1}X\beta - Z'R^{-1}Z\alpha - G^{-1}\alpha + mL' = 0 \tag{6.13}$$

$$T\beta - r = 0 \tag{6.14}$$

$$L\alpha - l = 0 \tag{6.15}$$

normal denklemleri elde edilir. (6.12) eşitliğinden,

$$\beta = (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) - (X'R^{-1}X)^{-1}T'\lambda \tag{6.16}$$

elde edilir. (6.16) eşitliği sol taraftan T matrisi ile çarpılırsa,

$$T\beta = T(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) - T(X'R^{-1}X)^{-1}T'\lambda \tag{6.17}$$

olur. (6.14) eşitliğinden,

$$T(X'R^{-1}X)^{-1}T'\lambda = T(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) - r \tag{6.18}$$

bulunur. (6.18) eşitliğinden λ değeri,

$$\lambda = [T(X'R^{-1}X)^{-1}T']^{-1}[T(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) - r] \tag{6.19}$$

dir. Bu değer (6.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\beta &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) \\ &\quad - (X'R^{-1}X)^{-1}T'[T(X'R^{-1}X)^{-1}T']^{-1}[T(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha) - r]\end{aligned} \tag{6.20}$$

şeklinde elde edilir. (3.41) in ilk eşitliğinde verilen $\hat{\beta} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\alpha)$ olduğu için (6.20) eşitliği,

$$\tilde{\beta}_R = \hat{\beta} - (X'R^{-1}X)^{-1}T'[T(X'R^{-1}X)^{-1}T']^{-1}(T\hat{\beta} - r) \tag{6.21}$$

bulunur. Benzer şekilde (6.13) eşitliği ile α değeri,

$$\alpha = (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\beta) + (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L'm \tag{6.22}$$

elde edilir. (6.22) eşitliği sol taraftan L matrisi ile çarpılırsa,

$$L\alpha = L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\beta) + L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L'm \tag{6.23}$$

olur. (6.15) eşitliğinden m değeri,

$$m = [L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L']^{-1}[l - L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\beta)] \tag{6.24}$$

şeklinde elde edilir. Bu değer (6.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\alpha &= (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\beta) - (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1} \\ &\quad L'[L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L']^{-1}[L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\beta) - l]\end{aligned} \tag{6.25}$$

bulunur. (3.41) in ikinci eşitliğinde verilen $\tilde{a} = (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\hat{b})$ olduğu için,

$$\tilde{a}_R = \tilde{a} - (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L'[L(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}L']^{-1}[L\tilde{a} - l] \qquad (6.26)$$

şeklinde ifade edilir. $L\tilde{a} = l$ kısıtlaması doğru iken $\tilde{a}_R$ tahmin edicisi yansızdır aksi halde yanlıdır.

7. RİDGE KARMA MODEL

(2.1) modeli için en küçük kareler tahmin edici $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ dır. Çoklu iç ilişki olması durumunda EKK hala yansızdır fakat varyansı çok büyüktür. Bu nedenle, gerçek değerinden uzaklaşır. Bu problemi ortadan kaldırmak için önerilen tahmin prosedürleri yanlı tahmin edicilerin ortaya çıkmasına ve bunların incelenmesine neden olmuştur.

Bu bölümde orijinal olarak Henderson ın karma model eşitlikleri fikri, uzun süreli verilerde ilişkili veri yapısını dikkate alan ridge karma modele uygulanmıştır. Ayrıca ridge karma model tahmin edicisinin karma model tahmin edicisinden matris hata kareler ortalaması anlamında üstün olması için gerek ve yeter koşulları veren bir teorem geliştirilmiştir.

Ridge karma model tahminleri elde edilirken Bölüm 3.4 altında incelenen Henderson ın karma model eşitliklerinden yararlanılmıştır. (2.2) eşitliği ve varsayımları dikkate alınsın. $I_p^* = \sigma^2 I$ olmak üzere $\varepsilon' \sim N(0, I^*)$ varsayımı ile birlikte $0 = \sqrt{k}\beta + \varepsilon'$ eşitliği (2.2) modeli ile,

$$\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \sqrt{k}I \end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}\alpha + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$$

şeklinde genişletilebilir. Bu model ise $R^* = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I^* \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$y^* = X^*\beta + Z^*\alpha + \varepsilon^* \ , \ \varepsilon^* \sim N(0, R^*)$$

yazılabilir. α ve y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y,\alpha)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left[(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)'R^{*-1}(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)+\alpha'G^{-1}\alpha\right]}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n+p+q)}\left|R^*\right|^{1/2}\left|G\right|^{1/2}}$$

olarak ifade edilir. Bu fonksiyonu en büyük yapan parametre tahminlerinin bulunması için önce fonksiyonun logaritması alınır.

$$\begin{aligned}\ln h(y,\alpha)=&-\frac{1}{2}[(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)'R^{*-1}(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)+\alpha'G^{-1}\alpha]\\&-\frac{(n+p+q)}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\left|R^*\right|-\frac{1}{2}\ln\left|G\right|.\end{aligned}\qquad(7.1)$$

(7.1) eşitliğindeki $(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)'R^{*-1}(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)$ ifadesi aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)'R^{*-1}(y^*-X^*\beta-Z^*\alpha)=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}X\\\sqrt{k}I\end{bmatrix}\beta-\begin{bmatrix}Z\\0\end{bmatrix}\alpha\Bigg]'\begin{bmatrix}R&0\\0&I^*\end{bmatrix}^{-1}\Bigg[\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}X\\\sqrt{k}I\end{bmatrix}\beta-\begin{bmatrix}Z\\0\end{bmatrix}\alpha\Bigg]$$

$$=\begin{bmatrix}y-X\beta-Z\alpha\\-\sqrt{k}\beta\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}R^{-1}&0\\0&I^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y-X\beta-Z\alpha\\-\sqrt{k}\beta\end{bmatrix}$$

$$=[(y-X\beta-Z\alpha)'\quad-\sqrt{k}\beta']\begin{bmatrix}R^{-1}(y-X\beta-Z\alpha)\\-\sqrt{k}\beta\end{bmatrix}$$

$$=(y-X\beta-Z\alpha)'R^{-1}(y-X\beta-Z\alpha)+k\beta'\beta.$$

Böylece k Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}\ln h(y,\alpha)=&-\frac{1}{2}[(y-X\beta-Z\alpha)'R^{-1}(y-X\beta-Z\alpha)+\alpha'G^{-1}\alpha+k\beta'\beta]\\&-\frac{(n+p+q)}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\left|R^*\right|-\frac{1}{2}\ln\left|G\right|\end{aligned}\qquad(7.2)$$

elde edilir. (7.2) fonksiyonun sırasıyla β ve α ya göre türevini aldığımızda,

$$(X'R^{-1}X + kI)\beta + X'R^{-1}Z\alpha = X'R^{-1}y \tag{7.3}$$

ve

$$Z'R^{-1}X\beta + (Z'R^{-1}Z + G^{-1})\alpha = Z'R^{-1}y \tag{7.4}$$

normal denklemleri elde edilir. (7.3) ve (7.4) eşitliklerinin matris gösterimi β ve α yerine tahmin edicileri $\tilde{\beta}_k$ ve $\tilde{\alpha}_k$ nın yazılması ile,

$$\begin{bmatrix} (X'R^{-1}X + kI) & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & (Z'R^{-1}Z + G^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_k \\ \tilde{\alpha}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

olarak gösterilir. (7.5) nın ikinci eşitliğinde yer alan $\tilde{\alpha}_k$ değeri,

$$\tilde{\alpha}_k = (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\tilde{\beta}_k) \tag{7.6}$$

şeklinde elde edilir. Bu değer (7.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(X'R^{-1}X + kI)\tilde{\beta}_k + X'R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y - X\tilde{\beta}_k) = X'R^{-1}y \tag{7.7}$$

bulunur. y bağımlı değişken vektörünün varyansı $V = ZGZ' + R$ nın Schur Tümleyeni yöntemine göre tersinin kullanılması ile elde edilen V^{-1} ifadesi (3.43) eşitliğinde verilmişti. Bu ifade, (7.7) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{\beta}_k = (X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1}y \qquad k \geq 0 \tag{7.8}$$

bulunur.

(3.46) eşitliğinin kullanılması ile (7.6) eşitliği,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k &= GZ'R^{-1}(y - X\tilde{b}_k) - GZ'V^{-1}ZGZ'R^{-1}(y - X\tilde{b}_k) \\ &= GZ'R^{-1}(y - X\tilde{b}_k) - GZ'V^{-1}(V - R)R^{-1}(y - X\tilde{b}_k) \\ &= GZ'V^{-1}(y - X\tilde{b}_k)\end{aligned} \tag{7.9}$$

şeklinde elde edilir.

7.1. Doğrusal Karma Model ve Ridge Karma Model Tahmin Edicilerinin MSEM Kriterine Göre Karşılaştırılması

Pek çok tahmin edici olması nedeniyle bunların karşılaştırması ile ilgilenilir. f^* ve f^{**}, f nin herhangi iki tahmin edicisi olsun. Bu bölümde, $MSEM(f^*) - MSEM(f^{**})$ farkının negatif olmayan tanımlı bir matris olması için gerek ve yeter koşulu veren bir teorem geliştirilmiştir.

(2.2) modeli için $L \in R^{p's}$ ve $M \in R^{mq's}$ olmak üzere,

$$f(L,M) = L'b + M'a \tag{7.10}$$

eşitliği ile verilen sabit ve rasgele etkilerin lineer kombinasyonu olan fonksiyonun tahmini ile ilgilenelim. Bilindiği gibi bir tahmin edici için MSE matrisi $(MSEM)$, ilgili tahmin edicinin varyansı ile yanlılığının kareleri toplamına eşittir. Bu durumda f^* tahmin edicisinin MSE matrisi,

$$\begin{aligned}MSEM(f^*, f) &= E[(f^* - f)(f^* - f)'] \\ &= Var(f^* - f) + [Bias(f^*)][Bias(f^*)]'\end{aligned} \tag{7.11}$$

elde edilir.

Hem sabit hem de rasgele etkileri içeren ve (7.10) ile verilen $f(L,M)$ tahmin edilsin. Buna göre doğrusal karma model tahmin edicisi $\tilde{f}(L,M) = L'\tilde{b} + M'\tilde{a}$ ve

ridge karma model tahmin edicisi ise $\tilde{f}_k(L,M) = L'\tilde{\beta}_k + M'\tilde{\alpha}_k$ olur. Burada $\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\alpha}$ tahmin edicileri sırasıyla (3.44) ve (3.47) eşitliklerinde, $\tilde{\beta}_k$ ve $\tilde{\alpha}_k$ tahmin edicileri ise (7.8) ve (7.9) eşitliklerinde verilmiştir. $f(L,M)$, $\tilde{f}(L,M)$ ve $\tilde{f}_k(L,M)$ sembollerini kısaltmak amacıyla bu ifadelerin yerine sırasıyla $f, \tilde{f}$ ve $\tilde{f}_k$ kullanacağız.

G ve R nin bilindiği varsayımı altında, $\tilde{f}_k - f$ nın varyans-kovaryans matrisi,

$$Var(\tilde{f}_k - f) = Var\{[M'GZ'V^{-1} + (L' - M'GZ'V^{-1}X)T_k^{-1}X'V^{-1}]y - L'\beta - M'\alpha\} \quad (7.12)$$

dır. Burada $T_k = X'V^{-1}X + kI_p$ dır. $L' - M'GZ'V^{-1}X = W'$ ve $Var(y) = V$ ifadeleri (7.12) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{f}_k - f) &= M'GZ'V^{-1}ZGM + M'GZ'V^{-1}XT_k^{-1}W \\ &\quad + W'T_k^{-1}X'V^{-1}ZGM + W'T_k^{-1}X'V^{-1}XT_k^{-1}W \\ &\quad + M'GM - 2(W'T_k^{-1}X'V^{-1} + M'GZ'V^{-1})ZGM \end{aligned} \quad (7.13)$$

elde edilir. $Bias(\tilde{f}_k)$ ise,

$$\begin{aligned} Bias(\tilde{f}_k) &= -L'T_k^{-1}k\beta + M'GZ'V^{-1}XT_k^{-1}k\beta \\ &= -W'T_k^{-1}k\beta \end{aligned} \quad (7.14)$$

olarak elde edilir. (7.13) ve (7.14) eşitliklerinin kullanılması ile $\tilde{f}_k$ için (7.11) eşitliği,

$$\begin{aligned} MSEM(\tilde{f}_k, f) &= M'GM - M'GZ'V^{-1}ZGM + M'GZ'V^{-1}XT_k^{-1}W \\ &\quad - W'T_k^{-1}X'V^{-1}ZGM + W'\tilde{F}_kW \end{aligned} \quad (7.15)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\widetilde{F}_k = T_k^{-1}X'V^{-1}XT_k^{-1} + k^2T_k^{-1}bb'T_k^{-1}$ dir.

Dikkat edilirse, $k=0$ iken $\widetilde{f}(L,M)$ ifadesi en iyi doğrusal yansız ön tahmin edici (BLUP) dır.

$$\begin{aligned} MSEM(\widetilde{f},f) &= M'GM - M'GZ'V^{-1}ZGM \\ &\quad + M'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}W - W'(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZGM \\ &\quad + W'\widetilde{F}W \end{aligned} \tag{7.16}$$

elde edilir. Burada $\widetilde{F} = (X'V^{-1}X)^{-1}$ dir.

Teorem: $s=1$ iken $MSEM(\widetilde{f}) - MSEM(\widetilde{f}_k)$ farkının negatif olmayan tanımlı bir matris olması için gerek ve yeter koşul $b'[(X'V^{-1}X)^{-1} + \frac{2}{k}I_p]^{-1}b \le 1$ eşitsizliğinin gerçekleşmesidir.

İspat: $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{f}_k$, f nin herhangi iki tahmin edicisi olmak üzere $D = MSEM(\widetilde{f}) - MSEM(\widetilde{f}_k)$ farkı negatif olmayan tanımlı bir matris ise $\widetilde{f}_k$ tahmin edicisi $\widetilde{f}$ tahmin edicisinden matris MSE anlamında iyi olduğu söylenir. Buna göre (7.15) ve (7.16) eşitlikleri arasındaki fark,

$$\begin{aligned} D &= M'GZ'V^{-1}X[(X'V^{-1}X)^{-1} - T_k^{-1}]W - W' \\ &\quad \times [(X'V^{-1}X)^{-1} - T_k^{-1}]X'V^{-1}ZGM + W'(\widetilde{F} - \widetilde{F}_k)W \end{aligned}$$

olur. $[(X'V^{-1}X)^{-1} - T_k^{-1}] = k(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}$ ifadesinin kullanılması ile D farkı,

$$\begin{aligned} D &= kM'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}W - kW'(X'V^{-1}X)^{-1} \\ &\quad \times T_k^{-1}X'V^{-1}ZGM + W'(\widetilde{F} - \widetilde{F}_k)W \end{aligned} \tag{7.17}$$

olarak tanımlanır. $kM'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}W - kW'(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}X'V^{-1}ZGM$ ifadesinde W nin yerine yazılması ile, $kM'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}$ $T_k^{-1}L - kL'T_k^{-1}(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZGM$ elde edilir. Buna göre (7.17) eşitliği,

$$\mathsf{D} = kM'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}L - kL'T_k^{-1}(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZGM + W'(\tilde{F} - \tilde{F}_k)W$$

elde edilir. $kM'GZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}T_k^{-1}L$ ve $kL'T_k^{-1}(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZGM$ değişmeli matrisler ise veya $s=1$ ise D ifadesi,

$$\mathsf{D} = W'(\tilde{F} - \tilde{F}_k)W \tag{7.18}$$

olduğu anlamına gelir. Buna göre $\tilde{F} - \tilde{F}_k$ ifadesi,

$$\begin{aligned} \tilde{F} - \tilde{F}_k &= (X'V^{-1}X)^{-1} - T_k^{-1}X'V^{-1}XT_k^{-1} - k^2T_k^{-1}\mathsf{bb}'T_k^{-1} \\ &= k^2T_k^{-1}[(X'V^{-1}X)^{-1} + \frac{2}{k}I_p - \mathsf{bb}']T_k^{-1} \end{aligned} \tag{7.19}$$

şeklinde bulunur. $s=1$ varsayımı altında $\tilde{f}_k$ tahmin edicisinin $\tilde{f}$ tahmin edicisinden matris MSE anlamında iyi olması için gerek ve yeter koşul Farebrother (1976) teoreminin kullanılması ile elde edilmiştir (Bkz. Ek 11). Böylece ispat tamamlanmış olur.

Theobald (1974) ve Farebrother (1976) nin çalışmalarından yola çıkarak, (7.18) eşitliğinde verilen D nın pozitif tanımlı olması için yeter koşul verilebilir. (7.18) eşitliğini dikkate alırsak, $\frac{2}{k}I_p - \mathsf{bb}'$ pozitif tanımlı ise D ifadesi de pozitif tanımlı olur. Böylece $\tilde{f}_k$ nın $\tilde{f}$ üzerinde matris MSE kriterine göre üstün olması için yeter koşul $k < 2/\mathsf{bb}'$ dır.

Özel olarak; $M \neq 0$, $f = L'\mathsf{b}$ ve f değerinin tahmini problemi ile $L'\mathsf{b}$ nın tahmini eşdeğerdir. Bu özel durum, (7.15) ve (7.16) eşitliklerinde tanımlanan MSE

matrislerini sırasıyla $L'\widetilde{F}_k L$ ve $L'\widetilde{F}L$ ifadelerine dönüştürür. Böylece, $s=1$ varsayımı altında $L'\widetilde{\beta}_k$ nın $L'\beta$ üzerinde üstün olması için gerek ve yeter koşul matris MSE anlamında yukarıda yer alan teoremde verilmiştir.

Bu bölümde iki tahmin edicinin matris MSE anlamında karşılaştırılmasına ek olarak, rasgele etki için karma model ve ridge karma model tahmin edicilerinin karşılaştırılmasına yer verilecektir. Buna göre,

$$\begin{aligned} Var(\widetilde{\alpha}_k - \alpha) &= Var(GZ'V^{-1}(I - XT_k^{-1}X'V^{-1})y - \alpha) \\ &= GZ'V^{-1}(XT_k^{-1}X'V^{-1}XT_k^{-1}X'V^{-1} - I)ZG + G \end{aligned}$$

ve

$$Bias(\widetilde{\alpha}_k - \alpha) = kGZ'V^{-1}XT_k^{-1}\beta$$

dikkate alınması ile,

$$MSE(\widetilde{\alpha}_k,\alpha) = GZ'V^{-1}X\widetilde{F}_k X'V^{-1}ZG - GZ'V^{-1}ZG + G$$

elde edilir. Ayrıca,

$$MSE(\widetilde{\alpha},\alpha) = GZ'V^{-1}X\widetilde{F}X'V^{-1}ZG - GZ'V^{-1}ZG + G$$

olduğu için $\widetilde{\alpha}$ ve $\widetilde{\alpha}_k$ nın matris MSE farkı,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= MSE(\widetilde{\alpha},\alpha) - MSE(\widetilde{\alpha}_k,\alpha) \\ &= GZ'V^{-1}XT_k^{-1}[k^2(X'V^{-1}X)^{-1} + 2kI - k^2\beta\beta']T_k^{-1}X'V^{-1}ZG \end{aligned} \tag{7.20}$$

şeklinde bulunur. Dikkat edilirse (7.20) eşitliği, $\tilde{a}_k$ nın $\tilde{a}$ ya göre matris *MSE* kriterine göre üstün olması için gerek ve yeter koşulun yukarıda verilen teorem olduğunu gösterir.

7.2. k Yanlılık Parametresinin Seçimi

Ridge regresyonda k nın seçimi için pek çok prosedür regresyon katsayılarının tahmininde önemli bir gelişme olacak şekilde önerilir. Bu prosedürlerin bazıları tahmin bazıları ise ön tahmin için önerilen metotlardır. Hoerl ve Kennard (1970), k nın seçimi için ridge trace yöntemini önermiştir. Ayrıca k nın seçimi için Mallows (1973), McDonald ve Galarneu (1975), Golub ve ark. (1979), Craven ve Wahba (1979) vb. yöntemler geliştirmiştir.

Yanlı tahmin edicilerdeki yanlılık parametreleri, ya tahminler daha durağan olacak şekilde ya da ön tahminlerde bir ilerleme olacak şekildedir. Ridge regresyonda k daha çok katsayıların tahmininde bir gelişme olacak şekilde seçilir. Fakat model ön tahmin amaçlı kullanılıyorsa k nın seçimi için ön tahmin amaçlı kriterler kullanılır. Bu kriterlerden biri Golub ve ark. (1979) tarafından önerilen genelleştirilmiş çapraz geçerlilik (GCV) istatistiğidir. Bu bölümde, doğrusal karma modeller için GCV yi minimum yapacak ridge parametresinin seçimine dayalı bir ön tahmin verilecektir.

Ridge karma modeli için gözlenen y_i değerlerine karşılık gelen $\tilde{y}_i$ uydurulmuş değerlerin vektörü,

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= X\tilde{b}_k + Z\tilde{a}_k \\ &= \{X(X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1} + ZGZ'V^{-1}[I_n - X(X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1}]\}y \\ &= \{I_n - RV^{-1}[I_n - X(X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1}]\}y \\ &= Sy\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $S = I_n - RV^{-1}[I_n - X(X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1}$ dır. Buna göre ridge karma model için GCV,

$$GCV(k) = n^{-1}(y - \tilde{y})'(y - \tilde{y})/[1 - tr(S)/n]^2$$

şeklinde gösterilir. Burada $(y - \tilde{y})'(y - \tilde{y})$ karma hata kareler toplamı iken $1 - tr(S)/n$ modelin serbestlik derecesidir.

Ridge tahmin edici k yanlılık parametresine bağlıdır ve k nın seçimi tahmin edicinin performansını etkiler. k arttıkça tahminler küçülür ve belli bir k değerinden sonra durağan (stable) olurlar. Burada amaç, ridge tahminlerinin durağan olduğu en küçük uygun k değerinin seçimidir. Ancak ridge karma modeli için, $GCV(k)$ yi minimum yapan ridge parametresinin kapalı bir formu bulunmamaktadır. Bu yüzden k yanlılık parametresinin elde edilmesinde iterasyon yöntemi uygulanır.

Bölüm 7.1 de öngörüsel olarak, $\tilde{\beta}_k$ nın matris MSE kriterine göre β dan üstün olması için bir k var ise $\tilde{\alpha}_k$ ve $\tilde{f}_k$ matris MSE kriterine göre α_k ve f_k dan üstün olacak şekilde bir k her zaman vardır sonucuna varırız. Burada Hoerl ve Kennard (1970) ın önerdiği ridge tahmin ediciye benzer olarak $\tilde{\beta}_k$ nın skaler MSE değerini minimum yapacak bir k değeri önerilebilir. Böyle bir k değerini elde etmek için rasgele etkilerin açıkça tanımlanmadığı marjinal model ele alındığında,

$$y = X\beta + u, \quad u = Z\alpha + \varepsilon \sim N(0, V) \tag{7.21}$$

olur. Burada V pozitif tanımlı olduğu için $V = NN'$ olacak şekilde singüler olmayan simetrik bir N matrisi vardır. (7.21) eşitliğinin her iki tarafı N^{-1} ile çarpılırsa, $y^* = N^{-1}y, X^* = N^{-1}X$ $u^* = N^{-1}u$ ve $Var(u^*) = I_n$ olmak üzere $y^* = X^*\beta + u^*$ elde edilir.

