ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Esra ÖNDER

NİLPOTENT DÖNÜŞÜMLER TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİLPOTENT DÖNÜŞÜMLER TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR

Esra ÖNDER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez …/…/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

…….....	.....……	……..…….....
Doç. Dr. Gonca AYIK	Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLPOTENT DÖNÜŞÜMLER TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR

Esra ÖNDER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2011, Sayfa: 67
Jüri : Doç. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

PT_n ve T_n ile $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ sıralı kümesi üzerinde sırasıyla tüm kısmi dönüşümler yarıgrubunu ve tüm dönüşümler yarıgrubunu gösterelim. PT_n sıfır elemanını içeriyor olup, PT_n nilpotent eleman içerir. L_n ile PT_n nin tüm nilpotent elemanları tarafından doğurulan PT_n nin alt yarıgrubunu gösterelim. Bu tezde PT_n nin nilpotentleri tarafından doğurulan PT_n nin alt yarıgrubunu araştırarak yapılan çalışmaları bir araya topladık. Bunun için iki durumu göz önünde bulunduralım: n tek veya çift . Eğer n çift ise $a \in L_n$ olması için gerek ve yeter koşul a nın sıfırdan farklı gap a sahip olmasıdır. Eğer n tek , $a \in PT_n$ ise $a \in L_n$ olması için gerek ve yeter koşul $gapa \neq 0$ veya $|ima| \leq n-2$ veya a imajındaki eleman sayısı $n-1$ olan bir çift dönüşüm olmasıdır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi dönüşüm yarıgrubu, nilpotent dönüşüm

ABSTRACT

MS THESIS

SEMIGROUPS GENERATED BY NILPOTENT TRANSFORMATION

Esra ÖNDER

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2011, Pages: 67
Jury : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

Let PT_n and T_n denote the semigroups of all partial transformations semigroup and of all transformations semigroup on the natural ordered set $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$, respectively. Since PT_n contains a zero element, PT_n contains a nilpotent elements. L_n shall denote the subsemigroup of PT_n contains generated by all the nilpotents of PT_n. In this thesis, we investigate and collect the study about subsemigroup of PT_n which is generated by the nilpotents of PT_n. For this purpose we consider two cases n is even or odd. If n is even then $a \in L_n$ if and only if a has non-zero gap. If n is odd $a \in PT_n$ then $a \in L_n$ if and only if a has non zero gap and either $|ima| \leq n-2$ or a is an even transformation with $|ima| = n-1$

Key Words: Partial transformation semigroup, nilpotent transformation

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Eğitimime başladığım ilk günden itibaren yaptığım çalışmaların tümünde desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen hoşgörülü, sabırlı ve pozitif enerjisini bana hep yansıtan değerli hocam Doç. Dr. Gonca AYIK'a teşekkür ederim.

Aynı zamanda Yüksek Lisans eğitiminde bilgi, tecrübe ve kaynaklarını bana sunan değerli hocam Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a çok teşekkür ederim. Jüri üyelerinden Prof. Dr. Hayrullah AYIK, Doç. Dr. Gonca AYIK ve Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL'a bununla birlikte Ç.Ü. Matematik bölümünün tüm öğretim elemanlarına katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Canım ablalarım Derya ve Gülnur'a, sevgili kuzenim Yusuf Abime, enişte m Tolga'ya ve hayatımın her anında bana destek olan değerlim İsmail Emrah KARAGÖZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu tez çalışmamı canım anneciğime armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER III
1. GİRİŞ 1
2. Temel Tanım Ve Teoremler 5
3. Tüm Dönüşümler ve Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu 15
3.1. Tüm Dönüşümler Yarıgrubu 15
3.2. Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu 25
4. Nilpotent Dönüşümler Tarafından Doğurulan Yarıgruplar 29
KAYNAKLAR 63
ÖZGEÇMİŞ 67

1. GİRİŞ

Herhangi bir X kümesinden yine X kümesine olan tüm dönüşümlerin kümesini göz önünde bulunduralım. Bu kümeyi T_X ile gösterelim. T_X kümesi dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba ***tüm dönüşümler yarıgrubu*** denir. Tüm dönüşümler yarıgrubu ile ilgili çalışmalar son elli yılda oldukça artmıştır. Bilgisayar bilimindeki gelişmeler bu ilginin artmasına yardımcı olmuştur. Bu zamana kadar yapılan çalışmalarda X in hem sonlu hem de sonsuz olması durumları göz önünde bulundurulmuştur. Özellikle [Hardy, Wright, 1979] ve [Higgins, Howie, Ruskuc 1998] makalelerinde X in hem sonlu hem de sonsuz olması durumunda T_X in özellikleri incelenmiş ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Herhangi bir S yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubuna izomorfik olduğundan T_X yarıgrubu yarıgrup teoride oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bu sebeple T_X in yapısını ve elamanlarının özelliklerini bulmak ve T_X in doğuray kümesini bulmak uzun zamandır çalışılmaktadır. Bu çalışmalara örnek olarak [Araujo, Branco, Fernandes,Gomes,Ruskuc, 2001], [Ayık,Ayık,Howie,Ünlü,2005], [Ayık, Ruskuc, 1999], [Fernanedes, 2002], [Ganyushkin,Mazorchuk, preprint] ,[Gomes, Howie, 1987], [Gomes, Howie, 1992], [Higgins, Howie, Mitchell, Ruskuc,] , [Higgins, Howie, Ruskuc 1998], [Howie,1966] ,[Howie, 1995] ,[Howie, McFadden,1990] ,[Howie, 1971], [Howie, 1978] [Howie, Ruskuc, 1994] ,[Kearnes,Szendrei, Wood, 2001] , [Lipscomb, 1996], [Ruskuc, 1998], makalaleri verebiliriz. X={1,2,…,n} in sonlu bir küme olması durumunda T_X yarıgrubu kısaca T_n olarak gösterilir ve ***sonlu dönüşümler yarıgrubu*** denir. ST_n ve S_n sırasıyla T_n nin singüler dönüşümler alt yarıgrubunu ve bijektif dönüşümlerinin grubunu göstersin. Klasik sonlu dönüşümler yarıgrubu hakkındaki terminolojiyi bir arada bulacağımız kaynaklara örnek olarak [Ganyushkin,Mazorchuk, preprint],[Howie,1966], [Lavers,1998] çalışmalarını verebiliriz.

Howie 1966 da tüm dönüşümler yarıgrubunun idempotentler tarafından doğurulan alt yarıgruplarını incelemiştir. Bu çalışması daha sonra 1970 ve 1972

de Evseev ve Podran tarafından kısmi dönüşümler yarıgrubuna genişletilmiştir. Daha sonra ki yıllarda ise bu sonuçlar farklı yönlerde genelleştirildi. Örneğin 1967 de Erdös idempotent matrislerin çarpımını incelemiştir.

Bu tezde gerek tüm dönüşümler yarıgrubunda gerek kısmi dönüşümler yarıgrubunda sonlu $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ ile ilgileneceğiz ve bu durumda tüm dönüşümler yarıgrubunu T_n ve kısmi dönüşümler yarıgrubunu da PT_n ile göstereceğiz. T_n ve PT_n nin özellikleri temel tanım ve teoremler bölümünde verilmiştir.

Dikkat edilecek olursa PT_n yarıgrubu sıfır eleman

$$0_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

0_n elemanına sahiptir. PT_n yarıgrubu sıfır elemana sahip olduğundan, PT_n nilpotent eleman içerir. Böylece PT_n nin tüm nilpotent elemanlarının doğurduğu alt yarıgrubunu bulma problemini ortaya koyabiliriz. Bu problem ilk olarak 1972 yılında Schwarz tarafından ortaya konulan bir problemden doğmuştur.

Bölüm 2 ve Bölüm 3 de bahsedilen terminoloji Howie tarafından 1995 yazılan "Fundamentals of semigroup theory" adlı kitaptan ve Sullivan'ın 1975 de tamamlanan "Automorphism of transformation semigroup" başlıklı doktora tezinden alınmıştır.

$X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$, $doma \subseteq X_n$ ve $ima \subseteq X_n$ olmak üzere, PT_n nin

$$a : doma \to ima$$

şeklindeki tüm dönüşümleri içerdiğini biliyoruz. Ayrıca $a, b \in PT_n$ için

$$dom\,a\,b = \left(ima \cap domb\right)a^{-1}$$

$$ima\,b = \left(ima \cap domb\right)b$$

dir. Eğer $ima \cap domb = \varnothing$ ise

$$a\,b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ - & - & \mathbf{L} & - \end{pmatrix} = 0_n$$

Yani PT_n nin sıfır elemanı olan boş dönüşümdür. Regüler yarıgrup tanımı hatırlanacak olursa T_n ve PT_n birer regüler yarıgruptur. $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ olmak üzere T_n ve PT_n nin eleman sayıları

$$\left|T_n\right| = n^n \text{ ve } \left|PT_n\right| = (n+1)^n$$

olduğunu biliyoruz.

Son bölümde $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ sonlu bir küme olmak üzere PT_n nin tüm nilpotent elemanlarının doğurduğu, PT_n nin alt yarıgrubunu bulacağız. Bu alt yarıgrup X_n nin çift veya tek eleman içeriyor oluşuna bağlıdır.

$0_n \neq a \in PT_n$ elemanını genel olarak

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$$

olarak yazacağız.

L_n ile PT_n nin tüm nilpotent elemanları tarafından doğurulan PT_n nin alt yarıgrubunu gösterelim. Bu tezde PT_n nin nilpotentleri tarafından doğurulan PT_n nin alt yarıgrubunu araştırarak yapılan çalışmaları bir araya topladık. Bunun için iki

durumu göz önünde bulunduralım: n tek veya çift . Eğer n çift ise $a \in L_n$ olması için gerek ve yeter koşul a nın sıfırdan farklı gap a sahip olmasıdır. Eğer n tek, $a \in PT_n$ ise $a \in L_n$ olması için gerek ve yeter koşul $gapa \neq 0$ veya $|ima| \leq n-2$ veya a imajındaki eleman sayısı $n-1$ olan bir çift dönüşüm olmasıdır.

2.Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde yarıgrup teoriden kullanacağımız temel kavramları vereceğiz. Bu temel kavramlara örnek olarak homomorfizm, kongrüans,bölüm yarıgrubu, bağıntı verilebilir.

Tanım 2.1. S boş olmayan bir küme ve m de $S\times S$ den S 'ye bir fonksiyon ise m ye S üzerinde *ikili işlem* denir. Bu durumda (S,m) ikilisine de bir ***grupoid*** denir.

Tanım 2.2. (S,m) bir grupoid olsun. Eğer $\forall x,y,z\in S$ için

$$\left(x,(y,z)m\right)\ m=\left((x,y)u,z\right)\ m$$

ise (S,m) ikilisine bir *yarıgrup* denir.

(S,m) bir yarıgrup ise $\forall x,y,z\in S$ için $(x,y)m$ yerine $x.y$ veya xy ve; $\left(x,(y,z)m\right)\ m=\left((x,y)u,z\right)\ m$ yerine de $x.(y.z)=(x.y).z$ veya $x(yz)=(xy)z$ yazılır. Bu durumda (S,m) yerine $(S,\mathfrak{g})$ veya S yazılır.

S bir yarıgrup olsun. O zaman $\forall x\in S$ için $\underbrace{xxx\mathbf{L}x}_{n\ \text{tane}}$ yerine x^n yazılır.

Ayrıca $x_1,x_2,\mathbf{K},x_n\in S$ için

$$\left((x_1,x_2)\mathbf{L}\left(x_i\left(x_{i+1},x_{i+2}\right)\mathbf{L}\ x_{n-1}\right)\right)x_n$$

yerine

$$x_1x_2\ \mathbf{L}\ x_n$$

yazılır.

Tanım 2.3 S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $z \cdot s = z$ ise $z \in S$ ye bir *sol sıfır eleman,* $s \cdot z = z$ *ise* $z \in S$ ye bir *sağ sıfır eleman* denir. $z \in S$ hem sağ sıfır eleman hem de sol sıfır eleman ise z ye *sıfır eleman* denir.

