ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Projektif Olmayan Modüller Arasında Sıfırdan Farklı Homomorfizmalara Sahip Olan Halkalar

Kemal İZCİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran, 2023

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Projektif Olmayan Modüller Arasında Sıfırdan Farklı Homomorfizmalara Sahip Olan Halkalar

Kemal İZCİ

Matematik Anabilim Dalı

Bu Yüksek Lisans Tezi 23/06/2023 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oybirliği / Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri :Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN (Danışman) …….

:Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT …….

:Doç. Dr. Yusuf ALAGÖZ …….

Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER

Enstitü Müdür

Bu Çalışma TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: 119F176

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösrilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
SİMGELER DİZİNİ IIII
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1. Halkalar 3
2.2. Modüller 6
2.3. Modül Homomorfizmaları 10
2.4. Kısa Tam Diziler 11
2.5. Projektif ve İnjektif Modüller 12
3. PROJEKTİF OLMAYAN MODÜLLER ARASINDA SIFIRDAN FARKLI HOMOMORFİZMALARA SAHİP HALKALAR 17
3.1. (T1) ve (T2) Özelliklerine Sahip Halkalar 17
3.2. (T) Özelliğini Sağlayan Halkalar 23
4. SONUÇ 27
KAYNAKLAR 29
ÖZGEÇMİŞ 31

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Projektif Olmayan Modüller Arasında Sıfırdan Farklı Homomorfizmalara Sahip Olan Halkalar

Kemal İZCİ

Danışman : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Matematik Anabilim Dalı

ÖZ

R-modüllerin ve R-modül homomorfizmleri kullanılarak halkaların sınıflandırılması konusu sıklıkla çalışılmaktadır. Son yıllarda, bu konu ile ilgili olarak yeni metodlar izlenmeye başlanmıştır. Tezimizde, bu çalışmalardan esinlenerek tanımladığımız iki halka yapısını çalıştık. İlk olarak, her tekil basit R-modülden her projektif olmayan R-modüle sıfır olmayan homomorfizmaların var olduğu R halkasını inceledik. İkinci olarak, her projektif olmayan herhangi bir R-modülden her tekil basit R-modüle sıfır olmayan homomorfizmaların var olduğu R halkasını inceledik.

Anahtar Kelimeler: Projektif modül, tekil basit modül, (yarı) Artin halkalar, Kasch Halkası, CC-halkası.

CUKUROVA UNIVERSITY

ENSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MSc THESIS

On Rings Admıttıng Nonzero Homomorphısms Between Non-Projectıve Modules

Kemal İZCİ

Advisor : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Department of Mathematics

ABSTRACT

Classification of rings using R-modules and R-module homomorphisms is frequently studied. In recent years, new methods have been started to be followed in this regard. In our thesis, we studied two ring structures that we defined inspired by these studies. Firstly, we studied the ring in which non-zero homomorphisms exist from each singular simple R-module to each non-projective R-module. Secondly, we studied the ring in which non-zero homomorphisms exist from every non-projective R-module to every singular simple module.

Key Words and Phrases: Projective modules, singular simple modules, (semi-)Artininan rings, Kasch ring, CC-ring.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda sürekli desteği, rehberliği, sabrı, bilgisiyle, bana desteğini hiç esirgemeyen ve çalışmaya teşvik eden danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tüm eğitim hayatım boyunca bana desteklerini sunan ve büyük bir sabırla sorularımı cevaplayan, yön gösteren değerli hocam Prof. Dr. Ali Arslan Özkurt'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatım boyunca bana desteklerini ve emeklerini sunan, hiçbir zaman yalnız bırakmayan değerli ailem, annem Aslıhan İZCİ'ye ve babam Salım İZCİ 'ye çok teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım süresince aldığım lisansüstü bursu için, Türkiye Bilimler ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK, Proje No: 119F176) teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar Kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonal Sayılar Kümesi