Modele ait varsayımları sadeleştirmek için doğrusal modellerde genellikle kanonik form kullanılır. $X^{*\prime}X^* = X'V^{-1}X$ matrisi simetrik olmak üzere ortogonal bir P matrisi vardır öyle ki $P'P = PP' = I_p$ ve $P'X^{*\prime}X^*P = \Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_p)$ dır. Burada λ_i, $X^{*\prime}X^*$ nın özdeğeridir. Böylece marjinal model, $X_* = X^*P$ ve $\gamma = P'\beta$

iken $y^* = X_*\gamma + u^*$ olarak tekrar yazılabilir. Buna göre, $K = diag(k_1,...,k_p)$ iken $\tilde{\beta}_K = (X'V^{-1}X + K)^{-1}X'V^{-1}y$ nın skaler hata kareler ortalaması,

$$SMSE(\tilde{\beta}_K, \beta) = MSE(\tilde{\beta}_K, \beta) = tr(\tilde{F}_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i + k_i^2\gamma_i^2}{(\lambda_i + k)^2}$$

olarak elde edilir. γ_i kanonik formda ridge regresyon katsayılarının tahmini olmak üzere $k_i = 1/\gamma_i^2 \quad i = 1,...,p$ genelleştirilmiş ridge tahmin edicinin skaler MSE değerini minimum yapar. Doğrusal regresyon için Hoerl ve ark. (1975) nın önerisi göz önüne alındığında, k_i değerlerinin harmonik ortalaması $k = p/\beta'\beta$, optimal k değerini verir. Optimal k değeri bilinmeyen β katsayısına bağlıdır ve Hoerl ve Kennard (1970) e göre k nın tahmini β yerine $\tilde{\beta}$ nın kullanılması ile elde edilir.

8. SAYISAL ÖRNEK

Doğrusal karma modellerde tekrarlı ölçüm olması durumunda ortaya çıkan ilişkili veride varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi amacı doğrultusunda her bir deney birimi farklı birer bloklama değişkeni olarak alınmak üzere, her bir bloklama değişkeni için tekrarlı ölçümlerden oluşan veri kendi içinde ilişkili olup belli bir varyans-kovaryans matris yapısına sahiptir. Tekrarlı ölçüm çalışmalarında temel varsayım farklı deney birimleri üzerinden alınan gözlemlerin birbiri ile ilişkisiz, aynı deney birimi üzerinden alınan ölçümlerin ise birbiri ile ilişkili olmasıdır. Bu durumda aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler belli varyans-kovaryans matris yapılarına sahip olmaktadır (Bagiella ve ark. 2000, Wolfinger 1996, Fitzmaurice ve ark. 2004, İyit, 2008).

Bölüm 7 de, tekrarlı ölçümler için doğrusal karma modellerde varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi amacıyla kullanılan 16 farklı varyans-kovaryans modelleri ile model seçim kriterleri detaylı olarak açıklanmıştı. Bu bölümde ise doğrusal karma modelin özel durumları olan rasgele kesen terimli modeli ve rasgele kesen ve eğimli modeli sahip oldukları varsayımlar dikkate alınarak sahip olabilecekleri varyans-kovaryans modelleri incelenmiş ve dört kriter [Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC), Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC) ve Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)] aracılığıyla uygun model seçilmiştir.

Erişkin bir bireyde her biri ortalama 150 gram ağırlığında bir çift böbrek bulunur. Böbrekler, insan organizmasında en iyi korunmuş organlardır. Böbrekte kalp debisinin, % 20-30 unun yönlendiği yoğun bir damar ağı vardır. Beden ağırlığı 70 kg olan bir insanda 1 dakikada böbrekten geçen kan miktarı yaklaşık 1200 ml/dk dır. Vücutta iç ortamın normal durumunun korunması çok önemlidir. İç ortamın kimyasal yapısının değişmez tutulması, büyük ölçüde akciğerler ve böbrekler tarafından yapılır. Böbrekler, vücut sıvı elektrolit dengesini düzenler. Kanın osmotik basıncını sabit tutmak için değişik miktarda elektrolit atılmasını sağlayarak vücudu zararlı maddelerden temizlerler. Metabolizma sonucu meydana gelen artık maddelerden üre, ürik asit, kreatinin gibi toksik maddelerin atılmasını sağlarlar. Aynı

zamanda vücut için gerekli olan maddelerin geri emilimini sağlayarak da (glikoz, aminoasit gibi) madde kaybını önlerler. Yine vücudun normal asit-baz dengesinin düzenlenmesine yardımcı olurlar (Yöntem ve Odabaş, 2009).

Böbreklerin çalışmasının yavaşlaması veya durmasına bağlı olarak kanda bulunan su, tuz ve diğer minerallerin dengesinin bozulmasına böbrek yetmezliği adı verilir. Böbrek yetmezliği akut ve kronik olarak iki şekilde kendini belli eder. Akut böbrek yetmezliği böbreklerin görevlerine çok kısa bir süre ara verdiği ve geriye dönüşünün mümkün olduğu böbrek yetmezliğidir. Zamanında, erken tanı ile tedavi yapıldığı takdirde kişinin böbrekleri normal olarak çalışmaya devam edebilir. Kronik böbrek yetmezliğinde ise durum daha ciddi bir hal almaktadır (http://belirtilerinelerdir.com/bobrek-yetmezligi-belirtileri-nelerdir/).

Kronik böbrek yetmezliği genellikle son döneme kadar belirti vermediği için hastalığın belirlenmesi ancak yapılacak idrar ve kan testleri ile mümkün olur. Üre, kreatinin ve potasyum özellikle böbrek fonksiyonlarının değerlendirilmesinde önemli bir ölçüt olarak kullanılan biyokimyasal değerlerdir. Üre, kreatinin ve potasyum değerlerindeki büyük artışlar akut ya da kronik böbrek yetersizliklerinde olmaktadır (http://www.medikalakademi.com.tr/kronik-bobrek-yetmezligi-baslangic-belirtileri-tani-tedavisi/).

Vücutta birikmiş üre, kreatinin gibi zararlı maddelerin ve aşırı suyun bir membran aracılığıyla vücuttan uzaklaştırılması işlemine diyaliz adı verilir. İlerlemiş böbrek yetmezliği tedavisinde kullanılır. Diyaliz tedavisi, bozulmuş böbrek işlevlerinin bir kısmını düzenleyerek yaşamın devam etmesini sağlar. Diyaliz, hemodiyaliz ve peritondiyaliz olmak üzere ikiye ayrılır. Hemodiyaliz, bir makine aracılığı ile hastanın kanının özel bir filtreden süzdürüldüğü, zararlı maddelerin temizlenmesi ve temizlenen kanın hastaya geri verildiği bir tedavi şeklidir. Peritondiyalizi, kanı zararlı atıklardan temizlemek için hastanın kendi karın zarının bir filtre gibi işlev görmesi yöntemidir. İnsanın kendi karın zarının kullanıldığı diyaliz şekline peritondiyalizi denir (http://www.kocdiyaliz.com.tr/; https://www.abbott.com.tr).

Bu bölümde, yukarıda verilen bu bilgilerin ışığı altında bir sağlık kuruluşu tarafından böbrek yetmezliği teşhisi konan ve 12 ay $(t_1,...,t_{12} = 1,...,12)$ boyunca

düzenli olarak tedaviye gelen 200 hastaya ilişkin geçmişe dönük inceleme yapılarak kandaki üre, kreatinin ve potasyum değerlerine ilişkin elde edilen tekrarlı ölçüm verileri kullanılmıştır. Bu klinik çalışmada, "hemodiyaliz" tedavisi gören hasta sayısı 100 ve "peritondiyaliz" tedavisi gören hasta sayısı 100 olmak üzere, toplam 200 hasta incelenmiş ve hastaların diyaliz öncesi ve sonrası kan örnekleri alınmıştır. 12 aya ait diyaliz sonrası üre değerlerine ilişkin ölçüm değerleri aynı deney birimi üzerinden belli zaman aralıkları ile alınan bağımlı değişkene ait gözlem değerleri olup tekrarlı ölçümleri oluşturur. Bağımlı değişken üzerinde etkili olabileceği düşünülen diyaliz öncesi üre, kreatinin ve potasyum değerleri ile tedavi türü (1: hemodiyaliz, 0: peritondiyaliz) açıklayıcı değişken olarak adlandırılmaktadır. Tekrarlı ölçümler ile yapılan bu çalışmada diyaliz öncesi ve sonrası üre, kreatinin ve potasyum değerlerinin alındığı hastalar denek olarak ifade edilir.

Çalışmaya alınan 200 denek, böbrek yetmezliği teşhisi konmuş hastalar arasından rasgele seçildiğinden, denek faktörünün bağımlı değişken üzerindeki etkisi rasgele etki olup diyaliz öncesi üre, kreatinin ve potasyum değerleri ile tedavi türü (1: hemodiyaliz, 0: peritondiyaliz) sabit etki olarak ifade edilir.

8.1. Rasgele Kesen Terimli Modelde Varyans-Kovaryans Yapısının Modellenmesi

Rasgele kesen terimli model (2.11) eşitliğinde verilmişti. y_i i_inci denek üzerinden tedaviyi takip eden 12 aylık üre çıkış değerlerine ilişkin tekrarlı ölçümlerin oluşturduğu bağımlı değişken olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}reçikiş_{i1} \\ M \\ \ddot{u}reçikiş_{i12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ddot{u}regiriş_{i1} & kreatiningiriş_{i1} & potasyumgiriş_{i1} & tedavitürü_j \\ M & M & M & M & M \\ 1 & \ddot{u}regiriş_{i12} & kreatiningiriş_{i12} & potasyumgiriş_{i12} & tedavitürü_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ M \\ b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{bmatrix} a_i + \begin{bmatrix} e_{i1} \\ M \\ e_{i12} \end{bmatrix} \quad i = 1,2,...,200 \quad j = 0,1 \tag{8.1}$$

şeklinde gösterilir. Mevcut veri için uzun süreli model,

$$y_i = X_i\beta + Z_i\alpha_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,...,200$$

olarak yazılır. Burada X_i i_inci deneğe ait sabit etkilere ilişkin 12x5 boyutlu tasarım matrisi, β sabit etkilere ilişkin 5x1 boyutlu parametreler vektörü, Z_i i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin 12x1 boyutlu tasarım matrisi, α_i i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin parametre ve ε_i i_inci deneğe ait rasgele hataların 12x1 boyutlu bir vektörüdür. Modeldeki rasgele etkiler $\alpha_i \sim N(0,\sigma_\alpha^2 I_q)$ ve hata terimi ise $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2 I_{n_i})$ birbirinden bağımsız rasgele değişkenler olduğu kabul edilmiştir.

(2.11) eşitliğinde verilen rasgele kesen terimli model, aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin homojen varyans-kovaryans yapısına sahip olduğu varsayımına dayanır. Bu yüzden mevcut 16 varyans-kovaryans modelleri arasından sadece bileşik simetri (CS) varyans-kovaryans modeline uygundur (Crowder and Hand, 1990). Bileşik simetri varyans-kovaryans modelinde tekrarlı ölçüm çiftlerinin aynı korelasyona sahip olduğu varsayılır. Buna göre i_denek için y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisi,

$$Cov(y_i) = V_i = Z_i G Z_i' + R_i \quad i = 1,...,200$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{12\times 1} \sigma_\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1\times 12} + \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_\varepsilon^2 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ & \sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \sigma_\alpha^2 \\ & & & \sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

olarak gösterilir. Burada σ_a^2 i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin varyans ve σ_e^2 ise i_inci deneğe ait rasgele hataların varyansıdır.

Çizelge 12.1. de veri yapısındaki heterojenliğin modellenmesinde y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisinin tahminleri yer almaktadır. Rasgele kesen terimli için aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler arasındaki bileşik simetri varyans-kovaryans matrisinin ML tahmini,

$$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 148.56 & 60.24 & \cdots & 60.24 \\ & 148.56 & & \vdots \\ & & \ddots & 60.24 \\ & & & 148.56 \end{bmatrix}_{12\times 12} \qquad i = 1,\ldots,200$$

iken REML tahmini,

$$\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 149.39 & 60.96 & \cdots & 60.96 \\ & 149.39 & & \vdots \\ & & \ddots & 60.96 \\ & & & 149.39 \end{bmatrix}_{12\times 12} \qquad i = 1,\ldots,200$$

olarak elde edilir.

Rasgele kesen terimli modelinde tekrarlı ölçüm çiftleri aynı korelasyon değerine sahiptir. Modele dahil edilen denek etkisinin bağımlı değişkenin yapısındaki toplam değişimi açıklama oranı,

$$\rho = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_e^2} \tag{8.2}$$

formülü ile hesaplanır ve (8.2) eşitliği sınıf içi korelasyon adını alır (Diggle ve ark. 2002, Fitzmaurice ve ark. 2004). Buna göre $\hat{\rho}_{ML} = 0.4055$ ve $\hat{\rho}_{REML} = 0.4081$ olmak üzere denek etkisinin bağımlı değişkenin yapısındaki toplam değişimi açıklama oranı sırasıyla yaklaşık %40 ve %41 dir.

Aynı deney birimine ait tekrarlı ölçümlerin sabit varyans ve kovaryans değerleri ile birbirine eşit korelasyon değerlerine sahip oldugu varsayımı üzerine dayanan rasgele kesen terimli model yapısının tekrarlı ölçüm verilerinin

modellenmesi için kullanımı pekte elverişli gözükmemektedir. Bu yüzden bir sonraki aşamada toplam kolesterol düzeylerine ilişkin tekrarlı ölçüm verilerinin istatistiksel analizinde aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümlerin sahip olduğu bu ilişkili veri yapısı üzerine hiçbir kısıtlayıcı varsayım koymadan, varyans-kovaryans matris yapısının çok esnek olarak modellenmesine imkan tanıyan (2.12) eşitliği ele alınacaktır (İyit, 2008).

8.2. Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Modelde Varyans-Kovaryans Yapısının Modellenmesi

y_i i_inci denek üzerinden tedaviyi takip eden 12 aylık üre çıkış değerlerine ilişkin tekrarlı ölçümlerin oluşturduğu bağımlı değişken olmak üzere rasgele kesen terim ve eğimli modeli,

$$\begin{bmatrix} \text{üreçiki}_{ş} \\ \vdots \\ \text{üreçiki}_{ş} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{üregiri}_{ş} & \text{kreatining iriş} & \text{potasyumgi riş} & \text{tedavitürü}_{j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{üregiri}_{ş} & \text{kreatining iriş} & \text{potasyumgi riş} & \text{tedavitürü}_{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{zaman}_{i1} & \\ \vdots & \\ \text{zaman}_{i2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{i1} \\ \vdots \\ e_{i12} \end{bmatrix} \quad i = 1,2,...,200 \quad j = 0,1 \tag{8.3}$$

şeklinde gösterilir. Mevcut veri için uzun süreli model,

$$y_i = X_i \mathbf{b} + Z_i \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_i \qquad i = 1,2,...,200$$

olarak yazılır. Burada X_i i_inci deneğe ait sabit etkilere ilişkin 12x5 boyutlu tasarım matrisi, $\mathbf{b}$ sabit etkilere ilişkin 5x1 boyutlu parametreler vektörü, Z_i i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin 12x2 boyutlu tasarım matrisi, $\mathbf{a}_i$ i_inci deneğe ait rasgele etkilere ilişkin 2x1 boyutlu parametre vektörü ve $\mathbf{e}_i$ i_inci deneğe ait rasgele hataların 12x1 boyutlu bir vektörüdür. Burada a_{i1} i_inci deneğin bağımlı değişken üzerindeki birinci rasgele etkisini ve a_{i2} ise i_inci deneğin zaman değişkeninin

k_ıncı düzeyine göre $(k = 1,...,12)$ bağımlı değişken üzerindeki ikinci rasgele etkisini temsil etmektedir.

a_i ve e_i birbirinden bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} s^2_{a_{i1}} & s_{a_{i1},a_{i2}} \\ s_{a_{i1},a_{i2}} & s^2_{a_{i2}} \end{bmatrix} \right), e_i \sim N(0, R_i = s^2_e I_{n_i})$$

varsayımı altında rasgele kesen terim ve eğimli modelinde y_i bağımlı değişken vektörü,

$$y_i \sim N(X_i b, V_i = Z_i G Z_i' + R_i) \quad i = 1,...,200 \tag{8.4}$$

dağılımına sahiptir. Rasgele kesen terim ve eğimli modelde, i_inci deney birimi üzerinden alınan bağımlı değişkene ilişkin varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi üzerine kısıtlayıcı bir varsayım bulunmamaktadır. Aynı deney birimi üzerinden alınan tekrarlı ölçümler için (8.4) eşitliğinde verilen V matrisinin modellenmesi amacıyla V_i i_inci deney birimi için y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matris yapısı 16 farklı varyans-kovaryans modeli aracılığıyla modellenmiş olup Çizelge 12.3. de verilmiştir.

Rasgele kesen ve terim ve eğimli model yapısında yer alan rasgele etkilere ilişkin kovaryans parametrelerinin ML ve REML tahmin değerleri 16 farklı varyans-kovaryans modeli için Çizelge 12.1. de verilmiştir.

(8.4) eşitliğinde verilen V_i i_inci denek için bağımlı değişken vektörüne ilişkin varyans-kovaryans matrisinin modellenmesinde kullanılan G modelde yer alan rasgele etkilere ilişkin varyans-kovaryans matrisi ile R_i i_inci denek için hata terimi vektörüne ilişkin varyans-kovaryans matrisi ML ve REML için Çizelge 12.2. de verilmiştir.

Bağımlı değişkene ilişkin tekrarlı ölçüm verileri arasındaki değişimi ele almak amacıyla ele alınan 16 farklı varyans-kovaryans modelini karşılaştırabilmek

amacıyla AIC, BIC, CAIC ile AICC olmak üzere dört kriterin hesaplanan değerleri ML ve REML için ayrı ayrı Çizelge 12.4. de verilmiştir. Çizelge 12.2. de tekrarlı ölçüm verileri için elde edilen varyans-kovaryans modelleri arasından uygun kovaryans modeli belirlenirken yukarıda adı geçen dört kriterden en küçük değeri veren dikkate alınmıştır. Buna göre Çizelge 12.2. den sırasıyla ML ve REML kovaryans parametre tahmin yöntemleri için en küçük değerleri 17.857,7480 ve 17.862,2580 olmak üzere AIC vermiştir. En uygun varyans-kovaryans modeli ANTE(1) olarak belirlenmiştir.

Uzun süreli verilere de, ilişkili veriler gibi yaklaşılabilir. Yani, ilişkili verilerin analizi için ileri sürülen yaklaşımlar uzun süreli veriler için de kullanılabilir. Çünkü aynı birim kümesi üzerinden aynı değişken için alınan tekrarlı ölçümlerin ilişkili olması muhtemeldir. Bağımlı değişkenlerin veya bağımsız değişkenlerin zaman boyunca alınan kendi ölçümleri içinde, aynı zaman noktasında alınan bağımlı ve bağımsız değişkenlerin ölçümleri arasında, bağımlı değişkenler arasında veya bağımsız değişkenler arasında ilişki söz konusu olabilir. Uzun süreli verilerin analizinde bu ilişkiler dikkate alınmalıdır (Roy ve Khattree, 2005; Song, 2007; Bahçecitapar, 2012).

Çoklu iç ilişkinin var olup olmadığını belirleyen yöntemlerden biri koşul sayısıdır. Mevcut veride sabit etkilere karşılık gelen açıklayıcı değişkenler arasındaki koşul sayısı 9000.2 olarak bulunmuştur ve veri kümesinde şiddetli çoklu iç ilişki tespit edilmiştir. Bu bölümde önerilen ridge karma model incelenerek bu sorun aşılmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmada, Eliot ve ark. (2011) tarafından önerilen ve uzun süreli verilerde ilişkili veri yapısını dikkate alan ridge karma model incelenmiştir. Ancak orijinal olarak ridge karma model tahminleri elde edilirken Henderson ın karma model eşitliklerinden yararlanılmıştır. Buna ek olarak, ridge karma model tahmin edicisinin karma model tahmin edicisinden matris hata kareler ortalaması anlamında üstün olması için gerek ve yeter koşulları veren bir teorem geliştirilmiştir.

Tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırması ortalama hata kareler ortalaması hesaplanarak gerçekleştirilmiştir. Ortalama kareler ortalaması hesaplanırken doğrusal karma modellerde parametre ve varyans bileşenleri tahmin

yöntemlerinden en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemleri kullanılmıştır.

Ridge tahmin edici k yanlılık parametresine bağlıdır ve k nın seçimi tahmin edicinin performansını etkiler. Çizelge 8.1. ve Çizelge 8.2. da sırasıyla en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemlerine göre elde edilen tahmin değerleri yer almaktadır. Çizelge 8.1. ve Çizelge 8.2. de BLUP, k_i değerlerinin harmonik ortalaması ve $GCV(k)$ yi minimum yapan k değerine göre elde edilen parametre tahmin değerleri ve hata kareler ortalaması verilmiştir. k_i değerlerinin harmonik ortalaması $k = p/\text{b'b}$ formülü ile $GCV(k)$ yi minimum yapan k değeri ise $0 \leq k \leq 1$ aralığı içerisinden 0.01 lik artışlarla seçilmiştir.

Çizelge 8.1. En Çok Olabilirlik (ML) Yöntemine Göre Elde Edilen Tahmin Değerleri

ML						
			$k_h = 0.0239$		$k_{GCV} = 0.65$	
	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}_{\tilde{k}_h}$	$\tilde{\alpha}_{\tilde{k}_h}$	$\tilde{\beta}_{k_{GCV}}$	$\tilde{\alpha}_{k_{GCV}}$
β_0	14.0199		5.9094		0.3652	
β_1	0.1665		0.1665		0.1664	
β_2	0.0196		0.0197		0.0197	
β_3	-0.1142		-0.1127		-0.1128	
β_4	-3.5651		-3.5613		-3.4885	
α_1		-0.0186		8.0728		13.5877
α_2		0.1204		0.1209		0.1214
MSE	57.4461	75.9275	57.3197	75.7633	184.3969	185.3036

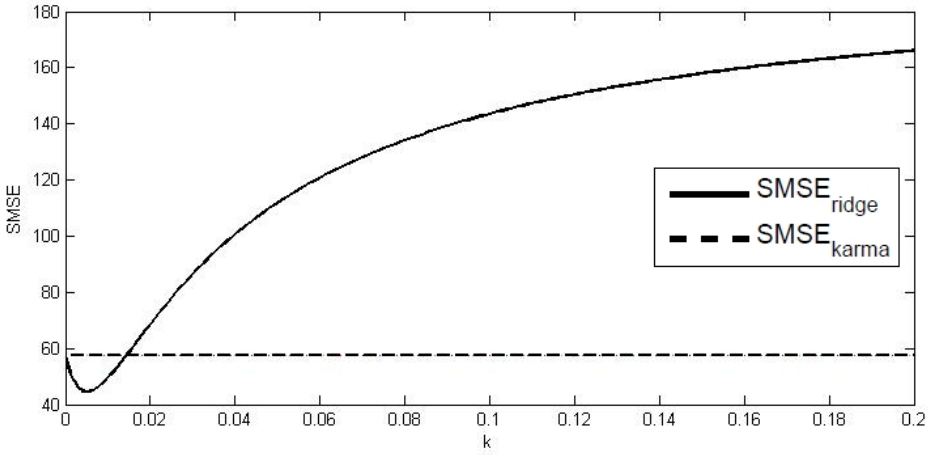
Çizelge 8.2. Kısıtlı En Çok Olabilirlik (REML) Yöntemine Göre Elde Edilen Tahmin Değerleri

REML						
			$k_h = 0.0239$		$k_{GCV} = 0.65$	
	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}_{\tilde{k}_h}$	$\tilde{\alpha}_{\tilde{k}_h}$	$\tilde{\beta}_{k_{GCV}}$	$\tilde{\alpha}_{k_{GCV}}$
β_0	14.0200		5.8679		0.3609	
β_1	0.1665		0.1665		0.1664	
β_2	0.0196		0.0197		0.0197	
β_3	-0.1142		-0.1127		-0.1128	
β_4	-3.5651		-3.5613		-3.4888	
α_1		-0.0187		8.1144		13.5926
α_2		0.1204		0.1209		0.1214
MSE	58.1495	76.5841	58.0236	76.4218	184.5268	185.4384

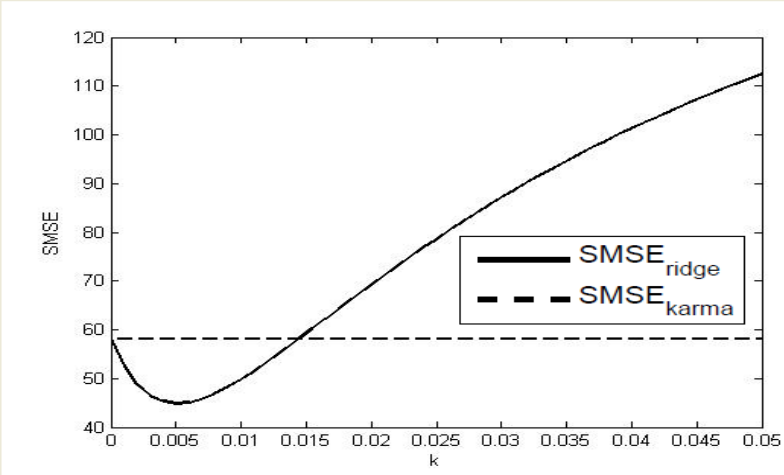
Çizelge 8.1. ve Çizelge 8.2. ye göre $GCV(k)$ yi minimum yapan k değerine göre elde edilen hata kareler ortalama değerleri $k_h = p/\mathrm{b'b} = 0.0239$ tahmin değerlerine nazaran yüksek çıkmıştır. Her iki çizelgeden elde edilen değerler birbirine çok yakın çıkmıştır.