Önerme 2.4. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun.

$$0 = 00' \text{ (} 0\text{, sıfır eleman olduğundan)}$$

$$0 = 00' = 0' \text{ (} 0'\text{, sıfır eleman olduğundan)}$$

olup, istenilen ispatlanmış olur. ■

Tanım 2.5. S bir yarıgrup olsun. Her $s \in S$ için $es = s$ oluyorsa $e \in S$ ye S *nin bir sol birim elemanı,* $se = s$ oluyorsa $e \in S$ ye S *nin bir sağ birim elemanı* denir. Hem sol hem de sağ birim olan elemana *birim eleman* denir.

Önerme 2.6. Bir S yarıgrubunun birim elemanı mevcut ise tektir.

İspat: $e, f \in S$**,** S nin birim elemanları olsun. e birim eleman olduğundan $e \cdot f = f$ ve f birim eleman olduğundan $f \cdot e = e$ olup

$$f = ef = fe = e$$

olacağından $e = f$ yani birim eleman tektir. ■

Tanım 2.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer S bir birim elemana sahip ise S ye bir *monoid* denir.

S bir yarıgrup olsun. Eğer S de birim eleman mevcut ise birim eleman 1 ile sıfır eleman mevcut ise 0 ile gösterilir. Eğer

$$S^1 = \begin{cases} S, & 1 \in S \\ S \cup 1, & 1 \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlanan S^1 üzerinde ikili işlem $\forall s,t \in S^1$ için

$$st = \begin{cases} st, & s,t \neq 1 \\ t, & s = 1 \\ s, & t = 1 \\ 1, & s = t = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise S^1 bir monoid olup buna *gerekli ise S ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.8. *S* bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall a \in S$ için *aS=S* ve *Sa=S* oluyor ise *S* ye bir *grup* denir. Diğer bir deyişle, *S* bir yarıgrup ve $e \in S$ iken $\forall a \in S$ için *ea=a=ae* ve *ba=e=ab* olacak şekilde bir $b \in S$ var ise *S* ye bir *grup* denir.

Tanım 2.9. *S* bir yarıgrup ve $f \neq T \subseteq S$ olsun. $T^2 \subseteq T$ ise *T* ye *S* nin bir *alt yarıgrubu* denir.

Tanım 2.10. *S* bir yarıgrup ve $f \neq T \subseteq S$ olsun.

ii) $ST \subseteq T$ ise *T* ye S nin bir *sol ideali*

iii) $TS \subseteq T$ ise *T* ye *S* nin bir *sağ ideali*

iv) $ST \subseteq T$ ve $TS \subseteq T$ ise *T* ye *S* nin bir *ideali* denir.

Tanım 2.11. S bir yarıgrup ve $u \in S$ olsun. Eğer $u^2 = u$ ise u bir idempotent eleman denir.

Sağ ve sol birim ve sağ ve sol sıfır elemanların birer idempotent elemanlar olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.12. S herhangi bir küme ve S üzerindeki çarpma işlemini her $x, y \in S$ için

$$xy = x$$

olarak tanımlansın. S bu çarpma ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba *sol sıfır yarıgrup* denir. Eğer çarpma $xy = y$ şeklinde tanımlı ise bu durumda S yarıgrubuna *sağ sıfır yarıgrup* denir.

Tanım 2.13. S bir sıfır elemana sahip bir yarıgrup olsun. $s \in S$ elemanı için $s^m = 0$ ve $s^{m-1} \neq 0$ olacak şekilde m pozitif tamsayısı varsa $s \in S$ elemanına nilpotent eleman, m pozitif tamsayısına s elemanının indeksi (veya nilpotentlik derecesi) denir.

Tanım 2.14. S ve T iki yarıgrup ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall s, t \in S$ için

$$f(st) = f(s)f(t)$$

ise f ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.15. S ve T iki yarıgrup ve $f : S \to T$ bir homomorfizm olsun.

1. f birebir ise f ye bir *monomorfizm*
2. f örten ise f ye bir *epimorfizm*
3. f hem birebir hem örten ise f ye bir *izomorfizm* denir.

S ve T yarıgrupları arasında bir izomorfizm var ise S ile T ye izomorfik gruplar denir ve $S \cong T$ ile gösterilir.
S ve T iki yarıgrup ve $f : S \to T$ bir homomorfizm olsun.

$$Kerf = \{(x,y) \in S \times S : f(x) = f(y)\}$$

olarak tanımlanan kümeye f homomorfizminin ***çekirdeği*** denir ve $Kerf$ ile gösterilir.

Ayrıca kolayca görülür ki $f : S \to T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$imf = S_f = \{f(s) : s \in S\}$$

kümesi T yarıgrubunun alt yarıgrubudur. Buna ek olarak eğer f bir monomorfizm ise S , imf 'ye izomorfiktir.

Tanım 2.16. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer

$$aba = a$$

olacak şekilde bir $b \in S$ varsa $a \in S$ elemanına ***regüler*** (düzgün) eleman denir. Ayrıca her elmanı regüler olan bir yarıgruba ***regüler yarıgrup*** denir. Örneğin, Gruplar, dikdörtgensel bandlar regüler yarıgruptur.

Tanım 2.17. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer

$$aba = a \text{ ve } bab = b$$

olacak şekilde bir $b \in S$ var ise $b'ye\ a'nın$ bir tersi ve $a'ya$ da ***tersinir eleman*** denir.

$a \in S$ tersinir eleman ise a nın tüm terslerinin kümesini $V(a)$ ile gösteririz. $a \in S$ tersinir ise $V(a) \neq \emptyset$ dir. $a \in S$ tersinir değil ise $V(a) = \emptyset$ alınır. Dikkat edilecek olursa

- G bir grup ise $\forall a \in G$ için $|V(a)| = 1$ dir.

- S bir dikdörtgensel band ise $\forall a \in S$ için $V(a) = S$ dir.
- S sıfır yarıgrup ise $V(0) = \{0\}$ ve $V(a) = \varnothing \ (\forall a \neq 0)$

Tanım 2.18. Boştan farklı herhangi bir küme X olmak üzere $X \times X$ in bir alt kümesi r ya X üzerindeki bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile gösterelim.

$\varnothing$, $X \times X$ ve $1_X = \{(x,x) : x \in X\}$ kümelerini X üzerindeki bağıntılara örnek olarak verebiliriz. r , X üzerinde bir bağıntı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$r[A] = \{y \in X : (a,y) \in r, (a \in A)\}$$

olarak tanımlayalım. $x \in X$ için $r[\{x\}]$ yerine $r[x]$ yazacağız.

$a, b \in B_X$ için

$$a \, \mathbf{o} \, b = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X, (x,z) \in a, (z,y) \in b\}$$

Şeklinde tanımlanan bileşke işlemi ile B_X bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba tüm bağıntılar yarıgrubu denir ve $B_X = (B_X, \mathbf{o})$ ile gösterilir.

Dikkat edilecek olursa $|X| = n$ olmak üzere $|X \times X| = n^2$ olup $|B_X| = 2^{n^2}$ dir.

$r \in B_X$ olmak üzere

$$dom(r) = \{x \in X : \exists y \in X, (x,y) \in r\}$$

kümesine r nun *tanım kümesi*

$$im(r)=\{y\in X:\exists x\in X,(x,y)\in r\}$$

kümesine r nun ***değer kümesi*** denir. Kolayca görüleceği gibi $r,s\in B_X$ için $r\subseteq s$ ise $dom(r)\subseteq dom(s)$, $im(r)\subseteq im(s)$ ve $r[x]\neq\varnothing\Leftrightarrow x\in dom(r)$ dur. $A\subseteq X$ ise $r[A]=\mathbf{U}\{r[a]:a\in A\}$ şeklindedir. Her $r\in B_X$ için r nun tersi

$$r^{-1}=\{(x,y)\in X\times X:(y,x)\in r\}$$

olarak tanımlanır. r^{-1} de B_X in bir elemanıdır. Ayrıca $r,b,a_1,a_2,\mathbf{L},a_n\in B_X$ olmak üzere

$$\left(r^{-1}\right)^{-1}=r$$

$$(a_1\mathbf{o}a_2\mathbf{o}\mathbf{L}\mathbf{o}a_n)^{-1}=a_n^{-1}\mathbf{o}a_{n-1}^{-1}\mathbf{o}\mathbf{K}\mathbf{o}a_1^{-1}$$

$$r\subseteq b\Rightarrow r^{-1}\subseteq b^{-1}$$

dir. Dikkat edilecek olursa $dom(r)=im\left(r^{-1}\right)$, $im(r)=dom\left(r^{-1}\right)$ ve $r^{-1}[x]\neq\varnothing\Leftrightarrow x\in im(r)$ dir.

Tanım 2.19. r , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun.

3. Her $x\in X$ için $(x,x)\in r$ ise r ya ***yansımalı***

3. Her $x,y\in X$ için $(x,y)\in r$ iken $(y,x)\in r$ ise r ya ***simetrik***

3. *H*er $x,y\in X$ için $(x,y)\in r$ ve $(y,x)\in r$ olduğunda $x=y$ ise r ya ***antisimetrik***

3. Her $x,y,z\in X$ için $(x,y)\in r$ ve $(y,z)\in r$ olduğunda $(x,z)\in r$ ise r ya ***geçişmeli***

denir.

Bu tanımları aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz. Eğer $1_X \subseteq r$ ise r, yansımalı, $r^{-1} = r$ ise r, simetrik, $r \circ r \subseteq r$ ise r geçişmelidir.

Tanım 2.20. r, yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise r ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.21. S bir yarıgrup ve r, S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x, y, s \in S$ için

$$(x, y) \in r \Rightarrow (sx, sy) \in r$$

ise r 'ye *sol kongruans* denir. Benzer şekilde $\forall x, y, s \in S$ için

$$(x, y) \in p \Rightarrow (xs, ys) \in p$$

ise r 'ya *sağ kongruans* denir. Eğer r sağ ve sol kongruans ise r 'ye (sağ/sol) *kongruans* denir.

Teorem 2.22. r bir S yarıgrubu üzerinde kongruans olsun. r nun tüm denklik sınıflarının S/r kümesi üzerinde

$$(x/p)(y/p) = (xy)/p$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgruptur.

İspat: İlk olarak yukarıdaki çarpımın iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz. Örneğin, aynı denklik sınıfının içinde bulunan elemanların seçimi

$(x, x_1) \in r$ *ve* $(y, y_1) \in r$ olmak üzere $x_1 \in x/r$ *ve* $y_1 \in y/r$ şeklindedir. r sağ kongruans ise $(x, x_1) \in r$ için $(xy, x_1 y) \in r$ dir. Benzer şekilde r sol kongruans ise $(x, x_1) \in r$ *için* $(yx, yx_1) \in r$ dir. Böylece

$$(x/r)(y/r) = (xy)/r = (x_1 y_1 / r) = (x_1 / r)(y_1 / r)$$

olup çarpma iyi tanımlıdır. Çarpma birleşme özelliğine sahip olup S/r kümesi bir yarıgruptur. ■

Tanım 2.23. S/r yarıgrubuna *bölüm yarıgrubu* denir.

S bir yarıgrup ve $I \neq \varnothing$ olmak üzere $\{A_i : i \in I\}$ de S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. A_i altyarıgruplarının hepsinin kesişimi A kümesi boştan farklı ise yine S nin bir alt yarıgrubudur.

S nin boştan farklı her A alt kümesi için A yı içeren S nin en az bir alt yarıgrubu vardır. En azından S nin kendisi vardır. S nin A yı içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi yine S nin A yı içeren bir alt yarıgrubudur. Bu alt yarıgrubu $\langle A \rangle$ ile göstereceğiz. O halde $\langle A \rangle$ alt yarıgrubu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir.

1. $A \subseteq \langle A \rangle$
2. U, S nin A yı içeren bir alt yarıgrubu ise $\langle A \rangle \subseteq U$ dir.

$\langle A \rangle$ alt yarıgrubu S nin tüm elemanlarını içeriyorsa, S nin her elemanı A nın elemanlarının sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyordur.

Tanım 2.24. Eğer $\langle A \rangle = S$ ise A ya S nin doğuray kümesi denir.

A sonlu bir küme olsun. $A=\{a_1,a_2,\mathbf{K},a_n\}$ ise $\langle A\rangle=\langle a_1,a_2,\mathbf{K},a_n\rangle$ yazacağız.