$\mathbb{Z}_n$: n Moduna Göre Kalan Sınıflar Kümesi

$\cap$: Küme Kesişimi

$\cup$: Küme Birleşimi

$\subseteq$: Alt Küme

$\leq$: Alt Modül

$<$: Öz Alt Modül

$\cong$: İzomorfizm

M/N : M ile N Modüllerinin Bölümü

$A \times B$: A ve B Kümelerinin Kartezyen Çarpımı

$\langle S \rangle$: S Kümesi Tarafından Üretilen Grup

$\langle a \rangle$: a Elemanı Tarafından Üretilen Devirli Grup

Çek(f) : f Homomorfizmasının Çekirdeği

Gör(f) : f Homomorfizmasının Görüntüsü

End(M) : M Modülünün Endomorfizmalarının Kümesi

Hom(A, B) : A dan B ye Olan Tüm Homomorfizmaların Sınıfı

Soc(R) : R halkasının sokulu

Rad(M) : M Modülünün Jacobson Radikali

T(M) : M nin Burulma Elemanlarının Kümesi

$Z(M)$: M nin Tekil Elemanlarının Kümesi

$\sum_{i \in I} B_i$: B_i Alt Modüllerinin Toplamı

$\prod_{k \in K} M_k$: M_k Modüllerinin Doğrudan Çarpımı

$N_1 \oplus N_2$: N_1 ve N_2 Modüllerin Doğrudan Toplamı

$\mathcal{P}$: Projektif Sağ Modüllerin Sınıfı

$\mathcal{S}$: Tekil Basit Modüllerin Sınıfı

$\mathcal{N}$: Tekilsiz (nonsingular) Modüllerin Sınıfı

$\mathcal{C}$: Projektif Olmayan Devirli Modüllerin Sınıfı

$\mathcal{F}$: Projektif Olmayan Sonlu Üretilen Modüllerin Sınıfı

$\mathcal{C}_a$: Projektif Olmayan Eşatomik Modüllerin Sınıfı

Mod-R : Tüm sağ R-modüllerin sınıfı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, R değişmeli olması gerekmeyen birimli bir halka, Mod-R tüm sağ R-modüllerin sınıfı olarak alınacaktır. Aksi belirtilmedikçe, bu çalışmada tüm R-modüller sağ R-modüllerdir. Çalışmamız boyunca, tüm projektif (sırasıyla, tekilsiz (nonsingular), projektif olmayan devirli, projektif olmayan sonlu üretilen, projektif olmayan eş atomik (coatomic), basit tekil) sağ R-modüllerin sınıfı $\mathcal{P}$ (sırasıyla, $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{S}$) ile gösterilecektir.

Çalışmamız, herhangi iki modül sınıfı arasında sıfır olmayan homomorfizmaların var olması koşulu altında halkaların sınıflandırılması üzerine yapılan çalışmalardan esinlenilmiştir. İnjektif olmayan herhangi iki modül arasında sıfır olmayan homomorfizmaların var olduğu halkaların karakterizasyonları Noyan ve Türkoğlu (2020) makalesinde çalışılmıştır. Benzer olarak, projektif olmayan herhangi iki modül arasında sıfır olmayan bir homomorfizmanın var olduğu halkaların karakterizasyonları Türkoğlu, (2022) makalesinde çalışılmıştır. Bu halkalara, denk olarak, her $A, B \in$ Mod-$R\backslash\mathcal{P}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$ özelliğini sağlayan halkadır. Türkoğlu (2022) makalesinde olduğu gibi bu özelliğe sahip halkalara (T) özelliğine sahip halkalar diyeceğiz. Tez çalışmamızda, (T) özelliğine sahip halkaların birbirinden farklı iki genellemesini çalıştık.

Noyan ve Türkoğlu (2020) ve Türkoğlu (2022) makalelerinde çalışılan iki halka sınıfının karakterize edilmesinde basit modüller önemli bir rol oynamışlardır. Basit modüller aracılığıyla, (T) özelliğine sahip halkaların iki farklı genellemesi aşağıdaki gibi tanıtılmıştır.

(T1): Her $B \in$ Mod-$R\backslash\mathcal{P}$ ve her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(B, A) \neq 0$.