Sonuç olarak, teorik sonuçlar yansız ridge tahmin edicinin diğer tahmin edicilerden hata kareler ortalaması anlamında her zaman iyi olmadığını göstermektedir. Hangi tahmin edicinin daha iyi olduğu k nın seçimine bağlıdır. Örneğin k_h alırsak ridge tahmin edici doğrusal karma model tahmin edicisinden hata kareler ortalaması anlamında daha iyi olduğu görülür.

Şekil 8.1 ve Şekil 8.2 sırasıyla ML ve REML yöntemleri için k ya karşı skaler hata kareler ortalaması grafiğidir. Buna göre ML ve REML her ikisi için de k nın çok küçük değerleri için ridge karma tahmin edicisinin karma tahmin edicisine göre daha iyi olduğu görülür.



Şekil 8.1. ML için k ya karşı skaler hata kareler ortalaması (SMSE)



Şekil 8.2. REML için k ya karşı skaler hata kareler ortalaması (SMSE)

Sayısal örnekte, ridge karma tahmin edicisinin karma tahmin edicisine göre belli k değerlerinde hata kareler ortalaması anlamında daha iyi olduğunu göstermektedir. Hangi tahmin edicinin iyi olduğu bilinmeyen β ve σ^2 parametrelerine ve k nın seçimine bağlıdır. Bu parametrelerin uygun seçimleri ile ridge karma tahmin edicisi hata kareler ortalaması anlamında iyi tahmin edicilerden biri olarak ele alınabilir.

9. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, teorik olarak açıklanan doğrusal karma model ve ridge karma modele ilişkin tahmin edicilerin hata kareler ortalamasına göre performansları Matlab 2012 programı yardımıyla simülasyon çalışması yapılarak karşılaştırılmıştır. Burada,

i) Deneklerin sayısı $m = 30$, sabit etkilere ilişkin parametre sayısı $p = 3$ ve rasgele etkilere ilişkin parametre sayısı $q = 2$ dir, her bir denekten alınan gözlem sayısı ise $n_i = 5$

ii) Deneklerin sayısı $m = 60$, sabit etkilere ilişkin parametre sayısı $p = 3$ ve rasgele etkilere ilişkin parametre sayısı $q = 2$, her bir denekten alınan gözlem sayısı ise $n_i = 10$

olmak üzere iki durum için simülasyon çalışması tekrarlanmıştır.

Sabit etkilere karşılık gelen çoklu iç ilişkili açıklayıcı değişkenleri oluşturmak amacıyla McDonald ve Galarneau (1975) tarafından önerilen prosedür uygulanmıştır.

$$x_{ijk} = (1 - \gamma^2)^{1/2} w_{ijk} + \gamma w_{ij(p+1)} \qquad i = 1,....,m \;\; j = 1,....,n_i \;\; k = 1,...,p \qquad (9.1)$$

Burada w_{ij} standart normal dağılıma sahip yapay rasgele sayılar ve γ^2 ise herhangi iki açıklayıcı değişken arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. Ayrıca açıklayıcı değişkenler standartlaştırılmıştır. Yani $X'X$ ilişki matrisi formundadır.

Bu çalışmada açıklayıcı değişkenler arasında kuvvetli ilişki olması istendiği için $\gamma = 0.70, 0.80, 0.90, 0.95$ ve 0.99 alınmıştır. z_{ijl} rasgele etkilere karşılık gelen parametreler $l = 1,...,q$ olmak üzere $U(-2,2)$ düzgün dağılımdan üretilmiştir. Newhouse ve Oman (1971) ve McDonald ve Galarneau (1975) β nın $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen normalleştirilmiş özvektör olarak alındığında MSE nin minimum olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla β vektörü, $X'V^{-1}X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelecek şekilde üretilmiştir.

Modeldeki rasgele etkiler $\alpha_i \sim N(0,\sigma_\alpha^2 I_q)$ ve hata terimi ise $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2 I_{n_i})$ birbirinden bağımsız normal dağılımdan üretilmişlerdir. Simülasyon $\sigma_\alpha^2 = 0.1,0.5,1$ ve $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1,0.5,1$ olmak üzere tüm kombinasyonlarda tekrarlanmıştır. Deneme sayısı $N = 500$ olarak seçilmiştir. Bağımlı değişkene dayalı gözlemler,

$$y_{ij} = \beta_1 x_{ij1} + ... + \beta_p x_{ijp} + \alpha_{i1} z_{ij1} + ... + \alpha_{iq} z_{ijq} + \varepsilon_{ij} \quad i = 1,...,m \quad j = 1,...n_i$$

olacak şekilde üretilmiştir.

Simülasyon çalışması sırasında yanlılık parametresi k nın seçiminde Bölüm 7 de verilen $\hat{k}_h$ ve k_{GCV} kullanılmıştır. Çizelge 9.1. ve Çizelge 9.3. de verilen $\hat{k}_h$ değerleri, optimal k değerini veren harmonik ortalama $k = p/\beta'\beta$, değerine karşılık gelmektedir. Çizelge 9.2. ve Çizelge 9.4. de k değerleri ise $0 \leq k \leq 10$ aralığı içerisinden 1 lik artışlarla belirlenmiş olup $GCV(k)$ yı minimum yapan k değeri seçilmiştir. Genellikle $GCV(k)$ yi minimum yapan k değerleri (0,10) aralığında iken bazı durumlarda k değeri 10 olarak bulunmuştur. Bu durum sezgisel olarak $GCV(k)$ yi minimum yapan k değerlerinin 10 dan büyük olduğu sonucunu doğurmuştur. Ancak standart olarak k değerleri $0 \leq k \leq 10$ aralığından seçilmiştir.

Tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırması ortalama (average) hata kareler ortalaması hesaplanarak gerçekleştirilmiştir. Herhangi bir $\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\alpha}$ tahmin edicileri için bu ölçümler,

$$AMSE(\tilde{\beta}) = \frac{1}{500}\sum_{r=1}^{500} (\tilde{\beta}_{(r)} - \beta)'(\tilde{\beta}_{(r)} - \beta)$$

ve

$$AMSE(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{500}\sum_{r=1}^{500} (\tilde{\alpha}_{(r)} - \alpha)'(\tilde{\alpha}_{(r)} - \alpha)$$

formülleri yardımıyla hesaplanmıştır. Burada $\tilde{b}_{(r)}$ ve $\tilde{a}_{(r)}$, denemenin r_inci çıktısında sırasıyla b ve a nın tahminleridir.

Çizelge 9.1.- 9.4. için simülasyon çalışması sonucu elde edilen bulgular aşağıda özetlenmiştir.

s_a^2 sabit ve s_e^2 0.1 den 1 e kadar artarken her iki tahmin edicinin *MSE* değerleri artmıştır. Ancak bu artış, büyük k değerleri için sabit etkilere ilişkin ridge karma model tahminlerinde dikkat çekici değildir. Karma ridge model tahmin edicileri karma tahmin edicilerine göre daha hızlı artış göstermektedir. s_e^2 sabit ve s_a^2 nın 0.1 den 1 e kadar artarken, rasgele etkilere ilişkin her iki tahmin edici de artar.

g^2 artarken, ridge karma modelde sabit etkilere ilişkin elde edilen *MSE* değerleri artar. g değerleri modeldeki açıklayıcı değişkenleri etkilediği için hem $\hat{k}_h$ hem de k_{GCV} değerleri için s_a^2 ve s_e^2 sabit iken tahmin edicilerin *MSE* tahmin değerleri farklıdır. Ancak g^2, ridge karma tahmin edicilere ve karma modellerde ise sadece rasgele etkilere ilişkin tahmin edicilere ait *MSE* değerlerini sistemli olarak etkilemez. g^2 artarken, $\tilde{b}$ ve $\tilde{b}_k$ arasındaki fark artar.

s_a^2,s_e^2 ve g^2 sabit, n_i değeri 5 den 10 a kadar artarken her iki model için rasgele etkilere ilişkin *MSE* tahmin değerleri azalır.

Genel olarak Çizelge 9.1.-9.4. e göre, $\tilde{b}_k$ nın b dan, $\tilde{a}_k$ nın a dan *MSE* kriterine göre daha iyi performans gösterdiği gözlenmiştir. Genel olarak hem sabit etkiler hem de rasgele etkilere ilişkin ridge tahmin ediciler daha iyi performans göstermektedir. Ayrıca *MSE* değerlerindeki artış ridge karma tahmin edicilerde sabit etkilere ilişkin karma tahmin edicilere göre daha hızlıdır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar örneklem büyüklüğüne (n), değişkenler arası ilişkiye (g^2) ve rasgele değişkenlerin varyansına $(s_a^2 \; ve \; s_e^2)$ göre ridge karma modelin doğrusal karma modele göre üstün olduğunu göstermektedir.

Yeni bir tahmin edicinin diğer tahmin edicilerden daha iyi bir tahmin yöntemi olması beklenir. Bu beklenti yapılan simülasyon çalışması ile yaklaşık olarak gözlenmiştir.

Çizelge 9.1. $n_i = 5, m = 30$ ve $\hat{k}_h$ iken tahmin edilen MSE değerleri

γ^2	σ_α^2	σ_ϵ^2	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_k$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_k$
0.70	0.1	0.1	0.00637929	0.00627735	1.32561221	1.32529488
		0.5	0.02847256	0.02654247	2.77808879	2.77643248
		1	0.05196594	0.04617916	3.81194101	3.81034672
	0.5	0.1	0.00773928	0.00758332	1.37133203	1.37067567
		0.5	0.03369973	0.03115990	4.92130059	4.91803045
		1	0.06293689	0.05471523	8.67564599	8.66096999
	1	0.1	0.00722832	0.00709331	1.78971035	1.78911506
		0.5	0.03786392	0.03455940	6.03027119	6.01838876
		1	0.06777468	0.05808314	11.40375696	11.38114108
0.80	0.1	0.1	0.00994971	0.00969136	1.15028656	1.14977406
		0.5	0.04230943	0.03803925	2.79297115	2.79077108
		1	0.07472648	0.06238000	3.72254943	3.71989439
	0.5	0.1	0.00948727	0.00923065	1.59471728	1.59409676
		0.5	0.04835913	0.04308174	5.75022747	5.74228543
		1	0.10368914	0.08234484	8.86226436	8.83104094
	1	0.1	0.01114104	0.01080838	1.77293049	1.77240761
		0.5	0.05235606	0.04611985	6.51492868	6.49795242
		1	0.10189309	0.08121229	10.89581715	10.8681551
0.90	0.1	0.1	0.01930787	0.01827343	1.14595252	1.14498027
		0.5	0.07686483	0.06347238	2.86040585	2.85737507
		1	0.15818469	0.11447676	3.92491254	3.91828359
	0.5	0.1	0.02076448	0.01959461	1.26793749	1.26648465
		0.5	0.09915493	0.07885397	4.72557937	4.71321305
		1	0.18455432	0.12876187	8.38666968	8.35550552
	1	0.1	0.02081762	0.01962917	1.62426836	1.62239016
		0.5	0.09458871	0.07463669	6.45249997	6.42956166
		1	0.19804151	0.13462670	11.80390617	11.75931375
0.95	0.1	0.1	0.03474715	0.03159756	1.10511656	1.10407833
		0.5	0.15576072	0.11046331	3.02386244	3.01835677
		1	0.29134415	0.17565808	3.91692331	3.91035509
	0.5	0.1	0.04044137	0.03614135	1.51141710	1.50910092
		0.5	0.19139330	0.13084533	5.54475276	5.51401076
		1	0.35765807	0.19829150	8.59930483	8.55100448
	1	0.1	0.04599108	0.04060805	1.49229820	1.48737903
		0.5	0.19263498	0.12813785	6.11248970	6.08208055
		1	0.37308163	0.20840868	10.51572449	10.46384593
0.99	0.1	0.1	0.17701432	0.12049755	1.27241034	1.26729565
		0.5	0.80511473	0.36193188	2.97012772	2.95833422
		1	1.50655177	0.57484572	3.80111523	3.78728435
	0.5	0.1	0.20195540	0.13687900	1.38551224	1.37749396
		0.5	0.95005233	0.39051338	5.98134266	5.92893108
		1	1.93286187	0.69546772	8.58599248	8.50267404
	1	0.1	0.20214309	0.13597019	1.36422338	1.35726458
		0.5	1.00292829	0.42253551	7.13049293	7.05938109
		1	1.82380652	0.65560399	11.13934241	11.04679238

Çizelge 9.2. $n_i = 5, m = 30$ ve k_{GCV} iken tahmin edilen MSE değerleri

γ^2	σ_α^2	σ_ϵ^2	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_k$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_k$
0.70	0.1	0.1	0.00685847	0.00656661	1.01486028	1.01450412
		0.5	0.02748980	0.02287252	2.92582665	2.92380163
		1	0.05075217	0.03800211	3.90842979	3.90765267
	0.5	0.1	0.00773928	0.00729410	1.37133202	1.36969869
		0.5	0.03369972	0.02768327	4.92130058	4.91658058
		1	0.06293689	0.04582314	8.67564599	8.65184625
	1	0.1	0.00722832	0.00681828	1.78971035	1.78799975
		0.5	0.03786392	0.02964585	6.03027119	6.00366424
		1	0.06777468	0.04766931	11.40375696	11.36794262
0.80	0.1	0.1	0.01008574	0.00933297	1.10777960	1.10674826
		0.5	0.04242172	0.03208668	2.96044774	2.95675552
		1	0.07972863	0.04945327	3.67610387	3.66849381
	0.5	0.1	0.01107865	0.01001900	1.36333106	1.36056763
		0.5	0.04714298	0.03321168	5.59247512	5.57482641
		1	0.08273475	0.05101930	9.23312439	9.21071032
	1	0.1	0.01041500	0.00958404	1.59386744	1.59319261
		0.5	0.06194815	0.04135503	6.33723124	6.28002110
		1	0.10318481	0.05632874	10.52629377	10.43648220
0.90	0.1	0.1	0.01770494	0.01505604	1.25310196	1.25160623
		0.5	0.08406751	0.04665035	2.87628456	2.86767793
		1	0.14642796	0.06286691	3.84506450	3.83782854
	0.5	0.1	0.02155926	0.01773939	1.45147953	1.44490839
		0.5	0.09986135	0.05246353	5.44966386	5.41951432
		1	0.17970927	0.07795608	9.11637130	9.05810748
	1	0.1	0.02066279	0.01710097	1.59828622	1.59265996
		0.5	0.10961304	0.05458857	7.88065284	7.81618382
		1	0.18823907	0.08343903	9.94645316	9.88687932
0.95	0.1	0.1	0.03928708	0.02793932	0.94487791	0.94140817
		0.5	0.16820637	0.06738986	2.86937679	2.85508900
		1	0.30246338	0.10439677	3.70075764	3.69106406
	0.5	0.1	0.04067119	0.02823779	1.55091533	1.54161492
		0.5	0.17912442	0.06506172	5.48813634	5.44333896
		1	0.36528610	0.12146385	9.22929738	9.17270077
	1	0.1	0.03707100	0.02649025	1.54750477	1.54062711
		0.5	0.19558673	0.07307213	8.02649026	7.96204991
		1	0.37459808	0.12325360	12.06306544	11.98484266
0.99	0.1	0.1	0.19073817	0.06712505	1.08414594	1.07367070
		0.5	0.78190845	0.20819060	2.88679291	2.87211706
		1	1.45201475	0.32572462	3.73004171	3.71706131
	0.5	0.1	0.22408617	0.07522008	1.41774840	1.39229964
		0.5	0.92548190	0.21917578	5.25918279	5.21827175
		1	1.66934370	0.38522451	9.79642137	9.73284197
	1	0.1	0.21513467	0.07489726	1.57988783	1.55975215
		0.5	0.98392420	0.24276063	6.96138675	6.88736098
		1	1.92048614	0.49223772	11.33934242	11.24782427

Çizelge 9.3. $n_i = 10, m = 60$ ve $\hat{k}_h$ iken tahmin edilen MSE değerleri

γ^2	σ_α^2	σ_ϵ^2	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_k$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_k$
0.70	0.1	0.1	0.00156171	0.00155516	1.03604472	1.03602568
		0.5	0.00724041	0.00710635	3.69147464	3.69131006
		1	0.01481156	0.01428771	5.39378057	5.39327670
	0.5	0.1	0.00156624	0.00156025	1.07670969	1.07668197
		0.5	0.00788442	0.00772413	4.80026794	4.79988787
		1	0.01638802	0.01575497	9.28013249	9.27897061
	1	0.1	0.00154794	0.00154133	1.14921061	1.14917115
		0.5	0.00805623	0.00789483	5.40821021	5.40745473
		1	0.01556204	0.01497166	10.30387141	10.30192101
0.80	0.1	0.1	0.00230507	0.00229104	0.99945897	0.99941238
		0.5	0.01054399	0.01024821	3.59248681	3.59219380
		1	0.02080300	0.01972080	5.38755615	5.38716434
	0.5	0.1	0.00229979	0.00228509	1.07152185	1.07147312
		0.5	0.01130105	0.01097031	5.26229073	5.26186972
		1	0.02173270	0.02055526	8.88593533	8.88502759
	1	0.1	0.00239385	0.00237825	1.11659108	1.11654348
		0.5	0.01156706	0.01121568	5.11790876	5.11706765
		1	0.02231284	0.02106823	9.41686190	9.41548890
0.90	0.1	0.1	0.00447775	0.00442170	1.01334674	1.01329982
		0.5	0.02072782	0.01957489	3.72211078	3.72175846
		1	0.03935628	0.03546259	5.53160497	5.53069686
	0.5	0.1	0.00471797	0.00465729	1.14147891	1.14139877
		0.5	0.02281733	0.02149287	5.09102125	5.08979474
		1	0.04260079	0.03818514	9.20554486	9.20286633
	1	0.1	0.00451505	0.00445844	1.08613115	1.08608366
		0.5	0.02275137	0.02138962	5.40946421	5.40816153
		1	0.04466933	0.03983703	10.10468451	10.10079375
0.95	0.1	0.1	0.00836295	0.00815742	1.01079951	1.01072920
		0.5	0.04399111	0.03936230	3.80468626	3.80335850
		1	0.08075061	0.06666799	5.56771636	5.56608770
	0.5	0.1	0.00876471	0.00898311	1.17973906	1.17961286
		0.5	0.04275376	0.03820282	4.90489059	4.90333460
		1	0.08524792	0.06972874	8.94495380	8.94019705
	1	0.1	0.00879140	0.00857509	1.05964433	1.05953689
		0.5	0.04411319	0.03930136	5.37293552	5.37060571
		1	0.09282924	0.07533298	9.50153440	9.49380506
0.99	0.1	0.1	0.04368462	0.03894504	1.03842064	1.03803018
		0.5	0.20881290	0.13863091	3.58336501	3.57993166
		1	0.41255919	0.22928070	5.38565474	5.38034399
	0.5	0.1	0.04462555	0.03979004	1.05941260	1.05887687
		0.5	0.21747261	0.14412899	5.24230183	5.23578555
		1	0.42994319	0.23307372	9.38183514	9.36956472
	1	0.1	0.04579503	0.04068052	1.08998095	1.08943602
		0.5	0.20896775	0.13737815	5.49288201	5.48660036
		1	0.43567986	0.23330380	10.08216975	10.06942912

Çizelge 9.4. $n_i = 10, m = 60$ ve k_{GCV} iken tahmin edilen MSE değerleri

γ^2	σ_α^2	σ_ϵ^2	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_k$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}_k$
0.70	0.1	0.1	0.00149150	0.00147586	1.06824615	1.06821251
		0.5	0.00741605	0.00703335	3.65071117	3.65039746
		1	0.01370048	0.01232738	5.62847880	5.62756830
	0.5	0.1	0.00158303	0.00156276	1.15151199	1.15143494
		0.5	0.00760790	0.00716698	5.17127808	5.17024529
		1	0.01604228	0.01426682	8.93786614	8.93435873
	1	0.1	0.00157165	0.00155048	1.08900031	1.08898169
		0.5	0.00796039	0.00744038	5.03651762	5.03526387
		1	0.01491509	0.01324061	10.68246150	10.67925285
0.80	0.1	0.1	0.00228975	0.00224751	1.03602726	1.03595099
		0.5	0.01060266	0.00969173	3.69135525	3.69059908
		1	0.02172783	0.01825438	5.39351163	5.39133584
	0.5	0.1	0.00229985	0.00225428	1.07671582	1.07659603
		0.5	0.01092635	0.00990899	5.34193789	5.34042550
		1	0.02254386	0.01875132	9.31231963	9.30768933
	1	0.1	0.00226885	0.00222158	1.14522985	1.14510340
		0.5	0.01103996	0.01002156	5.66480179	5.66345886
		1	0.02185271	0.01816283	10.68387579	10.67953880
0.90	0.1	0.1	0.00448872	0.00430529	1.03599051	1.03582309
		0.5	0.02076682	0.01724293	3.69118232	3.68971887
		1	0.03936803	0.02795344	5.62917418	5.62724630
	0.5	0.1	0.00435456	0.00417842	1.17726688	1.17713247
		0.5	0.02244361	0.01841067	5.17995259	5.17648451
		1	0.04292672	0.02997503	9.36819353	9.36001377
	1	0.1	0.00479915	0.00459619	1.08226454	1.08204154
		0.5	0.02236520	0.01834522	5.21068225	5.20655323
		1	0.04535380	0.03088647	9.59871201	9.58726943
0.95	0.1	0.1	0.00847705	0.00781116	1.06863133	1.06839424
		0.5	0.04027840	0.02808940	3.77343238	3.77122433
		1	0.08155162	0.04410513	5.47326667	5.46848103
	0.5	0.1	0.00877643	0.00807021	1.13158883	1.13131565
		0.5	0.04664551	0.03171919	4.90895888	4.90270783
		1	0.08569109	0.04541669	9.03028605	9.01527691
	1	0.1	0.00915629	0.00839082	1.04835769	1.04797191
		0.5	0.04873399	0.03297360	5.47783340	5.46747270
		1	0.08477054	0.04396143	10.68631337	10.67167546
0.99	0.1	0.1	0.04417384	0.03011203	1.03590909	1.03469370
		0.5	0.20424716	0.06991074	3.69087772	3.68573683
		1	0.41968796	0.11915112	5.39274667	5.38394235
	0.5	0.1	0.04447691	0.03023368	1.07670233	1.07516647
		0.5	0.22321355	0.07060911	4.79874864	4.78550468
		1	0.46547058	0.13712392	9.28325322	9.25298972
	1	0.1	0.04354838	0.02949663	1.14889817	1.14770420
		0.5	0.22794706	0.07517321	5.40764096	5.39203174
		1	0.44144286	0.11687650	10.30798659	10.27948502

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada doğrusal karma modelin tanımı, önceki çalışmaları, yapılan çalışmaların uygulamaları, doğrusal karma modelin gösterimi ve doğrusal karma model türleri ele alınmıştır. Doğrusal karma modelin tahmin yöntemleri detaylı olarak incelenmiştir. Varyans bileşenleri tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik yöntemlerine yer verilmiş olup bu bölüm sonunda iki yöntem karşılaştırılmıştır. Uzun süreli karma modellerde varyans-kovaryans matris yapısının modellenmesi amacıyla kullanılan varyans-kovaryans modelleri incelenmiştir. Bilgi kriterleri yardımıyla en uygun varyans-kovaryans modeli seçilmiştir. $T\beta = r$ kısıtlaması altında EKK tahmin edicinin elde edilmesine benzer mantıkla doğrusal karma modelinin hem rasgele etkili hem de sabit etkili parametrelerine kısıt getirilmiştir.