$A=\{a\}$ tek elemanlı bir küme ise

$$\langle a\rangle=\{a,a^2,a^3,\mathbf{K}\}$$

dir. Eğer S bir monoid ise benzer tanımlar yapılır fakat 1 in içerildiğine dikkat edelim. Örneğin tek elemanlı doğuray kümesi olması durumunda

$$\langle a\rangle=\{1,a,a^2,a^3,\mathbf{K}\}$$

olduğuna dikkat edelim.

3. Tüm Dönüşümler ve Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

Bu bölümde grup teorideki permütasyonlar yarıgrubuna benzer olarak herhangi bir sonlu kümeden yine kendisine tanımlı tüm dönüşümlerin oluşturduğu tüm dönüşümler yarıgrubundan bahsedilecektir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi tüm dönüşümler yarıgrubu permütasyonlar yarıgrubunu içermektedir. Daha sonra kısmi dönüşümler yarıgrubu ve özellikleri verilecektir. Ayrıca tüm dönüşümler ve kısmi dönüşümler yarıgrubu arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

3.1. Tüm Dönüşümler Yarıgrubu

Gruplarda bir kümenin permütasyonlarının grubu gibi yarıgruplar da da bir kümeden yine o kümenin kendisine daha genel dönüşümler kavramı vardır. Bir $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ sonlu kümesindeki tüm permütasyonların simetrik grubu $(S_n, \mathbf{0})$ na benzer olarak, X_n ten X_n e tüm dönüşümlerin yarıgrubuna ***tüm dönüşümler yarıgrubu*** denir ve $(T_X, \mathbf{0})$ ile gösterilir. Özel olarak $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ sonlu kümesi için tüm dönüşümler yarıgrubu $(T_n, \mathbf{0})$ şeklinde göstereceğiz. Yukarıda bahsedildiği gibi tüm bu yarıgruplarda işlem bileşke işlemi olup bu işlem birleşmelidir. $(S_n, \mathbf{0})$, X ten X e tüm birebir örten dönüşümleri içeriyor olup $(T_X, \mathbf{0})$ in alt yarıgrubudur (aynı zamanda alt grubudur.). Dikkat edilirse $X = X_n = \{1,2,...,n\}$, $|X| = n$ ise

$$|S_n| = n!,\ |T_n| = n^n$$

dir.

Eğer S, tüm dönüşümler yarıgrubu T_n nin bir alt yarıgrubu ise S ye ***dönüşümler yarıgrubu*** veya dönüşümlerin yarıgrubu denir. Bir S yarıgrubundan T_n ye bir j homomorfizmasına S nin ***temsili*** denir. Eğer j birebir ise j ye ***güvenilir***

temsil denir. Her durumda j nin görüntüsü Sj kümesi S ye izomorfik bir dönüşümler yarıgrubudur.

Aşağıdaki teorem gruplardaki Cayley teoremine benzer olup her yarıgrubun bir dönüşüm yarıgrubuna izomorfik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.1.1. (Cayley Teoremi) Kardinalitesi n olan her sonlu S yarıgrubu ya T_n ya da T_{n+1} in bir altyarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: İlk olarak S nin 1 birim elemanına sahip olduğunu kabul edelim. $S=\{a_1=1,a_2,...,a_n\}$ ve $k=1,2,...,n$ için i_k sayıları $aa_k=a_{i_k}$ eşitliği ile tek türlü tanımlı olmak üzere $j:S\to T_n$ dönüşümünü

$$j(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ i_1 & i_2 & ... & i_n\end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. $j:S\to j(S)$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Ayrıca $(ab)a_k=a(ba_k)$ olup her $k=1,2,...,n$ için

$$j(ab)(k)=j(a)(j(b)(k))$$

dir. Böylece her $a,b\in S$ için $j(ab)=j(a)j(b)$ olup j bir izomorfizmdir. O halde j , S den T_n nin bir altyarıgrubu $j(S)$ ye bir izomorfizmadır. Eğer S bir birim eleman içermiyor ise, S yi S^1 yarıgrubunun bir altyarıgrubu olarak göz önüne alabiliriz. Bu durumda ise S^1, T_{n+1} in bir altyarıgrubuna izomorfiktir. <

Dikkat edilirse T_n değişmeli olmayan bir yarıgruptur. Örneğin

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&4&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&1&4&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&1&1&5\end{pmatrix}$$

Önerme 3.1.2. $n>1$ *için* T_n'in sağ sıfır elemanı yoktur. $a\in T_n$'nın bir sol sıfır olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $a\in X_n=\{1,2,...,n\}$ olmak üzere

$$a=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\a&a&...&a\end{pmatrix}$$

olmasıdır. Buna ek olarak, T_n yarıgrubunun n tane sol sıfırı vardır.

İspat: $a\in X_n=\{1,2,...,n\}$ olmak üzere $a=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\a&a&...&a\end{pmatrix}$ ile gösterelim. Herhangi bir $b\in T_n$ için $ab(x)=a(x)$ olduğundan a , T_n in sol sıfırdır. Bu yüzden T_n en azından n tane sol sıfır içerir. Özellikle, $n > 1$ için T_n yarıgrubu sağ sıfır içermez.

Sabit dönüşümler rankı 1 olan dönüşümlerdir. $b\in T_n$ elemanının rankı en az 2 olsun. Herhangi bir $a\in T_n$ için ba_a nın rankı 1 olup $x\in X_n$ için $ba(x)=b(x)$ olması imkânsızdır. O halde rankı 2 olan sabit dönüşüm sol sıfır eleman olamaz. O halde T_n nin n tane sol sıfır elemanı vardır. <

Önerme 3.1.3 $a\in T_n$ in bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall x\in ima$ için $xa=x$ olmasıdır.

İspat: $a\in T_n$ bir idempotent olsun. O halde, $a^2=a\,\mathbf{o}\,a=a$ veya $\forall x\in X_n$ için

$$xa^2 = (xa)a = xa$$

olur. Böylece, $y \in ima$ ise

$$ya = (xa)a = xa^2 = xa = y$$

olur. Tersine, $a \in T_n$ olmak üzere $\forall x \in ima$ için $xa = x$ olsun. O zaman, $\forall x \in X_n$ için $(xa \in ima)$

$$xa^2 = (xa)a$$
$$= xa$$

olur. Dolayısıyla, $a^2 = a$ olup a bir idempotenttir.

$<$

Tanım 3.1.4 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a yı içeren en küçük (sağ-sol) idealine *a tarafından doğurulan (sol-sağ) ideali* denir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a tarafından doğurulan minimal sol,sağ ve çift taraflı idealler sırasıyla

$$S^1a = Sa \cup \{a\} = \{sa : s \in S\} \cup \{a\}$$
$$aS^1 = \{as : s \in S^1\}$$
$$S^1aS^1 = \{sat : s,t \in S^1\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.5. S bir yarıgrup olsun. S üzerinde tanımlanan

$$L = \{(a,b) : S^1a = S^1b\}$$
$$R = \{(a,b) : aS^1 = bS^1\}$$

$$J = \{(a,b) : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

bağıntılarına sırasıyla *sol, sağ ve J -Green denklik bağıntıları* denir.

Tanım 3.1.6. Eğer $(a,b) \in S$ için $(a,b) \in L$ ise a ile b $L-$*bağlantılıdır,*

$(a,b) \in R$ ise *a ile b* $R-$*bağlantılıdır ve ayrıca* $(a,b) \in R$ *ve* $(a,b) \in L$ ise *a ile b* J*-bağlantılıdır* denir. Sırasıyla $a\,L\,b$, $a\,R\,b$, $a\,J\,b$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.7. S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olsun. O halde,

i) $(a,b) \in L$ olması için yeter ve gerek şart $a = sb$ ve $b = ta$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ olmasıdır.

ii) $(a,b) \in R$ olması için yeter ve gerek şart $a = bu$ ve $b = av$ olacak şekilde $u.v \in S^1$ olmasıdır.

iii) $(a,b) \in J$ olması için yeter ve gerek şart $a = sbu$ ve $b = tav$ olacak şekilde $s,t,u,v \in S^1$ olmasıdır.

İspat: Yukarıdaki tanımdan dolayı ispat açıktır.

Önerme 3.1.8. S bir yarıgrup olsun. S üzerinde sağ ve sol Green denklik bağıntıları değişmelidir. Yani, $L \circ R = R \circ L$ dir.

Teorem 3.1.9. $a, b \in T_n$ olsun. O halde

i) $a\,L\,b \Leftrightarrow ima = imb$

ii) $a\,R\,b \Leftrightarrow \ker a = \ker b$

olmasıdır.

İspat: $a\ L\ b$ olsun. Bu durumda $a = gb$ ve $b = da$ olacak şekilde $d, g \in T_n$ vardır. O zaman $ima = im(gb) \subseteq imb$ ve benzer şeklide $imb \subseteq ima$ olup $ima = imb$ dir. Tersine $ima = imb = I$ olduğunu kabul edelim. Her $i \in I$ için $a_i a = b_i b = i$ olacak şekilde $a_i, b_i \in I$ seçelim. m ve n dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$xm = a_i \Leftrightarrow xb = i$$

$$xn = b_i \Leftrightarrow xa = i$$

Böylece $ma = b$ ve $nb = a$ olup $a \; L \; b$ olduğu ispatlanmış olur.

$a \; R \; b$ olsun. Bu durumda $a = bg$ ve $b = ad$ olacak şekilde $d, g \in T_n$ vardır. $(x, y) \in \ker a$ için $xa = ya$ dir. Böylece

$$xb = xad = yad = yb$$

olup $(x, y) \in \ker b$ dir. Yani $\ker a \subseteq \ker b$ olduğu gösterilmiş olur. Simetriden dolayı $\ker b \subseteq \ker a$ olup $\ker b = \ker a$ ispatlanmış olur.

Tersine $\ker b = \ker a = p$ olsun. p nin denklik sınıflarının sayısı $ima = J$ nin eleman sayısına eşittir. Bu da $imb = K$ olup bu sayıyı q ile gösterelim. p nin her bir denklik sınıfından bir $p_i \; (i = 1, 2, ..., q)$ seçelim. $j_i = p_i a$ ve $k_i = p_i b$ olmak üzere $J = \{j_1, ..., j_q\}$ ve $K = \{k_1, ..., k_q\}$ olsun. m ve n dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$j_i m = k_i \; (i = 1, ..., q), x \notin J \text{ ise } xm = \text{rastgele tanımlansın.}$$

$$k_i n = j_i \; (i = 1, ..., q), x \notin I \text{ ise } xn = \text{rastgele tanımlansın.}$$

$am = b$ dir. Herhangi bir $x \in \{1, ..., q\}$ ve $(x, p_i) \in p$ olacak şekildeki tek p_i temsili olsun. O zaman $xam = p_i am = j_i m = k_i = p_i b = xb$ dir. Benzer şekilde $bn = a$ olduğu gösterilip $a \; R \; b$ ispatlanmış olur. <

Örnek 3.1.10.

	L_1	L_2	L_3	
D_1	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$	R_{123}

	L_{12}	L_{13}	L_{23}	
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$	$R_{1/23}$
D_2	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}$	$R_{2/13}$
	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$	$R_{3/12}$

$$D_3 = S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \right\}$$

dir. T_3'ün idempotent elemanları

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$$

dir.

Bir $a \in T_n$ elemanını alalım. Eğer $a \in S_n$ ise o zaman $a\,a^{-1}a = a$ olup a regülerdir. Eğer $a \notin S_n$ ise bir $i_0 \in X_n - \text{im}\,a$ mevcuttur. Her bir $j \in ima$ için $i_1 a = j$ olacak şekilde bir tek $i_1 \in X_n$ seçelim. Bu durumda $b : X_n \to X_n$ dönüşümünü $\forall j \in X_n$ için

$$jb = \begin{cases} i_1\,, & ia = j \\ i_0\,, & ia \neq j \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\forall i \in X_n$ için

$$i(aba) = \big((ia)b\big)a = (jb)a = i_1 a = j = ia$$

olup $aba = a$ olur. Ohalde T_n bir regüler yarıgruptur.

