ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nergiz ÖNEN

KISITLI TİP ALTMANİFOLDLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2012

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISITLI TİP ALTMANİFOLDLAR

Nergiz ÖNEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ../../2012 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Doç. Dr. Bengü BAYRAM	Prof. Dr. Kadri ARSLAN
DANIŞMAN	EŞ DANIŞMAN	ÜYE

.....	.....
Doç. Dr. Ali ÖZKURT	Doç. Dr. Fikret KUYUCU
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Selahattin SERİN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISITLI TİP ALTMANİFOLDLAR

Nergiz ÖNEN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
2. Danışman : Doç. Dr. Bengü BAYRAM
Yıl : 2012, Sayfa: 71
Jüri : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
: Doç. Dr. Bengü BAYRAM
: Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Bu çalışmada kısıtlı tip altmanifoldlar incelenmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm, çalışmanın ilerideki bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde, sonlu tip eğri ve yüzey kavramları ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, kısıtlı tip eğriler ve kısıtlı tip altmanifoldlar incelendi. Bu sınıfa ait yüzey örnekleri verildi. Ayrıca bazı yüzeylerin kısıtlı tip olma durumu incelendi ve orijinal sonuçlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Tip Altmanifoldlar, Kısıtlı Tip Eğriler, Kısıtlı Tip Altmanifoldlar.

ABSTRACT

MSc. THESIS

SUBMANIFOLDS OF RESTRICTED TYPE

Nergiz ÖNEN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Co- Supervisor : Assoc.Prof. Dr. Bengü BAYRAM
Year : 2012, Pages: 71
Jury : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
: Assoc.Prof. Dr. Bengü BAYRAM
: Assoc.Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Assoc.Prof. Dr. Fikret KUYUCU

In this thesis, we consider restricted type of submanifolds. This thesis consists of five chapter. The first chapter is an introduction. In the second chapter some basic definitions and notions which will be used in the other chapters are given. In the third chapter curves and surfaces finite type are considered. In the fourth chapter curves of restricted type and submanifolds which have restricted type have been studied. Moreover, some surfaces which have restricted type have been examined and some original results have been obtained.

Keywords: Finite Type Submanifold, Restricted Curve, Restricted Submanifold.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ'e ve Doç. Dr. Bengü BAYRAM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma sırasında sorularımı geri çevirmeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkür ederim.

Bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali GÜVEN'e teşekkür ederim.

Ayrıca Çukurova Üniversitesi ve Balıkesir Üniversitesi Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca daima yanımda olan ve benden desteğini esirgemeyen Sefer POYRAZ'a ve bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
1.GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. SONLU TİP EĞRİLER VE ALTMANİFOLDLAR 7
3.1. Sonlu Tip Altmanifoldlar 7
3.2 Sonlu Tip Eğriler 10
3.3 W-Eğrileri 13
4. KISITLI TİP EĞRİLER VE ALTMANİFOLDLAR 17
4.1. Kısıtlı Tip Altmanifoldlar 17
4.1.1 Rotasyonel Yüzeyler 27
4.1.2 Küresel Çarpım Yüzeyleri 35
4.1.3 Tensör Çarpım Yüzeyleri 46
4.1.4 Chen Yüzeyi 51
4.2 Kısıtlı Tip Eğriler 58
KAYNAKLAR 69
ÖZGEÇMİŞ 71

1.GİRİŞ

Bu çalışmada kısıtlı tip altmanifoldlar incelenmiştir.

Tez 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölüm, ilerideki bölümlerde kullanılan tanımları içermektedir. Bu bölümde, bir Riemann manifoldu kavramı tanıtılarak bu tür manifoldlar üzerindeki koneksiyonlar tanımlanmıştır. Ayrıca bir M altmanifoldu için Gauss ve Weingarten denklemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu tip eğriler ve altmanifoldlar hakkında bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca sonlu tip eğri çeşidi olan W-eğrileri tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde kısıtlı tip eğriler ve kısıtlı tip altmanifoldlar ele alınmıştır. Kısıtlı tip altmanifoldlar hakkında bazı temel tanım, teoremler ve örnekler verilmiştir. IE^4 te Rotasyon yüzeyi, IE^3 ve IE^4 te küresel çarpım yüzeyleri ve IE^4 te tensör çarpım yüzeyleri tanıtılmış ve bu yüzeyler için orijinal sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca Chen yüzeyleri hakkında bazı temel tanım ve teoremler ele alınıp kısıtlı tip Chen yüzeyi örnekleri verilmiştir. Kısıtlı tip eğriler ile ilgili bazı teorem, sonuç ve örnekler verilmiştir. Bu bölümde sonlu tip her eğrinin kısıtlı tip olmadığı belirtilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: M, n-boyutlu diferansiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M' den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$

şeklinde metrik tanımlı ise M' ye bir ***Riemann manifoldu*** denir. Burada g' ye ***Riemann metriği*** (veya *metrik tensör*) adı verilir.

Tanım 2.2: M, diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$
$$(X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, IR)$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$

(koneksiyonun lineerlik özelikleri) sağlanırsa, ∇ ya M üzerinde bir ***Afin koneksiyon*** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1980). Burada ∇_X operatörüne X' e göre ***kovaryant türev*** denir.

Tanım 2.3: M, n boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde bir ***yarı-Riemann metrik*** aşağıdaki özelikleri sağlayan (0, 2) tipinde bir g tensör alanıdır.

i) X, Y $\in \chi$ (M) için $g(X,Y)=g(Y,X)$,

ii) Her bir p$\in$M için $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to IR$ (dejenere olmamış) bilineer formu kısaca $\forall\ Y_p \in T_p(M)$ için $g_p(X_p, Y_p)=0$ şartını sağlar ise $X_p = 0$ dır.

Eğer her bir p$\in$M için g_p pozitif tanımlıysa, M üzerindeki g (yarı-Riemann) metriği ***Riemann metrik*** adını alır. Yarı-Riemann metrikli bir M manifolduna ***yarı-Riemann manifold*** adı verilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.4: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman X, Y $\in \chi$ (M) olmak üzere, ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği)

ii) $X<Y,Z>=<\nabla_X Y, Z> + <Y, \nabla_X Z>$ (koneksiyonun metrik ile bağdaşması özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde ***sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu*** veya M' nin ***Levi-Civita koneksiyonu*** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Teorem 2.5: Tek bir Levi-Civita koneksiyou vardır (Carmo, 1992).

Tanım 2.6: M ve N, sırasıyla, n ve (n+d) boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere x : M $\to$ N diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her p$\in$M için $dx_p : T_p(M) \to T_{x(p)}(N)$, bire bir ise x' e bir ***immersiyon (daldırma)*** denir. Ek olarak x : M $\to$ x(M) bir homeomorfizim ise x' e bir ***imbedding (gömme)*** denir. Eğer M $\subset$ N ve i : M $\to$ N dönüşümü bir gömme ise M' ye N' nin n-boyutlu bir ***altmanifoldu*** adı verilir (Chen, 1973).

Tanım 2.7: $x : M^n \to N^{n+d}$ dönüşümü bir imersiyon olsun. N manifoldu bir Riemann yapıya sahipse x yardımıyla N 'den indirgenen metrik için

$$< u, v >_p = < dx_p(u), dx_p(v) >_{x(p)}$$

eşitliği sağlandığında x 'e bir ***izometrik imersiyon*** adı verilir.

Tanım 2.8: M ve N sırasıyla n ve n+d boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N' nin altmanifoldu, ∇ da M' de kovaryant türev ve X, $Y \in \chi(M)$ olmak üzere $(\tilde{\nabla}_X Y)_p$ her $p \in M$ için tanımlıdır. Böylece $(\nabla_X Y)_p \in T_p(M)$ ve $h_p(X,Y) \in T_p^{\perp}(M)$ olmak üzere;

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X,Y) \tag{2.1}$$

biçiminde elde edilen eşitliğe ***Gauss formülü*** adı verilir. Burada h' ya M' nin ***ikinci temel formu*** denir.

Eğer h = 0 ise M' ye ***total geodeziktir*** denir.

M üzerinde normal vektör alanı ξ ve teğet vektör alanı X olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan eşitliğe ***Weingarten denklemi*** denir. Burada $-A_\xi X$ ve $D_X \xi$, sırasıyla, $\tilde{\nabla}_X \xi$ 'nin teğet ve normal bileşenleridir. Ayrıca A_ξ ye şekil operatörü, D' ye M' nin N(M) normal demetindeki ***(normal) koneksiyonu*** denir. Eğer $D_X \xi = 0$ ise ξ normal vektör alanı ***paraleldir*** denir. Böylece $\forall$ ξ normal vektör ve $\forall$ X, Y tanjant vektör için

$$< A_\xi X, Y > = < h(X,Y), \xi > \tag{2.3}$$

dır.

Tanım 2.9: M, N' nin bir altmanifoldu olsun. M' nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$ olmak üzere $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $T_p(M)$' nin ortonormal bir çatısı olsun. O zaman M' nin ***ortalama eğrilik vektörü*** $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer özdeş olarak $\vec{H} = 0$ ise M altmanifolduna ***minimaldir*** denir.

Tanım 2.10: M, N' nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde tanımlı en az bir f fonksiyonu için

$$< h(X,Y), \vec{H} >= f < X, Y >$$

ise M' ye ***yarı-umbiliktir*** denir.

Tanım 2.11: M manifoldunu örten herhangi bir $u_1, u_2, ..., u_n$ koordinat komşulukları sistemi için, M manifoldunun tamamını örten sonlu sayıda koordinat komşulukları varsa M manifoldu ***kompakttır*** denir.

3. SONLU TİP EĞRİLER VE ALTMANİFOLDLAR

3.1. Sonlu Tip Altmanifoldlar

Tanım 3.1.1: $x : M \to IE^{n+d}$ fonksiyonu n-boyutlu Riemann manifoldu M' den (n+d)-boyutlu öklit uzayı IE^{n+d} ye bir izometrik immersiyon olsun. M üzerindeki lokal koordinatlar $u_1, u_2, \ldots, u_n$ verildiğinde IE^{n+d} den indirgenen metriği

$$g_{ij} = < \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > \qquad ; 1 \le i, j \le n \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece,

$$G = \det (g_{ij}) \quad \text{ve} \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \tag{3.2}$$

olmak üzere M' nin IE^{n+d} den indirgenmiş metriğe göre ***Laplas operatörü***

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j}) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada det ile determinant fonksiyonu ifade edilmektedir (Zafindratafa, 1996).

M' nin IE^{n+d} den indirgenmiş metriğe göre Laplas operatörü Δ olmak üzere M' nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$, aşağıdaki ***Bertrami formülünü*** sağlar (Chen, 1984),

$$\Delta x = -n\vec{H}. \tag{3.4}$$

3.1.2 Tanım: $M \subset IE^{n+d}$ kompakt altmanifold olsun. x yer vektörü, M' nin Δ Laplasının özfonksiyonlarının sonlu toplamı olarak yazılabiliyorsa diğer bir ifadeyle

x_0 sabit vektör ve $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ olmak üzere

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i \tag{3.5}$$

ayrışımına sahip ise M' ye ***sonlu tiptedir*** aksi halde M' ye ***sonsuz tiptedir*** denir (Chen, 1984). Burada x_1, x_2, …, x_k lar sabit olmayan dönüşümlerdir.

Tanım 3.1.3: Tanım 3.1.2 de ifade edilen bütün $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ özdeğerleri birbirlerinden farklıysalar o zaman x immersiyonu (yada M altmanifoldu) k-tipindedir. Burada $1 \le i \le k$ ve $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ dır. Özellikle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ özdeğerlerinden en az biri sıfır ise o zaman M' ye ***null k-tipindedir*** denir (Chen, 1983).

$M \subset IE^{n+d}$ altmanifoldu minimaldir ancak ve ancak M ***null 1-tipinde*****dir**. Yani, M' nin x yer vektörü

$$x = c + x_0 \ , \ \Delta x_0 = 0$$

ayrışımına sahiptir.