Bu çalışmada orijinal olarak Henderson ve ark. (1959) ın karma model eşitlikleri fikri, uzun süreli verilerde ilişkili veri yapısını dikkate alan ridge karma modele uygulanmıştır. Ayrıca ridge karma model tahmin edicisinin karma model tahmin edicisinden matris hata kareler ortalaması anlamında üstün olması için gerek ve yeter koşulları veren bir teorem geliştirilmiştir. Uzun süreli karma modeller, gerçek veri uygulaması üzerine IBM SPSS Statistics 22, Matlab 2012 ve Excel programları yardımıyla analiz edilmiştir ve Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda gerek simülasyon gerekse gerçek veri analizi belli k değerlerinde ridge karma tahmin edicisinin karma tahmin edicisine göre hata kareler ortalaması anlamında daha iyi olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmaya paralel olarak çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldıracak alternatif tahmin yöntemleri geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

AKAIKE, H., 1974. A New Look at the Statistical Model Identification. IEEE Transactions on Automatic Control, 19:716-723.

BAGIELLA, E., SLOAN, R. P., ve HEITJAN, D. F., 2000. Mixed-Effects Models in Psychophysiology. Psychophysiology, 37:13-20.

BAHÇECİTAPAR, M., 2012. Uzun Süreli Çalışmalarda MA(1) ve ARMA(1,1) Otokorelasyonlu Hatalara Sahip Doğrusal Karma Etkiler Modelleri için Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi, Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

BERNARDO, R., 1996. Best Linear Unbiased Prediction of Maize Single- Cross Performance. Crop Sci 36:50- 56.

BOZDOGAN, H., 1987. Model Selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The General Theory and Its Analytical Extensions, Psychometrika, 52:345-370.

BROWN, H., ve PRESCOTT, R., 1999. Applied Mixed Models in Medicine. Wiley&Sons, New York.

CRAVEN, P., ve WAHBA, G., 1979. Smoothing Noisy Data with Spline Functions, Numerische Mathematik, 31:377-403.

CROWDER, M., ve HAND, D., 1990. Analysis of Repeated Measures. Chapman and Hall, London.

DAVIDIAN, M., 2007. ST 732 Applied Longitudinal Data Analysis, http://www.stat.ncsu.edu/people/davidian/courses/st732/ (Erişim tarihi: 15 Temmuz 2015)

DAWSON, K. S., GENNINGS, C., CARTER, W. H., 1997. Two Graphical Techniques Useful in Detecting Correlation Structure in Repeated Measures Data, American Statistician, 51:3, 275-283.

DIGGLE, P. J., LIANG, K. Y., ve ZEGER, S. L., 1996. Analysis of Longitudinal Data. Oxford Univ. Press.

EDWARDS, L. J., STEWART, P. W., MULLER, K. E., ve HELMS, R. W., 2001. Linear Equality Constraints in the General Linear Mixed Model. Biometrics, 57(4): 1185-1190.

EISENHART, C., 1947. The Assumptions Underlying the Analysis of Variance. Biometrics, 3:1-21.

ELIOT, M., FERGUSON J., REILLY, M. P., FOULKES, A. S., 2011. Ridge Regression for Longitudinal Biomarker Data. The International Journal of Biostatistics, 7:1-11.

FAREBROTHER, R. W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. Journal of the Royal Statistical Society, 248-250.

FAY, R. E., ve HERRIOT, R. A., 1979. Estimates of Income for Small Places: an Application of James- Stein Procedures to Census Data, Journal of the American Statistical Association 74, 269-277.

FITZMAURICE, G. M., LAIRD, N. M., WARE, J. H., 2004. Applied Longitudinal Analysis. John Wiley&Sons, Inc., New Jersey.

FULLER, W. A., 1976. Introduction to Statistical Time Series. New York: John Wiley.

GOLUB, G. H., HEATH, M., ve WAHBA, G., 1979. Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter. Technometrics 21:215-223.

GRAFAREND, E. W., 2006. Linear and Nonlinear Models: Fixed Effects, Random Effects, and Mixed Models, Walter de Gruyter, Berlin.

GRADY, J. J., HELMS, R. W., 1995. Model Selection Techniques for the Covariance-Matrix for Incomplete Longitudinal Data. Statistics in Medicine, 14(13), 1397-1416.

HARTLEY, H. O., ve RAO, J. N. K., 1967. Maximum Likelihood Estimation for the Mixed Analysis of Variance Model. Biometrika 54:93-108.

HARVILLE, D. A., 1977. Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems. Journal of the American Statistical Association, 72:320-340.

HARVILLE, D. A., 1997. Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer-Verlog New York Inc.

HENDERSON, D., 1950. Estimation of Genetic Parameters (abstract). Ann. Mathemat. Statist., 21:309-310.

HENDERSON, C. R., 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. Biometrics, 9:226-252.

HENDERSON, C. R., KEMPTHORNE, O., SEARLE, S. R., ve VON KROSIGK, C. N., 1959. Estimation of Environmental and Genetic Trends From Records Subject to Culling. Biometrics, 15:192-218.

HENDERSON, C. R., 1973. Sire Evaluation and Genetics Trends. In Proceedings Animal Breeding and Genetics Symposium in Honor of Dr. Jay L. Lush, 10-41, American Society of Animal Science and American Dairy Science Association, Champaign, Illinois.

HENDERSON, C. R., 1975. Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model. Biometrics, 31:423-447.

HENDERSON, C. R., 1984. Applications of Linear Models in Animal Breeding. University of Guelph, Guelph, Ontario.

HOERL, A. E., ve KENNARD, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12, 1, pp. 55-67.

HURVICH, C. M., SIMONOFE, J. S., TSAI, C. L., 1989. Smoothing Parameter Selection in Nonparametric Regression Using an Improved Akaike Information Criterion. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 60:271-293.

http://belirtilerinelerdir.com/bobrek-yetmezligi-belirtileri-nelerdir/ (Erişim tarihi: 11 Nisan 2015)

http://www.medikalakademi.com.tr/kronik-bobrek-yetmezligi-baslangic-belirtileri tani-tedavisi/ (Erişim tarihi: 11 Nisan 2015)

http://www.kocdiyaliz.com.tr/ (Erişim tarihi: 11 Nisan 2015)

https://www.abbott.com.tr (Erişim tarihi: 11 Nisan 2015)

HUYNH, H., FELDT, L. S., 1970. Conditions under which Mean Square Ratios in Repeated Measurements Designs have Exact F-Distributions. Journal of the American Statistical Association, 65:1582-1589.

JENNRICH, R. J., SCHLUCHTER, M. D., 1986. Unbalanced Repeated-Measures Models with Structured Covariance Matrices. Biometrics, 42:805-820.

JIANG, J., 2007. Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications. New York: Springer.

İYİT, N., 2008. İlişkili Veri Analizinde Lineer Karma Modellerin Yapılandırılması, Doktora Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

LAIRD, N. M., WARE, J. H., 1982. Random-Effects Models for Longitudinal Data. Biometrics, 38**:**963-974.

LI, Z., 2011. Estimation In Linear Mixed Models for Longitudinal Data under Linear Restricted Conditions. Journal of Statistical Planning and Inference, 141:869-876.

LITTELL, R. C., RENDERGAST, J., NATARAJAN, R., 2000. Modeling Covariance Structure in the Analysis of Repeated Measures Data. Statistics in Medicine, 19(13):1793-1819.

MACCHIAVELLI, R. E., ARNOLD, S. F., 1994. Variable Order Ante- Dependence Models. Communications in Statistics: Theory and Methods, 23(9):2683-2699.

MALLOWS, C. L., 1973. Some Comments on CP. Technometrics 15:661-675.

MCCULLOCH, C. E., ve SEARLE, S. R., 2001. Generalized, Linear and Mixed Models. John Wiley&Sons Inc., New York.

MCDONALD, G. C., ve GALARNEAU, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation of some Ridge- Type Estimators. J.Amer. Statist. Assoc., 70:407-416.

NEWHOUSE, J. P., ve OMAN, S. D., 1971. An Evaluation of Ridge Estimators. Rand Report, R-716-PR, 1-28.

PATTERSON, H. D., ve THOMPSON, R., 1971. Recovery of Inter-Block Information When Block Sizes are Unequal. Biometrica 58:545-554.

POURAHMADİ, M., 1999. Joint Mean-Covariance Models with Applications to Longitudinal Data: Unconstrained Parameterisation. Biometrika 86:677–690.

RENCHER, A. C., 2002. Linear Models in Statistics. John Wiley & Sons, Inc.

ROBERTSON, J. M., 1996. Covariance Structure Selection, Alpha Levels, Distributions of Test Statistics, and Model Misspecification in Mixed Models as Implemented in SAS PROC MIXED. M.S. Thesis, Department of Statistics, Brigham Young University, Provo, UT.

FISHER, R. A., 1918. The Correlation between Relatives on The Supposition of Mendelian Inheritance. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 52 (2):399–433.

RAO, C. R., TOUTENBURG, H., 1995. Linear Models Least Squares and Alternatives. Springer Series in Statistics.

ROY, A., KHATTREE, R., 2005. On Implementation of a Test for Kronecker Product Covariance Structure for Multivariate Repeated Measures Data. Statistical Methodology, 2, 4, 297-306.

SEARLE, S. R., 1982. Matrix Algebra Useful for Statistics. John Wiley & Sons, New York.

SEARLE, S. R., CASELLA, G., ve McCULLOCH, C. E., 1992. Variance Components. John Wiley&Sons Inc., New York.

SCHEFFE, M., 1959. The Analysis of Variance. Wiley, New York.

SCHWARZ, G., 1978. Estimating the Dimension of a Model, The Annals of Statistics, 6, 461-464.

SHOCK, N. W., GREULICH, R. C., ANDRES, R., ARENBERG, D., COSTA, P. T., JR, LAKATTA, E.G.& TOBIN, J. D., 1984. Normal Human Aging. The Baltimore Longitudinal Study of Aging (NIH Publication No. 84- 2450). DC: U. S. Government Printing Office.

SONG, P. X.- K., 2007. Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics and Applications, Springer, 346p.

THEOBALD, C. M., 1974. Generalizations of Mean Square Error Applied to Regression. J. R. Statist. Soc. B. 36:103-106.

VERBEKE, G., MOLENBERGHS, G., 2000. Linear Mixed Models for Longitudinal Data. New York, Springer-Verlag.

VERBYLA, A. P., CULLIS, B. R., 1990. Modelling in Repeated Measures Experiments. Appl. Statist. 39:341–356.

YE, S., 2005. Covariance Structure Selection in Linear Mixed Models for Longitudinal Data. M.Sc. Thesis, Department of Bioinformatics and Biostatistics, University of Louisville, Louisville, Kentucky.

YÖNTEM, M., ODABAŞ, G., 2009. Kütahya Bölgesinde Bulunan Hemodiyaliz Hastalarının Bazı Biyokimyasal Parametrelerinin Değerlendirilmesi. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 18:1302-3055.

WEST, B., WELCH, K. B., GALECKI, A. T., 2007. Linear Mixed Models a Practical Guide Using Statistical Software.

WOLFINGER, R. D., 1996. Heterogeneous Variance-Covariance Structures for Repeated Measures. Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics, 1(2), 205-230.

ÖZGEÇMİŞ

02.05.1986'da Tarsus'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tarsus'da tamamladı. 2005 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında bu bölümden üçüncülükle mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde lisans derecesi ile doktoraya başladı. 2010-2014 yılları arasında T.C. Maliye Bakanlığı'nda gelir uzmanı olarak görev aldı. 2014 yılından itibaren T.C. Sağlık Bakanlığı'nda sağlık uzman yardımcısı olarak görevine devam etmektedir.

EKLER

EK 1. Matris ve Vektörlerin Gösterimleri (Searle ve ark., 1992)

X, $r \times r$ boyutlu bir matris ise,

$$\{{}_{m}X\}_{i=1}^{r} = \begin{pmatrix} X_{11} & \mathbf{L} & X_{1r} \\ \mathbb{M} & \mathbf{O} & \mathbb{M} \\ X_{r1} & \mathbf{L} & X_{rr} \end{pmatrix}$$

X, $r \times 1$ boyutlu bir sütun vektörü ise,

$$\{{}_{c}X\}_{i=1}^{r} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ \mathbb{M} \\ X_{r1} \end{bmatrix}$$

X, $1 \times r$ boyutlu satır vektörü ise,

$$\{{}_{r}X\}_{j=1}^{r} = [X_{11} \quad \mathbf{L} \quad X_{1r}]$$

X, $r \times r$ boyutlu köşegen bir matris ise,

$$\{{}_{d}X\}_{i=1}^{r} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & 0 & & X_{rr} \end{pmatrix}$$

olarak gösterilir.

EK 2. Çok Değişkenli Koşullu Normal Dağılım (Searle ve ark., 1992)

X , normal dağılım gösteren bir vektör olsun. $X \sim N(\mu, V)$ iken,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \right)$$

çok değişkenli dağılıma sahip olmak üzere,

i) X_1 in marjinal dağılımı,

$$X_1 \sim N(\mu_1, V_{11})$$

ii) $W_{11} = (V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})^{-1}$ olmak üzere X_2 verildiğinde X_1 in koşullu dağılımı,

$$X_1 / X_2 \sim N[\mu_1 + V_{12}V_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2), W_{11}^{-1}]$$

şeklinde elde edilir.

EK 3. Çok Değişkenli Rasgele Vektörün Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Rencher, 2002)

$y = (y_1 y_2, ..., y_p)'$ çok değişkenli rasgele vektör olsun. μ, $p \times 1$ boyutlu herhangi bir vektör ve Σ $p \times p$ boyutlu pozitif tanımlı matris olmak üzere $y \sim N(\mu, \Sigma)$ dağılımına sahip olsun. y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu)/2}$$

olarak ifade edilir.

EK 4. Koşullu Birinci ve İkinci Moment (Searle ve ark., 1992)

g ve y herhangi iki rasgele değişken olsun. g ve y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(g,y)$, koşullu olasılık yoğunluk fonsiyonu $f(g/y)$ olmak üzere g nin beklenen değeri $E(g)$ ve E_y, y ye göre beklenen değer olsun. Bu durumda,

$$E(g) = E_y[E(g/y)]$$

ve

$$Var(g) = E_y[Var(g/y)] + Var_y[E(g/y)]$$

olur. Burada $Var(g)$, h herhangi bir rasgele değişken olmak üzere $h = g$ iken aşağıda verilen eşitliği sağlar.

$$Cov(g,h) = E_y[Cov(g/y, h/y)] + Cov_y[E(g/y), E(h/y)]$$

g nin beklenen değeri ise,

$$\begin{aligned} E(g) &= \int\int g f(g,y) d_g d_y = \int\int g f(g/y) f(y) d_g d_y \\ &= \int\left[\int g f(g/y) d_g\right] f(y) d_y = \int E(g/y) f(y) d_y \\ &= E_y E(g/y) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada g yerine $[g - E(g)][h - E(h)]$ yazılırsa $Cov(g,h)$ bulunur.

$$\begin{aligned} Cov(g,h) &= E\{[g - E(g)][h - E(h)]\} \\ &= E_y E(\{[g - E(g)][h - E(h)]\}/y) \\ &= E_y E(\{[g - E(g/y) + E(g/y) - E(g)][h - E(h/y) + E(h/y) - E(h)]\}/y) \\ &= E_y E(\{[g - E(g/y)][h - E(h/y)] + [E(g/y) - E(g)][E(h/y) - E(h)] \\ &\quad + [g - E(g/y)][E(h/y) - E(h)] + [E(g/y) - E(g)][h - E(h/y)/y] \end{aligned}$$

Bu eşitlikte son terim, $E(g/y)$ ve $E(g)$ ifadeleri parantez dışındaki beklenen değere göre sabit olduğu için sıfır olur.

$$
\begin{aligned}
&E_y E(\{[E(g/y) - E(g)][h - E(h/y)]\}/y) \\
&= E_y([E(g/y) - E(g)]E\{[h - E(h/y)]/y\}) \\
&= E_y([E(g/y) - E(g)][E(h/y) - E(h/y)]) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $Cov(g,h)$ eşitliğinde yer alan üçüncü terim de sıfıra eşit olur.

$$
\begin{aligned}
&E_y E(\{[g - E(g/y)][E(h/y) - E(h)]/y\}) \\
&= E_y(E\{[g - E(g/y)]/y\}[E(h/y) - E(h)]) \\
&= [E(g/y) - E(g/y)]E_y([E(h/y) - E(h)] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
Cov(g,h) &= E_y E(\{[g - E(g/y)][h - E(h/y)]\}/y) \\
&\quad + E_y E(\{[E(g/y) - E(g)][E(h/y) - E(h)]\}/y) \\
&\quad = E_y E\{[g/y - E(g/y)][h/y - E(h/y)] \\
&\quad + E_y E\{[E(g/y) - E(g)][E(h/y) - E(h)]\} \\
&\quad = E_y[Cov(g/y, h/y)] + E_y\{[E(g/y) - E(g)][E(h/y) - E(h)]\} \\
&\quad = E_y[Cov(g/y, h/y)] + Cov_y[E(g/y), E(h/y)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. $h = g$ iken bu ifade $V(g)$ eşitliğine dönüşür.

EK 5. Karesel Formların Beklenen Değeri (Rencher, 2002)

a. y, μ ortalamalı ve Σ kovaryansına sahip bir rasgele vektör olmak üzere ve A sabitlerin simetrik matrisi olmak üzere,

$$E(y'Ay) = tr(A\Sigma) + \mu' A\mu$$

dır.

b. y, $p\acute{}$ 1 boyutlu; X, $q\acute{}$ 1 boyutlu iki vektör; Σ_{yx}, $p\acute{}$ q boyutlu bir matris ve A, $q\acute{}$ p boyutlu sabitlerin matrisi olmak üzere,

$$E(X'Ay) = tr(A\Sigma_{yx}) + \mu_x' A\mu_y$$

dır.

EK 6. Matris Türevleri (Searle ve ark., 1992)

a. a, $n\acute{}$ 1 boyutlu sabitlerin bir vektörü olmak üzere,

$$\frac{\partial(a'X)}{\partial X} = \frac{\partial(X'a)}{\partial X} = a$$

dır.

b. A, $n\acute{}$ n boyutlu simetrik bir matris olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X}(X'AX) &= \frac{\partial X'}{\partial X}(AX) + \frac{\partial}{\partial X}(AX)'X \\ &= AX + A'X \\ &= 2AX\end{aligned}$$

elde edilir.

c. X, A ve P herhangi bir matris; a ve b herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\frac{\partial a'Xb}{\partial X} = ab'$$

$$\frac{\partial a'X'b}{\partial X} = ba'$$

$$\frac{\partial a'X'Xb}{\partial X} = X(ab'+ba')$$

$$\frac{\partial X'A'X}{\partial X} = (A+A')X$$

$$\frac{\partial}{\partial X}tr(PX) = \frac{\partial}{\partial X}tr(XP) = P'$$

$$\frac{\partial}{\partial X}tr(PX') = \frac{\partial}{\partial X}tr(X'P) = P$$

$$\frac{\partial}{\partial X}tr(XPX') = XP'+XP$$

dır.

d. A matrisi $AA^{-1} = I$ koşulunu sağlamak üzere tekil olmayan bir matris olmak üzere, A kare matrisinin elemanları t skalerinin fonksiyonları olsun. A matrisinin determinantının türevi,

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln|A| = tr\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

dır. A matrisinin tersinin türevi ise, $\frac{\P A^{-1}}{\P t} = - A^{-1} \frac{\P A}{\P t} A^{-1}$ olur.

EK 7. Schur Tümleyeni (Searle ve ark., 1992)

A, B, C ve D sırasıyla $p' p, p' q, q' p$ ve $q' q$ boyutlu matrisler ve tekil olmayan parçalanmış bir matrisin tersi,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ I \end{bmatrix} (D - CA^{-1}B)^{-1} [-CA^{-1} \quad I]$$

olmak üzere, $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ matrisi A nın Schur Tümleyeni ile ilgili olarak sayısal sonuçlar vermiştir. Bunlardan ilki,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$$

dır. Yukarıda verilen eşitliğin sağ tarafı $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ ile çarpılarak eşitlik doğrulanabilir. Benzer olarak A matrisi yerine $-A$ matrisi alınarak,

$$(D + CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}C(A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$$

bulunur.