S_n nin herhangi bir elemanının ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabileceğini biliyoruz. $a \in S_n$ elemanı $a = (a_1, a_2)$ şeklinde bir devir ise bu devire transpozisyon denir. Her devir transpozisyonların çarpımı olarak

$$(a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k) = (a_1, a_2)(a_1, a_3)\,\mathbf{L}\,(a_1, a_k)$$

şeklinde yazabiliriz.

$a \in S_n$ elemanı çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılıyorsa a ya çift permütasyon, tek sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılıyorsa a ya tek

permütasyon denir. Eğer $a=(a_1,a_2,\mathbf{K},a_k)$ devirinde k tek sayı ise a çift permütasyon, k çift sayı ise a tek permütasyon olduğuna dikkat edelim.

$a,b\in S_n$ elemanlarını $a=(12)$ ve $b=(12\,\mathbf{L}\,n)$ olarak alalım.

$$b^{-1}=b^{n-1}$$

$$b^{-1}ab=(23)$$

$i=1,2,\mathbf{K},n-1$ olmak üzere

$$b^{-i+1}ab^{i-1}=(ii+1)$$

$j=2,3,\mathbf{K},n-1$ olmak üzere

$$(j\;j+1)(j-1\,j)\,\mathbf{L}\,(23)(12)(23)\,\mathbf{L}\,(j-1\,j)(j\;j+1)=(1\,j+1)$$

$i=1,2,\mathbf{K},n-1$ ve $j=1,2,\mathbf{K},n-i$ olmak üzere

$$b^{-i+1}(1\,j+1)\,b^{i-1}=(i\;i+j)$$

eşitlikleri S_n de sağlanır.

Böylece yukarıdaki eşitlikler göz önünde bulundurulursa permütasyon gruplarının doğuray kümesini veren grup teoride iyi bilinen aşağıdaki teorem, ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.11. $S_n=\langle a,b\rangle$ dir.

$n\geq 3$ olmak üzere T_n tüm dönüşümler yarıgrubundaki $a,b,g\in T_n$ elemanlarını

$$a=(12),\ b=(12\,\mathbf{L}\,n) \text{ ve } g=\|12\|=\begin{cases}2, & x=1 \text{ ise}\\ x, & x\neq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak alalım.

$$(1\ i)\|12\|(1\ i)=\|i2\|,\ (i\geq 3)$$

$$(2\ j)\|12\|(2\ j)=\|1j\|,\ (j\geq 3)$$

$$(1\ i)(2\ j)\|12\|(2\ j)(1\ i)=\|ij\|,\ (i,j\geq 3, i\neq j)$$

$$(i\ j)\|ij\|(i\ j)=\|ji\|,\ (i,j\geq 1, i\neq j)$$

eşitlikleri T_n de sağlanır. Ayrıca $|ima|=r\leq n-1$ olmak üzere herhangi bir $f\in T_n$ elemanını alalım. $i\neq j, if=jf$ olacak şekilde i,j ve $z\in X_n-imf$ alalım. $\hat{f}: X_n\to X_n$ dönüşümünü her $x\in X_n$ için

$$x\hat{f}=\begin{cases}z, & x=i\\ xf, & x\neq i\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $f=\|ij\|\hat{f}$ dir.

Böylece yukarıdaki eşitlikler göz önünde bulundurulursa tüm dönüşümler yarıgrubunun doğuray kümesini veren yarıgrup teoride iyi bilinen aşağıdaki teorem, ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.12. $T_n=\langle a, b, g\rangle$ dir.

3.2.Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 3.2.1. $a \in B_X$ olsun Her $x \in X$ için $|a(x)| \leq 1$ koşulunu sağlayan a dönüşümüne kısmi dönüşüm denir.

Tüm kısmı dönüşümlerin kümesi bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu denir ve PT_X ile gösterilir. $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ sonlu kümesi için tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu PT_n ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa $X = X_n = \{1,2,...,n\}$ ise

$$|PT_n| = (n+1)^n$$

dir.

Önerme 3.2.2. $f, c \in P_x$ için

(i) $dom(f \circ c) = [imf \cap domc]f^{-1}$

(ii) $im(f \circ c) = [imf \cap domc]c$

dir.

İspat:

(i) $x \in dom(f \circ c) \Leftrightarrow \exists y \in X \ için \ (x,y) \in f \circ c$

$\Leftrightarrow \exists z \in X \ için \ (x,z) \in f \ ve \ (z,y) \in c$

$\Leftrightarrow z \in imf \cap domc \ ve \ zf^{-1} = x \ olur. x \in zf^{-1}$

$\Leftrightarrow x \in [imf \cap c]f^{-1}$

olduğundan eşitlik elde edilir.

(ii) $x \in im(f \circ c) \Leftrightarrow \exists y \in X \ için \ (y,x) \in f \circ c$

$\Leftrightarrow \exists z \in X \ için \ (y,z) \in f \ ve \ (z,x) \in c$

$$\Leftrightarrow z \in imf \cap domc \ ve \ x \in zc$$

$$\Leftrightarrow x \in [imf \cap domc]c$$

olduğundan eşitlik elde edilir. ■

Örnek 3.2.3 $n=1$, $n=2$ ve $n=3$ için PT_n aşağıdaki gibidir.

- $n=1$ ise $X_1=\{1\}$ olup $PT_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$

- $n=2$ ise $X_2=\{1,2\}$ olup

$$PT_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

- $n=3$ ise $X_3=\{1,2,3\}$

olup

$$PT_3=\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&2&-\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\-&3&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&-\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&-\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&1&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\-&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\-&3&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\-&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}
\end{array}\right\}$$

dir.

$a,b,g,d\in PT_n$ elemanlarını

$$a=(12),\ b=(12\,\mathbf{L}\,n)\ \ g=\|12\|=\begin{cases}2, & x=1 \text{ ise}\\ x, & x\neq 1 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve } d=\begin{pmatrix}1&2&3&\mathbf{L}&n\\-&2&3&\mathbf{L}&n\end{pmatrix}$$

olarak alalım. X_n nin her Y alt kümesi için $d_Y = 1_{X_n - Y}$ olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $d = d_{\{1\}} = 1_{X_n - \{1\}}$ dir.

$i = 2,3,\mathbf{K},n$ için

$$(1\ i)d\ (1\ i) = d_{\{i\}}$$

$$d_Y = \prod_{i \in Y} d_{\{i\}}$$

eşitlikleri sağlanır. Herhangi bir $f \in PT_n$ elemanını alalım. $\hat{f} : X_n \to X_n$ dönüşümünü

$$x\hat{f} = \begin{cases} xf, & x \in domf \\ x, & x \notin domf \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $Y = X_n - domf$ olmak üzere

$$f = d_Y \hat{f}$$

dir.

Böylece yukarıdaki eşitlikler göz önünde bulundurulursa tüm kısmi dönüşümler yarıgrubunun doğuray kümesini veren yarıgrup teoride iyi bilinen aşağıdaki teorem, ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.2.4. $PT_n = \langle a, b, g, d \rangle$ dir.

4. Nilpotent Dönüşümlerin Doğurduğu Yarıgruplar

Howie 1966 da tüm dönüşümler yarıgrubunun idempotentler tarafından doğurulan alt yarıgruplarını incelemiştir. Bu çalışması daha sonra 1970 ve 1972 de Evseev ve Podran tarafından kısmi dönüşümler yarıgrubuna genişletilmiştir. Daha sonra ki yıllarda ise bu sonuçlar farklı yönlerde genelleştirildi. Örneğin 1967 de Erdös idempotent matrislerin çarpımını incelemiştir.

Bu bölümde gerek tüm dönüşümler yarıgrubunda gerek kısmi dönüşümler yarıgrubunda sonlu $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ ile ilgileneceğiz ve bu durumda tüm dönüşümler yarıgrubunu T_n ve kısmi dönüşümler yarıgrubunu da PT_n ile göstereceğiz. T_n ve PT_n nin özellikleri temel tanım ve teoremler bölümünde verilmiştir.

Dikkat edilecek olursa PT_n yarıgrubu sıfır eleman

$$0_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

0_n elemanına sahiptir. PT_n yarıgrubu sıfır elemana sahip olduğundan, PT_n nilpotent eleman içerir. Böylece PT_n nin tüm nilpotent elemanlarının doğurduğu alt yarıgrubunu bulma problemini ortaya koyabiliriz.Bu problem ilk olarak 1972 yılında Schwarz tarafından ortaya konulan bir problemden doğmuştur.

Bölüm 2 ve Bölüm 3 de bahsedilen terminoloji Howie tarafından 1995 yazılan "Fundamentals of semigroup theory" adlı kitaptan ve Sullivan'ın 1975 de tamamlanan "Automorphism of transformation semigroup" başlıklı doktora tezinden alınmıştır.

$X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$, $doma \subseteq X_n$ ve $ima \subseteq X_n$ olmak üzere, PT_n nin

$$a : doma \to ima$$

şeklindeki tüm dönüşümleri içerdiğini biliyoruz. Ayrıca $a, b \in PT_n$ için

$$dom\,ab = (ima \cap domb)\,a^{-1}$$
$$ima\,b = (ima \cap domb)\,b$$

dir. Eğer $ima \cap domb = \varnothing$ ise

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ - & - & \mathbf{L} & - \end{pmatrix} = 0_n$$

Yani PT_n nin sıfır elemanı olan boş dönüşümdür. Regüler yarıgrup tanımı hatırlanacak olursa T_n ve PT_n birer regüler yarıgruptur. $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ olmak üzere T_n ve PT_n nin eleman sayıları

$$|T_n| = n^n \text{ ve } |PT_n| = (n+1)^n$$

olduğunu biliyoruz.

Son bölümde $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ sonlu bir küme olmak üzere PT_n nin tüm nilpotent elemanlarının doğurduğu, PT_n nin alt yarıgrubunu bulacağız. Bu alt yarıgrup X_n nin çift veya tek eleman içeriyor oluşuna bağlıdır.

$0_n \neq a \in PT_n$ elemanını genel olarak

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{L} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r \end{pmatrix}$$

olarak yazacağız. Dikkat edilirse

$$ima = \{a_i : 1 \le i \le r\}$$

$$doma = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$$

şeklindedir. Her bir $1 \le i \le r$ için

$$A_i = a_i a^{-1}$$

dir. Örneğin $a \in PT_n$ elemanını

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & - & - & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

olarak alalım.

$$A_1 = \{3,7\}, a_1 = 1$$

$$A_2 = \{1,2,8\}, a_2 = 2$$

$$A_3 = \{4,10\}, a_3 = 3$$

$$A_4 = \{9\}, a_4 = 6$$

olup

$$ima = \{1,2,3,6\}$$

$$doma = \bigcup_{i=1}^{4} A_4 = \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1. $a \in PT_n$ için $a^{m-1} \neq 0_n$ ve $a^m = 0_n$ olacak şekilde $m \ge 1$ varsa a nilpotent eleman ve m ye de a nın indeksi denir.

Tanım 4.2. $a \in PT_n$ için $\left|X_n - ima\right|$ sayısına a nın noksanlığı (defect) $\left|X_n - doma\right|$ sayısına a nın açıklığı (gap) denir ve

$$def\, a = \left|X_n - ima\right|$$
$$gap\, a = \left|X_n - doma\right|$$

şeklinde yazılır.

Dikkat edilirse $a \in T_n \subset PT_n$ ise T_n kapalı olup her $k \in \mathbf{Z}^+$ için $a^k \in T_n$ ve $0_n \notin T_n$ olup her $k \in \mathbf{Z}^+$ için $a^k \neq 0_n$ dir. Yani T_n de nilpotent eleman bulunmaz. PT_n nin nilpotent elemanları $PT_n - T_n$ kümesine aittir. Böylece $a \in PT_n$ nilpotent ise $a \in PT_n - T_n$ olup a nın noksanlığı ve açıklığı sıfırdan farklı yani

$$def\, a = \left|X_n - ima\right| \neq 0$$
$$gap\, a = \left|X_n - doma\right| \neq 0$$

dır.

Ayrıca her $a, b \in PT_n$ için

$$doma\, b \subseteq doma$$
$$ima\, b \subseteq im b$$

Olduğundan, sonlu tane nilpotent elemanın çarpımıda sıfırdan farklı noksanlık ve açıklığa sahiptir.