Diğer taraftan M' nin x yer vektörü

$$x = c + x_0 + x_q \ , \ \Delta x_0 = 0 \ , \quad \Delta x_q = \lambda_q x_q \ , \quad \lambda_q \neq 0 \tag{3.6}$$

ayrışımına sahip ise M' ye ***null 2-tipindedir*** denir.

Teorem 3.1.4: $M \subset IE^{n+d}$ altmanifoldu' nun *k*-tipinden olması için gerek ve yeter şart M' nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$ ' nın,

$$\Delta^k \vec{H} + c_1 \Delta^{k-1} \vec{H} + \dots + c_{k-1} \Delta \vec{H} + c_k \vec{H} = 0 \ , \ k = \min\{n : \Delta^n \vec{H} + c_1 \Delta^{n-1} \vec{H} + \dots + c_n \vec{H} = 0\}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada

$$c_1 = -\sum_{t=p}^{q} \lambda_t \ , \ c_2 = \sum_{t<s} \lambda_t \lambda_s ,..., \qquad c_{q-p+1} = (-1)^{q-p+1} \lambda_p ... \lambda_q \qquad (k = q-p+1)$$

$$\lambda_i = \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad , \ 1 \le i \le k$$

dır (Chen, 1983).

Tanım 3.1.5: $x : M_1 \to \mathbb{E}^{m_1+d_1}$ ve $y : M_2 \to \mathbb{E}^{m_2+d_2}$ izometrik immersiyonları verilsin. Böylece $p \in M_1$ ve $q \in M_2$ için

$(x,y) : M = M_1 x M_2 \to IE^{m+d}$; $m = m_1 + m_2$, $d = d_1 + d_2$

$$(x, y)(p, q) = (x_1, x_2, ..., x_{m_1+d_1}, y_1, y_2, ..., y_{m_2+d_2})$$

biçiminde tanımlanan immersiyona x ile y' nin ***çarpım immersiyonu*** adı verilir. $M_1 x M_2$ manifolduna da M_1 ile M_2' nin ***Riemann çarpımı*** denir (Moore, 1971).

Önerme 3.1.6: M ve N kompakt manifoldlar olmak üzere $x : M \to IE^m$ ve $y : N \to IE^d$ izometrik immersiyonları verilsin. Bu taktirde, $(x, y) : MxN \to IE^{m+d}$ çarpım immersiyonunun sonlu tipte olması için gerek ve yeter şart x ve y immersiyonlarının sonlu tipte olmasıdır (Chen, 1984).

Teorem 3.1.7: M_1 ve M_2, sırasıyla, r ve s-boyutlu kompakt manifoldlar olmak üzere $x : M_1 \to IE^m$ ve $y : M_2 \to IE^n$ izometrik immersiyonları ve Δ, Δ_1 ve Δ_2, sırasıyla, $M = M_1 x M_2$, M_1 ve M_2' nin Laplasları olsun. O zaman

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \qquad (3.7)$$

dir (Arslan, Kılıç, 1998).

Teorem 3.1.8: M = M_1xM_2 bir çarpım manifoldu olsun. Eğer M_1 ve M_2, sırasıyla, *k* ve *l* tipinde iseler, o zaman M sonlu tiptedir ve (bir $p \le k+l$ için)

$$\Delta^p\vec{H} + c_1\Delta^{p-1}\vec{H} + ... + c_{p-1}\Delta\vec{H} + c_p\vec{H} = 0\,, \quad p \in \mathbb{N}$$

dır (Arslan, Kılıç, 1998).

3.2 Sonlu Tip Eğriler

f = f(s), 2πr periyotlu periyodik bir fonksiyon olmak üzere f(s)' nin Fourier seri açılımı

$$f(s) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{s}{r} + a_2\cos\frac{2s}{r} + ... + b_1\sin\frac{s}{r} + b_2\sin\frac{2s}{r} + ... \qquad (3.8)$$

biçimindedir. Burada a_k ve b_k,

$$a_k = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi r}^{\pi r} f(s)\cos\frac{ks}{r}ds\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.9)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi r}^{\pi r} f(s)\sin\frac{ks}{r}ds\,, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (3.10)$$

ile verilen Fourier sabitleridir.

Yukarıdaki Fourier seri açılımları yardımıyla IE^n deki 1-boyutlu Riemann altmanifoldlarının (eğrilerin) sonlu tipte olmasını inceleyelim.

IE^n de 2πr yay uzunluklu kapalı bir eğri γ olsun. Bu taktirde $x : \gamma \to IE^n$ bir izometrik immersiyon ise x' in yer vektörünün j. inci türevi

$$x^{(j)} = \frac{d^j x}{ds^j} \tag{3.11}$$

dır. Böylece x' in Laplası

$$\Delta x = \frac{-d^2 x}{ds^2} \tag{3.12}$$

olduğundan

$$\Delta^j \vec{H} = (-1)^j x^{(2j+2)} \ , \ j = 0, 1, 2, ... \tag{3.13}$$

dır.

Eğer x sonlu tipte ise Teorem 3.1.4 den dolayı x_i koordinat fonksiyonları aşağıdaki sabit katsayılı adi diferansiyel denklemi sağlar ;

$$x_i^{2k+2} + c_1 x_i^{2k} + ... + c_{k-1} x_i^4 + c_k x_i^2 = 0 , \quad i = 1, 2, ..., n, \ k \geq 1. \tag{3.14}$$

"Eş 3.14" denkleminin x_i çözümleri $2\pi r$ periyotlu periyodik fonksiyonlar olduğundan her bir x_i aşağıdaki periyodik çözümlerin sonlu bir lineer kombinasyonudur;

$$1, \ \cos\left(\frac{n_i s}{r}\right), \quad \sin\left(\frac{m_i s}{r}\right) , \quad n_i , m_i \in Z \tag{3.15}$$

bu sebeple her bir x_i koordinat fonksiyonu

$$x_i = c_i + \sum_{t=p_A}^{q_A} \left(a_A(t) \cos\frac{ts}{r} + b_A(t) \sin\frac{ts}{r} \right) \tag{3.16}$$

biçimindedir. Burada c_i, $a_A(t)$, $b_A(t)$ (A = 1,...,n) uygun sabitler ve p_A, q_A tamsayıdır. Böylece her bir x_i koordinat fonksiyonu sonlu Fourier toplamına sahiptir.

Benzer şekilde her bir x_i koordinat fonksiyonu sonlu toplamlı Fourier seri açılımına sahipse x immersiyonu sonlu tiptedir (Chen, 1983).

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1: γ, IE^n de $2\pi r$ yay uzunluklu bir kapalı eğri olsun. Bu taktirde $x : \gamma \to IE^n$ izometrik immersiyonu sonlu tiptedir ancak ve ancak

$$\gamma(s) = a_0 + \sum_{t=1}^{\infty}\left(a_t \cos\frac{ts}{r} + b_t \sin\frac{ts}{r}\right) \tag{3.17}$$

eşitliğinin toplam kısmında sadece sonlu sayıda sıfır olmayan terim olmalıdır.

Böylece Teorem 3.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2: IE^m deki her kapalı k-tipindeki γ eğrisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\gamma(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{k}\left(a_i \cos\lambda_{t_i} s + b_i \sin\lambda_{t_i} s\right). \tag{3.18}$$

Burada $\{t_1,\ldots,t_k\}$ eğrinin sırasını ve a_0, $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_k$ lar aynı anda sıfır olmayacak şekilde IE^m de vektörlerdir.

Sonuç 3.2.3: IE^m deki her null k-tipindeki bir γ eğrisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\gamma(s) = a_0 + b_0 s + \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \cos\lambda_{t_i} s + b_i \sin\lambda_{t_i} s\right) \tag{3.19}$$

Burada a_0, b_0, $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_k$ lar aynı anda sıfır olmayacak ve $b_0 \neq 0$ olacak şekilde IE^m de vektörlerdir.

"Eş 3.18" ve "Eş 3.19" den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.4:

1) IE^m nin her *k*-tipindeki eğrisi, IE^m nin afin 2k altuzayı olan IE^{2k} da yatar.

2) IE^m nin her null *k*-tipindeki eğrisi, IE^m nin (2k-1) boyutlu bir IE^{2k-1} alt uzayında yatar.

3.3 W-Eğrileri

Tanım 3.3.1: $I \subset IR$ olmak üzere $\gamma : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için γ' nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(s)$, $\gamma''(s)$,…, $\gamma^{(d)}(s)$ lineer bağımsız olup $\gamma'(s)$, $\gamma''(s)$,…,$\gamma^{(d+1)}(s)$ vektörleri lineer bağımlı ise γ eğrisine ***d-ranklı Frenet eğrisi*** adı verilir.

IE^n nin d-ranklı her bir Frenet eğrisi γ üzerinde $\{ E_1, E_2, \ldots, E_d \}$ biçiminde oluşturulan ortonormal bir d-çatısı ve $\kappa_1,\ldots, \kappa_{d-1} : I \to IR$ Frenet eğrilik fonksiyonları için

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ . \\ . \\ . \\ E_{d-1}' \\ E_d' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \kappa_{d-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ . \\ . \\ . \\ E_{d-1} \\ E_d \end{bmatrix}$$

dir. Burada v, γ eğrisinin hızıdır. Gramm-Schmidt ortonormalleştirme işlemi yardımıyla

$$V_1 = \gamma'$$

$$V_d = \gamma^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} < \gamma^{(k)}, V_i > \frac{V_i}{\|V_i\|}$$

(3.20)

$$\kappa_{d-1} = \frac{\|V_k\|}{\|V_{k-1}\|\|V_1\|}$$

$$E_d = \frac{V_k}{\|V_K\|}$$

dir. Burada $k \in \{ 2, 3, \ldots, d \}$ dır. $\kappa_d = \kappa_{d+1} = \ldots = \kappa_{n-1} = 0$ olarak tanımlayalım.

Tanım 3.3.2: $\gamma : I \subset IR \rightarrow IE^n$ d-ranklı regüler bir eğri ve γ' nın Frenet eğrilikleri $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1}$ sabit iseler γ' ya (genelleştirilmiş) ***vida eğrisi*** (yada ***helis***) adı verilir (Chen, 1992). Bu eğriler öklid dönüşümlerin 1-parametreli grubunun yörüngeleri olduklarından F. Klein ve S. Lie bunları ***W-eğrileri*** olarak adlandırmışlardır (Klein, Lie,1871).

Tanım 3.3.3: M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere ∇, M' nin Riemann koneksiyonu olsun. Bu taktirde $\gamma : I \rightarrow M$ regüler eğrisi her $t \in I$ için

$$\gamma'(t) \wedge \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \wedge \ldots \nabla^{d-1}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \neq 0$$

ve

$$\gamma'(t) \wedge \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \wedge \ldots \nabla^{d}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

olup $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1}$ Frenet eğrilikleri sabit ise γ eğrisine M' nin ***d-ranklı W-eğrisi*** adı verilir (Kim, 1993).

Öklid uzayında 2*k*-ranklı birim hızlı bir W-eğrisi

$$\gamma(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \cos \mu_i s + b_i \sin \mu_i s \right) \qquad (3.21)$$

formda parametrelendirilişe ve (2*k*+1)-ranklı birim hızlı bir W-eğrisi ise

$$\gamma(s) = a_0 + b_0 s + \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \cos \mu_i s + b_i \sin \mu_i s \right) \tag{3.22}$$

formda parametrelendirilişe sahiptir. Burada a_0, b_0, $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_k$ lar öklid uzayında sabit vektörler ve $\mu_1 < \mu_2 \ldots < \mu_k$ lar pozitif reel sayılardır (Ferus, Schirrmacher, 1982).

Rankı 1 olan W-eğrisi düz doğru, rankı 2 olan W-eğrisi bir çember ve rankı 3 olan W-eğrisi ise dönel dik helis adını alır.