EK 8. Henderson (1975) ın Karma Model Eşitlikleri Yardımıyla $\hat{b}$ ve $\tilde{a}$ Değerlerinin Elde Edilmesi

Henderson ın karma model eşitlikleri (5.43) te,

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z+G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{1}$$

olarak ifade edilmişti. Henderson ve ark. (1959), (1) ile verilen matris formundan $\hat{b}$ değerinin genelleştirilmiş en küçük kareler çözümüne eşit olduğunu ispatlamıştır. İspat aşağıdaki ifadenin denk olduğunu göstermekle ilgilidir.

$$V^{-1} = (ZGZ'+R)^{-1} = R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1} \tag{2}$$

Henderson (1973) ise (1) eşitliğinde verilen $\tilde{a}$ değerinin $GZ'V^{-1}(y - X\hat{b})$ ya eşit olduğunu ispatlamıştır. Bu ispatı yapabilmek için aşağıdaki eşitliğin denk olduğunu göstermiştir.

$$(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1} = GZ'V^{-1} \tag{3}$$

(1) eşitliğinin sol tarafında verilen matrisin tersi,

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z+G^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12}' & c_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

olmak üzere Ek 9 dan c_{22} alt matrisi,

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= [Z'R^{-1}Z + G^{-1} - Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z]^{-1} \\
&= [Z'(R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1})Z + G^{-1}]^{-1} \\
&= (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1} \\
&= G - GZ'(R + ZGZ')^{-1}ZG \\
&= G - GZ'V^{-1}ZG
\end{aligned} \tag{5}
$$

olarak elde edilir. c_{11} alt matrisi,

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= (X'R^{-1}X)^{-1}[I + X'R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}] \\
&= (X'R^{-1}X)^{-1}[X'R^{-1}X + X'R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}X](X'R^{-1}X)^{-1} \\
&= (X'R^{-1}X)^{-1}X'[R^{-1} + R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}]X(X'R^{-1}X)^{-1}
\end{aligned} \tag{6}
$$

dır. Burada $R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}$ ifadesi $R^{-1} - V^{-1}$ a eşit olduğu için,

$$
c_{11} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'[2R^{-1} - V^{-1}]X(X'R^{-1}X)^{-1} \tag{7}
$$

şeklindedir. c_{12} alt matrisi ise,

$$
c_{12} = -(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Zc_{22} \tag{8}
$$

bulunur. (5), (7) ve (8) eşitlikleri (4) te yerine yazılırsa,

$$
\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'R^{-1}X)^{-1}X'(2R^{-1} - V^{-1})X(X'R^{-1}X)^{-1} & -(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Zc_{22} \\ -c_{22}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1} & c_{22} = G - GZ'V^{-1}ZG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{9}
$$

veya (6) eşitliği dikkate alınırsa,

$$
\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'R^{-1}X)^{-1}X'[R^{-1} + R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}]X(X'R^{-1}X)^{-1} & -(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Zc_{22} \\ -c_{22}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1} & c_{22} = G - GZ'V^{-1}ZG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix} \tag{10}
$$

elde edilir. (10) eşitliğinin sağ tarafında verilen matrislerin çarpılmasıyla,

$$\begin{bmatrix}\hat{b}\\ \tilde{a}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(X'R^{-1}X)^{-1}X'[R^{-1}+R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}]X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y - (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}y\\ -c_{22}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y + c_{22}Z'R^{-1}y\end{bmatrix} \quad (11)$$

bulunur. (11) eşitliğine göre $\hat{b}$,

$$\hat{b} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'\{[R^{-1}+R^{-1}Zc_{22}Z'R^{-1}]X(X'R^{-1}X)^{-1}X' - R^{-1}Zc_{22}Z'\}R^{-1}y$$

olarak ifade edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\begin{aligned}\hat{b} &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'\{R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X' + R^{-1}Zc_{22}Z'[R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X' - I]\}R^{-1}y\\ &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'\{R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X' + R^{-1}Zc_{22}Z'[R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1} - R^{-1}]R\}R^{-1}y\\ &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'\{R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X' - R^{-1}Zc_{22}Z'[R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]R\}R^{-1}y\\ &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'\{R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1} - R^{-1}Zc_{22}Z'[R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]\}y\\ &= (X'R^{-1}X)^{-1}\{X'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1} - X'R^{-1}Zc_{22}Z'[R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]\}y\\ &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}\{I - Zc_{22}Z'[R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]\}y\end{aligned} \quad (12)$$

ifadesi bulunur. (11) eşitliğinde verilen $\tilde{a} = c_{22}Z'[R^{-1} - R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]y$ (12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\hat{b} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(y - Z\tilde{a}) \quad (13)$$

elde edilir. $\tilde{a}$ eşitliğinde ise c_{22} alt matrisi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= c_{22}Z'R^{-1}[y - X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y]\\ &= (Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}[y - X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y]\end{aligned} \quad (14)$$

bulunur. (13) eşitliği $(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y = \hat{b} + (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z\tilde{a}$ olarak ifade edilebilir. Bu ifade (14) eşitliğinde yerine konularak gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= (Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b})+(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z\tilde{a} \\
&[I-(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z]\tilde{a} \\
&=(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b}) \\
&(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}[Z'R^{-1}Z+G^{-1}-Z'R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z]\tilde{a} \qquad (15) \\
&=(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b}) \\
&(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}\{Z'[R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]Z+G^{-1}\}\tilde{a} \\
&=(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b})
\end{aligned}$$

elde edilir. (15) eşitliğinde verilen $R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}$ ifadesinin R^{-1} e eşit olduğu Schur Tümleyeni yardımıyla bulunur. $A=X'R^{-1}X$, $B=X'R^{-1}$, $C=R^{-1}X$ ve $D=R^{-1}$ olmak üzere Ek 7 den,

$$\begin{aligned}
[R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}]^{-1} &= R+RR^{-1}X(X'R^{-1}X-X'R^{-1}RR^{-1}X)X'R^{-1}R \qquad (16) \\
&= R
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu değer (15) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}(Z'R^{-1}Z+G^{-1})\tilde{a}=(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b})$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\tilde{a}=(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b}) \qquad (17)$$

şeklindedir. Bulunan $\tilde{a}$ değeri (13) eşitliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{b} &= (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y-(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z\tilde{a} \\
&=(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}y \\
&-(X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z[(Z'R^{-1}Z+G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(y-X\hat{b})]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında (2) eşitliğinden,

$$[I - (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}X]\hat{b}$$
$$= (X'R^{-1}X)^{-1}X'[R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}]y$$
$$(X'R^{-1}X)^{-1}X'[R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + G^{-1})^{-1}Z'R^{-1}]X\hat{b} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

elde edilir. Buradan $\hat{b}$ değeri,

$$(X'R^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}X\hat{b} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$
$$\hat{b} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

şeklinde elde edilir.

EK 9. Parçalanmış Matrisin Tersi (Rao ve Toutenburg, 1995)

$n_1 + n_2 = n$ iken E $n_1 \times n_1$, F $n_1 \times n_2$, G $n_2 \times n_1$ ve H $n_2 \times n_2$ boyutlu matrisler olmak üzere $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ parçalanmış matrisin tersi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1}(I + FD^{-1}GE^{-1}) & -E^{-1}FD^{-1} \\ -D^{-1}GE^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $D = H - GE^{-1}F$ dir.

EK 10. X Matrisinin Sütunlarına Dik Olan Vektörler (Searle ve ark., 1992)

k', $k'X = 0$ eşitliğini sağlayan herhangi bir vektör olsun. $X'k = 0$ ve doğrusal denklemlerin çözümü teorisinden (Searle, 1982) c herhangi bir vektör olmak üzere $k = [I - (X')^{-} X']c$ olarak yazılabilir. Burada X matrisinin genelleştirilmiş tersi $X^{-} = (X'X)^{-} X'$ olduğu için k vektörünün transpozu $k' = c'[I - X(X'X)^{-} X']$ şeklinde yazılır. Ayrıca $X(X'X)^{-} X' = XX^{+}$ olduğu için $k' = c'[I - XX^{+}]$ a eşittir. G, $(X'X)$ in genelleştirilmiş tersi olmak üzere $M = I - XGX' = I - X(X'X)^{-} X' = I - XX^{+}$ olarak tanımlanırsa k' vektörü M cinsinden $k' = c'M$ şeklinde yazılır.

EK 11. Teorem (Farebrother, 1976)

A $n \times n$ boyutlu pozitif tanımlı bir matris, b $n \times 1$ boyutlu sıfırdan farklı sütun vektörü ve d pozitif bir sabit olsun. Buna göre $dA - bb'$ pozitif (veya yarı pozitif) tanımlıdır ancak ve ancak $b'A^{-1}b \leq d$ ise.

EK 12

Çizelge 12.1. Rasgele etkilere ilişkin varyans-kovaryans parametre tahminleri

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Kovaryans Parametresi	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	Tahmin	Standart Hata	Walz Z	Sig.	% 95 Güven Aralığı	
								Alt Sınır	Üst Sınır
Rasgele Kesen Terimli Model	Bileşik Simetri (CS)	s_e^2	ML	88,32	2,66	33,15	<0,000	83,25	93,70
			REML	88,43	2,67	33,13	<0,000	83,35	93,82
		s_a^2	ML	60,24	6,81	8,85	<0,000	48,28	75,17
			REML	60,96	6,91	8,82	<0,000	48,81	76,14
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Varyans Bileşenleri (VC)	s_e^2	ML	39,41	2,66	14,79	<0,000	34,52	44,99
			REML	39,42	2,67	14,77	<0,000	34,52	45,01
		s_1^2	ML	60,24	6,81	8,85	<0,000	48,28	75,17
			REML	60,96	6,91	8,82	<0,000	48,81	76,14
		s_2^2	ML	48,91	0,00	-	-	-	-
			REML	49,01	0,00	-	-	-	-
	Bileşik Simetri (CS)	s_e^2	ML	29,45	7,40	3,98	<0,000	18,00	48,18
			REML	41,79	7,50	5,57	<0,000	29,40	59,41
		s^2	ML	58,87	6,81	8,65	<0,000	46,93	73,84
			REML	46,65	6,91	6,75	<0,000	34,88	62,37
		r	ML	0,34	0,00	-	-	-	-
			REML	3,58	0,00	-	-	-	-
	Toeplitz	s_e^2	ML	40,00	15,88	2,52	<0,012	18,37	87,10
			REML	46,23	0,00	-	-	-	-
		s^2	ML	52,48	12,21	4,30	<0,000	33,26	82,81
			REML	43,01	2,29	18,79	<0,000	38,75	47,74
		r_1	ML	0,21	0,13	1,66	<0,047	-0,05	0,44
			REML	0,13	0,05	2,46	<0,014	0,03	0,23

Çizelge 12.1. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Kovaryans Parametresi	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	Tahmin	Standart Hata	Walz Z	Sig.	% 95 Güven Aralığı	
								Alt Sınır	Üst Sınır
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	AR(1)	s_e^2	ML	30,99	7,74	4,01	<0,000	19,00	50,55
			REML	30,37	7,83	3,88	<0,000	18,31	50,35
		s^2	ML	58,71	6,99	8,40	<0,000	46,48	74,14
			REML	59,44	7,10	8,37	<0,000	47,04	75,12
		r	ML	0,14	0,04	3,21	<0,001	0,05	0,22
			REML	0,13	0,04	3,21	<0,001	0,05	0,22
	CSH	s_e^2	ML	19,43	0,00	-	-	-	-
			REML	19,21	0,00	-	-	-	-
		s_1^2	ML	38,95	0,00	-	-	-	-
			REML	39,64	0,00	-	-	-	-
		s_2^2	ML	68,75	9,66	7,12	<0,000	52,20	90,55
			REML	69,02	9,67	7,14	<0,000	52,45	90,84
		r	ML	0,09	0,03	2,83	<0,005	0,03	0,15
			REML	0,09	0,03	2,79	<0,005	0,03	0,15
	TOEPH	s_e^2	ML	17,81	0,00	-	-	-	-
			REML	17,90	0,00	-	-	-	-
		s_1^2	ML	55,67	4,74	11,74	<0,000	47,11	65,78
			REML	56,60	4,86	11,65	<0,000	47,84	66,97
		s_2^2	ML	42,85	5,72	7,50	<0,000	32,99	55,66
			REML	42,54	5,69	7,48	<0,000	32,74	55,29
		r	ML	0,02	0,03	0,65	<0,519	-0,03	0,07
			REML	0,01	0,03	0,50	<0,615	-0,04	0,06

Çizelge 12.1. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Kovaryans Parametresi	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	Tahmin	Standart Hata	Walz Z	Sig.	%95 Güven Aralığı	
								Alt Sınır	Üst Sınır
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	ARH(1)	σ_e^2	ML	0,00	0,00	-	-	-	-
			REML	0,00	0,00	-	-	-	-
		σ_1^2	ML	12,44	0,00	-	-	-	-
			REML	52,12	6,20	8,41	<0,000	41,28	65,80
		σ_2^2	ML	12,84	0,00	-	-	-	-
			REML	81,74	8,92	9,16	<0,000	65,99	101,23
		r	ML	-0,69	0,00	-	-	-	-
			REML	0,12	0,02	4,98	<0,000	0,07	0,16
	HF	σ_e^2	ML	45,09	4,93	9,15	<0,000	36,40	55,86
			REML	45,22	4,96	9,12	<0,000	36,48	56,07
		σ_1^2	ML	49,93	0,00	-	-	-	-
			REML	50,14	0,00	-	-	-	-
		σ_2^2	ML	39,98	7,11	5,62	<0,000	28,22	56,66
			REML	40,08	7,16	5,60	<0,000	28,25	56,88
		l	ML	43,26	4,11	10,53	<0,000	35,20	51,31
			REML	43,24	4,14	10,43	<0,000	35,11	51,36
	ANTE(1)	σ_e^2	ML	19,15	25,61	0,75	<0,455	1,39	263,27
			REML	19,07	43,06	0,44	<0,658	0,23	1595,20
		σ_1^2	ML	59,08	7,45	7,93	<0,000	46,14	75,65
			REML	59,81	7,57	7,90	<0,000	46,68	76,65
		σ_2^2	ML	73,76	29,36	2,51	<0,000	33,81	160,93
			REML	73,92	47,29	1,56	<0,118	21,10	258,99
		r	ML	-0,17	0,09	-1,85	<0,064	-0,35	0,01
			REML	-0,17	0,09	-1,86	<0,063	-0,35	0,01

Çizelge 12.1. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Kovaryans Parametresi	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	Tahmin	Standart Hata	Walz Z	Sig.	% 95 Güven Aralığı	
								Alt Sınır	Üst Sınır
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	FA(1)	s_e^2	ML	24,61	6,36	3,87	<0,000	14,83	40,83
			REML	24,26	6,42	3,78	<0,000	14,44	40,76
		l_1	ML	1,49	1,01	1,48	<0,140	-0,49	3,47
			REML	1,33	1,01	1,31	<0,189	-0,65	3,31
		l_2	ML	0,18	1,11	0,16	<0,871	-1,99	2,35
			REML	0,23	1,11	0,21	<0,833	-1,94	2,41
		d	ML	51,19	5,76	8,89	<0,000	41,06	63,81
			REML	51,71	5,82	8,88	<0,000	41,47	64,49
	FAH(1)	s_e^2	ML	34,08	114,93	0,30	<0,767	0,05	25276,53
			REML	23,58	53,38	0,44	<0,659	0,28	1991,42
		l_1	ML	1,43	159,38	0,01	<0,993	-310,95	313,80
			REML	1,38	65,90	0,02	<0,983	-127,78	130,54
		l_2	ML	0,88	112,15	0,01	<0,994	-218,93	220,68
			REML	0,94	48,71	0,02	<0,985	-94,52	96,41
		d_1	ML	43,51	368,68	0,12	<0,906	0,00	709088527,31
			REML	44,51	152,71	0,29	<0,771	0,05	37054,15
		d_2	ML	47,55	0,00	-	-	-	-
			REML	57,56	0,00	-	-	-	-
	UN(1)	s_e^2	ML	52,58	10,94	4,81	<0,000	34,97	79,06
			REML	52,63	10,95	4,81	<0,000	35,01	79,13
		s_1^2	ML	53,98	6,06	8,90	<0,000	43,31	67,27
			REML	54,62	6,16	8,87	<0,000	43,79	68,13
		s_2^2	ML	31,02	14,30	2,17	<0,030	12,56	76,59
			REML	31,00	14,31	2,17	<0,030	12,54	76,62

Çizelge 12.1. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Kovaryans Parametresi	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	Tahmin	Standart Hata	Walz Z	Sig.	% 95 Güven Aralığı	
								Alt Sınır	Üst Sınır
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	ARMA(1,1)	s_e^2	ML	57,99	4,39	13,22	<0,000	50,00	67,25
			REML	57,94	4,39	13,20	<0,000	49,95	67,22
		s_1^2	ML	40,07	4,61	8,69	<0,000	31,98	50,21
			REML	40,33	4,65	8,67	<0,000	32,16	50,56
		f	ML	0,34	0,00	-	-	-	-
			REML	0,35	0,00	-	-	-	-
	UN	s_e^2	ML	29,25	7,24	4,04	<0,000	18,01	47,52
			REML	29,25	7,26	4,03	<0,000	17,99	47,57
		s_1^2	ML	90,58	15,55	5,83	<0,000	64,70	126,81
			REML	91,19	15,62	5,84	<0,000	65,18	127,58
		s_2^2	ML	101,53	22,29	4,55	<0,000	66,03	156,14
			REML	101,47	22,33	4,54	<0,000	65,92	156,20
		s_{12}^2	ML	-47,43	14,87	-3,19	<0,000	-76,57	-18,29
			REML	-47,40	14,90	-3,18	<0,000	-76,61	-18,20
	UNR	s_e^2	ML	31,98	0,00	-	-	-	-
			REML	25,46	0,00	-	-	-	-
		s_1^2	ML	48,16	0,00	-	-	-	-
			REML	66,38	0,00	-	-	-	-
		s_2^2	ML	50,61	8,49	5,96	<0,000	36,43	70,31
			REML	49,11	7,08	6,94	<0,000	37,03	65,15
		r_{21}	ML	-0,09	0,00	-	-	-	-
			REML	-0,15	0,00	-	-	-	-

Çizelge 12.2. Rasgele etkilere ve hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrislerinin tahminleri

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terimli Model	Bileşik Simetri (CS) $\begin{bmatrix} \sigma^2+\sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha & \sigma_\alpha & \sigma_\alpha \\ \sigma_\alpha & \sigma^2+\sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha & \sigma_\alpha \\ \sigma_\alpha & \sigma_\alpha & \sigma^2+\sigma_\alpha^2 & \sigma_1 \\ \sigma_\alpha & \sigma_\alpha & \sigma_\alpha & \sigma^2+\sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}$		$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 88.32 & 0 & \cdots & 0 \\ & 88.32 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 88.32 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 88.43 & 0 & \cdots & 0 \\ & 88.43 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 88.43 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=88.32$ $\hat{\sigma}^2_{\alpha,ML}=60.24$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=88.43$ $\hat{\sigma}^2_{\alpha,REML}=60.96$
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Varyans Bileşenleri (VC) $\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 60.24 & 0 \\ 0 & 48.91 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 60.96 & 0 \\ 0 & 49.01 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 39.40 & 0 & \cdots & 0 \\ & 39.40 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 39.40 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 39.41 & 0 & \cdots & 0 \\ & 39.41 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 39.41 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{1,ML}=60.24$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=48.91$ $\sigma^2_{\varepsilon,ML}=39.40$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=60.96$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=49.01$ $\sigma^2_{\varepsilon,REML}=39,41$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Bileşik Simetri (CS) $\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho & \rho\\ \rho & 1 & \rho & \rho\\ \rho & \rho & 1 & \rho\\ \rho & \rho & \rho & 1\end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix}58.87 & 20.01\\ 20.01 & 58.87\end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix}46.64 & 166.50\\ 166.50 & 46.64\end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix}29.44 & 0 & \cdots & 0\\ & 29.44 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 29.44\end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix}41.78 & 0 & \cdots & 0\\ & 41.78 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 41.78\end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=29.44$ $\hat{\sigma}^2_{ML}=58.87$ $\hat{\rho}_{ML}=0.34$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=41.78$ $\hat{\sigma}^2_{REML}=46.64$ $\hat{\rho}_{REML}=3.57$
	Toeplitz (TOEP) $\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3\\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & \rho_2\\ \rho_2 & \rho_3 & 1 & \rho_1\\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1\end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix}52.48 & 11.02\\ 11.02 & 52.48\end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix}43.01 & 5.59\\ 5.59 & 43.01\end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix}40.00 & 0 & \cdots & 0\\ & 40.00 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 40.00\end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix}46.23 & 0 & \cdots & 0\\ & 46.23 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 46.23\end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=40.00$ $\hat{\sigma}^2_{ML}=52.48$ $\hat{\rho}_{ML}=0.21$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=46.23$ $\hat{\sigma}^2_{REML}=43.01$ $\hat{\rho}_{REML}=0.13$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Birinci Dereceden Otoregresif [AR(1)] $\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \rho^3\\ \rho & 1 & \rho & \rho^2\\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho\\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1\end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix}58.70 & 7.98\\ 7.98 & 58.70\end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix}59.44 & 8.02\\ 8.02 & 59.44\end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix}30.99 & 0 & \cdots & 0\\ & 30.99 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 30.99\end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix}30.36 & 0 & \cdots & 0\\ & 30.36 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 30.36\end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=30.99$ $\hat{\sigma}^2_{ML}=58.70$ $\hat{\rho}_{ML}=0.136$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=30.36$ $\hat{\sigma}^2_{REML}=59.44$ $\hat{\rho}_{REML}=0.135$
	Heterojen Bileşik Simetri (CSH) $\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_3\sigma_1\rho & \sigma_4\sigma_1\rho\\ \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_4\sigma_2\rho\\ \sigma_3\sigma_1\rho & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho\\ \sigma_4\sigma_1\rho & \sigma_4\sigma_2\rho & \sigma_4\sigma_3\rho & \sigma_4^2\end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix}38.95 & 4.709\\ 4.709 & 68.75\end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix}39.63 & 4.706\\ 4.706 & 69.02\end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix}19.42 & 0 & \cdots & 0\\ & 19.42 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 19.42\end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix}19.21 & 0 & \cdots & 0\\ & 19.21 & & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ & & & 19.21\end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=19.42$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=38.95$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=68.75$ $\hat{\rho}_{ML}=0.091$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=19.21$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=39.63$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=69.02$ $\hat{\rho}_{REML}=0.090$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Heterojen Toeplitz (TOEPH) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_4\sigma_1\rho_3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 \\ \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 \\ \sigma_4\sigma_1\rho_3 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 55.67 & 0.97 \\ 0.97 & 42.85 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 56.60 & 0.49 \\ 0.49 & 42.54 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 17.81 & 0 & \cdots & 0 \\ & 17.81 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 17.81 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 17.90 & 0 & \cdots & 0 \\ & 17.90 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 17.90 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=17.81$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=55.67$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=42.85$ $\hat{\rho}_{ML}=0.02$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=17.90$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=56.60$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=42.54$ $\hat{\rho}_{REML}=0.01$
	Heterojen Birinci Dereceden Otoregresif [ARH(1)] $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_3\sigma_1\rho^2 & \sigma_4\sigma_1\rho^3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_4\sigma_2\rho^2 \\ \sigma_3\sigma_1\rho^2 & \sigma_3\sigma_2\rho & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho \\ \sigma_4\sigma_1\rho^3 & \sigma_4\sigma_2\rho^2 & \sigma_4\sigma_3\rho & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 12.44 & -8.59 \\ -8.59 & 12.83 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 52.11 & 7.17 \\ 7.17 & 81.73 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 1{,}01E\text{-}12 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1{,}01E\text{-}12 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1{,}01E\text{-}12 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 3{,}16E\text{-}08 & 0 & \cdots & 0 \\ & 3{,}16E\text{-}08 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 3{,}16E\text{-}08 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=1{,}01E\text{-}12$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=12.44$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=12.83$ $\hat{\rho}_{ML}=-0.68$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=3{,}16E\text{-}08$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=52.11$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=81.73$ $\hat{\rho}_{REML}=0.11$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Huynh-Feldt (HF) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_1^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}-\lambda & \sigma_2^2 & \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}-\lambda & \sigma_3^2 & \frac{\sigma_3^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_2^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \frac{\sigma_3^2+\sigma_4^2}{2}-\lambda & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 49.93 & 1.69 \\ 1.69 & 39.98 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 50.14 & 1.87 \\ 1.87 & 40.08 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 45.09 & 0 & \cdots & 0 \\ & 45.09 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 45.09 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 45.22 & 0 & \cdots & 0 \\ & 45.22 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 45.22 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=45.09$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=49.93$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=39.98$ $\hat{\lambda}_{ML}=43.26$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=45.22$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=50.14$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=40.08$ $\hat{\lambda}_{REML}=43.24$
	Birinci Dereceden Anti-Bağımlı [ANTE(1)] $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_3\sigma_1\rho_1\rho_2 & \sigma_4\sigma_1\rho_1\rho_2\rho_3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_2 & \sigma_4\sigma_2\rho_2\rho_3 \\ \sigma_3\sigma_1\rho_1\rho_2 & \sigma_3\sigma_2\rho_2 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_3 \\ \sigma_4\sigma_1\rho_1\rho_2\rho_3 & \sigma_4\sigma_2\rho_2\rho_3 & \sigma_4\sigma_3\rho_3 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 59.08 & -11.35 \\ -11.35 & 73.76 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 59.81 & -11.50 \\ -11.50 & 73.92 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 19.15 & 0 & \cdots & 0 \\ & 19.15 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 19.15 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 19.07 & 0 & \cdots & 0 \\ & 19.07 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 19.07 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=19.15$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=59.08$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=73.76$ $\hat{\rho}_{ML}=-0.172$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=19.07$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=59.81$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=73.92$ $\hat{\rho}_{REML}=-0.173$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Birinci Dereceden Faktör Analitik [FA(1)] $\begin{bmatrix} \lambda_1^2+d & \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1 & \lambda_4\lambda_1 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2+d & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_4\lambda_2 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2+d & \lambda_4\lambda_3 \\ \lambda_4\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 & \lambda_4\lambda_3 & \lambda_4^2+d \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 53.41 & 0.26 \\ 0.26 & 51.22 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 53.48 & 0.31 \\ 0.31 & 51.76 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 24.61 & 0 & \cdots & 0 \\ & 24.61 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 24.61 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 24.26 & 0 & \cdots & 0 \\ & 24.26 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 24.26 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=24.61$ $\hat{\lambda}_{1,ML}=1.49$ $\hat{\lambda}_{2,ML}=0.18$ $\hat{d}_{ML}=51.19$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=24.26$ $\hat{\lambda}_{1,REML}=1.33$ $\hat{\lambda}_{2,REML}=0.23$ $\hat{d}_{REML}=51.71$
	Heterojen Birinci Dereceden Faktör Analitik [FAH(1)] $\begin{bmatrix} \lambda_1^2+d_1 & \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1 & \lambda_4\lambda_1 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2+d_2 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_4\lambda_2 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2+d_3 & \lambda_4\lambda_3 \\ \lambda_4\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 & \lambda_4\lambda_3 & \lambda_4^2+d_4 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 45.55 & 1.26 \\ 1.26 & 48.32 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 46.41 & 1.30 \\ 1.30 & 58.44 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 34.08 & 0 & \cdots & 0 \\ & 34.08 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 34.08 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 23.58 & 0 & \cdots & 0 \\ & 23.58 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 23.58 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=34.08$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=23.58$ $\hat{\lambda}_{1,ML}=1.43$ $\hat{\lambda}_{1,REML}=1.38$ $\hat{\lambda}_{2,ML}=0.88$ $\hat{\lambda}_{2,REML}=0.94$ $\hat{d}_{1,ML}=43.51$ $\hat{d}_{1,REML}=44.51$ $\hat{d}_{2,ML}=47.55$ $\hat{d}_{2,REML}=57.56$