L_n ile PT_n nin tüm nilpotent elemanları tarafından doğurulan, PT_n nin alt yarıgrubu gösterelim.

Öncelikle X_n sonlu ve n çift sayı ise $gap\, a \neq 0$ olacak şekildeki her $a \in PT_n$ nin nilpotent elemanların bir çarpımı olarak yazılabildiği yani bu

elemanların L_n ye ait olduğu gösterilmiştir. Bunu göstermek için bazı ekstra tanımlamalara daha ihtiyacımız vardır.

Tanım 4.3. $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{k+1}$ hepsi farklı olmak üzere $doma = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k\}$ ve

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_k \\ a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

ise a ya $k-zincir$, $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k$ hepsi farklı olmak üzere $doma = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k\}$ ve

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_k \\ a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_1 \end{pmatrix}$$

ise a ya $k-devir$ denir ve $k-zincir$ ve $k-devir$ sırasıyla

$$[a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{k+1}] \text{ ve } (a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k)$$

şeklinde yazılır. Genelliği kaybetmeksizin bu notasyonları sırasıyla

$$[1, 2, \mathbf{K}, k+1] \text{ ve } (1, 2, \mathbf{K}, k)$$

biçiminde yazacağız. $k-zincir$ ve $k-devir$ in her ikisinde de dikkat edilirse $|ima| = k$ dır.

I_n ile X_n üzerindeki tüm birebir kısmi dönüşümlerin kümesini gösterelim.

Örnek 4.4. a dönüşümü

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&-&-&6&-&5&4&-\end{pmatrix}$$

olarak alınırsa a 1-1 olduğundan $a\in I_n$ dir. Dikkat edilecek olursa

$$doma=\{1,2,5,7,8\}, ima=\{2,3,4,5,6\}$$

olup $|doma|=|ima|$ dir.

Teorem 4.5. $a\in I_n$ olması için gerek ve yeter koşul $|doma|=|ima|$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $a\in I_n$ olması durumunda a 1-1 olduğundan $|doma|=|ima|$ olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ a dönüşümü için $|doma|=|ima|=m$ olsun. $a\neq b$ ve $a,b\in doma$ için $aa\neq ba$ olur. Aksi halde $aa=ba$ olsa $|ima|=m-1$ olurdu. O halde a 1-1 olup $a\in I_n$ dir. ■

Tanım 4.6. $a,b\in I_n$ elemanları için

$$(doma\cup ima)\cap(domb\cup imb)=\varnothing$$

İse a ve b ya *ayrık* denir.

Örnek 4.7. $a,b\in I_n$ elemanları

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&1&3&-&-&-&8&-&-\end{pmatrix} \text{ ve } b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\-&-&-&6&4&5&-&-&9\end{pmatrix}$$

olmak üzere $ima=\{1,2,3,8\}$, $doma=\{1,2,3,7\}$, $imb=\{4,5,6,9\}$, $domb=\{4,5,6,9\}$ dir. Böylece

$$(doma\cup ima)\cap(domb\cup imb)=\varnothing$$

olup a ve b ayrıktır.

Örnek 4.8. $a,b\in I_n$ elemanları

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&-&1&-&-&-&-\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\-&-&-&-&7&8&-&-\end{pmatrix}$$

olmak üzere $ima=\{1,2,3\}$, $doma=\{1,2,4\}$, $imb=\{7,8\}$, $domb=\{5,6\}$ dir. Böylece

$$(doma\cup ima)\cap(domb\cup imb)=\varnothing$$

olup a ve b ayrıktır.

$$a=\{(1,2),(2,3)(4,1)\}\subseteq X_n\times X_n$$
$$b=\{(5,7),(6,8)\}\subseteq X_n\times X_n$$

olarak düşünebiliriz. Böylece $a,b\in I_n$ elemanları ayrık ise a ve b yı $X_n\times X_n$ in alt kümesi olarak düşündüğümüzde $a\cup b$ da I_n nin elemanı olur.

- $n=1$ ve $n=2$ için PT_n ve L_n aşağıdaki gibidir.

- $n=1$ ise $X_1=\{1\}$ olup $PT_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$ ve $L_1=\{0_1\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$ dir.

- $n=2$ ise $X_2=\{1,2\}$ olup

$$PT_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&2\end{pmatrix}\right\}$$

dir.

Böylece bundan sonra X_n yi sonlu ve $n\geq 3$ kabul edebiliriz.

Lemma4.9. $|ima|=r\leq n-1$ olmak üzere I_n nin herhangi bir idempotent elemanı a ,

$$a=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\mathbf{K}&a_r\\a_1&a_2&\mathbf{K}&a_r\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat: $|ima|=r\leq n-1$ ve a dönüşümü 1-1 olduğundan $|doma|=|ima|=r$ dir.

$doma=\{a_1,a_2,\mathbf{K},a_r\}$ olsun.

$a_i\neq a_j$ olmak üzere $a_i,a_j\in doma$ alalım. a idempotent olduğundan

$$a_i\xrightarrow{a}a_j\xrightarrow{a}a_j$$

olur ki bu durum a nın 1-1 oluşu ile çelişir. O halde $a \in I_n$ elemanı idempotent ve $doma = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r\}$ ise

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Yani $a\big|_{doma}$, $doma$ üzerinde birim dönüşümdür. ■

Lemma4.10. $|ima| = r \le n-1$ olmak üzere I_n nin herhangi bir idempotent elemanı a , uzunluğu r olan iki zincirin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $|ima| = r \le n-1$ ve a dönüşümü 1-1 olduğundan $|doma| = |ima| = r$ dir. $a \in I_n$ elemanı idempotent ve $doma = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r\}$ ise

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$$

Şeklinde olduğunu yukarıdaki teoremden dolayı biliyoruz. $r \le n-1$ olup $b \in X_n$ vardır öyleki

$$b \notin doma = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r\}$$

dır. Yani a nın açıklığı sıfırdan farklı ve $b \in gapa$ olur. Böylece a

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \mathbf{K} & a_r & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a_r & a_{r-1} & \mathbf{K} & a_3 & a_2 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \mathbf{K} & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$a = [a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{r-1}, a_r, b][b, a_r, a_{r-1}, \mathbf{K}, a_3, a_2, a_1]$$

Şeklinde iki $k-$zincirin çarpımı olarak yazılabilir. ■

Tanım 4.11. a bir $k-$zincir ve bir idempotentin ayrık birleşimi ise $a \in I_n$ elemanına ***genişletilmiş*** $k-$***zincir*** (extended $k-$chain) denir. Buradaki idempotent boş dönüşüm 0_n de olabilir.

Dikkat edilirse daha önce a yı $X_n \times X_n$ nin bir alt kümesi olarak düşünebileceğimizden a nın bir $k-$zincir ve bir idempotentin ayrık birleşim olarak ifade etmemiz anlamlıdır.

Örnek 4.12. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix}$ olmak üzere $a = \{(1,1),(2,3)\} \subseteq X_3 \times X_3$ olarak düşünebiliriz. Böylece

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & - \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & - \end{pmatrix} = [2,3]$ $1-$zinciri ve $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & - \end{pmatrix}$ idempotenti olup a genişletilmiş $1-$zincirdir. a nın bir $1-$zincir ve bir idempotentin ayrık birleşim olarak $a = a_1 a_2 = \{(2,3)\} \cup \{(1,1)\}$ şeklinde ifade edebiliriz.

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} = [1,2,3]0_3$$

olup b genişletilmiş $2-$zincirdir.

Lemma 4.13. $|ima| = r \leq n-1$ olmak üzere her $a \in I_n$ elemanı, imajında r eleman olan genişletilmiş $1-$zincirlerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $|ima| = r \leq n-1$ ve $a \in I_n$ olsun. a dönüşümü 1-1 olduğundan $|doma| = |ima| = r$ dir.

I. Durum: Kabul edelim ki a uzunluğu r olan bir zincir

$$a = [1, 2, \mathbf{K}, r, r+1]$$

olsun.

$r = 1$ ise ispat açık.

$r = 2$ olsun.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 3 \end{pmatrix}$$

$$[1,2,3] = [2,3][1,2]$$

olduğuna dikkat edilirse imajı r olan genişletilmiş 2-zincir, imajı r olan iki tane genişletilmiş 1-zincirin çarpımı olarak yazılabilir. (Burada $[2,3] = \{(2,3)\} \cup \{(1,1)\}$, $[1,2] = \{(1,2)\} \cup \{(3,3)\}$ olarak alınırsa $[2,3]$ ve $[1,2]$ nin genişletilmiş 1-zincir olduğu açıktır.)

$k \geq 2$ olmak üzere $r = 2k$ olsun. $Y(i) = (doma \cup ima) - \{r-2i-1, r-2i, r-2i+1\}$ olmak üzere her bir $i = 0,1,2,\mathbf{K},k-1$ için

$$l_i = [r-2i-1, r-2i, r-2i+1] \cup 1_{Y(i)}$$

olarak alınırsa

$$a = l_0 l_1 \mathbf{L}\ l_{k-1}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse burada her bir $i = 0,1,2,\mathbf{K},k-1$ için l_i genişletilmiş $2-$zincirdir. O halde a yı genişletilmiş $2-$zincirlerin bir çarpımı olarak yazmış olduk. $r=2$ durumundan dolayı genişletilmiş $2-$zincirlerin genişletilmiş $1-$zincirlerin çarpımı olarak yazılabildiğini biliyoruz.

$r = 2k+1,\ k \geq 1$ olsun.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & r \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{K} & r+1 \end{pmatrix} = [1,2,3,4,\mathbf{K},r,r+1]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & r & r+1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & r+1 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & r & r+1 \\ 2 & - & 3 & 4 & \mathbf{K} & r & r+1 \end{pmatrix}$$

$$= [2,3,4,\mathbf{K},r,r+1][1,2]1_{\{3,4,\ldots,r,r+1\}}$$

$$= a_1 a_2 1_{\{3,4,\ldots,r,r+1\}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, a_1, a_2 yazılırken X_n geriye kalan yazılmayan elemanları domain kümesine ait olmayan elemanlardır. Dikkat edilirse a_1 imajı $r-1=2k$ olan $2k-$zincir ve yukarıdaki duruma yani $r-1=2k$ çift olma durumuna döner böylece a_1 genişletilmiş $1-$zincirlerin çarpımı olarak yazılabilir. a_2 zaten genişletilmiş $1-$zincir olup o halde $r = 2k+1,\ k \geq 1$ durumunda da a genişletilmiş $1-$zincirlerin çarpımı olarak yazılabildiğini göstermiş olduk.

Daha da ötesi kaç tane genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazıldığını da göstermiş olduk. Yani imajının eleman sayısı çift sayı olan zincirleri, çift sayıda genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı, imajının eleman sayısı tek sayı olan zincirleri, tek sayıda genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazıldığını göstermiş olduk.

II. Durum: Kabul edelim ki a bir devir

$$a = (a_1, a_2, ..., a_s)1_V$$

şeklinde bir devir olsun. Burada V, X_n nin $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ den ayrık bir alt kümesidir.

$s = 1$ ise $a = 1_V$ olup a idempotenttir. Lemma 4.10 dan dolayı idempotentleri $r-$zincirlerin çarpımı olarak yazıp, yukarıdaki I. Durumu kullanarak $r-$zincirleri genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazabileceğimizden bu durumda istenilen ispatlanmış olur.

$s \geq 2$ ise $i = 2, 3, ..., s$ için

$$Z(i) = V \cup (\{a_1, ..., a_s\} - \{a_i\})$$

ve

$$p_i = (a_1, a_i) \cup 1_{Z(i)}$$

olmak üzere

$$a = p_2 p_3 .. p_s$$

dir. $x \notin doma$ seçelim ve

$$p_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_i \\ a_i & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_i \\ a_i & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & x \\ a_i & a_1 \end{pmatrix}$$

$$(a_1, a_i) = [a_1, a_i, x][x, a_1]$$

olup $i = 2, 3, ..., s$ için p_i, $2-$devirleri bir $2-$zincir ve bir genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazılabilir. $2-$zincirlerin I. Durumdan dolayı genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazıldığını biliyoruz. Böylece $i = 2, 3, ..., s$ için p_i ler

genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazılabilir. Ohalde $a = p_2 p_3 ... p_s$ olduğundan a genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazılabilir.