Bir W-eğrisinin kapalı olması için gerek ve yeter şart rankı çift ve bütün μ_i'ler reel sayıların rasyonel çarpımları olmalıdır. Bununla beraber öklid uzayındaki metrikle, rankı 2k ve IE^{2k} da $2\pi r$ uzunluğunda olan kapalı bir W-eğrisi, $t_1, t_2,\ldots,t_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\gamma(s) = \frac{r}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{t_1} \cos \frac{t_1 s}{r}, \frac{1}{t_1} \sin \frac{t_1 s}{r}, \ldots, \frac{1}{t_k} \cos \frac{t_k s}{r}, \frac{1}{t_k} \sin \frac{t_k s}{r} \right) \ , \ k \in Z^+ \tag{3.23}$$

yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir forma sahiptir (Chen, 1983).

4. KISITLI TİP EĞRİLER VE ALTMANİFOLDLAR

4.1. Kısıtlı Tip Altmanifoldlar

Tanım 4.1.1: M n-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere $x : M \to IR^{n+d}$ izometrik imersiyon verilsin. M 'nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$ için

$$A_H X = (AX)^T \ ; \ \forall X \in \chi(M) \tag{4.1.1}$$

ise M 'ye kısıtlı tiptedir denir. Buradaki A_H M 'nin $\vec{H}$ 'ya göre şekil operatörü, $(\ )^T$ de AX 'in teğetsel bileşeni ve A 'da bir simetrik matristir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Uyarı 4.1.2: Bütün X ve Y tanjant vektörleri için

$$< A_H X, Y >=< AX, Y > \tag{4.1.2}$$

eşitliği (4.1.1) 'e denktir.

Sonuç 4.1.3: $\Delta x = Ax + B$ eşitliğini sağlayacak şekilde sabit A ve B matrisleri bulunuyorsa (A simetrik olmak üzere) $x : M \to IR^{n+d}$ immersiyonu kısıtlı tiptedir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Teorem 4.1.4: IR^{n+1} 'de bir M^n hiperyüzeyinin kısıtlı tipte olması için gerekli ve yeterli koşul M^n 'nin aşağıdakilerden biri olmasıdır:

1) Bir minimal hiperyüzeydir ;

2) $S^k \times IR^{n-k}$ biçiminde çarpım hiperyüzeyidir, $2 \le k \le n$;

3) Kısıtlı tip bir düzlemsel eğri üzerinde bir silindirdir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Teorem 4.1.5: IR^{n+1} 'de bir M^n hiperyüzeyinin bir sabit A matrisi ve bir sabit B vektörü için

$$\Delta x = Ax + B$$

sağlaması için gerekli ve yeterli koşul M^n 'nin aşağıdakilerden biri olmasıdır:

1) Minimal hiperyüzey ;
2) S^k x IR^{n-k} çarpım hiperyüzeyi, $1 \leq k \leq n$ (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Sonuç 4.1.6: $\Delta x = Ax + B$ eşitliğini sağlayacak şekilde sabit A ve B matrisleri bulunuyorsa (A simetrik olmak üzere) $x : M \rightarrow IR^{n+1}$ immersiyonu (yada M hiperyüzeyi) kısıtlı tiptedir.

Kısıtlı tipte bazı yüzey örnekleri verilecektir.

Örnek 4.1.7: (Helissoid)

$$x(r, u) = (r\cos u, r\sin u, au)$$

yaması ile verilen helissoid yüzeyi kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Helissoid yüzeyi minimal yüzey olduğundan Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H = 0$$

dır. Buradan $A = 0 \in IR_3^3$, $B = 0 \in IR_1^3$ bulunur.

Örnek 4.1.8: (Katenoid)

$$x(r, u) = (r\cos u, r\sin u, a\cosh^{-1}(\frac{r}{a}))$$

yaması ile verilen katenoid yüzeyi kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Katenoid yüzeyi minimal yüzey olduğundan Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H = 0$$

dır. Buradan $A = 0 \in IR_3^3$, $B = 0 \in IR_1^3$ bulunur.

Örnek 4.1.9: $S^1(a)$ x IR=M, M$\subset IR^3$ (IR^3 'te Silindir)

$$x(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

yaması ile verilen silindir yüzeyi kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Kısmi türevler yardımıyla

$$x_u = (-a\sin u, a\cos u, 0) \qquad (4.1.3)$$
$$x_v = (0,0,1)$$

elde edilir. "Eş 3.1" ve "Eş 4.1.3" den

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece "Eş 3.3" denklemi yardımıyla

$$\Delta = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta x = (\frac{1}{a}\cos u, \frac{1}{a}\sin u, 0)$$

olup

$$\Delta x = Ax + B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\cos u \\ a\sin u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\cos u \\ \frac{1}{a}\sin u \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$

dır. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda 1-tipindeki (null 2-tipindeki) $S^1(a)xIR$ yüzeyi Sonuç 4.1.6'a göre kısıtlı tiptedir (Kılıç, 1997).

Örnek 4.1.10: $S^2(a)xIR=M,\ M\subset IR^4$

$$x(u, v, w) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u, w)$$

yaması ile verilen yüzey kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Kısmi türevler yardımıyla

$$\begin{aligned} x_u &= (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u, 0,) \\ x_v &= (-a\cos u\sin v, -a\cos u\cos v, 0, 0) \\ x_w &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \qquad (4.1.4)$$

elde edilir. "Eş 3.1" ve "Eş 4.1.4" den

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\cos^2 u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece "Eş 3.3" denklemi yardımıyla

$$\Delta = \frac{1}{a^2}\tan u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{a^2\cos^2 u}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta x = (\frac{2}{a}\cos u\cos v, \frac{2}{a}\cos u\sin v, \frac{2}{a}\sin u, 0)$$

olup

$$\Delta x = Ax + B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a}\cos u\cos v \\ \frac{2}{a}\cos u\sin v \\ \frac{2}{a}\sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda 1-tipindeki (null 2-tipindeki) $S^2(a)xIR$ yüzeyi Sonuç 4.1.6'a göre kısıtlı tiptedir (Kılıç, 1997).

Örnek 4.1.11: $S^3xIR=M,\ M\subset IR^5$

$$x(u, v, w, t) = (\cos u\cos v\cos w, \sin u\cos v\cos w, \sin v\cos w, \sin w, t)$$

biçiminde tanımlanan yüzey kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Kısmi türevler yardımıyla

$$\begin{aligned} x_u &= (-\sin u \cos v \cos w, \cos u \cos v \cos w, 0, 0, 0) \\ x_v &= (-\cos u \sin v \cos w, -\sin u \sin v \cos w, \cos v \cos w, 0, 0) \\ x_w &= (-\cos u \cos v \sin w, -\sin u \cos v \sin w, -\sin v \sin w, \cos w, 0) \\ x_t &= (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \qquad (4.1.5)$$

elde edilir. "Eş 3.1" ve "Eş 4.1.5" den

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \cos^2 v \cos^2 w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos^2 v \cos^2 w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos^2 w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece "Eş 3.3" denklemi yardımıyla

$$\Delta = -\frac{1}{\cos^2 v \cos^2 w}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\sin v}{\cos v \cos^2 w}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{\cos^2 w}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2\sin w}{\cos w}\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta x = (3\cos u \cos v \cos w, 3\sin u \cos v \cos w, 3\sin v \cos w, 3\sin w, 0)$$

olup

$$\Delta x = Ax + B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u \cos v \cos w \\ \sin u \cos v \cos w \\ \sin v \cos w \\ \sin w \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos u \cos v \cos w \\ 3\sin u \cos v \cos w \\ 3\sin v \cos w \\ 3\sin w \\ 0 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda 1-tipindeki S^3xIR yüzeyi Sonuç 4.1.6'a göre kısıtlı tiptedir (Kılıç, 1997).

Teorem 4.1.12: M ve N, sırasıyla, m ve n-boyutlu manifoldlar olmak üzere $x : M \to IE^{m+r}$ ve $y : M \to IE^{n+s}$ izometrik immersiyonları verilsin. M ve N kısıtlı tipte olması için gerek ve yeter şart $z = (x, y) : M \times N \to IE^{m+n+r+s}$ çarpım immersiyonun kısıtlı tipte olmasıdır.

İspat: H_1, H_2, H, sırasıyla, M,N ve $M \times N$ nin ortalama eğrilik vektörü olsun. Δ_1, Δ_2, Δ, sırasıyla, M,N ve $M \times N$ nin Laplas operatörü olsun.

$f_1, f_2, ..., f_m$ teğet vektörler ve $f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_{m+r}$ normal vektörler olmak üzere $\{f_1, f_2, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_{m+r}\}$ M nin bir çatısı olsun.

$g_1, g_2, ..., g_n$ teğet vektörler ve $g_{n+1}, g_{n+2}, ..., g_{n+s}$ normal vektörler olmak üzere $\{g_1, g_2, ..., g_n, g_{n+1}, ..., g_{n+s}\}$ N nin bir çatısı olsun.

$1 \le i \le m$ için $e_i = (f_i, 0, ..., 0)$, $m+1 \le i \le m+n$ için $e_i = (0, ..., 0, g_{i-m})$

$m+n+1 \le i \le m+n+r$ için $e_i = (f_{i-n}, 0, ..., 0)$, $m+n+r+1 \le i \le m+n+r+s$ için $e_i = (0, ..., 0, g_{i-m-r})$ olsun.

$e_1, e_2, ..., e_{m+n}$ teğet vektörler ve $e_{m+n+1}, ..., e_{m+n+r+s}$ normal vektörler olmak üzere $\{e_1, ..., e_{m+n}, e_{m+n+1}, ..., e_{m+n+r+s}\}$ $M \times N$ nin bir çatısı olsun. Teorem 3.1.7 den ve Bertrami formülünden

$$\begin{aligned}
\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 &\Rightarrow \Delta z = \Delta_1 z + \Delta_2 z \\
&\Rightarrow \Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) \\
&\Rightarrow -(m+n)H = (\Delta_1 x, 0) + (0, \Delta_2 y) \\
&\Rightarrow -(m+n)H = (-mH_1, 0) + (0, -nH_2) \\
&\Rightarrow H = \left(\frac{m}{m+n} H_1, \frac{n}{m+n} H_2\right)
\end{aligned}$$

olur.

$\Rightarrow$: M ve N kısıtlı tip olsun. M kısıtlı tip olduğunda $\forall f_i \in \chi(M)\,(1 \le i \le m)$ için $m(A_{H_1} f_i) = (A_1 f_i)^T$ olacak şekilde A_1 matrisi vardır. N kısıtlı tip olduğunda $\forall g_i \in \chi(N)\,(1 \le i \le n)$ için $n(A_{H_2} g_i) = (A_2 g_i)^T$ olacak şekilde A_2 matrisi vardır. $A = A_1 \oplus A_2$ olsun $(\mathbb{R}^{m+n+r+s} \cong \mathbb{R}^{m+r} \oplus \mathbb{R}^{n+s})$.

$$\begin{aligned}
1 \le i \le m \text{ için } (m+n)(A_H e_i) &= (m+n)\left((A_{(\frac{m}{m+n}H_1, \frac{n}{m+n}H_2)}(f_i, 0, ..., 0)\right) \\
&= m\left((A_{H_1} f_i), 0, ..., 0\right) \\
&= \left((A_1 f_i)^T, 0, ..., 0\right) \\
&= (m+n)(A e_i)^T
\end{aligned}$$

olup $M \times N$ çarpım immersiyonu kısıtlı tiptedir.

$\Leftarrow$: $M \times N$ çarpım immersiyonu kısıtlı tipte olsun. Bu durumda

$$(m+n)(A_H e_i) = (m+n)(Ae_i)^T$$

olacak şekilde A matrisi vardır. Bu durumda

$$1 \le i \le m \text{ için } (m+n)(A_H e_i) = (m+n)\left((A_{(\frac{m}{m+n}H_1, \frac{n}{m+n}H_2)}(f_i,0,...,0) \right)$$
$$= m\left((A_{H_1} f_i),0,...,0\right)$$

ve

$$(m+n)(Ae_i)^T = \left((A_1 f_i)^T, 0, ..., 0\right)$$

olduğundan $m(A_{H_1} f_i) = (A_1 f_i)^T$ bulunur. Buradan M kısıtlı tip olur. Benzer şekilde N manifoldunun da kısıtlı tip olduğu gösterilebilir.