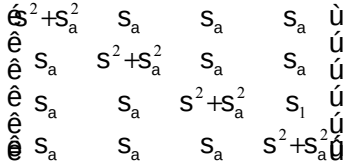
Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	[Köşegen UN(1)] $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 53.98 & 0 \\ 0 & 31.01 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 54.62 & 0 \\ 0 & 30.99 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 52.58 & 0 & \cdots & 0 \\ & 52.58 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 52.58 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 52.63 & 0 & \cdots & 0 \\ & 52.63 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 52.63 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=52.58$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=53.98$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=31.01$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=52.63$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=54.62$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=30.99$
	ARMA(1,1) $\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi\rho & \phi\rho^2 \\ \phi & 1 & \phi & \phi\rho \\ \phi\rho & \phi & 1 & \phi \\ \phi\rho^2 & \phi\rho & \phi & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 40.07 & 13.62 \\ 13.62 & 40.07 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 40.33 & 14.11 \\ 14.11 & 40.33 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 57.99 & 0 & \cdots & 0 \\ & 57.99 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 57.99 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 57.94 & 0 & \cdots & 0 \\ & 57.94 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 57.94 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=57.99$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=40.07$ $\hat{\phi}_{ML}=0.34$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=57.94$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=40.33$ $\hat{\phi}_{REML}=0.35$

Çizelge 12.2. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	G rasgele etkilere ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi	R_i $i=1,..,200$ için hata terimine ilişkin varyans-kovaryans matrisi	Varyans bileşenlerinin tahmin değerleri
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model (RISM)	Yapısal Olmayan Korelasyonlu (UNR) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_4\sigma_1\rho_{41} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} \\ \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} \\ \sigma_4\sigma_1\rho_{41} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 48.15 & -4.44 \\ -4.44 & 50.61 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 66.38 & -8.56 \\ -8.56 & 49.11 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 31.98 & 0 & \cdots & 0 \\ & 31.98 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 31.98 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 25.46 & 0 & \cdots & 0 \\ & 25.46 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 25.46 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=31.98$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=48.15$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=50.61$ $\hat{\rho}_{21,ML}=-0.09$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=25.46$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=66.38$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=49.11$ $\hat{\rho}_{21,REML}=-0.15$
	Yapısal Olmayan (UN) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{G}_{ML}=\begin{bmatrix} 90.58 & -47.43 \\ -47.43 & 101.53 \end{bmatrix}$ $\hat{G}_{REML}=\begin{bmatrix} 91.19 & -47.40 \\ -47.40 & 101.47 \end{bmatrix}$	$\hat{R}_{i,ML}=\begin{bmatrix} 29.254 & 0 & \cdots & 0 \\ & 29.254 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 29.254 \end{bmatrix}_{12\times12}$ $\hat{R}_{i,REML}=\begin{bmatrix} 29.252 & 0 & \cdots & 0 \\ & 29.252 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 29.252 \end{bmatrix}_{12\times12}$	$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML}=29.254$ $\hat{\sigma}^2_{1,ML}=90.58$ $\hat{\sigma}^2_{2,ML}=101.53$ $\hat{\sigma}_{12,ML}=-47.43$ $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,REML}=29.252$ $\hat{\sigma}^2_{1,REML}=91.19$ $\hat{\sigma}^2_{2,REML}=101.47$ $\hat{\sigma}_{12,REML}=-47.40$

Çizelge 12.3. y_i bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matrisinin tahminleri

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	$V_i \quad i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terimli Model	Bileşik Simetri (CS) 	$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 148.56 & 60.24 & \cdots & 60.24 \\ & 148.56 & & \vdots \\ & & \ddots & 60.24 \\ & & & 148.56 \end{bmatrix}_{12\times 12}$ $\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 149.39 & 60.96 & \cdots & 60.96 \\ & 149.39 & & \vdots \\ & & \ddots & 60.96 \\ & & & 149.39 \end{bmatrix}_{12\times 12}$

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	$V_i \quad i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Varyans Bileşenleri (VC) $s^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 148,56 & 158,06 & 206,97 & 255,88 & 304,79 & 353,70 & 402,61 & 451,52 & 500,43 & 549,34 & 598,25 & 647,16 \\ 158,06 & 295,29 & 353,70 & 451,52 & 549,34 & 647,16 & 744,98 & 842,80 & 940,62 & 1038,44 & 1136,26 & 1234,08 \\ 206,97 & 353,70 & 539,84 & 647,16 & 793,89 & 940,62 & 1087,35 & 1234,08 & 1380,81 & 1527,54 & 1674,27 & 1821,00 \\ 255,88 & 451,52 & 647,16 & 882,21 & 1038,44 & 1234,08 & 1429,72 & 1625,36 & 1821,00 & 2016,64 & 2212,28 & 2407,92 \\ 304,79 & 549,34 & 793,89 & 1038,44 & 1322,40 & 1527,54 & 1772,09 & 2016,64 & 2261,19 & 2505,74 & 2750,29 & 2994,84 \\ 353,70 & 647,16 & 940,62 & 1234,08 & 1527,54 & 1860,41 & 2114,46 & 2407,92 & 2701,38 & 2994,84 & 3288,30 & 3581,76 \\ 402,61 & 744,98 & 1087,35 & 1429,72 & 1772,09 & 2114,46 & 2496,24 & 2799,20 & 3141,57 & 3483,94 & 3826,31 & 4168,68 \\ 451,52 & 842,80 & 1234,08 & 1625,36 & 2016,64 & 2407,92 & 2799,20 & 3229,89 & 3581,76 & 3973,04 & 4364,32 & 4755,60 \\ 500,43 & 940,62 & 1380,81 & 1821,00 & 2261,19 & 2701,38 & 3141,57 & 3581,76 & 4061,36 & 4462,14 & 4902,33 & 5342,52 \\ 549,34 & 1038,44 & 1527,54 & 2016,64 & 2505,74 & 2994,84 & 3483,94 & 3973,04 & 4462,14 & 4990,65 & 5440,34 & 5929,44 \\ 598,25 & 1136,26 & 1674,27 & 2212,28 & 2750,29 & 3288,30 & 3826,31 & 4364,32 & 4902,33 & 5440,34 & 6017,76 & 6516,36 \\ 647,16 & 1234,08 & 1821,00 & 2407,92 & 2994,84 & 3581,76 & 4168,68 & 4755,60 & 5342,52 & 5929,44 & 6516,36 & 7142,69 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 149,39 & 158,98 & 207,99 & 257,00 & 306,01 & 355,02 & 404,03 & 453,04 & 502,05 & 551,06 & 600,07 & 649,08 \\ 158,98 & 296,42 & 355,02 & 453,04 & 551,06 & 649,08 & 747,10 & 845,12 & 943,14 & 1041,16 & 1139,18 & 1237,20 \\ 207,99 & 355,02 & 541,47 & 649,08 & 796,11 & 943,14 & 1090,17 & 1237,20 & 1384,23 & 1531,26 & 1678,29 & 1825,32 \\ 257,00 & 453,04 & 649,08 & 884,54 & 1041,16 & 1237,20 & 1433,24 & 1629,28 & 1825,32 & 2021,36 & 2217,40 & 2413,44 \\ 306,01 & 551,06 & 796,11 & 1041,16 & 1325,63 & 1531,26 & 1776,31 & 2021,36 & 2266,41 & 2511,46 & 2756,51 & 3001,56 \\ 355,02 & 649,08 & 943,14 & 1237,20 & 1531,26 & 1864,74 & 2119,38 & 2413,44 & 2707,50 & 3001,56 & 3295,62 & 3589,68 \\ 404,03 & 747,10 & 1090,17 & 1433,24 & 1776,31 & 2119,38 & 2501,87 & 2805,52 & 3148,59 & 3491,66 & 3834,73 & 4177,80 \\ 453,04 & 845,12 & 1237,20 & 1629,28 & 2021,36 & 2413,44 & 2805,52 & 3237,02 & 3589,68 & 3981,76 & 4373,84 & 4765,92 \\ 502,05 & 943,14 & 1384,23 & 1825,32 & 2266,41 & 2707,50 & 3148,59 & 3589,68 & 4070,19 & 4471,86 & 4912,95 & 5354,04 \\ 551,06 & 1041,16 & 1531,26 & 2021,36 & 2511,46 & 3001,56 & 3491,66 & 3981,76 & 4471,86 & 5001,38 & 5452,06 & 5942,16 \\ 600,07 & 1139,18 & 1678,29 & 2217,40 & 2756,51 & 3295,62 & 3834,73 & 4373,84 & 4912,95 & 5452,06 & 6030,59 & 6530,28 \\ 649,08 & 1237,20 & 1825,32 & 2413,44 & 3001,56 & 3589,68 & 4177,80 & 4765,92 & 5354,04 & 5942,16 & 6530,28 & 7157,82 \end{bmatrix}$

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i=1,\ldots,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Bileşik Simetri (CS) $s^2\begin{bmatrix}1 & r & r & r\\ r & 1 & r & r\\ r & r & 1 & r\\ r & r & r & 1\end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML}=$ 187,209 236,64 315,52 394,4 473,28 552,16 631,04 709,92 788,8 867,68 946,56 1025,44 236,64 403,839 512,14 649,89 787,64 925,39 1063,14 1200,89 1338,64 1476,39 1614,14 1751,89 315,52 512,14 738,209 905,38 1102 1298,62 1495,24 1691,86 1888,48 2085,1 2281,72 2478,34 394,4 649,89 905,38 1190,319 1416,36 1671,85 1927,34 2182,83 2438,32 2693,81 2949,3 3204,79 473,28 787,64 1102 1416,36 1760,169 2045,08 2359,44 2673,8 2988,16 3302,52 3616,88 3931,24 552,16 925,39 1298,62 1671,85 2045,08 2447,759 2791,54 3164,77 3538 3911,23 4284,46 4657,69 631,04 1063,14 1495,24 1927,34 2359,44 2791,54 3253,089 3655,74 4087,84 4519,94 4952,04 5384,14 709,92 1200,89 1691,86 2182,83 2673,8 3164,77 3655,74 4176,159 4637,68 5128,65 5619,62 6110,59 788,8 1338,64 1888,48 2438,32 2988,16 3538 4087,84 4637,68 5216,969 5737,36 6287,2 6837,04 867,68 1476,39 2085,1 2693,81 3302,52 3911,23 4519,94 5128,65 5737,36 6375,519 6954,78 7563,49 946,56 1614,14 2281,72 2949,3 3616,88 4284,46 4952,04 5619,62 6287,2 6954,78 7651,809 8289,94 1025,44 1751,89 2478,34 3204,79 3931,24 4657,69 5384,14 6110,59 6837,04 7563,49 8289,94 9045,839 $\hat{V}_{i,REML}=$ 187,21 236,64 315,52 394,40 473,28 552,16 631,04 709,92 788,80 867,68 946,56 1025,44 236,64 403,84 512,14 649,89 787,64 925,39 1063,14 1200,89 1338,64 1476,39 1614,14 1751,89 315,52 512,14 738,21 905,38 1102,00 1298,62 1495,24 1691,86 1888,48 2085,10 2281,72 2478,34 394,40 649,89 905,38 1190,32 1416,36 1671,85 1927,34 2182,83 2438,32 2693,81 2949,30 3204,79 473,28 787,64 1102,00 1416,36 1760,17 2045,08 2359,44 2673,80 2988,16 3302,52 3616,88 3931,24 552,16 925,39 1298,62 1671,85 2045,08 2447,76 2791,54 3164,77 3538,00 3911,23 4284,46 4657,69 631,04 1063,14 1495,24 1927,34 2359,44 2791,54 3253,09 3655,74 4087,84 4519,94 4952,04 5384,14 709,92 1200,89 1691,86 2182,83 2673,80 3164,77 3655,74 4176,16 4637,68 5128,65 5619,62 6110,59 788,80 1338,64 1888,48 2438,32 2988,16 3538,00 4087,84 4637,68 5216,97 5737,36 6287,20 6837,04 867,68 1476,39 2085,10 2693,81 3302,52 3911,23 4519,94 5128,65 5737,36 6375,52 6954,78 7563,49 946,56 1614,14 2281,72 2949,30 3616,88 4284,46 4952,04 5619,62 6287,20 6954,78 7651,81 8289,94 1025,44 1751,89 2478,34 3204.79 3931,24 4657,69 5384,14 6110.59 6837,04 7563,49 8289,94 9045,84

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	$V_i \quad i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Toeplitz (TOEP) $\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & 1 & r_3 & r_2 \\ r_2 & r_3 & 1 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 167,00 & 190,50 & 254,00 & 317,50 & 381,00 & 444,50 & 508,00 & 571,50 & 635,00 & 698,50 & 762,00 & 825,50 \\ 190,50 & 346,48 & 422,46 & 538,44 & 654,42 & 770,40 & 886,38 & 1002,36 & 1118,34 & 1234,32 & 1350,30 & 1466,28 \\ 254,00 & 422,46 & 630,92 & 759,38 & 927,84 & 1096,30 & 1264,76 & 1433,22 & 1601,68 & 1770,14 & 1938,60 & 2107,06 \\ 317,50 & 538,44 & 759,38 & 1020,32 & 1201,26 & 1422,20 & 1643,14 & 1864,08 & 2085,02 & 2305,96 & 2526,90 & 2747,84 \\ 381,00 & 654,42 & 927,84 & 1201,26 & 1514,68 & 1748,10 & 2021,52 & 2294,94 & 2568,36 & 2841,78 & 3115,20 & 3388,62 \\ 444,50 & 770,40 & 1096,30 & 1422,20 & 1748,10 & 2114,00 & 2399,90 & 2725,80 & 3051,70 & 3377,60 & 3703,50 & 4029,40 \\ 508,00 & 886,38 & 1264,76 & 1643,14 & 2021,52 & 2399,90 & 2818,28 & 3156,66 & 3535,04 & 3913,42 & 4291,80 & 4670,18 \\ 571,50 & 1002,36 & 1433,22 & 1864,08 & 2294,94 & 2725,80 & 3156,66 & 3627,52 & 4018,38 & 4449,24 & 4880,10 & 5310,96 \\ 635,00 & 1118,34 & 1601,68 & 2085,02 & 2568,36 & 3051,70 & 3535,04 & 4018,38 & 4541,72 & 4985,06 & 5468,40 & 5951,74 \\ 698,50 & 1234,32 & 1770,14 & 2305,96 & 2841,78 & 3377,60 & 3913,42 & 4449,24 & 4985,06 & 5560,88 & 6056,70 & 6592,52 \\ 762,00 & 1350,30 & 1938,60 & 2526,90 & 3115,20 & 3703,50 & 4291,80 & 4880,10 & 5468,40 & 6056,70 & 6685,00 & 7233,30 \\ 825,50 & 1466,28 & 2107,06 & 2747,84 & 3388,62 & 4029,40 & 4670,18 & 5310,96 & 5951,74 & 6592,52 & 7233,30 & 7914.08 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 143,43 & 145,80 & 194,40 & 243,00 & 291,60 & 340,20 & 388,80 & 437,40 & 486,00 & 534,60 & 583,20 & 631,80 \\ 145,80 & 283,64 & 329,02 & 420,63 & 512,24 & 603,85 & 695,46 & 787,07 & 878,68 & 970,29 & 1061,90 & 1153,51 \\ 194,40 & 329,02 & 509,87 & 598,26 & 732,88 & 867,50 & 1002,12 & 1136,74 & 1271,36 & 1405,98 & 1540,60 & 1675,22 \\ 243,00 & 420,63 & 598,26 & 822,12 & 953,52 & 1131,15 & 1308,78 & 1486,41 & 1664,04 & 1841,67 & 2019,30 & 2196,93 \\ 291,60 & 512,24 & 732,88 & 953,52 & 1220,39 & 1394,80 & 1615,44 & 1836,08 & 2056,72 & 2277,36 & 2498,00 & 2718,64 \\ 340,20 & 603,85 & 867,50 & 1131,15 & 1394,80 & 1704,68 & 1922,10 & 2185,75 & 2449,40 & 2713,05 & 2976,70 & 3240,35 \\ 388,80 & 695,46 & 1002,12 & 1308,78 & 1615,44 & 1922,10 & 2274,99 & 2535,42 & 2842,08 & 3148,74 & 3455,40 & 3762,06 \\ 437,40 & 787,07 & 1136,74 & 1486,41 & 1836,08 & 2185,75 & 2535,42 & 2931,32 & 3234,76 & 3584,43 & 3934,10 & 4283,77 \\ 486,00 & 878,68 & 1271,36 & 1664,04 & 2056,72 & 2449,40 & 2842,08 & 3234,76 & 3673,67 & 4020,12 & 4412,80 & 4805,48 \\ 534,60 & 970,29 & 1405,98 & 1841,67 & 2277,36 & 2713,05 & 3148,74 & 3584,43 & 4020,12 & 4502,04 & 4891,50 & 5327,19 \\ 583,20 & 1061,90 & 1540,60 & 2019,30 & 2498,00 & 2976,70 & 3455,40 & 3934,10 & 4412,80 & 4891,50 & 5416,43 & 5848,90 \\ 631,80 & 1153,51 & 1675,22 & 2196,93 & 2718,64 & 3240,35 & 3762,06 & 4283,77 & 4805,48 & 5327,19 & 5848,90 & 6416,84 \end{bmatrix}$

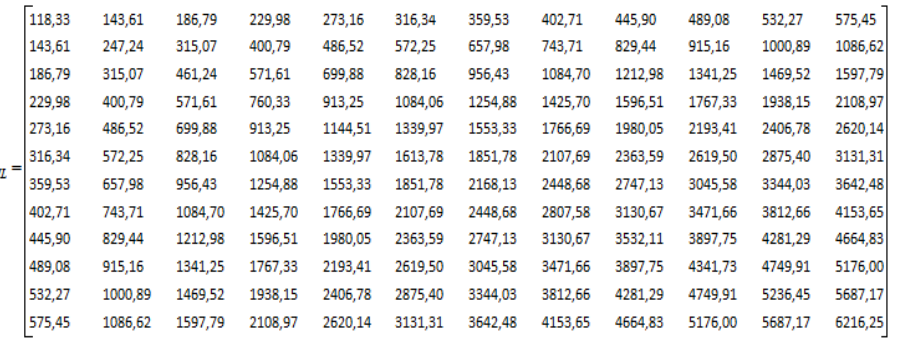
Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Birinci Dereceden Otoregresif [AR(1)] $\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 164,35 & 200,04 & 266,72 & 333,40 & 400,08 & 466,76 & 533,44 & 600,12 & 666,80 & 733,48 & 800,16 & 866,84 \\ 200,04 & 356,41 & 450,80 & 576,18 & 701,56 & 826,94 & 952,32 & 1077,70 & 1203,08 & 1328,46 & 1453,84 & 1579,22 \\ 266,72 & 450,80 & 665,87 & 818,96 & 1003,04 & 1187,12 & 1371,20 & 1555,28 & 1739,36 & 1923,44 & 2107,52 & 2291,60 \\ 333,40 & 576,18 & 818,96 & 1092,73 & 1304,52 & 1547,30 & 1790,08 & 2032,86 & 2275,64 & 2518,42 & 2761,20 & 3003,98 \\ 400,08 & 701,56 & 1003,04 & 1304,52 & 1636,99 & 1907,48 & 2208,96 & 2510,44 & 2811,92 & 3113,40 & 3414,88 & 3716,36 \\ 466,76 & 826,94 & 1187,12 & 1547,30 & 1907,48 & 2298,65 & 2627,84 & 2988,02 & 3348,20 & 3708,38 & 4068,56 & 4428,74 \\ 533,44 & 952,32 & 1371,20 & 1790,08 & 2208,96 & 2627,84 & 3077,71 & 3465,60 & 3884,48 & 4303,36 & 4722,24 & 5141,12 \\ 600,12 & 1077,70 & 1555,28 & 2032,86 & 2510,44 & 2988,02 & 3465,60 & 3974,17 & 4420,76 & 4898,34 & 5375,92 & 5853,50 \\ 666,80 & 1203,08 & 1739,36 & 2275,64 & 2811,92 & 3348,20 & 3884,48 & 4420,76 & 4988,03 & 5493,32 & 6029,60 & 6565,88 \\ 733,48 & 1328,46 & 1923,44 & 2518,42 & 3113,40 & 3708,38 & 4303,36 & 4898,34 & 5493,32 & 6119,29 & 6683,28 & 7278,26 \\ 800,16 & 1453,84 & 2107,52 & 2761,20 & 3414,88 & 4068,56 & 4722,24 & 5375,92 & 6029,60 & 6683,28 & 7367,95 & 7990,64 \\ 866,84 & 1579,22 & 2291,60 & 3003,98 & 3716,36 & 4428,74 & 5141,12 & 5853,50 & 6565,88 & 7278,26 & 7990,64 & 8734,01 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 165,29 & 202,38 & 269,84 & 337,30 & 404,76 & 472,22 & 539,68 & 607,14 & 674,60 & 742,06 & 809,52 & 876,98 \\ 202,38 & 359,65 & 456,18 & 583,08 & 709,98 & 836,88 & 963,78 & 1090,68 & 1217,58 & 1344,48 & 1471,38 & 1598,28 \\ 269,84 & 456,18 & 672,89 & 828,86 & 1015,20 & 1201,54 & 1387,88 & 1574,22 & 1760,56 & 1946,90 & 2133,24 & 2319,58 \\ 337,30 & 583,08 & 828,86 & 1105,01 & 1320,42 & 1566,20 & 1811,98 & 2057,76 & 2303,54 & 2549,32 & 2795,10 & 3040,88 \\ 404,76 & 709,98 & 1015,20 & 1320,42 & 1656,01 & 1930,86 & 2236,08 & 2541,30 & 2846,52 & 3151,74 & 3456,96 & 3762,18 \\ 472,22 & 836,88 & 1201,54 & 1566,20 & 1930,86 & 2325,89 & 2660,18 & 3024,84 & 3389,50 & 3754,16 & 4118,82 & 4483,48 \\ 539,68 & 963,78 & 1387,88 & 1811,98 & 2236,08 & 2660,18 & 3114,65 & 3508,38 & 3932,48 & 4356,58 & 4780,68 & 5204,78 \\ 607,14 & 1090,68 & 1574,22 & 2057,76 & 2541,30 & 3024,84 & 3508,38 & 4022,29 & 4475,46 & 4959,00 & 5442,54 & 5926,08 \\ 674,60 & 1217,58 & 1760,56 & 2303,54 & 2846,52 & 3389,50 & 3932,48 & 4475,46 & 5048,81 & 5561,42 & 6104,40 & 6647,38 \\ 742,06 & 1344,48 & 1946,90 & 2549,32 & 3151,74 & 3754,16 & 4356,58 & 4959,00 & 5561,42 & 6194,21 & 6766,26 & 7368,68 \\ 809,52 & 1471,38 & 2133,24 & 2795,10 & 3456,96 & 4118,82 & 4780,68 & 5442,54 & 6104,40 & 6766,26 & 7458,49 & 8089,98 \\ 876,98 & 1598,28 & 2319,58 & 3040,88 & 3762,18 & 4483,48 & 5204,78 & 5926,08 & 6647,38 & 7368,68 & 8089,98 & 8841,65 \end{bmatrix}$