Şimdi ispatı tamamlamak için $|ima| = r \leq n-1$ olmak üzere herhangi bir $a \in I_n$ elemanını alalım. a nın ayrık devirler g_i $(1 \leq i \leq s)$ ve zincirler g_j $(s+1 \leq j \leq t)$ lerin çarpımı olarak

$$a = g_1 g_2 ... g_s g_{s+1} g_{s+2} ... g_t$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz.(buradaki bazı çarpanlar idempotent olabilir, onlarda imajında 1eleman olan 1-devir olarak düşünebiliriz.)Buradaki zincirlerin sayısı $def\, a$ kadardır. $p = g_1 g_2 ... g_s$ olmak üzere $k = 1, 2, ..., s$ için

$$Z(k) = dom\, a - dom\, g_k$$

$k = s+1, s+2, ..., t$ için

$$Z(k) = dom\, p \cup im\left(g_{s+1} \cup g_{s+2} \cup ... \cup g_{k-1}\right) \cup dom\left(g_{k+1} \cup g_{k+2} \cup ... \cup g_t\right)$$

olarak tanımlayalım.

$k = 1, 2, ..., t$ için

$$b_k = g_k \cup 1_{Z(k)}$$

olarak alalım. Dikkat edilirse b_k ların imajında r eleman vardır. Böylece

$$a = b_1 \circ b_2 \circ \mathbf{L} \circ b_t$$

şeklindedir. Buradaki b_k lar ya idempotent ya devir yada zincir olup Lemma 1 ve yukarıdaki I.durum ve II. durumdan dolayı her biri genişletilmiş $1-$zincirin çarpımı olarak yazılabilir olduğundan istenilen ispatlanmış olur. ■

Örnek 4.14. $a \in I_{13}$ elemanı aşağıdaki gibi olsun.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 11 & 10 & - & - & 13 & - & - \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$a = l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 = (1,2)(3,4)(5,6)[7,8,11][9,10][12,13]$$

elde edilir. Buradaki ilk üç çarpan devir diğerleri zincirdir. Yukarıdaki ispattaki tanımlamalar dikkate alınırsa istenilen kümeler aşağıdaki gibidir. $doma = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12\}$ ve $p = l_1 l_2 l_3 = (1,2)(3,4)(5,6)$ olup

$$domp = \{1,2,3,4,5,6\}$$

dir.

$$Z(1) = doma - domg_1 = \{3,4,5,6,7,8,9,12\}$$

$$Z(2) = doma - domg_2 = \{1,2,5,6,7,8,9,12\}$$

$$Z(3) = doma - domg_3 = \{1,2,3,4,7,8,9,12\}$$

$$Z(4) = domp \cup \varnothing \cup dom(g_5 \cup g_6) = \{1,2,3,4,5,6,9,12\}$$

$$Z(5) = domp \cup img_4 \cup domg_6 = \{1,2,3,4,5,6,8,11,12\}$$

$$Z(6) = domp \cup im(g_4 \cup g_5) \cup \varnothing = \{1,2,3,4,5,6,8,10,11\}$$

elde edilir. Bileşke işleminde örneğin $1_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dönüşümünü $1_{\{1,2\}} = \{(1,1),(2,2)\} \subseteq \{1,2\} \times \{1,2\}$ olarak düşüneceğiz. Böylece

$$b_1 = g_1 \cup 1_{Z(1)} = \{(1,2),(2,1)\} \cup 1_{\{3,4,5,6,7,8,9,12\}}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & - & - & 12 & - & - \end{pmatrix}$$

$$b_2 = g_2 \cup 1_{Z(2)} = \{(3,4),(4,3)\} \cup 1_{\{1,2,5,6,7,8,9,12\}}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & - & - & 12 & - & - \end{pmatrix}$$

$$b_3 = g_3 \cup 1_{Z(3)} = \{(5,6),(6,7)\} \cup 1_{\{1,2,3,4,7,8,9,12\}}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & - & - & 12 & - & - \end{pmatrix}$$

$$b_4 = g_4 \cup 1_{Z(4)} = \{(7,8),(8,11)\} \cup 1_{\{1,2,3,4,5,6,9,12\}}$$

$$b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 11 & 9 & - & - & 12 & - & - \end{pmatrix}$$

$$b_5 = g_5 \cup 1_{Z(5)} = \{(9,10)\} \cup 1_{\{1,2,3,4,5,6,8,11,12\}}$$

$$b_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & - & 8 & 10 & - & 11 & 12 & - & - \end{pmatrix}$$

$$b_6 = g_6 \cup 1_{Z(6)} = \{(12,13)\} \cup 1_{\{1,2,3,4,5,6,8,10,11\}}$$

$$b_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & - & 8 & - & 10 & 11 & 13 & - & - \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$a = b_1 \mathbf{o} b_2 \mathbf{o} b_3 \mathbf{o} b_4 \mathbf{o} b_5 \mathbf{o} b_6$$

şeklinde yazılıp her bir çarpan da genişletilmiş $1-$ zincirlerin çarpımı olarak yazılabilir.

Önerme 4.15. $a \in PT_n$ elemanının açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $i = 1, 2, ..., r$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $i = 1, 2, ..., r$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde ise $a^2 = a$ olduğu açıktır.

$(\Rightarrow)$ $a \in PT_n$ elemanının açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir idempotent olsun. $a \in PT_n$ nin herhangi bir elemanı $a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ x_1 & x_2 & \mathbf{K} & x_r \end{pmatrix}$ şeklinde olduğunu biliyoruz.

a idempotent olup her $x \in A_i$ $(1 \le i \le r)$ için $xa = xa^2$ dir. $xa = x_i$, $(1 \le i \le r)$ ve

$$xa = xa^2 \Rightarrow x_i = (xa)a \Rightarrow x_i = x_i a$$

olup $x_i \in A_i \ (1 \le i \le r)$ elde edilir ve istenilen ispatlanmış olur. ■

Önerme 4.16. $a \in PT_n$ elemanı, açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir $r-$zincir ise a , indeksi r olan bir nilpotent elemandır.

İspat: $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir $r-$zincir olsun. Genelliği bozmaksızın

$$a = [1,2,3,...,r,r+1]$$

şeklinde bir $r-$zincir alalım. Bunun anlamının

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{K} & r & r+1 & X_n - \{1,2,...,r,r+1\} \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & r+1 & - & - \end{pmatrix}$$

dir. Dikkat edilirse $a^r = 0_n$ olup a , indeksi r olan bir nilpotent elemandır. ■

Önerme 4.17. $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir idempotent ise $a \in L_n$ dir.

İspat: L_n nin PT_n deki tüm nilpotent elemanların doğurduğu PT_n nin alt yarıgrubu olduğunu hatırlayalım. $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir idempotent olsun. $i = 1,2,...,r$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğunu Önerme 4.15 den dolayı biliyoruz. Ayrıca $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı bir idempotent olup $b \notin dom a = A_1 \cup \mathbf{L} \cup A_r$ olacak şekilde $b \in X_n$ vardır.

$a \in L_n$ olduğunu göstermek için a nın PT_n deki nilpotent elemanların çarpımı olarak yazıldığını göstermek yeterli olacaktır.

$i = 1, 2, ..., r$ için $a_i \in A_i$ ve $b \notin dom a = A_1 \cup \mathbf{L} \cup A_r$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_{r-1} & A_r \\ a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_r & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_r & b \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz.

a nın yukarıdaki yazılışında her bir çarpan nilpotent olup $a \in L_n$. ■

Lemma 4.18. $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı ve $|im a| \leq n-2$ ise $a \in L_n$ dir.

İspat: $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı herhangi bir idempotent ise $a \in L_n$ olduğunu Önerme 4.17. den dolayı biliyoruz. Herhangi bir $a \in PT_n$ elemanı açıklığı (gap) sıfırdan farklı ve $|im a| \leq n-2$ elemanını

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ x_1 & x_2 & \mathbf{K} & x_r \end{pmatrix}$$

olarak alabiliriz. $i = 1, 2, ..., r$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ x_1 & x_2 & \mathbf{K} & x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \\ x_1 & x_2 & \mathbf{K} & x_r \end{pmatrix} = a_1 a_2$$

olarak yazabiliriz. $a_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{K} & A_r \\ a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \end{pmatrix}$ bir idempotent olup Önerme 4.17. den dolayı nilpotent elemanların çarpımı olarak yazabiliriz ve bunun için $b \notin doma = A_1 \cup \mathbf{L} \cup A_r$ elemanına ihtiyaç vardır. Aynı zamanda $b \in X_n - doma$ dır.

Şimdi a_2 yi nilpotent elemanların çarpımı olarak yazmaya çalışalım. Bunun için önce a_2 yi

$$a_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_r \\ x_1 & x_2 & \mathbf{K} & x_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{L} & a_{r-1} & a_r \\ x_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{L} & a_{r-1} & a_r \\ a_1 & x_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix} \mathbf{L} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{L} & a_{r-1} & a_r \\ a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & x_r \end{pmatrix}$$

olarak alalım. $|ima| \leq n-2$ olup $X_n - doma$ en az iki eleman vardır. Aşağıdaki tüm harf birbirinden farklı olmak üzere a_2 deki her bir çarpanı aşağıdaki gibi iki nilpotentlerin çarpımı olarak yazabiliriz. $c \in X_n - doma$ olmak üzere, genelliği bozmaksızın, a_2 deki ilk çarpanı

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{L} & a_{r-1} & a_r \\ x_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{L} & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \mathbf{K} & a_r & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \mathbf{L} & a_{r-1} & c \\ x_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-2} & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde nilpotentlerin çarpımı olarak yazılır. Böylece a_2 deki her bir çarpan nilpotentlerin çarpımı olarak yazılmış olup a_2 nilpotentlerin çarpımı olarak yazabiliriz. O halde a_1 ve a_2 nilpotentlerin çarpımı olarak yazılabiliyor olup $a = a_1 a_2$ da nilpotentlerin çarpımı olarak yazılır. Dikkat edilirse tüm bunları yaparken en az iki tane $b, c \in X_n - doma$ elemanlarını kullandığımızdan

$|ima| \leq n-2$ olması gereklidir.

■

Lemma 4.19. Eğer $n \geq 4$ ve çift ise $|ima| = n-1$ olan herhangi bir $a \in I_n$ elemanı uzunluğu $n-1$ olan üç zincirin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $|ima| = n-1$ olan herhangi bir $a \in I_n$ alalım. $|ima| = n-1$ ve Lemma 4.13 den dolayı a yı genişletilmiş $1-$zincir olarak yazabiliriz. genişletilmiş $1-$zincirlerin tanımının $1-$zincir ve idempotentin ayrık birleşimi olduğunu hatırlayalım.

$|ima| = n-1$ olan genişletilmiş $1-$zincir a yı, genelliği bozmaksızın

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n \end{pmatrix}$$

olarak alabiliriz.

Böylece $n+1=2$ olduğuna dikkat edilerek

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n \\ 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n \end{pmatrix} = [1,3,4,5,\ldots,n-1,n,2] \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n-1 & n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece a yı uzunluğu $n-1$ olan zincir

$$a_1 = [1,3,4,5,\ldots,n-1,n,2]$$

ve bir devir a_2 nin

$$a_2=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n & 2\\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n-1 & n\end{pmatrix}$$

çarpımı olarak yazabildik.

Buradaki a_2 devirini aşağıdaki gibi uzunluğu $n-1$ olan iki zincirin çarpımı olarak yazarak a yı uzunluğu $n-1$ olan üç zincirin çarpımı olarak yazabileceğimizi göstermiş oluruz.

$$a_2=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & \mathbf{K} & n & 2\\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{K} & n-2 & n-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \mathbf{K} & n-2 & n-1\\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{K} & n-1 & n\end{pmatrix}$$

$$a_2=[n,n-2,n-4,...6,4,2,n-1,n-3,...,5,3,1][1,2,3,4,...,n-2,n-1,n]$$

alarak istenilen ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.20. n çift sayı olsun.

$a\in L_n$ dir. $\Leftrightarrow$ a nın açıklığı (gap) sıfırdan farklıdır.