Sonuç 4.1.13: $S^{m-1}(r)$ hiperküresinin her minimal altmanifoldu kısıtlı tiptedir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Teorem 4.1.14: M 'nin $S^3(r)$ kümesine daldırılmış bir yüzey ve sabit ortalama eğriliğine sahip olduğunu varsayalım o zaman M 'nin kısıtlı tip olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdakilerden biri olmasıdır:

1) $S^3(r)$ 'nin bir minimal altmanifoldu;

2) $0 < r' \le r$ için $S^2(r')$ kümesidir;

3) $a,b > 0$ ve $a^2 + b^2 = r^2$ için $S^1(a) \times S^1(b)$ biçiminde iki çemberin çarpımıdır (Decruyeneaere, Dillen, Verstraelen, 1988).

4.1.1 Rotasyonel Yüzeyler

$\gamma = \gamma(v) : I \to IE^4$ bir W-eğrisi olsun. O zaman γ eğrisi "Eş 3.21" ile aşağıdaki gibi parametrelendirilebilir

$$\gamma(v) = (a\cos cv, a\sin cv, b\cos dv, b\sin dv),\ 0 \le v \le 2\pi\ . \qquad (4.1.1.1)$$

Burada a, b, c, d sabit (c > 0, d > 0). Genelliği bozmadan $a^2c^2 + b^2d^2 = 1$ yani γ nın yay uzunluğu ile parametrelendirildiğini varsayalım. Ayrıca (3.20) eşitliğini kullanarak γ nın Frenet eğrilikleri;

$$\kappa_1 = \sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}\ ,\ \kappa_2 = \frac{abcd\left(c^2 - d^2\right)}{\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}}\ ,\ \kappa_3 = \frac{cd}{\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}} \qquad (4.1.1.2)$$

ile ifade edilir.

$c \neq d$ durumunda γ eğrisi IE^4 'tedir. c = d durumunda γ eğrisi bir çemberdir (Ganchev, Milousheva, arXiv: 0806.3334v1).

Burada γ nın IE^4 'te bir W- eğrisi olduğu $c \neq d$ genel durumunu dikkate alalım.

Ayrıca γ nın V_1, V_2, V_3, V_4 Frenet çatı alanı;

$$\left.\begin{aligned} V_1(v) &= (-ac\sin cv,\ ac\cos cv,\ -bd\sin dv,\ bd\cos dv)\\ V_2(v) &= \frac{1}{\kappa_1}(-ac^2\cos cv,\ -ac^2\sin cv,\ -bd^2\cos dv,\ -bd^2\sin dv)\\ V_3(v) &= (bcd\cos cv,\ bcd\sin cv,\ -acd\cos dv,\ -acd\sin dv)\\ V_4(v) &= \frac{1}{\kappa_1}(bc^2\cos cv,\ bc^2\sin cv,\ -ad^2\cos dv,\ -ad^2\sin dv) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.1.3)$$

olur.

(Ganchev, Milousheva, arXiv: 0806.3334v1) da G. Ganchev ve V. Milousheva, γ eğrisi ile üretilen aşağıdaki M yüzey yamasını göz önüne almıştır,

$$X(u,v) = \gamma(v) + A(u)V_2(v) + B(u)V_4(v) \ , \ u \in J \ , \ 0 \le v \le 2\pi \ . \qquad (4.1.1.4)$$

Burada A = A(u) ve B = B(u) $J \subset IR$ de tanımlanmış aşağıdaki koşulları sağlayan düzgün fonksiyonlardır:

$$A'(u)^2 + B'(u)^2 > 0 \ ,$$
$$(\kappa_1 A(u) - 1)^2 + (\kappa_2 A(u) + \kappa_3 B(u))^2 > 0 \ , \ u \in J.$$

Bu yüzey γ 'nın $\{V_2(v), V_4(v)\}$ tarafından gerilen düzleminde yatan düzlem eğrilerinin bir parametreli ailesidir. Ayrıca

$$f(u) = a + \frac{1}{\kappa_1}\left(-ac^2 A(u) + bd^2 B(u)\right) ,$$
$$g(u) = b + \frac{1}{\kappa_1}\left(-bd^2 A(u) - ac^2 B(u)\right)$$

olmak üzere (4.1.1.4) eşitliğindeki yüzey yaması

$$X(u,v) = (f(u)\cos cv, f(u)\sin cv, g(u)\cos dv, g(u)\sin dv) \qquad (4.1.1.5)$$

olur. Burada $u \in J$, $0 \le v \le 2\pi$, f(u) ve g(v)

$$c^2 f^2 + d^2 g^2 > 0 \quad \text{ve} \quad (f')^2 + (g')^2 > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardır (Bayram, Bulca, Arslan, Öztürk, 2012).

Teorem 4.1.1.1: IE^4 'te "Eş 4.1.1.5" parametrizasyonu ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin kısıtlı tip olması için gerek ve yeter şart

$$A=\begin{bmatrix} \frac{-g'(B(u)+D(u))}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-g'(B(u)+D(u))}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'(B(u)+D(u))}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f'(B(u)+D(u))}{g} \end{bmatrix} \tag{4.1.1.6}$$

ve sabit A matrisi için rotasyon yüzeyi minimal yada c_1 sabit olmak üzere $gg'(u)=c_1ff'(u)$ dir. Burada

$$B(u)=\frac{d^2f'g-c^2fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}((cf)^2+(dg)^2)}$$

$$D(u)=\frac{g'f''-f'g''}{((f')^2+(g')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dır.

İspat: Kısmi türev yardımıyla

$$x_u=(f'\cos cv, f'\sin cv, g'\cos dv, g'\sin dv),\ \|x_u\|=\sqrt{(f')^2+(g')^2}$$

$$x_v=(-cf\sin cv, cf\cos cv, -dg\sin dv, dg\cos dv),\quad \|x_v\|=\sqrt{(cf)^2+(dg)^2}$$

teğet vektörleri ve

$$n_1=(g'\cos cv, g'\sin cv, -f'\cos dv, -f'\sin dv)\ ,\qquad \|n_1\|=\sqrt{(f')^2+(g')^2}$$

$$n_2=(-dg\sin cv, dg\cos cv, cf\sin dv, -cf\cos dv)\ ,\ \|n_2\|=\sqrt{(cf)^2+(dg)^2}$$

normal vektörleri elde edilir. Buradan

$$e_1 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(cf)^2 + (dg)^2}}(-cf\sin cv, cf\cos cv, -dg\sin dv, dg\cos dv) \ ,$$

$$e_2 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(f'\cos cv, f'\sin cv, g'\cos dv, g'\sin dv) \ ,$$

$$e_3 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(g'\cos cv, g'\sin cv, -f'\cos dv, -f'\sin dv) \ ,$$

$$e_4 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \frac{1}{\sqrt{(cf)^2 + (dg)^2}}(-dg\sin cv, dg\cos cv, cf\sin dv, -cf\cos dv) \ ,$$

ortonormal çatısı elde edilir. Buradan e_1, e_2, e_3, e_4'ün kovaryant türevleri alınarak

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -A(u)e_2 + B(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = D(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = A(u)e_1 + E(u)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -B(u)e_1 + F(u)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = -E(u)e_2 - F(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = E(u)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -D(u)e_2$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = -E(u)e_1$$

olup "Eş 2.1" denkleminden

$$h(e_1, e_1) = B(u)e_3$$

$$h(e_2, e_2) = D(u)e_3$$

elde edilir. Burada

$$A(u) = \frac{c^2 ff' + d^2 gg'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}((cf)^2 + (dg)^2)}$$

$$B(u) = \frac{d^2 f'g - c^2 fg'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}((cf)^2 + (dg)^2)}$$

$$D(u) = \frac{g'f'' - f'g''}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4.1.1.7)$$

$$E(u) = \frac{cd(f'g - fg')}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}((cf)^2 + (dg)^2)}$$

$$F(u) = \frac{cd(ff' + gg')}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}((cf)^2 + (dg)^2)}$$

$$G(u) = \frac{f'g'(fg' - f'g)}{fg((f')^2 + (g')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dir.

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

olduğundan

$$H = \frac{1}{2}\big(B(u) + D(u)\big)e_3 \qquad (4.1.1.8)$$

olur (Bayram, Bulca, Arslan, Öztürk, 2012).

$$\tilde{\nabla}_{e_1} H = -\frac{1}{2}B(B + D)e_1 + \frac{1}{2}F(B + D)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} H = -\frac{1}{2} D(B+D)e_2 + \frac{1}{2} e_2(B+D)e_3$$

olup "Eş 2.2" denkleminden

$$\left.\begin{aligned} -A_H e_1 &= -\frac{1}{2} B(u)(B(u)+D(u))e_1 \\ -A_H e_2 &= -\frac{1}{2} D(u)(B(u)+D(u))e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.1.9)$$

elde edilir.

$\Rightarrow$: Rotasyon yüzeyi kısıtlı tip olsun. Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H \qquad (4.1.1.10)$$

dir. Buradan "Eş 4.1.1.8" yardımıyla

$$\Delta x = -\big(B(u)+D(u)\big)\, e_3 \qquad (4.1.1.11)$$

olur. Ayrıca

$$\Delta x = Ax + B$$

ve "Eş 4.1.1.7" den

$$A=\begin{bmatrix} \frac{-g'(B(u)+D(u))}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-g'(B(u)+D(u))}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'(B(u)+D(u))}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f'(B(u)+D(u))}{g} \end{bmatrix}$$

olur. Yüzey kısıtlı tip olduğundan A matrisi sabit olmalı. $B(u)+D(u)=0$ ise "Eş 4.1.1.10" ve "Eş 4.1.1.11" den rotasyon yüzeyi minimaldir. Yada

$$(Ae_1)^T = B(u)(B(u)+D(u))e_1$$
$$(Ae_2)^T = D(u)(B(u)+D(u))e_2$$

olur. Yukarıdaki eşitlik Tanım 4.1.1 ve "Eş 4.1.1.9" kullanılarak $D=G$ olmalıdır. Böylece "Eş 4.1.1.7" den istenilen sonuç elde edilir.

$\Leftarrow$: İspat aşikardır.

Örnek 4.1.1.2: IR^4 'te

$$X(u,v)=(r(u)\cos u\cos v, r(u)\cos u\sin v, r(u)\sin u\cos v, r(u)\sin u\sin v)$$

parametrizasyonu ile verilen Vranceanu yüzeyinin kısıtlı tip olması için gerek ve yeter koşul

$$r(u)=\pm\frac{1}{\sqrt{a\sin 2u - b\cos 2u}}$$

için minimal (Bayram, Bulca, Arslan, Öztürk, 2012) yada $r(u)=c\neq 0$ için $A=\frac{2}{c^2}I_4$ olmasıdır.

Çözüm: Vranceanu yüzeyi

$$f(u) = r(u)\cos u$$
$$g(u) = r(u)\sin u$$

ile tanımlı olan bir rotasyonel yüzeydir. Böylece bu fonksiyonların türevleri alındığında

$$f'(u) = r'(u)\cos u - r(u)\sin u,\ f''(u) = r''(u)\cos u - 2r'(u)\sin u - r(u)\cos u$$
$$g'(u) = r'(u)\sin u - r(u)\cos u,\ g''(u) = r''(u)\sin u + 2r'(u)\cos u - r(u)\sin u$$

elde edilir. Buradan "Eş 4.1.1.6" kullanılarak

$$A = \begin{bmatrix} K(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L(u) \end{bmatrix} \qquad (4.1.1.12)$$

elde edilir. Burada

$$K(u) = \left(\frac{r'}{r}\tan u - 1\right)\left(\frac{-3(r')^2 - 2r^2 + rr''}{((r')^2 + r^2)^2}\right)$$
$$L(u) = \left(\frac{r'}{r}\cot u - 1\right)\left(\frac{-3(r')^2 - 2r^2 + rr''}{((r')^2 + r^2)^2}\right)$$

dir.