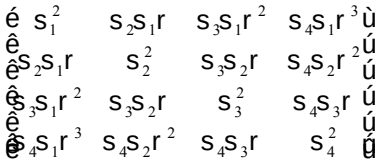
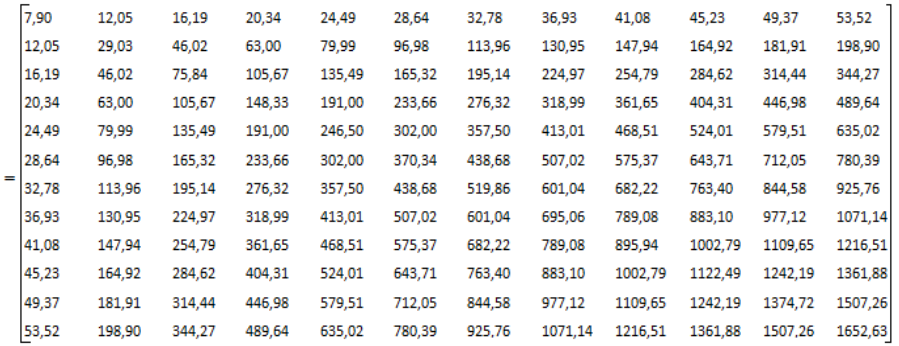
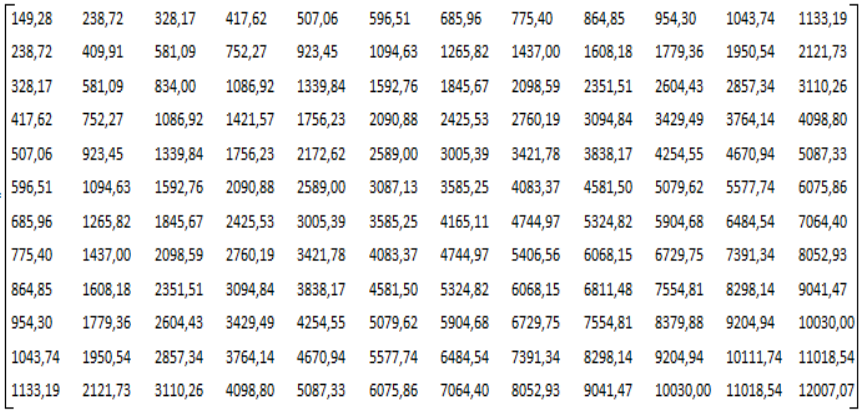
Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Heterojen Bileşik Simetri (CSH) $\begin{bmatrix} s_1^2 & s_2 s_1 r & s_3 s_1 r & s_4 s_1 r \\ s_2 s_1 r & s_2^2 & s_3 s_2 r & s_4 s_2 r \\ s_3 s_1 r & s_3 s_2 r & s_3^2 & s_4 s_3 r \\ s_4 s_1 r & s_4 s_2 r & s_4 s_3 r & s_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$ 136,61 190,67 264,16 337,65 411,14 484,63 558,12 631,60 705,09 778,58 852,07 925,56 190,67 352,34 475,15 617,39 759,63 901,88 1044,12 1186,36 1328,60 1470,84 1613,08 1755,32 264,16 475,15 705,57 897,14 1108,13 1319,13 1530,12 1741,11 1952,11 2163,10 2374,09 2585,09 337,65 617,39 897,14 1196,31 1456,63 1736,38 2016,12 2295,87 2575,61 2855,36 3135,11 3414,85 411,14 759,63 1108,13 1456,63 1824,56 2153,63 2502,12 2850,62 3199,12 3547,62 3896,12 4244,62 484,63 901,88 1319,13 1736,38 2153,63 2590,30 2988,13 3405,38 3822,63 4239,88 4657,13 5074,38 558,12 1044,12 1530,12 2016,12 2502,12 2988,13 3493,56 3960,13 4446,13 4932,14 5418,14 5904,14 631,60 1186,36 1741,11 2295,87 2850,62 3405,38 3960,13 4534,31 5069,64 5624,40 6179,15 6733,91 705,09 1328,60 1952,11 2575,61 3199,12 3822,63 4446,13 5069,64 5712,58 6316,66 6940,16 7563,67 778,58 1470,84 2163,10 2855,36 3547,62 4239,88 4932,14 5624,40 6316,66 7028,34 7701,17 8393,43 852,07 1613,08 2374,09 3135,11 3896,12 4657,13 5418,14 6179,15 6940,16 7701,17 8481,61 9223,20 925,56 1755,32 2585,09 3414,85 4244,62 5074,38 5904,14 6733,91 7563,67 8393,43 9223,20 10072,39 $\hat{V}_{i,REML} =$ 137,36 191,92 265,69 339,46 413,23 487,00 560,76 634,53 708,30 782,07 855,84 929,61 191,92 353,92 477,51 620,30 763,09 905,88 1048,68 1191,47 1334,26 1477,06 1619,85 1762,64 265,69 477,51 708,53 901,14 1112,96 1324,77 1536,59 1748,41 1960,22 2172,04 2383,86 2595,67 339,46 620,30 901,14 1201,19 1462,82 1743,66 2024,50 2305,34 2586,18 2867,02 3147,87 3428,71 413,23 763,09 1112,96 1462,82 1831,90 2162,55 2512,42 2862,28 3212,14 3562,01 3911,87 4261,74 487,00 905,88 1324,77 1743,66 2162,55 2600,65 3000,33 3419,22 3838,11 4256,99 4675,88 5094,77 560,76 1048,68 1536,59 2024,50 2512,42 3000,33 3507,45 3976,15 4464,07 4951,98 5439,89 5927,80 634,53 1191,47 1748,41 2305,34 2862,28 3419,22 3976,15 4552,30 5090,03 5646,96 6203,90 6760,84 708,30 1334,26 1960,22 2586,18 3212,14 3838,11 4464,07 5090,03 5735,20 6341,95 6967,91 7593,87 782,07 1477,06 2172,04 2867,02 3562,01 4256,99 4951,98 5646,96 6341,95 7056,14 7731,92 8426,90 855,84 1619,85 2383,86 3147,87 3911,87 4675,88 5439,89 6203,90 6967,91 7731,92 8515,14 9259,93 929,61 1762,64 2595,67 3428,71 4261,74 5094,77 5927,80 6760,84 7593,87 8426,90 9259,93 10112,18

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Heterojen Toeplitz (TOEPH) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_4\sigma_1\rho_3 \\ \sigma_2\sigma_1\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 \\ \sigma_3\sigma_1\rho_2 & \sigma_3\sigma_2\rho_1 & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 \\ \sigma_4\sigma_1\rho_3 & \sigma_4\sigma_2\rho_2 & \sigma_4\sigma_3\rho_1 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$  $\hat{V}_{i,REML} =$ 

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Heterojen Birinci Dereceden Otoregresif [ARH(1)] 	$\hat{V}_{i,ML} =$  $\hat{V}_{i,REML} =$ 

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i=1,\ldots,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Huynh-Feldt (HF) $\begin{bmatrix} s_1^2 & \frac{s_1^2+s_2^2}{2}-l & \frac{s_1^2+s_3^2}{2}-l & \frac{s_1^2+s_4^2}{2}-l \\ \frac{s_1^2+s_2^2}{2}-l & s_2^2 & \frac{s_2^2+s_3^2}{2}-l & \frac{s_2^2+s_4^2}{2}-l \\ \frac{s_1^2+s_3^2}{2}-l & \frac{s_2^2+s_3^2}{2}-l & s_3^2 & \frac{s_3^2+s_4^2}{2}-l \\ \frac{s_1^2+s_4^2}{2}-l & \frac{s_2^2+s_4^2}{2}-l & \frac{s_3^2+s_4^2}{2}-l & s_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$ $\begin{bmatrix} 138,40 & 134,99 & 176,67 & 218,35 & 260,03 & 301,71 & 343,39 & 385,07 & 426,75 & 468,43 & 510,11 & 551,80 \\ 134,99 & 261,74 & 298,31 & 379,98 & 461,64 & 543,30 & 624,97 & 706,63 & 788,29 & 869,96 & 951,62 & 1033,28 \\ 176,67 & 298,31 & 465,05 & 541,61 & 663,25 & 784,90 & 906,54 & 1028,19 & 1149,83 & 1271,48 & 1393,13 & 1514,77 \\ 218,35 & 379,98 & 541,61 & 748,32 & 864,86 & 1026,49 & 1188,12 & 1349,75 & 1511,37 & 1673,00 & 1834,63 & 1996,26 \\ 260,03 & 461,64 & 663,25 & 864,86 & 1111,56 & 1268,08 & 1469,69 & 1671,30 & 1872,91 & 2074,53 & 2276,14 & 2477,75 \\ 301,71 & 543,30 & 784,90 & 1026,49 & 1268,08 & 1554,77 & 1751,27 & 1992,86 & 2234,45 & 2476,05 & 2717,64 & 2959,23 \\ 343,39 & 624,97 & 906,54 & 1188,12 & 1469,69 & 1751,27 & 2077,93 & 2314,42 & 2596,00 & 2877,57 & 3159,15 & 3440,72 \\ 385,07 & 706,63 & 1028,19 & 1349,75 & 1671,30 & 1992,86 & 2314,42 & 2681,07 & 2957,54 & 3279,09 & 3600,65 & 3922,21 \\ 426,75 & 788,29 & 1149,83 & 1511,37 & 1872,91 & 2234,45 & 2596,00 & 2957,54 & 3364,17 & 3680,62 & 4042,16 & 4403,70 \\ 468,43 & 869,96 & 1271,48 & 1673,00 & 2074,53 & 2476,05 & 2877,57 & 3279,09 & 3680,62 & 4127,23 & 4483,66 & 4885,18 \\ 510,11 & 951,62 & 1393,13 & 1834,63 & 2276,14 & 2717,64 & 3159,15 & 3600,65 & 4042,16 & 4483,66 & 4970,26 & 5366,67 \\ 551,80 & 1033,28 & 1514,77 & 1996,26 & 2477,75 & 2959,23 & 3440,72 & 3922,21 & 4403,70 & 4885,18 & 5366,67 & 5893,25 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} =$ $\begin{bmatrix} 139,19 & 135,92 & 177,88 & 219,83 & 261,79 & 303,74 & 345,70 & 387,66 & 429,61 & 471,57 & 513,52 & 555,48 \\ 135,92 & 263,19 & 300,00 & 382,03 & 464,07 & 546,11 & 628,14 & 710,18 & 792,22 & 874,25 & 956,29 & 1038,33 \\ 177,88 & 300,00 & 467,34 & 544,23 & 666,35 & 788,47 & 910,59 & 1032,71 & 1154,82 & 1276,94 & 1399,06 & 1521,18 \\ 219,83 & 382,03 & 544,23 & 751,66 & 868,63 & 1030,83 & 1193,03 & 1355,23 & 1517,43 & 1679,63 & 1841,83 & 2004,03 \\ 261,79 & 464,07 & 666,35 & 868,63 & 1116,14 & 1273,19 & 1475,48 & 1677,76 & 1880,04 & 2082,32 & 2284,60 & 2486,88 \\ 303,74 & 546,11 & 788,47 & 1030,83 & 1273,19 & 1560,78 & 1757,92 & 2000,28 & 2242,64 & 2485,01 & 2727,37 & 2969,73 \\ 345,70 & 628,14 & 910,59 & 1193,03 & 1475,48 & 1757,92 & 2085,59 & 2322,81 & 2605,25 & 2887,69 & 3170,14 & 3452,58 \\ 387,66 & 710,18 & 1032,71 & 1355,23 & 1677,76 & 2000,28 & 2322,81 & 2690,56 & 2967,86 & 3290,38 & 3612,91 & 3935,43 \\ 429,61 & 792,22 & 1154,82 & 1517,43 & 1880,04 & 2242,64 & 2605,25 & 2967,86 & 3375,69 & 3693,07 & 4055,68 & 4418,28 \\ 471,57 & 874,25 & 1276,94 & 1679,63 & 2082,32 & 2485,01 & 2887,69 & 3290,38 & 3693,07 & 4140,98 & 4498,45 & 4901,13 \\ 513,52 & 956,29 & 1399,06 & 1841,83 & 2284,60 & 2727,37 & 3170,14 & 3612,91 & 4055,68 & 4498,45 & 4986,44 & 5383,99 \\ 555,48 & 1038,33 & 1521,18 & 2004,03 & 2486,88 & 2969,73 & 3452,58 & 3935,43 & 4418,28 & 4901,13 & 5383,99 & 5912,06 \end{bmatrix}$

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i=1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Raşgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Birinci Dereceden Anti-Bağımlı [ANTE(1)]	$\hat{V}_{i,ML} =$ 129,18 172,38 234,74 297,09 359,44 421,80 484,15 546,50 608,86 671,21 733,56 795,92 172,38 327,65 444,61 580,73 716,85 852,96 989,08 1125,20 1261,31 1397,43 1533,55 1669,66 234,74 444,61 673,65 864,37 1074,25 1284,13 1494,01 1703,89 1913,77 2123,65 2333,53 2543,41 297,09 580,73 864,37 1167,17 1431,66 1715,30 1998,94 2282,58 2566,23 2849,87 3133,51 3417,15 359,44 716,85 1074,25 1431,66 1808,21 2146,47 2503,87 2861,28 3218,68 3576,09 3933,49 4290,90 421,80 852,96 1284,13 1715,30 2146,47 2596,79 3008,80 3439,97 3871,14 4302,31 4733,47 5164,64 484,15 989,08 1494,01 1998,94 2503,87 3008,80 3532,89 4018,66 4523,59 5028,53 5533,46 6038,39 546,50 1125,20 1703,89 2282,58 2861,28 3439,97 4018,66 4616,51 5176,05 5754,74 6333,44 6912,13 608,86 1261,31 1913,77 2566,23 3218,68 3871,14 4523,59 5176,05 5847,66 6480,96 7133,42 7785,88 671,21 1397,43 2123,65 2849,87 3576,09 4302,31 5028,53 5754,74 6480,96 7226,34 7933,40 8659,62 733,56 1533,55 2333,53 3133,51 3933,49 4733,47 5533,46 6333,44 7133,42 7933,40 8752,54 9533,37 795,92 1669,66 2543,41 3417,15 4290,90 5164,64 6038,39 6912,13 7785,88 8659,62 9533,37 10426,26 $\hat{V}_{i,REML} =$ 129,79 173,14 235,55 297,97 360,39 422,80 485,22 547,63 610,05 672,46 734,88 797,29 173,14 328,54 445,81 582,15 718,48 854,82 991,15 1127,49 1263,82 1400,16 1536,49 1672,83 235,55 445,81 675,13 866,32 1076,58 1286,83 1497,09 1707,34 1917,60 2127,85 2338,11 2548,36 297,97 582,15 866,32 1169,56 1434,67 1718,85 2003,02 2287,20 2571,37 2855,55 3139,72 3423,90 360,39 718,48 1076,58 1434,67 1811,83 2150,86 2508,96 2867,05 3225,15 3583,24 3941,34 4299,43 422,80 854,82 1286,83 1718,85 2150,86 2601,94 3014,89 3446,91 3878,92 4310,94 4742,95 5174,97 485,22 991,15 1497,09 2003,02 2508,96 3014,89 3539,89 4026,76 4532,70 5038,63 5544,57 6050,50 547,63 1127,49 1707,34 2287,20 2867,05 3446,91 4026,76 4625,69 5186,47 5766,33 6346,18 6926,04 610,05 1263,82 1917,60 2571,37 3225,15 3878,92 4532,70 5186,47 5859,32 6494,02 7147,80 7801,58 672,46 1400,16 2127,85 2855,55 3583,24 4310,94 5038,63 5766,33 6494,02 7240,79 7949,42 8677,11 734,88 1536,49 2338,11 3139,72 3941,34 4742,95 5544,57 6346,18 7147,80 7949,42 8770,10 9552,65 797,29 1672,83 2548,36 3423,90 4299,43 5174,97 6050,50 6926,04 7801,58 8677,11 9552,65 10447,25

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	$V_i \quad i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Birinci Dereceden Faktör Analitik [FA(1)]	$\hat{V}_{i,ML} =$ 129,77 156,66 208,15 259,64 311,12 362,61 414,10 465,59 517,08 568,57 620,06 671,55 156,66 283,97 362,08 464,79 567,50 670,21 772,92 875,63 978,34 1081,05 1183,76 1286,47 208,15 362,08 540,62 669,94 823,87 977,80 1131,73 1285,66 1439,59 1593,53 1747,46 1901,39 259,64 464,79 669,94 899,70 1080,24 1285,39 1490,55 1695,70 1900,85 2106,00 2311,15 2516,30 311,12 567,50 823,87 1080,24 1361,22 1592,99 1849,36 2105,73 2362,10 2618,48 2874,85 3131,22 362,61 670,21 977,80 1285,39 1592,99 1925,19 2208,17 2515,77 2823,36 3130,95 3438,55 3746,14 414,10 772,92 1131,73 1490,55 1849,36 2208,17 2591,60 2925,80 3284,61 3643,43 4002,24 4361,06 465,59 875,63 1285,66 1695,70 2105,73 2515,77 2925,80 3360,44 3745,87 4155,90 4565,94 4975,97 517,08 978,34 1439,59 1900,85 2362,10 2823,36 3284,61 3745,87 4231,73 4668,38 5129,64 5590,89 568,57 1081,05 1593,53 2106,00 2618,48 3130,95 3643,43 4155,90 4668,38 5205,46 5693,33 6205,81 620,06 1183,76 1747,46 2311,15 2874,85 3438,55 4002,24 4565,94 5129,64 5693,33 6281,64 6820,72 671,55 1286,47 1901,39 2516,30 3131,22 3746,14 4361,06 4975,97 5590,89 6205,81 6820,72 7460,25 $\hat{V}_{i,REML} =$ 130,13 157,95 210,03 262,10 314,18 366,26 418,34 470,42 522,50 574,58 626,66 678,74 157,95 286,06 365,64 469,49 573,34 677,19 781,04 884,89 988,74 1092,58 1196,43 1300,28 210,03 365,64 545,52 676,88 832,50 988,12 1143,73 1299,35 1454,97 1610,59 1766,21 1921,82 262,10 469,49 676,88 908,53 1091,65 1299,04 1506,43 1713,82 1921,20 2128,59 2335,98 2543,37 314,18 573,34 832,50 1091,65 1375,07 1609,97 1869,12 2128,28 2387,44 2646,59 2905,75 3164,91 366,26 677,19 988,12 1299,04 1609,97 1945,15 2231,82 2542,75 2853,67 3164,60 3475,52 3786,45 418,34 781,04 1143,73 1506,43 1869,12 2231,82 2618,78 2957,21 3319,91 3682,60 4045,30 4407,99 470,42 884,89 1299,35 1713,82 2128,28 2542,75 2957,21 3395,94 3786,14 4200,61 4615,07 5029,53 522,50 988,74 1454,97 1921,20 2387,44 2853,67 3319,91 3786,14 4276,64 4718,61 5184,84 5651,08 574,58 1092,58 1610,59 2128,59 2646,59 3164,60 3682,60 4200,61 4718,61 5260,87 5754,62 6272,62 626,66 1196,43 1766,21 2335,98 2905,75 3475,52 4045,30 4615,07 5184,84 5754,62 6348,65 6894,16 678,74 1300,28 1921,82 2543,37 3164,91 3786,45 4407,99 5029,53 5651,08 6272,62 6894,16 7539,96