İspat: n çift sayı olsun.

$(\Rightarrow)$ $a\in L_n$ olsun Bunun anlamı a nilpotent elemanların çarpımı olarak yazılabiliyor olduğundan $a\in PT_n-T_n$ olup a nın açıklığı (gap) sıfırdan farklıdır.

$(\Leftarrow)$ a nın açıklığı (gap) sıfırdan farklı olsun. $x\notin doma$ olacak şekilde en az bir $x\in X_n$ vardır. O halde $|doma|\le n-1$ olup $|ima|\le n-1$ dir.

$|ima|\le n-2$ ise $a\in L_n$ olduğunu Lemma 4.18 den dolayı biliyoruz.

$|ima|=n-1$ ise $a\in I_n$ olup Lemma 4.19 dan dolayı $a\in L_n$ olduğunu biliyoruz. ■

Böylece n çift sayı olması durumunda L_n alt yarıgrubundaki elemanların yapısını belirledik.

n nin tek sayı olması durumunda benzer teoremi ifade etmeden önce teoremin ispatı için gerekli olan bazı önemli sonuçları verelim.

Tanım 4.21. a uzunluğu r olan bir zincir

$$a = [a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{r+1}]$$

ise a_1 e a nın başlangıç (initial) noktası, a_{r+1} e a nın bitiş (terminal) noktası diyeceğiz ve a nın başlangıç noktası a_1 yerine $\hat{a}_1$ ile göstereceğiz. $a \in PT_n$ de $\hat{a}$ şeklinde bir sembol var ise a yı bir zincir olarak anlayacağız.

Tanım 4.22. $a, b \in I_n$ ayrık olsunlar.

$$a \cup b = l \, \mathbf{o} \, m$$

olacak şekilde l, m zincirleri varsa a, b ya birleştirilebilir (welded) denir.

S_n ile X_n üzerindeki birebir örten tüm dönüşümlerin kümesini yani simetrik grubu göstermiştik. S_n deki çift devirin tanımını hatırlayalım. Her bir devir transpozisyonların çarpımı olarak yazılır. Eğer çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılıyorsa o devire çift devir denir. Örneğin

$$f = (1,2,3,4,5) = (1,2)(1,3)(1,4)(1,5)$$

olup f bir çift devirdir. Dikkat edilirse f çift devirinde 5 tane yani tek sayıda eleman görülüyor.

Lemma 4.23.(lemma5) Eğer $|ima| \le n-1,\ a \in I_n$ ve a çift devirlerin ayrık bir birleşimi ise a yı, imajındaki eleman saysısı a ile aynı olan iki zincirin çarpımı olarak yazabiliriz.

İspat: $r+s \le n-1$, (r,s sonlu) $r = 3,5,\ldots$, $s = 3,5,\ldots$ olmak üzere $p_1 = (a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r)$ ve $p_2 = (b_1, b_2, \mathbf{K}, b_s)$ iki ayrık çift devir ve $a = p_1 \cup p_2$ olsun. $|ima| = r+s \le n-1$ olup $z \in \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r, b_1, b_2, \mathbf{K}, b_s\}$ seçebiliriz. l ve m yü

$$l = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_r & b_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{K} & b_{s-1} & \hat{b}_s \\ z & a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r & b_1 & b_2 & \mathbf{K} & b_{s-2} & b_{s-1} \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} \hat{z} & a_1 & a_2 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r & b_1 & b_2 & \mathbf{K} & b_{s-2} & b_{s-1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \mathbf{K} & a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \mathbf{K} & b_s & b_1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım.

$$l = \left[\hat{b}_s, b_{s-1}, b_{s-2}, \mathbf{K}, b_3, b_2, b_1, a_r, a_{r-1}, \mathbf{K}, a_3, a_2, a_1, z\right]$$

$$m = \left[\hat{z}, a_2, a_4, \mathbf{K}, a_{r-1}, a_1, a_3, \mathbf{K}, a_r, b_2, b_4, \mathbf{K}, b_{s-1}, b_1, b_3, \mathbf{K}, b_{s-2}, b_s\right]$$

olup l ve m, $(r+s)-$zincirdir. Üstelik

$$l \circ m = p_1 \cup p_2 = (a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r) \cup (b_1, b_2, \mathbf{K}, b_s)$$

olup a, iki tane çift devirin ayrık birleşimi olması durumunda istenilen ispatlanmış olur.

Genel olarak $|ima| \le n-1,\ a \in I_n$ olmak üzere $a = p_1 \cup p_2 \cup \mathbf{L} \cup p_k$ şeklinde k tane çift devirin ayrık bir birleşimi olsun. $z \notin doma$ seçerek birleştirme işlemine

p_1 ve p_2 ye uygulayarak başlayalım. p_1 ve p_2 yi birleştirmek için yaptıklarımızı $p_1 \cup p_2$ ile p_3 ü birleştirmek için yaparak devam edelim. Bunu yaparken herbir zincire bir sonraki deviri birleştirirken zincirlerin başlangıç ve bitiş noktalarına dikkat edelim. Birinci zincir l nın başlangıç noktası ve ikinci zincir m nün bitiş noktası son eklenen devirin bitiş noktasıdır. Birinci zincir l nın bitiş noktası ve ikinci zincir m nün başlangıç noktası $z \notin doma$ dir. ■

Bu lemmayı bir örnekle açıklayalım.

Örnek 4.24. $a \in I_n$ elemanını

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 10 & 11 & 1 & 13 & - & 9 & - \end{pmatrix}$$

olarak alalım.

$$a = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \cup p_4 = (2,3,4) \cup (5,7,6) \cup (1,8,10) \cup (11,13,9)$$

4 tane çift devirin ayrık birleşimi olarak yazılır. Ayrıca dikkat edilirse $|ima| = 12$ dir.

Yukarıdaki lemmanın ispatına paralel olarak p_1 ve p_2 birleştirelim.

$$l = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & \hat{6} \\ 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = [6,7,5,4,3,2,12]$$

$$m = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = [12,3,2,4,7,5,6]$$

$6-$ zincirleri olmak üzere

$$l \circ m = p_1 \cup p_2$$

Elde edilir. $p_3 = (1,8,10)$ deviri $p_1 \cup p_2$ ye birleştirilirse l ve m nün yeni hali

$$l = [10,8,1,6,7,5,4,3,2,12]$$
$$m = [12,3,2,4,7,5,6,8,1,10]$$

Şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $p_4 = (11,13,9)$ deviri $p_1 \cup p_2 \cup p_3$ ye birleştirilirse l ve m

$$l = [9,13,11,10,8,1,6,7,5,4,3,2,12]$$
$$m = [12,3,2,4,7,5,6,8,1,10,13,11,9]$$

$12-$zincirleri elde edilir. Böylece

$$a = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \cup p_4 = l \circ m$$

olup a , imajındaki eleman sayısı ile aynı uzunlukta 2 zincirin çarpımı olarak yazılmış olur.

$a \in I_n$ elemanını

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 10 & 14 & 1 & 13 & - & 9 & 15 & 11 & - \end{pmatrix}$$

olarak ve $12 \notin doma$ alırsak

$$a = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \cup p_4 = (2,3,4) \cup (5,7,6) \cup (1,8,10) \cup (11,13,9,14,15)$$

4 tane çift devirin ayrık birleşimi olarak yazılır. Yukarıdaki örnekte sadece $p_4=(11,13,9,14,15)$ deviri değişmiş olur. $p_4=(\underline{\underline{11}},\underline{13},\underline{\underline{9}},\underline{14},\underline{\underline{15}})$ deviri $p_1\cup p_2\cup p_3$ ye birleştirilirse l ve m

$$l=[15,14,9,13,11,10,8,1,6,7,5,4,3,2,12]$$
$$m=[12,3,2,4,7,5,6,8,1,10,\underline{13},\underline{14},\underline{\underline{11}},\underline{\underline{9}},\underline{\underline{15}}]$$

şeklinde olduğuna ve p_4 ve m deki altı aynı çizilen sayılara dikkat edelim.

Lemma 4.25. Eğer $|ima|\le n-1,\ a\in I_n$ ve a dereceleri farkı en fazla 2 olan iki tek devirin ayrık bir birleşimi ise a yı, imajındaki eleman sayısı a ile aynı olan iki zincirin çarpımı olarak yazabiliriz.

İspat: Kabul edelim ki (r,s sonlu) $r=2,4,...,\ s=2,4,...\ r=s$ olmak üzere $p_1=(a_1,a_2,\mathbf{K},a_r)$ ve $p_2=(b_1,b_2,\mathbf{K},b_s)$ iki ayrık tek devir ve $a=p_1\cup p_2$ olsun. $|ima|\le n-1$ olup $z\in\{a_1,a_2,\mathbf{K},a_r,b_1,b_2,\mathbf{K},b_s\}$ seçebiliriz. Bu durumda l ve m yü

$$l=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_r & \hat{b}_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{K} & b_{r-1} & b_r \\ z & b_r & b_{r-1} & \mathbf{K} & b_2 & a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \mathbf{K} & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$m=\begin{pmatrix} \hat{z} & b_r & b_{r-1} & \mathbf{K} & b_3 & b_2 & a_r & a_{r-1} & \mathbf{K} & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \mathbf{K} & a_r & a_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{K} & b_r & b_1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $r=s$ olması durumunda l ve m yü yukarıdaki gibi alarak

$$l=[b_1,a_r,b_2,a_{r-1},b_3,a_{r-2},\mathbf{K},a_2,b_r,a_1,z]$$

$$m=\left[\hat{z},a_2,b_r,a_3,b_{r-1},a_4,\mathbf{K},a_{r-1},b_3,a_r,b_2,a_1,b_1\right]$$

l ve m nün istenilen zincirler olduğu görülür.

$r=2,4,...$ ve $s=r+2$ olsun. Bu durumda

$$l=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{K} & a_{r-1} & a_r & b_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{K} & \hat{b}_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s \\ z & b_s & b_{s-1} & \mathbf{K} & b_5 & b_4 & a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \mathbf{K} & a_2 & a_1 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$m=\begin{pmatrix} z & b_s & b_{s-1} & b_{s-2} & \mathbf{K} & b_5 & b_4 & a_r & a_{r-1} & \mathbf{K} & a_2 & a_1 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \mathbf{K} & a_r & a_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{K} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & b_1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $s=r+2$ olması durumunda l ve m yü yukarıdaki gibi alarak

$$l=\left[\hat{b}_{s-3},a_2,b_s,b_2,a_{r-1},b_5,a_{r-4},\mathbf{K},b_4,a_1,z\right]$$

$$m=\left[\hat{z},a_2,b_{s-2},a_5,b_{r-3},\mathbf{K},a_3,b_{s-3}\right]$$

l ve m nün istenilen zincirler olduğu görülür. ■

Bu lemmayı bir örnekle açıklayalım.

Örnek 4.26. $a\in I_{11}$ elemanını

$$a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 7 & - \end{pmatrix}$$

olarak alalım.

$$a=p_1\cup p_2=(7,8,9,10)\cup(1,2,3,4,5,6)$$

uzunlukları 4 ve 6 olan 2 tane tek devirin ayrık birleşimi olarak yazılır. Ayrıca dikkat edilirse $z = 11 \notin ima$ dır.

Yukarıdaki lemmanın ispatına paralel olarak

$$l = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [3,8,6,2,9,5,1,10,4,7,11]$$

$$m = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = [11,8,4,7,5,10,2,1,6,9,3]$$

10-zincirleri bulunur.

Sonuç 4.27. $|ima| \leq n-1$ olan herhangi bir çift permütasyon imajındaki eleman sayısı a ile aynı olan iki zincirin çarpımı olarak yazılabilir. Eğer a nın ayrık devirlere parçalanışı bir tek devir içeriyorsa bu tek devir dereceleri farkı en fazla 2 olan iki tek devirin çarpımı olarak yazılabilir. (yani böylece bir tek devir yerine iki tane tek devir yazarak a çift permütasyon olur.) ■

Sonuçtan dolayı her permütasyonu yukarıdaki özelliklere sahip iki zincirin çarpımı olarak yazabiliriz.

Tanım 4.28. $b \in I_n$ olsun. Eğer b aşağıdaki üç tipte veya aşağıdaki üç tipteki dönüşümlerin herhangi bir ayrık birleşimi ise b ya bir ***çift dönüşüm*** denir.