$\Rightarrow$: Vrancenau yüzeyi kısıtlı tip olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1.1 den dolayı sabit A matrisi için Vrancenau yüzeyi minimal ise

$$-3(r')^2 - 2r^2 + rr'' = 0$$

olmalıdır. İkinci dereceden diferansiyel denklemin çözümünden

$$r(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{a\sin 2u - b\cos 2u}}$$

bulunur (Bayram, Bulca, Arslan, Öztürk, 2012). Ayrıca Teorem 4.1.1 den $c_1 = -1$ alınırsa $r(u) = c \neq 0$ sabit bulunur. "Eş 4.1.1.12" den $A = \frac{2}{c^2} I_4$ olur.

$\Leftarrow$: Her iki durum için yüzeyin kısıtlı tip olduğu Sonuç 4.2.3 den elde edilir.

4.1.2 Küresel Çarpım Yüzeyleri

Tanım 4.1.2.1: α, β : IR $\rightarrow$ IE^2 iki düzlemsel eğri olsun. $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ verilsin. O zaman bu iki eğrinin küresel çarpım yaması

$$X(u,v) = \alpha \otimes \beta : IE^2 \rightarrow IE^3; X(u,v) = (f_1(u), f_2(u)g_1(v), f_2(u)g_2(v)) \qquad (4.1.2.1)$$

$u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$

biçiminde tanımlanan bir yüzeydir (Bulca, Arslan, Bayram, Öztürk, Ugail, 2012).

Teorem 4.1.2.2: IE^3 'te "Eş 4.1.2.1" parametrizasyonu ile verilen küresel çarpım yüzeyinde $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u))$ ve $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ çemberi alınarak elde edilen küresel çarpım yamasının kısıtlı tipte olması için gerek ve yeter şart

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{-f_2'(A(u)+C(u))}{f_1\sqrt{(f_1')^2+(f_2')^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{f_1'(A(u)+C(u))}{f_2\sqrt{(f_1')^2+(f_2')^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f_1'(A(u)+C(u))}{f_2\sqrt{(f_1')^2+(f_2')^2}} \end{bmatrix} \qquad (4.1.2.2)$$

ve sabit A matrisi için küresel çarpım yüzeyi minimal ve

$$f_2(f_1''f_2'-f_1'f_2'')+f_1'\left(\left(f_1'\right)^2+\left(f_2'\right)^2\right)=0$$

dır. Yada c_1 sabit olmak üzere $f_1f_1'=c_1f_2f_2'$ olur. Burada

$$A(u)=\frac{f_1''f_2'-f_1'f_2''}{\left((f_1')^2+(f_2')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C(u)=\frac{f_1'}{f_2\sqrt{((f_1')^2+(f_2')^2}}$$

dır.

İspat: Kısmi türevler yardımı ile

$$X_u=(f_1',f_2'\cos v,f_2'\sin v)\ ,\ X_v=(0,-f_2\sin v,f_2\cos v)$$

teğet vektörleri ve

$$n_1=\left(f_2f_2',-f_1'f_2\cos v,-f_1'f_2\sin v\right)$$

normal vektörü elde edilir. Buradan

$$e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} = \frac{1}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}}(f_1', f_2' \cos v, f_2' \sin v)$$

$$e_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|} = (0, -\sin v, \cos v)$$

$$e_3 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}}\left(f_2', -f_1' \cos v, -f_1' \sin v\right)$$

ortonormal çatısı elde edilir. e_1, e_2, e_3 'ün kovaryant türevleri alınırsa

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = A(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -B(u)e_1 + C(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = B(u)e_2$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -A(u)e_1$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -C(u)e_2$$

olup "Eş 2.1" denkleminden

$$h(e_1, e_1) = A(u)e_3$$

$$h(e_2, e_2) = C(u)e_3$$

elde edilir. Burada

$$A(u) = \frac{f_1'' f_2' - f_1' f_2''}{\left((f_1')^2 + (f_2')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B(u)=\frac{f_2^{'}}{f_2\sqrt{(f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2}} \qquad (4.1.2.3)$$

$$C(u)=\frac{f_1^{'}}{f_2\sqrt{((f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2}}$$

$$D(u)=\frac{f_1^{'}f_2^{'}(f_1f_2^{'}-f_1^{'}f_2)}{f_1f_2\left((f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dır.

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i)$$

olduğundan

$$H=\frac{1}{2}\big(A(u)+C(u)\big)e_3 \qquad (4.1.2.4)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{e_1}H=-\frac{1}{2}A(A+C)e_1+\frac{1}{2}e_1(A+C)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2}H=-\frac{1}{2}C(A+C)e_1$$

olup "Eş 2.2" denkleminden

$$\left.\begin{aligned}-A_He_1&=-\frac{1}{2}A(u)(A(u)+C(u))e_1\\-A_He_2&=-\frac{1}{2}C(u)(A(u)+C(u))e_2\end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2.5)$$

elde edilir.

$\Rightarrow$:Küresel çarpım yüzeyi kısıtlı tip olsun. Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H \tag{4.1.2.6}$$

dir. Buradan "Eş 4.1.2.4" yardımıyla

$$\Delta x = -\left(A(u)+C(u)\right)\, e_3 \tag{4.1.2.7}$$

olur. Ayrıca

$$\Delta x = Ax + B$$

ve "Eş 4.1.2.3" den

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-f_2^{'}(A(u)+C(u))}{f_1\sqrt{(f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{f_1^{'}(A(u)+C(u))}{f_2\sqrt{(f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f_1^{'}(A(u)+C(u))}{f_2\sqrt{(f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2}} \end{bmatrix}$$

olur. Yüzey kısıtlı tip olduğundan A matrisi sabit olmalı. $A(u)+C(u)=0$ ise "Eş 4.1.2.6" ve "Eş 4.1.2.7" den küresel çarpım yüzeyi minimal ve

$$f_2(f_1^{''}f_2^{'}-f_1^{'}f_2^{''})+f_1^{'}\left(\left(f_1^{'}\right)^2+\left(f_2^{'}\right)^2\right)=0$$

dir. Yada

$$(Ae_1)^T = D(u)(A(u)+C(u))e_1$$
$$(Ae_2)^T = A(u)(A(u)+C(u))e_2$$

olur. Yukarıdaki eşitlik, Tanım 4.1.1 ve "Eş 4.1.2.5" kullanılarak $A = D$ olmalıdır. Böylece "Eş 4.1.2.3" den istenilen sonuç elde edilir.

$\Leftarrow$: İspat aşikardır.

Sonuç 4.1.2.3: Küresel çarpım yüzeyinde $\alpha(u)$ eğrisi birim hızlı olsun. Bu takdirde yüzeyin minimal ve kısıtlı tipte olması için

$$f_1(u) = \pm\sqrt{-e^{2c_1}}\,\mathrm{In}(\sqrt{(c_2+u)^2 - e^{2c_1}} + c_2 + u) + c_3$$
$$f_2(u) = \pm\sqrt{(c_2+u)^2 - e^{2c_1}}$$

olur.

İspat: α eğrisi birim hızlı olsun. Bu durumda küresel çarpım yüzeyi kısıtlı tip ise "Eş 4.1.2.2" den

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-(f_1' f_2)'}{f_1 f_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-f_2 f_2'' + (f_1')^2}{(f_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-f_2 f_2'' + (f_1')^2}{(f_2)^2} \end{bmatrix} \qquad (4.1.2.8)$$

olur. Yüzey minimal olduğundan $H = 0$ ve $\Delta x = Ax + B = 0$ olacağından $A = 0 \in IR_3^3$ olur. Böylece

$$\left.\begin{aligned}(f_1' f_2)' &= 0\\ (f_1')^2 - f_2 f_2'' &= 0\\ (f_1')^2 + (f_2')^2 &= 1\end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2.9)$$

diferansiyel denklem sistemi sağlanır. "Eş 4.1.2.9" denklemlerinden

$$f_1(u) = \pm\sqrt{-e^{2c_1}}\,\mathrm{In}(\sqrt{(c_2+u)^2 - e^{2c_1}} + c_2 + u) + c_3$$

$$f_2(u) = \pm\sqrt{(c_2+u)^2 - e^{2c_1}}$$

olur.

Örnek 4.1.2.4: Küresel çarpım yüzeyinde $\alpha(u) = (a\cos u, a\sin u)$ biçiminde bir çember alındığında elde edilen yüzey kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Küresel çarpım yaması

$$X(u,v) = (a\cos u, a\sin u\cos v, a\sin u\sin v)$$

olur. Burada

$$f_1(u) = a\cos u\,,\ f_2(u) = a\sin u$$

$$g_1(v) = \cos v\,,\ g_2(v) = \sin v$$

dir. Yüksek mertebeden türevler ve Teorem 4.1.2.2 yardımıyla istenen sonuç elde edilir.

Tanım 4.1.2.5: α: IR $\rightarrow$ IE^3 bir uzay eğrisi ve β: IR $\rightarrow$ IE^2 düzlem eğrisi olsun. $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ küresel çarpım yaması

$$X : \alpha \otimes \beta : E^2 \rightarrow IE^4;\ X(u,v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)g_1(v), f_3(u)g_2(v)) \qquad (4.1.2.10)$$

$u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$, biçiminde tanımlanan bir yüzeydir.

G. Ganchev ve Milousheva $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ uzay eğrisi ile $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ çemberinin küresel çarpımını alarak

$$X(u,v) = \alpha(u) \times \beta(v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)\cos v, f_3(u)\sin v) \qquad (4.1.2.11)$$

$u \in IR$, $0 \le v < 2\pi$

yüzeyini göz önüne almıştır. Burada α(u) yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş yani $(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 = 1$ ve $f_3 > 0$ dır (Ganchev, Milousheva, 2008).

Teorem 4.1.2.6: IE^4 'te "Eş 4.1.2.11" parametrizasyonu ile verilen küresel çarpım yüzeyinin kısıtlı tip olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin

$$\alpha(u) = \frac{-1}{f_1 f_3(u)\kappa^2(u)}\left(f_1''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) + (f_1''f_2'(u) - f_1'f_2''(u))(f_2'f_3''(u) - f_2''f_3'(u))\right)$$

$$\beta(u) = \frac{-1}{f_2 f_3(u)\kappa^2(u)}\left(f_2''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) + (f_1''f_2'(u) - f_1'f_2''(u))(f_1''f_3'(u) - f_1'f_3''(u))\right)$$

$$\gamma(u) = \mu(u) = \frac{-1}{(f_3(u))^2\kappa^2(u)}\left(f_3''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) - (f_1''f_2'(u) - f_1'f_2''(u))^2\right)$$

olmak üzere A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(u) \end{bmatrix} \qquad (4.1.2.12)$$

olmasıdır.

İspat: Kısmi türevler yardımıyla

$$X_u = \left(f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u)\cos v, f_3'(u)\sin v\right),$$
$$X_v = \left(0, 0, -f_3(u)\sin v, f_3(u)\cos v\right)$$

teğet vektörleri ve

$$n_1 = \left(f_1''(u), f_2''(u), f_3''(u)\cos v, f_3''(u)\sin v\right),$$
$$n_2 = \left(f_2'f_3''(u) - f_2''f_3'(u), f_1''f_3'(u) - f_1'f_3''(u), \left(f_1'f_2''(u) - f_1''f_2'(u)\right)\cos v, \left(f_1'f_2''(u) - f_1''f_2'(u)\right)\sin v\right)$$

normal vektörleri elde edilir.

$$e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} = \left(f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u)\cos v, f_3'(u)\sin v\right),$$

$$e_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|} = \left(0, 0, -\sin v, \cos v\right),$$

$$e_3 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{1}{\kappa}\left(f_1''(u), f_2''(u), f_3''(u)\cos v, f_3''(u)\sin v\right),$$

$$e_4 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \frac{1}{\kappa}\left(f_2'f_3''(u) - f_2''f_3'(u), f_1''f_3'(u) - f_1'f_3''(u), (f_1'f_2''(u) - f_1''f_2'(u))\cos v, (f_1'f_2''(u) - f_1''f_2'(u))\sin v\right)$$

ortonormal matrisi elde edilir. Buradan e_1, e_2, e_3, e_4 ün kovaryant türevleri

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = A(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -B(u)e_1 - C(u)e_3 + D(u)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -A(u)e_1 + E(u)e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = F(u)e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = B(u)e_2$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = C(u)e_2$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = -D(u)e_2$$

olup "Eş 2.1" denkleminden

$$h(e_1, e_1) = A(u)e_3$$

$$h(e_2, e_2) = -C(u)e_3 + D(u)e_4$$

elde edilir. Burada

$$A(u) = \kappa(u)$$

$$B(u) = \frac{f_3'(u)}{f_3(u)}$$

$$C(u) = \frac{f_3''(u)}{f_3(u)\kappa(u)} \qquad (4.1.2.13)$$

$$D(u) = \frac{f_1''f_2'(u) - f_1'f_2''(u)}{f_3(u)\kappa(u)}$$

$$E(u) = \frac{f_1'''f_3''(u) - f_1''f_3'''(u) + (f_1'f_3''(u) - f_1'''f_3'(u))\kappa^2(u)}{f_2'(u)\kappa^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{(f_2'f_3'''(u) - f_2'''f_3'(u))\kappa(u) + (f_2'f_3''(u) - f_2''f_3'(u))\kappa'(u)}{f_1''(u)\kappa(u)}$$

dır.