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i=1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Heterojen Birinci Dereceden Faktör Analitik [FAH(1)] $\begin{bmatrix} \lambda_1^2+d_1 & \lambda_2\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1 & \lambda_4\lambda_1 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2+d_2 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_4\lambda_2 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2+d_3 & \lambda_4\lambda_3 \\ \lambda_4\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 & \lambda_4\lambda_3 & \lambda_4^2+d_4 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$ $\begin{bmatrix} 130,46 & 145,94 & 195,51 & 245,08 & 294,65 & 344,22 & 393,79 & 443,36 & 492,92 & 542,49 & 592,06 & 641,63 \\ 145,94 & 277,91 & 341,71 & 439,60 & 537,49 & 635,38 & 733,26 & 831,15 & 929,04 & 1026,92 & 1124,81 & 1222,70 \\ 195,51 & 341,71 & 522,00 & 634,12 & 780,33 & 926,53 & 1072,74 & 1218,94 & 1365,15 & 1511,35 & 1657,56 & 1803,76 \\ 245,08 & 439,60 & 634,12 & 862,73 & 1023,17 & 1217,69 & 1412,21 & 1606,74 & 1801,26 & 1995,78 & 2190,30 & 2384,83 \\ 294,65 & 537,49 & 780,33 & 1023,17 & 1300,09 & 1508,85 & 1751,69 & 1994,53 & 2237,37 & 2480,21 & 2723,05 & 2965,89 \\ 344,22 & 635,38 & 926,53 & 1217,69 & 1508,85 & 1834,09 & 2091,17 & 2382,32 & 2673,48 & 2964,64 & 3255,80 & 3546,96 \\ 393,79 & 733,26 & 1072,74 & 1412,21 & 1751,69 & 2091,17 & 2464,73 & 2770,12 & 3109,59 & 3449,07 & 3788,55 & 4128,02 \\ 443,36 & 831,15 & 1218,94 & 1606,74 & 1994,53 & 2382,32 & 2770,12 & 3192,00 & 3545,71 & 3933,50 & 4321,29 & 4709,09 \\ 492,92 & 929,04 & 1365,15 & 1801,26 & 2237,37 & 2673,48 & 3109,59 & 3545,71 & 4015,90 & 4417,93 & 4854,04 & 5290,15 \\ 542,49 & 1026,92 & 1511,35 & 1995,78 & 2480,21 & 2964,64 & 3449,07 & 3933,50 & 4417,93 & 4936,44 & 5386,79 & 5871,22 \\ 592,06 & 1124,81 & 1657,56 & 2190,30 & 2723,05 & 3255,80 & 3788,55 & 4321,29 & 4854,04 & 5386,79 & 5953,62 & 6452,28 \\ 641,63 & 1222,70 & 1803,76 & 2384,83 & 2965,89 & 3546,96 & 4128,02 & 4709,09 & 5290,15 & 5871,22 & 6452,28 & 7067,43 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} =$ $\begin{bmatrix} 131,05 & 167,21 & 226,96 & 286,70 & 346,45 & 406,19 & 465,94 & 525,69 & 585,43 & 645,18 & 704,92 & 764,67 \\ 167,21 & 308,99 & 403,59 & 521,78 & 639,98 & 758,17 & 876,36 & 994,55 & 1112,74 & 1230,94 & 1349,13 & 1467,32 \\ 226,96 & 403,59 & 603,82 & 756,87 & 933,51 & 1110,14 & 1286,78 & 1463,42 & 1640,06 & 1816,69 & 1993,33 & 2169,97 \\ 286,70 & 521,78 & 756,87 & 1015,54 & 1227,03 & 1462,12 & 1697,20 & 1932,28 & 2167,37 & 2402,45 & 2637,53 & 2872,62 \\ 346,45 & 639,98 & 933,51 & 1227,03 & 1544,15 & 1814,09 & 2107,62 & 2401,15 & 2694,68 & 2988,21 & 3281,74 & 3575,27 \\ 406,19 & 758,17 & 1110,14 & 1462,12 & 1814,09 & 2189,65 & 2518,04 & 2870,02 & 3221,99 & 3573,97 & 3925,94 & 4277,92 \\ 465,94 & 876,36 & 1286,78 & 1697,20 & 2107,62 & 2518,04 & 2952,05 & 3338,88 & 3749,30 & 4159,72 & 4570,14 & 4980,56 \\ 525,69 & 994,55 & 1463,42 & 1932,28 & 2401,15 & 2870,02 & 3338,88 & 3831,33 & 4276,62 & 4745,48 & 5214,35 & 5683,21 \\ 585,43 & 1112,74 & 1640,06 & 2167,37 & 2694,68 & 3221,99 & 3749,30 & 4276,62 & 4827,51 & 5331,24 & 5858,55 & 6385,86 \\ 645,18 & 1230,94 & 1816,69 & 2402,45 & 2988,21 & 3573,97 & 4159,72 & 4745,48 & 5331,24 & 5940,58 & 6502,75 & 7088,51 \\ 704,92 & 1349,13 & 1993,33 & 2637,53 & 3281,74 & 3925,94 & 4570,14 & 5214,35 & 5858,55 & 6502,75 & 7170,54 & 7791,16 \\ 764,67 & 1467,32 & 2169,97 & 2872,62 & 3575,27 & 4277,92 & 4980,56 & 5683,21 & 6385,86 & 7088,51 & 7791,16 & 8517,39 \end{bmatrix}$

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	[Köşegen UN(1)] $\begin{bmatrix} s_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$ 137,57 116,01 147,03 178,04 209,06 240,07 271,09 302,10 333,12 364,13 395,15 426,17 116,01 230,62 240,07 302,10 364,13 426,17 488,20 550,23 612,26 674,29 736,32 798,35 147,03 240,07 385,70 426,17 519,21 612,26 705,31 798,35 891,40 984,45 1077,49 1170,54 178,04 302,10 426,17 602,81 674,29 798,35 922,42 1046,48 1170,54 1294,60 1418,67 1542,73 209,06 364,13 519,21 674,29 881,95 984,45 1139,53 1294,60 1449,68 1604,76 1759,84 1914,92 240,07 426,17 612,26 798,35 984,45 1223,12 1356,63 1542,73 1728,82 1914,92 2101,01 2287,10 271,09 488,20 705,31 922,42 1139,53 1356,63 1626,32 1790,85 2007,96 2225,07 2442,18 2659,29 302,10 550,23 798,35 1046,48 1294,60 1542,73 1790,85 2091,56 2287,10 2535,23 2783,35 3031,48 333,12 612,26 891,40 1170,54 1449,68 1728,82 2007,96 2287,10 2618,82 2845,38 3124,53 3403,67 364,13 674,29 984,45 1294,60 1604,76 1914,92 2225,07 2535,23 2845,38 3208,12 3465,70 3775,85 395,15 736,32 1077,49 1418,67 1759,84 2101,01 2442,18 2783,35 3124,53 3465,70 3859,45 4148,04 426,17 798,35 1170,54 1542,73 1914,92 2287,10 2659,29 3031,48 3403,67 3775,85 4148,04 4572,81 $\hat{V}_{i,REML} =$ 138,25 116,62 147,62 178,61 209,61 240,61 271,61 302,61 333,61 364,60 395,60 426,60 116,62 231,24 240,61 302,61 364,60 426,60 488,60 550,59 612,59 674,59 736,58 798,58 147,62 240,61 386,23 426,60 519,60 612,59 705,59 798,58 891,58 984,57 1077,57 1170,56 178,61 302,61 426,60 603,22 674,59 798,58 922,57 1046,57 1170,56 1294,55 1418,55 1542,54 209,61 364,60 519,60 674,59 882,21 984,57 1139,56 1294,55 1449,55 1604,54 1759,53 1914,52 240,61 426,60 612,59 798,58 984,57 1223,19 1356,55 1542,54 1728,53 1914,52 2100,51 2286,50 271,61 488,60 705,59 922,57 1139,56 1356,55 1626,17 1790,53 2007,51 2224,50 2441,49 2658,48 302,61 550,59 798,58 1046,57 1294,55 1542,54 1790,53 2091,14 2286,50 2534,49 2782,47 3030,46 333,61 612,59 891,58 1170,56 1449,55 1728,53 2007,51 2286,50 2618,11 2844,47 3123,45 3402,44 364,60 674,59 984,57 1294,55 1604,54 1914,52 2224,50 2534,49 2844,47 3207,08 3464,44 3774,42 395,60 736,58 1077,57 1418,55 1759,53 2100,51 2441,49 2782,47 3123,45 3464,44 3858,05 4146,40 426,60 798,58 1170,56 1542,54 1914,52 2286,50 2658,48 3030,46 3402,44 3774,42 4146,40 4571,01

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i=1,\ldots,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	ARMA(1,1) $\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \phi & \phi\rho & \phi\rho^2\\ \phi & 1 & \phi & \phi\rho\\ \phi\rho & \phi & 1 & \phi\\ \phi\rho^2 & \phi\rho & \phi & 1\end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML}=$ 165,72 161,61 215,48 269,34 323,21 377,08 430,95 484,82 538,69 592,56 646,43 700,29 161,61 313,53 349,48 443,42 537,36 631,30 725,23 819,17 913,11 1007,05 1100,99 1194,93 215,48 349,48 541,48 617,50 751,50 885,51 1019,52 1153,53 1287,53 1421,54 1555,55 1689,56 269,34 443,42 617,50 849,56 965,65 1139,73 1313,80 1487,88 1661,96 1836,03 2010,11 2184,19 323,21 537,36 751,50 965,65 1237,78 1393,94 1608,09 1822,23 2036,38 2250,53 2464,67 2678,82 377,08 631,30 885,51 1139,73 1393,94 1706,14 1902,37 2156,59 2410,80 2665,02 2919,23 3173,45 430,95 725,23 1019,52 1313,80 1608,09 1902,37 2254,64 2490,94 2785,23 3079,51 3373,80 3668,08 484,82 819,17 1153,53 1487,88 1822,23 2156,59 2490,94 2883,28 3159,65 3494,00 3828,36 4162,71 538,69 913,11 1287,53 1661,96 2036,38 2410,80 2785,23 3159,65 3592,06 3908,50 4282,92 4657,34 592,56 1007,05 1421,54 1836,03 2250,53 2665,02 3079,51 3494,00 3908,50 4380,98 4737,48 5151,97 646,43 1100,99 1555,55 2010,11 2464,67 2919,23 3373,80 3828,36 4282,92 4737,48 5250,03 5646,61 700,29 1194,93 1689,56 2184,19 2678,82 3173,45 3668,08 4162,71 4657,34 5151,97 5646,61 6199,22 $\hat{V}_{i,REML}=$ 166,74 163,19 217,59 271,98 326,38 380,77 435,17 489,57 543,96 598,36 652,76 707,15 163,19 315,86 352,64 447,36 542,08 636,81 731,53 826,25 920,98 1015,70 1110,42 1205,15 217,59 352,64 545,63 622,74 757,79 892,84 1027,89 1162,94 1297,99 1433,04 1568,09 1703,14 271,98 447,36 622,74 856,06 973,49 1148,87 1324,25 1499,62 1675,00 1850,38 2025,76 2201,13 326,38 542,08 757,79 973,49 1247,14 1404,90 1620,61 1836,31 2052,01 2267,72 2483,42 2699,13 380,77 636,81 892,84 1148,87 1404,90 1718,88 1916,96 2173,00 2429,03 2685,06 2941,09 3197,12 435,17 731,53 1027,89 1324,25 1620,61 1916,96 2271,27 2509,68 2806,04 3102,40 3398,76 3695,12 489,57 826,25 1162,94 1499,62 1836,31 2173,00 2509,68 2904,31 3183,05 3519,74 3856,43 4193,11 543,96 920,98 1297,99 1675,00 2052,01 2429,03 2806,04 3183,05 3618,01 3937,08 4314,09 4691,11 598,36 1015,70 1433,04 1850,38 2267,72 2685,06 3102,40 3519,74 3937,08 4412,36 4771,76 5189,10 652,76 1110,42 1568,09 2025,76 2483,42 2941,09 3398,76 3856,43 4314,09 4771,76 5287,37 5687,09 707,15 1205,15 1703,14 2201,13 2699,13 3197,12 3695,12 4193,11 4691,11 5189,10 5687,09 6243,03

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	$V_i \quad i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Yapısal Olmayan Korelasyonlu (UNR) $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_4\sigma_1\rho_{41} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} \\ \sigma_3\sigma_1\rho_{31} & \sigma_3\sigma_2\rho_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} \\ \sigma_4\sigma_1\rho_{41} & \sigma_4\sigma_2\rho_{42} & \sigma_4\sigma_3\rho_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} =$ $\begin{bmatrix} 122,10 & 136,40 & 182,69 & 228,97 & 275,26 & 321,55 & 367,83 & 414,12 & 460,41 & 506,69 & 552,98 & 599,26 \\ 136,40 & 265,28 & 330,20 & 427,10 & 523,99 & 620,89 & 717,79 & 814,69 & 911,59 & 1008,48 & 1105,38 & 1202,28 \\ 182,69 & 330,20 & 509,69 & 625,22 & 772,73 & 920,24 & 1067,75 & 1215,26 & 1362,77 & 1510,27 & 1657,78 & 1805,29 \\ 228,97 & 427,10 & 625,22 & 855,32 & 1021,46 & 1219,58 & 1417,70 & 1615,82 & 1813,95 & 2012,07 & 2210,19 & 2408,31 \\ 275,26 & 523,99 & 772,73 & 1021,46 & 1302,17 & 1518,93 & 1767,66 & 2016,39 & 2265,13 & 2513,86 & 2762,59 & 3011,32 \\ 321,55 & 620,89 & 920,24 & 1219,58 & 1518,93 & 1850,25 & 2117,62 & 2416,96 & 2716,31 & 3015,65 & 3315,00 & 3614,34 \\ 367,83 & 717,79 & 1067,75 & 1417,70 & 1767,66 & 2117,62 & 2499,55 & 2817,53 & 3167,49 & 3517,44 & 3867,40 & 4217,36 \\ 414,12 & 814,69 & 1215,26 & 1615,82 & 2016,39 & 2416,96 & 2817,53 & 3250,08 & 3618,67 & 4019,23 & 4419,80 & 4820,37 \\ 460,41 & 911,59 & 1362,77 & 1813,95 & 2265,13 & 2716,31 & 3167,49 & 3618,67 & 4101,83 & 4521,03 & 4972,21 & 5423,39 \\ 506,69 & 1008,48 & 1510,27 & 2012,07 & 2513,86 & 3015,65 & 3517,44 & 4019,23 & 4521,03 & 5054,80 & 5524,61 & 6026,40 \\ 552,98 & 1105,38 & 1657,78 & 2210,19 & 2762,59 & 3315,00 & 3867,40 & 4419,80 & 4972,21 & 5524,61 & 6108,99 & 6629,42 \\ 599,26 & 1202,28 & 1805,29 & 2408,31 & 3011,32 & 3614,34 & 4217,36 & 4820,37 & 5423,39 & 6026,40 & 6629,42 & 7264,41 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} =$ $\begin{bmatrix} 123,91 & 139,03 & 179,62 & 220,21 & 260,80 & 301,39 & 341,98 & 382,57 & 423,16 & 463,74 & 504,33 & 544,92 \\ 139,03 & 254,20 & 318,44 & 408,14 & 497,84 & 587,54 & 677,24 & 766,95 & 856,65 & 946,35 & 1036,05 & 1125,75 \\ 179,62 & 318,44 & 482,71 & 596,07 & 734,88 & 873,69 & 1012,51 & 1151,32 & 1290,14 & 1428,95 & 1567,77 & 1706,58 \\ 220,21 & 408,14 & 596,07 & 809,45 & 971,92 & 1159,85 & 1347,77 & 1535,70 & 1723,63 & 1911,56 & 2099,48 & 2287,41 \\ 260,80 & 497,84 & 734,88 & 971,92 & 1234,42 & 1446,00 & 1683,04 & 1920,08 & 2157,12 & 2394,16 & 2631,20 & 2868,24 \\ 301,39 & 587,54 & 873,69 & 1159,85 & 1446,00 & 1757,61 & 2018,31 & 2304,46 & 2590,61 & 2876,76 & 3162,92 & 3449,07 \\ 341,98 & 677,24 & 1012,51 & 1347,77 & 1683,04 & 2018,31 & 2379,03 & 2688,84 & 3024,10 & 3359,37 & 3694,63 & 4029,90 \\ 382,57 & 766,95 & 1151,32 & 1535,70 & 1920,08 & 2304,46 & 2688,84 & 3098,67 & 3457,59 & 3841,97 & 4226,35 & 4610,73 \\ 423,16 & 856,65 & 1290,14 & 1723,63 & 2157,12 & 2590,61 & 3024,10 & 3457,59 & 3916,54 & 4324,57 & 4758,06 & 5191,56 \\ 463,74 & 946,35 & 1428,95 & 1911,56 & 2394,16 & 2876,76 & 3359,37 & 3841,97 & 4324,57 & 4832,64 & 5289,78 & 5772,38 \\ 504,33 & 1036,05 & 1567,77 & 2099,48 & 2631,20 & 3162,92 & 3694,63 & 4226,35 & 4758,06 & 5289,78 & 5846,96 & 6353,21 \\ 544,92 & 1125,75 & 1706,58 & 2287,41 & 2868,24 & 3449,07 & 4029,90 & 4610,73 & 5191,56 & 5772,38 & 6353,21 & 6959,50 \end{bmatrix}$

Çizelge 12.3. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	V_i $i = 1,...,200$ için bağımlı değişkene ilişkin tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	Yapısal Olmayan (UN) $\begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_2^2 & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_3^2 & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_4^2 \end{bmatrix}$	$\hat{V}_{i,ML} = \begin{bmatrix} 126,52 & 151,37 & 205,47 & 259,58 & 313,69 & 367,79 & 421,90 & 476,01 & 530,11 & 584,22 & 638,32 & 692,43 \\ 151,37 & 336,26 & 462,65 & 618,29 & 773,93 & 929,57 & 1085,21 & 1240,85 & 1396,49 & 1552,14 & 1707,78 & 1863,42 \\ 205,47 & 462,65 & 749,08 & 977,00 & 1234,18 & 1491,35 & 1748,53 & 2005,70 & 2262,88 & 2520,05 & 2777,23 & 3034,40 \\ 259,58 & 618,29 & 977,00 & 1364,97 & 1694,42 & 2053,13 & 2411,84 & 2770,55 & 3129,26 & 3487,97 & 3846,68 & 4205,39 \\ 313,69 & 773,93 & 1234,18 & 1694,42 & 2183,92 & 2614,91 & 3075,15 & 3535,40 & 3995,64 & 4455,89 & 4916,13 & 5376,38 \\ 367,79 & 929,57 & 1491,35 & 2053,13 & 2614,91 & 3205,94 & 3738,47 & 4300,25 & 4862,03 & 5423,81 & 5985,59 & 6547,36 \\ 421,90 & 1085,21 & 1748,53 & 2411,84 & 3075,15 & 3738,47 & 4431,04 & 5065,10 & 5728,41 & 6391,72 & 7055,04 & 7718,35 \\ 476,01 & 1240,85 & 2005,70 & 2770,55 & 3535,40 & 4300,25 & 5065,10 & 5859,20 & 6594,79 & 7359,64 & 8124,49 & 8889,34 \\ 530,11 & 1396,49 & 2262,88 & 3129,26 & 3995,64 & 4862,03 & 5728,41 & 6594,79 & 7490,43 & 8327,56 & 9193,94 & 10060,33 \\ 584,22 & 1552,14 & 2520,05 & 3487,97 & 4455,89 & 5423,81 & 6391,72 & 7359,64 & 8327,56 & 9324,73 & 10263,39 & 11231,31 \\ 638,32 & 1707,78 & 2777,23 & 3846,68 & 4916,13 & 5985,59 & 7055,04 & 8124,49 & 9193,94 & 10263,39 & 11362,10 & 12402,30 \\ 692,43 & 1863,42 & 3034,40 & 4205,39 & 5376,38 & 6547,36 & 7718,35 & 8889,34 & 10060,33 & 11231,31 & 12402,30 & 13602,54 \end{bmatrix}$ $\hat{V}_{i,REML} = \begin{bmatrix} 127,11 & 151,93 & 206,00 & 260,06 & 314,13 & 368,20 & 422,27 & 476,34 & 530,40 & 584,47 & 638,54 & 692,61 \\ 151,93 & 336,72 & 463,00 & 618,54 & 774,08 & 929,62 & 1085,15 & 1240,69 & 1396,23 & 1551,77 & 1707,30 & 1862,84 \\ 206,00 & 463,00 & 749,26 & 977,02 & 1234,03 & 1491,03 & 1748,04 & 2005,05 & 2262,05 & 2519,06 & 2776,07 & 3033,08 \\ 260,06 & 618,54 & 977,02 & 1364,75 & 1693,97 & 2052,45 & 2410,93 & 2769,40 & 3127,88 & 3486,36 & 3844,83 & 4203,31 \\ 314,13 & 774,08 & 1234,03 & 1693,97 & 2183,17 & 2613,87 & 3073,81 & 3533,76 & 3993,71 & 4453,65 & 4913,60 & 5373,55 \\ 368,20 & 929,62 & 1491,03 & 2052,45 & 2613,87 & 3204,53 & 3736,70 & 4298,12 & 4859,53 & 5420,95 & 5982,36 & 6543,78 \\ 422,27 & 1085,15 & 1748,04 & 2410,93 & 3073,81 & 3736,70 & 4428,84 & 5062,47 & 5725,36 & 6388,24 & 7051,13 & 7714,02 \\ 476,34 & 1240,69 & 2005,05 & 2769,40 & 3533,76 & 4298,12 & 5062,47 & 5856,08 & 6591,18 & 7355,54 & 8119,89 & 8884,25 \\ 530,40 & 1396,23 & 2262,05 & 3127,88 & 3993,71 & 4859,53 & 5725,36 & 6591,18 & 7486,26 & 8322,83 & 9188,66 & 10054,49 \\ 584,47 & 1551,77 & 2519,06 & 3486,36 & 4453,65 & 5420,95 & 6388,24 & 7355,54 & 8322,83 & 9319,38 & 10257,43 & 11224,72 \\ 638,54 & 1707,30 & 2776,07 & 3844,83 & 4913,60 & 5982,36 & 7051,13 & 8119,89 & 9188,66 & 10257,43 & 11355,44 & 12394,96 \\ 692,61 & 1862,84 & 3033,08 & 4203,31 & 5373,55 & 6543,78 & 7714,02 & 8884,25 & 10054,49 & 11224,72 & 12394,96 & 13594,44 \end{bmatrix}$

Çizelge 12.4. Uygun varyans-kovaryans yapısının seçimi

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Bilgi Kriterleri	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	
			ML	REML
Rasgele Kesen Terimli Model	CS	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18022,7220	18027,8100
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18022,7690	18027,8150
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18070,2040	18041,3720
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18063,2040	18039,3720
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	VC	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18024,7220	18029,8100
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18024,7820	18029,8200
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18078,9880	18050,1530
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18070,9880	18047,1530
	CS	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18029,8100	18029,8100
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18029,8200	18029,8200
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18050,1530	18050,1530
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18047,1530	18047,1530
	TOEP	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18046,7360	18046,7360
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18046,9130	18046,9130
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18141,6720	18141,6720
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18127,6720	18127,6720
	AR(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18009,9420	18015,0450
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18010,0020	18015,0550
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18064,2080	18035,3890
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18056,2080	18032,3890
	CSH	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	17889,2910	17893,5180
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17889,6450	17893,7200
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18024,9560	17995,2350
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18004,9560	17980,2350

Çizelge 12.4. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Bilgi Kriterleri	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	
			ML	REML
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	TOEPH	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18003,1410	18009,0820
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18003,9790	18009,6750
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18213,4210	18185,3920
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18182,4210	18159,3920
	ARH(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	417030989,3660	17869,8030
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	417030989,0130	17870,0050
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	417030853,7010	17971,5200
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	417030873,7010	17956,5200
	HF	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18033,1920	18038,4410
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18033,5460	18038,6430
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18168,8570	18140,1580
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18148,8570	18125,1580
	ANTE(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	**17857,7480**	**17862,2580**
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17858,5860	17862,8510
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18068,0280	18038,5680
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18037,0280	18012,5680
	FA(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	17908,4380	17912,7810
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17908,7910	17912,9830
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18044,1030	18014,4980
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18024,1030	17999,4980
	FAH(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	17907,5550	17911,1270
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17908,4470	17911,7660
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18124,6180	18094,2180
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18092,6180	18067,2180

Çizelge 12.4. (devamı)

Model Yapısı	Kovaryans Yapısı	Bilgi Kriterleri	Kovaryans Parametre Tahmin Yöntemleri	
			ML	REML
Rasgele Kesen Terim ve Eğimli Model	UN(1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	17889,2740	17893,4650
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17889,5940	17893,6420
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18018,1560	17988,4010
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	17999,1560	17974,4010
	ARMA(1,1)	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18011,4840	18016,5280
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18011,5600	18016,5440
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18072,5330	18043,6520
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18063,5330	18039,6520
	UN	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	17893,7080	17898,3070
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	17901,9670	17905,7410
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18551,6800	18522,1720
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18454,6800	18430,1720
	UNR	Akaike Bilgi Kriteri (AIC)	18002,9430	18058,8530
		Hurvich ve Tsai Bilgi Kriteri (AICC)	18011,2020	18066,2860
		Bozdogan Bilgi Kriteri (CAIC)	18660,9160	18682,7170
		Schwarz Bayesian Bilgi Kriteri (BIC)	18563,9160	18590,7170