1. $b|_{domb}$ bir çift permütasyondur.
2. b , imajındaki eleman sayısı çift olan bir zincirdir.
3. b , tek permütasyon ile imajında tek sayıda eleman bulunan zincirin ayrık bir birleşimidir.

Bu tanımın amacı I_n deki boştan farklı idempotentleri çift permütasyon olarak dikkate alacağını vurgulamaktır.

Lemma 4.29. $|ima| = r \le n-1$ olmak üzere $a \in I_n$ bir çift permütasyon ise a, imajındaki eleman sayısı r olan çift sayıda zincirin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: Yukarıdaki sonuçtan dolayı yalnızca a nın en az iki ayrık tek deviri içerdiği durumu incelemek yeterli olacaktır.

$p, q \in \mathbf{Z}, r = 2p, s = 2q$ olmak üzere kabul edelim ki a

$$(a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r) \text{ ve } (b_1, b_2, \mathbf{K}, b_s)$$

iki tek devirini içeriyor olsun.

$$(a_1, a_2, \mathbf{K}, a_r) = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_4, a_5)\,\mathbf{L}\,(a_1, a_{r-1}, a_r)(a_1, a_r)$$

$$(b_1, b_2, \mathbf{K}, b_s) = (b_1, b_2)(b_1, b_3, b_4)(b_1, b_5, b_6)\,\mathbf{L}\,(b_1, b_{s-1}, b_s)$$

olup çift devirler ve iki tane transpozisyon (yani 2 transpozisyon bir çift permütasyon olur.) a nın çarpanları arasında yer alır. Her ikisi de 2 tane zincirin çarpımı olarak yazılabiliyor olup sonuçtan dolayı istenilen ispatlanmış olur. ■

Lemma 4.30. $|ima| = r$ çift sayı olmak üzere $a \in I_n$ bir zincir ise a, imajındaki eleman sayısı r olan tam iki zincirin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $|ima| = r = 2k,\ (k \ge 2)$ olmak üzere $a \in I_n$

$$a = [1, 2, \mathbf{K}, r, r+1]$$

zincirini alalım.

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{L} & r-1 & \hat{r} \\ r+1 & 1 & 2 & \mathbf{L} & r-2 & r-1 \end{pmatrix} = [r, r-1, r-2, \mathbf{K}, 3, 2, 1, r+1]$$

$$m=\begin{pmatrix} r+1 & \hat{1} & 2 & \mathbf{L} & r-2 & r-1 \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{L} & r & r+1 \end{pmatrix}=[1,3,5,\mathbf{K},r-1,r+1,2,4,\mathbf{K},r-2,r]$$

olarak alınırsa $a = lm$ elde edilir.

Lemma 4.31. Eğer $a \in I_n$ elemanı bir tek permütasyon ve imajındaki eleman sayısı tek olan bir zincirin ayrık bir birleşimi ise her birinin imajındaki eleman sayısı a ile aynı olan çift sayıda zincirlerin çarpımı olarak yazabiliriz.

İspat: p tek permütasyon ve l imajındaki eleman sayısı tek olan bir zincir olmak üzere

$$a = p \cup l$$

olduğunu kabul edelim. s çift permütasyon olmak üzere genelliği bozmaksızın

$$p = s \circ (1,2)$$

olsun. Eğer p sadece $(1,2)$ ye eşit ise s yı $\{1,2\}$ de birim dönüşüm olan bir çift permütasyon olarak alabiliriz. Böylece $Z = dom s - \{1,2\}$ için

$$m = (1,2) \cup l \cup 1_Z$$

$$Y = dom\, l$$

olmak üzere

$$a = (s \cup 1_Y) \circ m$$

dir. $a_1 = (s \cup 1_Y)$ alalım. s çift permütasyon olup Lemma 4.29 dan dolayı s yı çift sayıda zincirin çarpımı olarak yazabiliriz. $1_Y \in I_n$ ve idempotent olup Lemma 4.10 dan dolayı 1_Y yi 2 tane zincirin çarpımı olarak yazabiliriz. Böylece $a_1 = (s \cup 1_Y)$ çift sayıda zincirin çarpımı olarak yazabiliriz. $m = (1,2) \cup l \cup 1_Z$ nin çift sayıda zincirin çarpımı olarak yazabileceğimizi söylemek yeterli olacaktır. Benzer şekilde Lemma 4.10 dan dolayı 1_Z yi 2 tane zincirin çarpımı olarak yazabiliriz. Sadece 2-devir $(1,2)$ ile imajındaki eleman sayısı tek olan bir zincir l nın ayrık birleşiminin iki tane zincirin çarpımı olarak yazılabileceğini göstermek yeterli olacaktır. $r \geq 4$ ve çift olmak üzere

$$(1,2) \cup l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{L} & r-1 \\ r & r-1 & 1 & 2 & \mathbf{L} & r-3 \end{pmatrix} \mathbf{o} \begin{pmatrix} r & r-1 & 1 & 2 & \mathbf{L} & r-3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & \mathbf{L} & r \end{pmatrix}$$

$$= [r-2, r-4, \mathbf{K}, 2, r-1, r-3, \mathbf{K}, 3, 1, r] \mathbf{o} (1,4,7,\mathbf{K}, r-1)(2,5,8,\mathbf{K}, r)[3,6,\mathbf{K}, r-2]$$

olup her bir çarpan çift sayıda zincirin çarpımı olarak yazılıp istenilen ispatlanmış olur. ■

Sonuç 4.32. $|ima| = r \leq n-1$ olan $a \in I_n$ bir çift dönüşüm ise a her birinin imajındaki eleman sayısı r ile aynı olan çift sayıda zincirlerin çarpımı olarak yazabiliriz. ■

Eğer her bir $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_r$ ler nilpotent ve $|ima| = n-1$ olmak üzere $a = l_1 l_2 \mathbf{L}\, l_r$ ise $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_r \in I_n$ ve $i = 1,2,\mathbf{K}, r$ için $|iml_i| = n-1$ olup böylece herbir l_i zincir ve eğer tek sayı ise $|iml_i|$ çifttir. Şimdi yukarıdaki sonucun tersini gösterelim.

Lemma 4.33. $|ima| = n-1$ olmak üzere $a \in I_n$ olsun. a nın çift dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul a nın çift sayıda genişletilmiş 1-zincirlerin çarpımı olarak yazılabiliyor olmasıdır.

İspat: İspat için Sullivan'ın 1987 deki çalışmasındaki lemma 10 a bakınız. ■

Teorem 4.34. n tek ve $a \in PT_n$ olsun. $a \in L_n$ olması için gerek ve yeter koşul $gapa \neq 0$ ve ya $|ima| \leq n-2$ veya a imajındaki eleman sayısı $n-1$ olan bir çift dönüşüm olmasıdır.

İspat: $a \in L_n$, $|ima| = n-1$ ve n tek ise a nın bir çift dönüşüm olduğunu göstermek kalmıştır. $a \in L_n$ olup $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_r$ ler nilpotent olmak üzere $a = l_1 l_2 \mathbf{L}\, l_r$ ise herbir $|iml_i| = n-1$ çift olan bir zincirdir. Lemma 4.13 den dolayı bu zincirler çift sayıda genişletilmiş 1-zincirlerin çarpımı olarak yazabiliriz. Böylece Lemma 4.33 den dolayı a nın bir çift dönüşüm olduğu gösterilmiş olur. ■

Örneğin $n=9$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & - \end{pmatrix} = (1,2,3)(4,5)[6,7,8,9]$$

olarak alınırsa a imajındaki eleman sayısı $9-1$ olan bir çift dönüşüm olup a nilpotent dönüşümlerin çarpımı olarak yazılabilir. Fakat

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 8 & 9 & - \end{pmatrix} = (1,2,3)(4,5)(6)[7,8,9]$$

olarak alınırsa a imajındaki eleman sayısı $9-1$ ve bir çift dönüşüm olmayıp, nilpotent dönüşümlerin çarpımı olarak yazılamaz.

KAYNAKLAR

ARAUJO, I.M. , BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., RUSKUC, N. (2001). On Generators and Relations of Unions of Semigroups, Semigroup Forum, 63, 49-62.

AYIK, H., RUSKUC, N., (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 42, 482-495.

AYIK, G., AYIK, H. and HOWIE, J.M., 2005. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups. Semigroup Forum,70: 225—237

AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M. and ÜNLÜ, Y., 2005a. The Structure of Elements in Finite Full Transformation Semigroups. Bull. Aust. Math. Soc., 71: 69—74.

AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M. and ÜNLÜ, Y.,2005b. Rank Properties of the Semigroup of Singular Transformations on a Finite Set. Communications in Algebra, 36: 2581—2587.

EVSEEV A.E. and PODRAN N.E. (1970). Semigroups of transformations generated by idempotents with given projection characteristics, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 12 (103) 30-36.

EVSEEV A.E. and PODRAN N.E. (1972). Semigroups of transformations generated by idempotents with given defect, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 2 (117) 44-50.

FERNANDES, V. H., (2002). Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain:A survey, Semigroups,Algorithms, Automata and Languages- Coimbra 2001, World Sci. Publ, 368-378.

GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V. Introduction to classical finite transformation semigroup, preprint.

GARBA, G.U., 1994a. On the Nilpotent Rank of Partial Transformation Semigroups. Portugal.Math., 51(2):163-172.

_____,1994b. On The Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. Portugal.Math., 51(2):185—204.

GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1987). On the rank of certain finite semigroups of transformations, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 101 395-403.

GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1992). On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations, Semigroup Forum 45, 272-282.

HARDY, G.H., WRIGHT, E.M., (1979). **"**An Introduction to the Theory of Numbers", Fifth Edition, Oxford University Press.

HIGGINS, P.M. , (1992). Techniques of semigroup theory. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press.

HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., RUSKUC, N., (1998). Generators and factorisations of transformation semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh A **128**, 1355-1368.

HOWIE, J.M., (1966). The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation Semigroup, J. London Math. Soc. **41**, 707-716.

HOWIE, J.M., (1995). Fundamentals of semigroup theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 351s.

HOWIE, J.M., MCFADDEN, R.B., (1990). Idempotent rank in finite full transformation semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh A **114**, 161-167.

HOWIE, J.M., (1971). Products of idempotents in certain semigroups of transformation, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 17, 223-236.

HOWIE, J.M., (1978). Idempotent generators in finite full transformation semigroup, Proc. Royal Soc. Edinburgh 81A, 317-323.

HOWIE, J.M., RUSKUC, N., (1994). Constructions and Presentations for Monoids, Comm. Algebra, 22, 6209-6224.

KEARNES, K.A., SZENDREİ, A., WOOD, J., (2001). Generating singular transformation, Semigroup Forum,63,441-448.

LIPSCOMB, S., (1996). "Symmetric Inverse Semigroups", Math. Surveys and Monographs, Vol. 46, American Math Soc., Providence.

ROTMAN, J. J. 1994. An Introduction to the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 536s.

RUSKUC, N., (1998). On Large Subsemigroups and Finiteness Conditions of Semigroups, Proc. London Math. Soc., 76, 383-405.

SCHWARZ S. (1972). On some semigroups in combinatorics, in 'Miniconference on Semigroup Theory, Szeged, 1972' Bolyai Jonas Math. Soc. 24-31.

SULLIVAN R.P. (1975). Automorphisms of transformation semigroups, J. Austral. Math. Soc. Ser. 20, 77-84.

SULLIVAN R.P. (1987). Semigroups generated by nilpotent transformation, Journal of Algebra, 110, 324-343.

TAINITER, M., 1968. A characterization of idempotent in semigroups. J. Combinatorial Theory, (5):370—373.

ÖZGEÇMİŞ

19.06.1984 tarihinde Osmaniye'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. 2003 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans eğitimini 2007 yılında tamamladı. 2007-2008 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamladı. 2008 yılında ise Çukurova Üniversitesi Tezli Yüksek Lisans eğitimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir. Bununla birlikte Şanlıurfa ili Suruç ilçesine bağlı İMKB Hacı Mahmut Yavuz Lisesinde Matematik Öğretmenliği mesleğine devam etmektedir.