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

olduğundan

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(A(u) - C(u)\right)e_3 + D(u)e_4\right] \qquad (4.1.2.14)$$

elde edilir (Bulca, Arslan, Bayram, Öztürk, Ugail, 2012). Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H \qquad (4.1.2.15)$$

dir. Buradan "Eş 4.1.2.14" yardımıyla

$$\Delta x = -\left(A(u) - C(u)\right)e_3 - D(u)e_4 \qquad (4.1.2.16)$$

olur. Ayrıca

$$\Delta x = Ax + B$$

ve "Eş 4.1.2.13" den

$$\alpha(u) = \frac{-1}{f_1 f_3(u)\kappa^2(u)}\left(f_1''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) + (f_1'' f_2'(u) - f_1' f_2''(u))(f_2' f_3''(u) - f_2'' f_3'(u))\right)$$

$$\beta(u) = \frac{-1}{f_2 f_3(u)\kappa^2(u)}\left(f_2''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) + (f_1'' f_2'(u) - f_1' f_2''(u))(f_1'' f_3'(u) - f_1' f_3''(u))\right)$$

$$\gamma(u) = \mu(u) = \frac{-1}{(f_3(u))^2\kappa^2(u)}\left(f_3''(u)(f_3(u)\kappa^2(u) - f_3''(u)) - (f_1'' f_2'(u) - f_1' f_2''(u)^2\right)$$

olmak üzere "Eş 4.1.2.12" elde edilir.

Sonuç 4.1.2.7: Küresel çarpım yüzeyi $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), \sin u)$ ve $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ eğrileri ile verilsin. Bu durumda elde edilen küresel çarpım

yüzeyi $f_1(u) = -\frac{\cos u}{\sqrt{1+c^2}}$, $f_2(u) = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\cos u$ olmak üzere kısıtlı tiptedir. Burada c sıfır olmayan sabittir.

İspat:

$$X(u,v) = (f_1(u),\ f_2(u),\ \sin u\cos v,\ \sin u\sin v) \qquad (4.1.2.17)$$

yüzeyi için Teorem 4.1.2.6 dan A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuç 4.1.3 den yüzey kısıtlı tiptedir.

4.1.3 Tensör Çarpım Yüzeyleri

c_1: IR $\rightarrow$ IE^2 ve c_2: IR $\rightarrow$ IE^2 iki düzlemsel eğri olsun. $c_1(t) = (\gamma(t), \delta(t))$ ve $c_2(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ verilsin. O zaman bu iki eğrinin tensör çarpım yüzeyi

$$f = c_1 \otimes c_2 : IR^2 \rightarrow IE^4$$
$$f(t,s) = (\alpha(s)\gamma(t), \beta(s)\gamma(t), \alpha(s)\delta(t), \beta(s)\delta(t))$$

(4.1.3.1)

biçiminde tanımlanır. c_1 eğrisini orjin merkezli bir birim çember ve c_2 eğrisini birim hızlı bir eğri alırsak o zaman yüzey yaması

$$M : f(t,s) = (\alpha(s)\cos t, \beta(s)\cos t, \alpha(s)\sin t, \beta(s)\sin t) \qquad (4.1.3.2)$$

olur (Arslan, Bulca, Kılıç, Kim, Murathan, Öztürk, 2011).

Teorem 4.1.3.1: IE^4 'te "Eş 4.1.3.2" parametrizasyonu ile verilen tensör çarpım yüzeyinin kısıtlı tip olması için gerek ve yeter koşul

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\beta'(B(s)+C(s))}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha'(B(s)+C(s))}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta'(B(s)+C(s))}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha'(B(s)+C(s))}{\beta} \end{bmatrix} \tag{4.1.3.3}$$

ve sabit A matrisi için tensör çarpım yüzeyi minimal yada c_1 sabit olmak üzere $\alpha\alpha'(s)=c_1\beta\beta'(s)$ dir. Burada

$$B(s)=\frac{\alpha(s)\beta'(s)-\beta(s)\alpha'(s)}{\|c_2(s)\|^2}$$

$$C(s)=\alpha'(s)\beta''(s)-\beta'(s)\alpha''(s)$$

dir.

İspat: Kısmi türevler yardımıyla

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(-\alpha(s)\sin t,\ -\beta(s)\sin t,\ \alpha(s)\cos t,\ \beta(s)\cos t\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\left(\alpha'(s)\cos t,\beta'(s)\cos t,\alpha'(s)\sin t,\beta'(s)\sin t\right)$$

teğet vektörleri ve

$$n_1 = \left(-\beta'(s)\cos t, \alpha'(s)\cos t, -\beta'(s)\sin t, \alpha'(s)\sin t\right)$$
$$n_2 = \left(-\beta(s)\sin t, \alpha(s)\sin t, \beta(s)\cos t, -\alpha(s)\cos t\right)$$

normal vektörleri elde edilir. Buradan

$$e_1 = \frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial f}{\partial t},\ e_2 = \frac{\partial f}{\partial s}$$
$$e_3 = \left(-\beta'(s)\cos t, \alpha'(s)\cos t, -\beta'(s)\sin t, \alpha'(s)\sin t\right)$$
$$e_4 = \frac{1}{\|c_2\|}\left(-\beta(s)\sin t, \alpha(s)\sin t, \beta(s)\cos t, -\alpha(s)\cos t\right)$$

ortonormal çatısı elde edilir. Buradan e_1, e_2, e_3 ve e_4 ün kovaryant türevleri

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -A(s)e_2 + B(s)e_3$$
$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = C(s)e_3$$
$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = A(s)e_1 - B(s)e_4$$
$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -B(s)e_1 - A(s)e_4$$
$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = B(s)e_2 + A(s)e_3$$
$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = -B(s)e_4$$
$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -C(s)e_2$$
$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = -B(s)e_1$$

olup "Eş 2.1" denkleminden

$$h(e_1, e_1) = B(s)e_3$$

$$h(e_2, e_2) = C(s)e_3$$

elde edilir. Burada

$$A(s) = \frac{\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s)}{\|c_2(s)\|^2}$$

$$B(s) = \frac{\alpha(s)\beta'(s) - \beta(s)\alpha'(s)}{\|c_2(s)\|^2} \qquad (4.1.3.4)$$

$$C(s) = \alpha'(s)\beta''(s) - \beta'(s)\alpha''(s)$$

$$D(s) = \frac{\alpha'(s)\beta'(s)(\alpha'(s)\beta(s) - \alpha(s)\beta'(s))}{\alpha\beta}$$

dir. Böylece

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

olduğundan

$$H = \frac{1}{2}\big(B(s) + C(s)\big)e_3 \quad (4.1.3.5)$$

elde edilir (Arslan, Bulca, Kılıç, Kim, Murathan, Öztürk, 2011). Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_{e_1} H = -\frac{1}{2}\big(B(B+C)e_1 - A(B+C)e_4\big)$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} H = \frac{1}{2}\big(-C(B+C)e_2 + e_2(B+C)e_3\big)$$

olup "Eş 2.2" denkleminden

$$\left.\begin{aligned} -A_H e_1 &= -\frac{1}{2}B(B+C)e_1 \\ -A_H e_2 &= -\frac{1}{2}C(B+C)e_2 \end{aligned}\right\}$$

(4.1.3.6)

elde edilir.

$\Rightarrow$: Tensör çarpım yüzeyi kısıtlı tip olsun. Bertrami formülünden

$$\Delta x = -2H \tag{4.1.3.7}$$

dir. Buradan "Eş 4.1.3.5" yardımıyla

$$\Delta x = -\big(B(s)+C(s)\big)\ e_3 \tag{4.1.3.8}$$

olur. Ayrıca

$$\Delta x = Ax + B$$

ve "Eş 4.1.3.4" den

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta'(B(s)+C(s))}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\alpha'(B(s)+C(s))}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\beta'(B(s)+C(s))}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-\alpha'(B(s)+C(s))}{\beta} \end{bmatrix}$$

olur. Yüzey kısıtlı tip olduğundan A matrisi sabit olmalı. $B(s)+C(s)=0$ ise "Eş 4.1.3.8" ve "Eş 4.1.3.7" den tensör çarpım yüzeyi minimaldir yada

$$(Ae_1)^T = B(s)(B(s)+C(s))e_1$$
$$(Ae_2)^T = D(s)(B(s)+C(s))e_2$$

olur. Yukarıdaki eşitlik, Tanım 4.1.1 ve "Eş 4.1.3.6" kullanılarak $C(s) = D(s)$ olmalıdır. Böylece "Eş 4.1.3.4" den istenilen sonuç elde edilir.
$\Leftarrow$: İspat aşikardır.

Örnek 4.1.3.2: ($S^3(1)$ 'in minimal yüzeyi) IR^4 'te

$$f(t,s) = (\cos s \cos t, \sin s \cos t, \cos s \sin t, \sin s \sin t)$$

biçiminde tanımlanan $S^3(1)$ 'in minimal yüzeyi bir tensör çarpım yüzeyi olup Teorem 4.1.3.1 den kısıtlı tiptedir.

4.1.4 Chen Yüzeyi

Bu bölümde kısıtlı tip B. Y. Chen yüzeyleri ele alınacaktır.

M, m-boyutlu N Riemann manifoldunun n-boyutlu altmanifoldu ve $e_{n+1},\ldots,e_m$ M ye normal olan ortonormal bir çatı olsun. Ayrıca e_{n+1}, H ortalama eğrilik vektörüne paralel olmak üzere,

$$a(H) = \frac{|H|}{n} \sum_{r=n+2}^{m} iz(A_H A_r) e_r \qquad (4.1.4.1)$$

şeklinde tanımlanan a(H) normal vektör alanına ***müttefik ortalama eğrilik vektörü*** denir. a(H) nın H' ya dik olduğu açıkça görülür (Chen, 1973).

Tanım 4.1.4.1: Eğer a(H) = 0 ise M altmanifoldu ***Chen-altmanifoldu*** olarak adlandırılır (Chen, 1973).

Teorem 4.1.4.2: $M \subset IE^{n+1}$ küresel altmanifoldunun bir Chen-altmanifoldu olması için gerek ve yeter şart $M \subset S^n$ nin yarı-umbilik altmanifoldu olmasıdır (Houh, (1974).

Tanım 4.1.4.3: $M \subseteq IE^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Her bir $p \in M$ ve her bir $X \in T_p(M)$ birim teğet vektörü için h(X, X) in uzunluğu ||h(X, X)||, X ' den bağımsız ve sadece p' ye bağımlı ise diğer bir deyişle M' nin p' den geçen her bir geodeziği IE^{n+d} de bir eğri olarak göz önüne alındığında $p \in M$' de aynı κ_1 sabit eğriliğine sahipse M' ye ***izotropiktir*** denir. Diğer denk bir ifade ile $X, Y \in T_p(M)$ ve

$< X, Y >= 0$ için

$< h(X,X), h(X,Y) >= 0$

ise M' ye ***izotropiktir*** denir. Eğer $\|h(X,X)\|$ değeri $X \in T_pM$ ve $p \in M$'den bağımsız ise bu taktirde M' ye ***sabit izotropiktir*** denir .

Teorem 4.1.4.4: $M \subset IE^{2+d}$ yüzeyi izotropik ise M yarı-umbiliktir. Yani ortalama eğrilik vektörü yönündeki A_H Weingarten dönüşümü özdeşlik dönüşümü ile orantılıdır (Chen, Verheyen, 1984).

Teorem 4.1.4.5: Chen-altmanifoldları sınıfı tüm minimal, yarı-umbilik altmanifoldları, ***birinci normal uzayının*** boyutu $boy N_p^1(M) \leq 1$ olacak şekildeki tüm altmanifoldları ve dolayısıyla tüm hiperyüzeyleri kapsar (Gheysens, Verheyen, Verstraelen, 1983).

Örnek 4.1.4.6: $T_{ab}^2 \subset IE^4$ (Tor),

$$x(u,v) = (a\cos\frac{u}{a}, a\sin\frac{u}{a}, b\cos\frac{v}{b}, b\sin\frac{v}{b})$$

parametrik gösterimi ile verilen tor yüzeyi izotropik olup bir Chen yüzeyidir. Bu yüzey aynı zamanda kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Kısmi türevler yardımıyla

$$x_u = (-\sin\frac{u}{a}, \cos\frac{u}{a}, 0, 0) \ , \quad x_v = (0,0,-\sin\frac{v}{b}, \cos\frac{v}{b},)$$

teğet vektörleri ve

$$n_1 = (\cos\frac{u}{a}, \sin\frac{u}{a}, 0, 0) \ , \quad n_2 = (0, 0, \cos\frac{v}{b}, \sin\frac{v}{b})$$

normal vektörleri elde edilir. Buradan

$$e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = x_u \ , \ e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = x_v \ , \ e_3 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = n_1 \ , \ e_4 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = n_2$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece e_1, e_2, e_3 ve e_4 ün kovaryant türevleri alınarak

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = (-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}, 0, 0) = -\frac{1}{a}e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = (0, 0, -\frac{1}{b}\cos\frac{v}{b}, -\frac{1}{b}\sin\frac{v}{b}) = -\frac{1}{b}e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = (-\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}, -\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}, 0, 0) = \frac{1}{a}e_1$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = (0, 0, -\frac{1}{b}\sin\frac{v}{b}, \frac{1}{b}\cos\frac{v}{b}) = \frac{1}{b}e_2$$

olup "Eş 2.1" ve "Eş 2.2" denklemlerinden

$$h(e_1,e_1)=-\frac{1}{a}e_3\ ,\ h(e_1,e_2)=h(e_2,e_1)=0\ ,\ h(e_2,e_2)=-\frac{1}{b}e_4$$

elde edilir. Böylece $\langle h(e_1,e_1),h(e_1,e_2)\rangle=0$ olduğundan Tor yüzeyi izotropiktir. Bununla beraber Teorem 4.1.4.4 den dolayı her izotropik yüzey yarı umbilik olduğundan tor yüzeyi yarı-umbilik bir yüzeydir. Ayrıca Teorem 4.1.4.5 den dolayı yarı-umbilik her yüzey bir Chen yüzeyi olduğundan $S^1(a)xS^1(b)\subset IE^4$ bir Chen yüzeyi olur. Böylece

$$H=\frac{1}{2}\left(h(e_1,e_1)+h(e_2,e_2)\right)$$

olup Bertrami formülünden

$$\begin{aligned}\Delta x&=-2H\\&=-\left(h(e_1,e_1)+h(e_2,e_2)\right)=\frac{1}{a}e_3+\frac{1}{b}e_4\\&=(\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a},\ \frac{1}{a}\sin\frac{u}{a},\ \frac{1}{b}\cos\frac{v}{b},\ \frac{1}{b}\sin\frac{v}{b})\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\Delta x=Ax+B=\begin{bmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\beta&0&0\\0&0&\gamma&0\\0&0&0&\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\cos\frac{u}{a}\\a\sin\frac{u}{a}\\b\cos\frac{v}{b}\\b\sin\frac{v}{b}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\\b_{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}\\\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}\\\frac{1}{b}\cos\frac{v}{b}\\\frac{1}{b}\sin\frac{v}{b}\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.3 gereğince Tor yüzeyi kısıtlı tiptedir.

Örnek 4.1.4.7: $H^2 \subset IE^4$ (Helissel Silindir),

$$x(u, v) = (u, c\cos v, c\sin v, dv)$$

parametrik gösterimi ile verilen helissel silindir yüzeyi bir Chen yüzeyidir. Ayrıca bu yüzey kısıtlı tiptedir.

Çözüm: Kısmi türevler yardımıyla

$$x_u = (1, 0, 0, 0),\ \|x_u\| = 1$$

$$x_v = (0, -c\sin v, c\cos v, d),\ \|x_v\| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

teğet vektörleri ve

$$n_1 = (0, \cos v, \sin v, 0),\ \|n_1\| = 1$$

$$n_2 = (0, \frac{d}{c}\sin v, -\frac{d}{c}\cos v, 1),\ \|n_2\| = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{c}$$

normal vektörleri elde edilir. Buradan

$$e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = x_u\,,\ e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(0, -c\sin v, c\cos v, d)$$

$$e_3 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = n_1\,,\ e_4 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}(0, \frac{d}{c}\sin v, -\frac{d}{c}\cos v, 1)$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece e_3 ve e_4 ün kovaryant türevleri alınarak

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -\frac{c}{c^2+d^2}(0,\ \cos v,\ \sin v,\ 0) = -\frac{c}{c^2+d^2} e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = \tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(0, -\sin v, \cos v, 0) = \frac{c}{c^2+d^2} e_2 - \frac{c^2 d}{(c^2+d^2)^2} e_4$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(0, \frac{d}{c}\cos v, \frac{d}{c}\sin v, 0) = \frac{d}{c\sqrt{c^2+d^2}} e_3$$

olup "Eş 2.1" ve "Eş 2.2" denklemlerinden

$$h(e_1, e_1) = h(e_1, e_2) = h(e_2, e_1) = 0\ ,\ h(e_2, e_2) = -\frac{c}{c^2+d^2} e_3$$

$$A_{e_3} e_1 = A_{e_4} e_1 = A_{e_4} e_2 = 0\,,\ -A_{e_3} e_2 = \frac{c}{c^2+d^2} e_2$$

bulunur. Böylece

$$-A_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{c^2+d^2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad -A_{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Ayrıca $A_{e_3}A_{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğu için $\text{iz}(A_{e_3}A_{e_4}) = 0$ dır. Bu durumda "Eş 4.1.4.1" eşitliğinden a(H) = 0 bulunur. Dolayısıyla IE^4 deki helissel silindir bir Chen yüzeyi olur. Böylece

$$H = \frac{1}{2}\big(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2)\big)$$

olup Bertrami formülünden

$$\begin{aligned} \Delta x &= -2H \\ &= -\big(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2)\big) = \frac{c}{c^2 + d^2} e_3 \\ &= \frac{c}{c^2 + d^2}(0,\ \cos v,\ \sin v,\ 0) \end{aligned}$$

olup

$$\Delta x = Ax + B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ c\cos v \\ c\sin v \\ dv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{c}{c^2 + d^2} \\ \dfrac{c}{c^2 + d^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{c^2 + d^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c^2 + d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç 4.1.3 gereğince Helissel silindir kısıtlı tiptedir.

4.2 Kısıtlı Tip Eğriler

$\gamma : I \subset IR \to IR^n$ eğrisi keyfi parametreli regüler bir eğri olsun. Bu takdirde γ nın Laplası Eş 3.12 yardımıyla

$$\Delta\gamma = -\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\gamma''(t) \tag{4.2.1}$$

dir. Ayrıca (Bertrami formülü) "Eş 3.4" den

$$\vec{H} = -\Delta\gamma = \gamma''(t) \tag{4.2.2}$$

dir.

Önerme 4.2.1: $\gamma \subset IR^n$ eğrisi için

$$-\gamma''(t) = \Delta\gamma = A\gamma + B \tag{4.2.3}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $A \in IR_n^n$ (simetrik) ve $B \in IR_1^n$ matrisleri bulunuyorsa γ eğrisi kısıtlı tiptedir.

İspat: γ eğrisi kısıtlı tip bir eğri olsun. Sonuç 4.1.3 den

$$\Delta\gamma = A\gamma + B \tag{4.2.4}$$

dir. Böylece "Eş 4.2.2" ve "Eş 4.2.4" yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $\gamma \subset IR^n$ eğrisinin kısıtlı tipte olması için gerek ve yeter şart

$$-\gamma''' = A\gamma' \tag{4.2.5}$$

olmasıdır. Burada $A \in IR_n^n$ simetrik matristir.

Örnek 4.2.3: $S^1(a) \subset IR^2$ çember kısıtlı tiptedir.

Çözüm: $S^1(a)$ çemberi $\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$ parametrelendirilmesiyle verilsin. Bu takdirde γ nın yüksek mertebeden türevleri yardımıyla

$$\gamma'''(t) = -A\gamma'(t)$$

bulunur. Böylece $A = I_2$ olduğundan $S^1(a)$ çemberi kısıtlı tiptedir.

Örnek 4.2.4: $\gamma(t) = (r\cos(ct+d),\ r\sin(ct+d),\ at+b)$ parametrelendirilmesi ile verilen helis eğrisi kısıtlı tiptedir.

Çözüm: γ nın birinci ve üçüncü mertebeden türevleri sırasıyla

$$\gamma'(t) = (-rc\sin(ct+d),\ rc\cos(ct+d),\ a)$$
$$\gamma''(t) = (-rc^2\cos(ct+d),\ -rc^2\sin(ct+d),\ 0)$$
$$\gamma'''(t) = -(-rc^3\sin(ct+d),\ rc^3\cos(ct+d),\ 0)$$

bulunur. Böylece

$$-\gamma'''(t) = A\gamma'(t)$$

şartını sağlaması için

$$A = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu da bize γ nın kısıtlı tipte olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.5: Tamamen IR^{2k} de yatan her k-tipindeki eğri kısıtlı tiptedir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Örnek 4.2.6: IR^m 'nin her 2-tipindeki eğrisi kısıtlı tiptedir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Örnek 4.2.7: IR^{2k} da tamamen yatan $IR^{\mathbf{m}}$ de ki her 2-tipindeki eğri ve her k-tipindeki eğri kısıtlı tip bir eğri olmasına rağmen, sonlu tipte her eğri kısıtlı tip değildir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Örnek 4.2.8: Aşağıdaki IR^3 te 6-tipindeki eğri kısıtlı tipte değildir (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

$$\gamma(s) = \left(-\frac{2}{3}\cos\frac{12}{17}s + \frac{3}{4}\cos\frac{16}{17}s + \frac{3}{10}\cos\frac{20}{17}s + \frac{1}{8}\cos\frac{24}{17}s + \frac{1}{14}\cos\frac{28}{17}s, \right.$$
$$\left. -\frac{2}{3}\sin\frac{12}{17}s + \frac{3}{4}\sin\frac{16}{17}s + \frac{3}{10}\sin\frac{20}{17}s + \frac{1}{8}\sin\frac{24}{17}s + \frac{1}{14}\sin\frac{28}{17}s, \sin\frac{8}{17}s \right).$$

Örnek 4.2.9: $\gamma(s) = (\cos ms, \sin ms, \cos ns, \sin ns)$ $m, n \in Z^+$ parametrik gösterimi ile tanımlanan W-eğrisi kısıtlı tiptedir.

İspat: : γ eğrisinin birinci ve üçüncü mertebeden türevleri sırasıyla

$$\gamma'(s) = (-m\sin ms,\ m\cos ms,\ -n\sin ns,\ n\cos ns)$$

$$\gamma'''(s) = (m^3 \sin ms,\ -m^3 \cos ms,\ n^3 \sin ns,\ -n^3 \cos ns)$$

bulunur. Böylece

$$-\gamma'''(t) = A\gamma'(t)$$

şartının sağlanebilmesi için

$$A = \begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Bu da bize γ eğrisinin kısıtlı tipte olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.10: IR^3'deki küresel her bir eğri kısıtlı tiptedir.

İspat: $\gamma(I) \subset S^2(a)$ eğrisi

$$\gamma(u) = (a \cos^2 u, \frac{a}{2} \sin 2u, a \sin u)$$

parametrelendirilmesi ile verilsin. Bu takdirde γ nın birinci ve üçüncü mertebeden türevleri sırasıyla

$$\gamma'(u) = (-a \sin 2u, a \cos 2u, a \cos u)$$
$$\gamma'''(u) = -(-4a \sin 2u, 4a \cos 2u, a \cos u)$$

bulunur. Böylece

$$-\gamma'''(t) = A\gamma'(t)$$

şartının sağlanebilmesi için

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Bu da bize γ eğrisinin kısıtlı tipte olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.11: (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993) IR^2 'de bir eğrinin kısıtlı tipte olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki düzlemsel eğrilerinden birinin açık bir parçası olmasıdır:

1) Bir çember;

2) Bir doğru;

3) $c \neq 0$ olmak üzere $\cos(cx) = e^{-cy}$ şeklinde bir eğri;

4) $a > b > 0$ ve $c = a-b$ olmak üzere $a\sin^2(\sqrt{c}\, x) + b\sinh^2(\sqrt{c}\, y) = c$ şeklinde bir eğri;

5) $a > 0 > b$ ve $c = a-b$ olmak üzere $a\sin^2(\sqrt{c}\, x) - b\cosh^2(\sqrt{c}\, y) = c$ şeklinde bir eğri.

İspat: γ, IR^2 de yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Eğer γ kısıtlı tip ise, o zaman

$$< AT, T >= \kappa^2 \qquad (4.2.6)$$

olacak biçimde sabit bir A endomorfizmi vardır. Burada $T = \gamma'$ ve κ γ 'nın eğriliğidir. A nın simetrik olduğu varsayabileceği için, A matrisini

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

biçiminde bir köşegen matris olacak biçimde IR^2 de öklid koordinatlarını seçebiliriz ve $a \geq b$ olduğunu varsayabiliriz.

$$T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)) \tag{4.2.7}$$

olsun. Buradan

$$T'(s) = \left(-\sin\theta(s)\frac{d\theta}{ds}, \cos\theta(s)\frac{d\theta}{ds} \right)$$

olduğundan

$$\kappa^2(s) = \|T'(s)\|^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \tag{4.2.8}$$

ve

$$AT = (a\cos\theta(s), b\sin\theta(s))$$

yardımıyla "Eş 4.2.6" eşitliğinden

$$\kappa^2(s) = (a\cos^2\theta(s) + b\sin^2\theta(s)) \tag{4.2.9}$$

olduğundan "Eş 4.2.8" ve "Eş 4.2.9" eşitliklerinden

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = (a\cos^2\theta(s) + b\sin^2\theta(s)) \tag{4.2.10}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur;

1. Durum: $a = b = 0$ ise "Eş 4.2.9" eşitliğinden $\kappa = 0$ olur. Bu durumda eğri düz bir doğrunun açık bir kısmıdır.

2. Durum: $a = b \neq 0$ ise "Eş 4.2.9" eşitliğinden $\kappa = \sqrt{a}$ olur. Bu durumda eğri bir çember yayıdır.

3. Durum: $\beta(\theta) = \gamma(s(\theta))$ nın yeniden parametrizasyonu olsun. $\beta(\theta) = \gamma(s(\theta))$ ise $\frac{d\beta}{d\theta} = \gamma'(s(\theta))\frac{ds}{d\theta}$ olup "Eş 4.2.7" ve "Eş 4.2.9" eşitliklerinden

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \pm\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a\cos^2 + b\sin^2\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{a\cos^2 + b\sin^2\theta}}\right) \tag{4.2.11}$$

olur. 3. durumu üç alt durumda inceleyeceğiz.

3.1 Durum: $a > 0,\ b = 0$ ise

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \tag{4.2.12}$$

olup "Eş 4.2.12" nin integrali alınırsa

$$\beta(\theta) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\theta + c_1, -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{In}\left|\cos\theta\right| + c_2\right)$$

elde edilir. $c_1 = c_2 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\beta(\theta) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\theta, -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{In}\left|\cos\theta\right|\right)$$

olur.

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}\theta,\ y = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,In\left|\cos\theta\right|$$

dersek $\theta = \sqrt{a}x$ olur. Bunu $y = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,In\left|\cos\theta\right|$ da yerine yazıp ve $c = \sqrt{a}$ alınırsa $y = -\frac{1}{c}\,In\left|\cos\theta\right|$ elde edilir. Buradan $y = -\frac{1}{c}\,In\left|\cos cx\right|$ olur.

3.2 Durum: $a > b > 0$ ise "Eş 4.2.11" eşitliğinin integrali alınırsa

$$\beta(\theta) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{a-b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\sin\theta\right), -\frac{1}{\sqrt{a-b}}\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos\theta\right)\right)$$

olur. Buradan

$$x = \frac{1}{\sqrt{a-b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\sin\theta\right)\ ,\ y = -\frac{1}{\sqrt{a-b}}\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos\theta\right)$$

alındığında

$$\sqrt{a}\sin\left(\sqrt{a-b}x\right) = \sqrt{a-b}\sin\theta\ ,\ \sqrt{b}\sinh\left(\sqrt{a-b}y\right) = \sqrt{a-b}\cos\theta$$

bulunur. Böylece

$$a\sin^2\left(\sqrt{a-b}x\right) + b\sinh^2\left(\sqrt{a-b}y\right) = a-b \qquad (4.2.13)$$

dir. Burada "Eş 4.2.13" denkleminde $c = a-b$ alınırsa

$$a\sin^2(cx) + b\sinh^2(cy) = c$$

bulunur.

3.3 Durum: $a > 0 > b$ ise "Eş 4.2.11" eşitliğinin integrali alınırsa

$$\beta(\theta) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{a-b}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}} \sin\theta \right), -\frac{1}{\sqrt{a-b}} \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos\theta \right) \right)$$

olur. Buradan

$$x = \frac{1}{\sqrt{a-b}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}} \sin\theta \right),\ y = -\frac{1}{\sqrt{a-b}} \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos\theta \right)$$

alındığında

$$\sqrt{a}\sin\left(\sqrt{a-b}x\right) = \sqrt{a-b}\sin\theta\ ,\ \sqrt{b}\cosh\left(\sqrt{a-b}y\right) = \sqrt{b-a}\cos\theta$$

ve

$$a\sin^2\left(\sqrt{a-b}x\right) - b\cosh^2\left(\sqrt{a-b}y\right) = a-b \qquad (4.2.14)$$

dir. Buradan "Eş 4.2.14" denkleminde $c = a-b$ alınırsa

$$a\sin^2(cx) - b\cosh^2(cy) = c$$

bulunur (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

Sonuç 4.2.12: γ birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. γ eğrisinin kısıtlı tipte ise olması için gerek ve yeter koşul γ nın eğriliği κ nın aşağıdaki denklemi sağlamasıdır;

$$\kappa\kappa''-\kappa'\kappa''+4\kappa^3\kappa'=0\ . \qquad (4.2.15)$$

Burada türev yay uzunluğu parametresi yönünde alınmıştır (Chen, Dillen, Verstraelen, Vrancken, 1993).

İspat: $\Rightarrow$: γ eğrisi kısıtlı tip ve γ nın eğriliği κ olsun. Bu takdirde "Eş 4.2.9" dan

$$\kappa^2(s)=\left(a\cos^2\theta(s)+b\sin^2\theta(s)\right) \qquad (4.2.16)$$

bulunur. Buradan

$$\kappa'(s)=(-a+b)\sin\theta(s)\cos\theta(s)$$
$$\frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)}=(a-b)\sin^2\theta(s)+(-a+b)\cos^2\theta(s) \qquad (4.2.17)$$

"Eş 4.2.16" ve "Eş 4.2.17" kullanılarak

$$\frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)}+2\kappa^2(s)=(a+b) \qquad (4.2.18)$$

elde edilir. a ve b sabit olduğu için $(a+b)$ sabit olur. "Eş 4.2.18" in her iki tarafının türevi alınırsa "Eş 4.2.15" elde edilir.

$\Leftarrow$: İspat aşikardır.

KAYNAKLAR

ARSLAN, K. AND KILIÇ, B., 1998. Product submanifolds and their types. Far East J. Math. Sci., 6: 125-134.

ARSLAN, K., BULCA, B., KILIÇ, B., KİM, Y. H., MURATHAN, C. and ÖZTÜRK, G., 2011. Tensor Product Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map. Bull. Korean Math. Soc., 48(3): 601-609.

BAYRAM, B., BULCA, B., ARSLAN, K. AND ÖZTÜRK, G., , 2012. Generalized Rotation Surfaces in IE^4. Result in Mathematics, 61: 315-327.

BULCA, B., ARSLAN, K., BAYRAM, B., ÖZTÜRK, G. AND UGAİL, H., 2012. Spherical Product Surfaces in IE^4. An S_t. Univ. Ovidius Constant_a , 20(1), 41-54.

CARMO, M. P., 1992. Riemannian Geometry. Instituto de Matematica Purae Applicada Edificio Lelio Gama, Brasil, 295s.

CHEN, B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds. M. Dekker, Newyork, 305s.

CHEN, B.Y, 1983. On the total curvature of immersed manifolds, VI: Submanifolds of finite type and their applications. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 11: 309-328.

CHEN, B.Y, 1984. Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, Singapur, 352s.

CHEN, B. Y. AND VERHEYEN, P., 1984. Submanifolds with geodesic normal sections. Math. Ann., 269, 417-429.

CHEN, B. Y., DEPREZ, J. AND VERHEYEN, P., 1992. Immersion with geodesic of 2-type.Geometry and Topology of Submanifolds, 4: 87-110.

CHEN, B. Y., DİLLEN, F., VERSTRAELEN, L. AND VRANCKEN, L., 1993. Submanifolds of restricted type. Journal of Geometry, 46.

DECRUYENEAERE, F., DİLLEN, F. AND VERSTRAELEN, F., 1988. Spherical Surfaces of Restricted Type. J. Diff. Geom., 27: 55-66.

FERUS, D., AND SCHİRRMACHER, 1982. Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics. Math. Ann., 260: 57-62.

GANCHEV, G. AND MİLOUSHEVA, V., Minimal Surfaces in the Four-Dimensional Euclidean Space. arXiv: 0806.3334v1.

GANCHEV, G. AND MİLOUSHEVA, V, 2008. On the Theory of Surfaces in the Four-Dimensional Euclidean Space. Kodai Math. J., 31: 183-198.

GHEYSENS, I., VERHEYEN, P. AND VERSTRAELEN, L., 1983. Characterization and examples of Chen submanifolds. J. Geom., 20: 47-62.

HACISALİHOĞLU, H. H., 1980. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat., Ankara,859s.

HOUH, C. S., 1974. On Spherical a-submanifolds. Chinese J. Math., 2(1): 128-134.

KILIÇ, B., 1997. k-Tipinde Eğriler ve Altmanifoldlar. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir, 47s.

KİM, Y.H., 1993. Surfaces with simple geodesic. J Korean Math. Soc., 30(2): 361-369.

KLEİN, F. AND LİE, S., 1871. Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann., 4: 50-84.

MOORE, T.D., 1971. Isometric immersions of Riemannian products. Journal of Geometry, 5: 159-168.

O'NEİLL, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic press, Londra, 459s.

ZAFİNDRATAFA, G., 1996. Hypersurfaces whose mean curvature function is of finite type. J. Geom., 55(1-2): 182-191.

ÖZGEÇMİŞ

1986 tarihinde Diyarbakır da doğdu. 2004 yılında Çerkezköy / Tekirdağ Pakize Narin Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2010 yılında Balıkesir Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek lisansını kazandı. 2011 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi oldu. Halen görevine devam etmektedir.