(T2): Her $B \in$ Mod-$R\backslash\mathcal{P}$ ve her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$.

Tez çalışmamız (T1) ve (T2) özelliklerine sahip halkaların incelenmesi üzerinedir. (T1) ve (T2) özelliklerine sahip halkaların bazı temel özelliklerini bulduk ve bu özelliklere sahip halkarın karakterizasyonları üzerine bazı sonuçlar elde ettik. Ayrıca, (T1) ve (T2) özelliklerine sahip halkalar ile (T) özelliğine sahip halkalar arasındaki ilişki üzerine bazı sonuçlar elde ettik. Örnekler yardımıyla (T1) veya (T2) özelliklerinden birini sağlayan halkanın (T) özelliğini sağlamadığını gösterdik. (T1) ve (T2) özelliklerine sahip halkaların tam olarak (T) özelliğine sahip olduğunu gösterdik. Bir R halkası (T1) özelliğine sahiptir ancak ve ancak R halkası yalnız bir tekil basit R-modüle sahip sağ maks halkasıdır. Bir R halkası (T2) özelliğine sahiptir ancak ve ancak R halkası yalnız bir tekil basit R-modüle sahip sağ $\sum-\mathrm{t}$ genişletilmiş (extending) sağ C-halkasıdır. R tekilsiz olmayan bir halka ise, R halkası (T2) özelliğini sağlar ancak ve ancak R, yalnız bir tekil basit sağ R-modülüne sahip yarı-Artin halka ve $R/\mathrm{Z}_2(R_R)$ sağ ve sol Artin kalıtsal (hereditary) seri halkasıdır.

Tezimizin son bölümünde, (T) özelliğine sahip halkanın sınıflandırılması üzerine çalıştık. Bu halkanın sağ mükemmel ve sağ Kasch halkası olduğunu gösterdik. (T) özelliğine sahip halkalar ile CC-halkaları arasındaki ilişkiyi bulduk. Son olarak; değişmeli bir R halkasının (T) özelliğini

sağlaması için gerek ve yeter koşul $R = A \times B$ olacak şekilde bir halka ayrışmasının bir yarı basit Artin A ve aşağıdaki koşullardan birini sağlayan B için var olmasıdır:

(1) B, yalnız tekil basit sağ R-modülü ile yarı-Artin maks halkasıdır,
(2) B, yalnız bir tekil basit sağ R-modülüne sahip Artin kalıtsal seri halkasıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmamız ile ilgili temel kavramları verdik.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1 $(R, +)$ bir değişmeli grup ve "." R üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in R$ için,

i. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (birleşme özelliği),

ii. $a \cdot (b + b) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

şartlarına sahip $(R, +, \cdot)$ cebirsel (algebraic) yapısına halka denir. Ayrıca, $(R, +)$ değişmeli grubun birim elemanına halkanın sıfırı denir ve 0_R biçiminde gösterilir. Genel olarak "$(R, +, \cdot)$" cebirsel yapısı (veya halkası) yerine "R halkası" ifadesi kullanılır (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.2 $(R, +, \cdot)$ bir halka (cebirsel yapı) olsun.

i. Her $x \in$ R için $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ olacak biçimde $1_R \in R$ var ise 1_R ye R halkasının birimi denir ve R ye bir birimli halka denir.

ii. Her $a, b \in$ R için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyor ise R halkasına, değişmeli (abelyen) halka denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Genellikle R halkasının birimi $1 = 1_R$ ile gösterilir. Tezimizde aksi belirtilmedikçe halkalar, birimli halkalar olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.3 R bir halka olmak üzere, $a \in R$ elemanı için, $ab = 0$ olacak biçimde sıfır olmayan bir $b \in R$ var ise, a elemanına R halkasının sıfır böleni denir. Sıfır bölensiz değişmeli ve birimli bir R halkasına değişmeli bölge (domain) denir (Wisbauer, 1991).

Örnek 2.1.4 Tam sayı halkası $\mathbb{Z}$ bir değişmeli bölgedir.

Tanım 2.1.5 R bir halka olmak üzere; $a \in R$ için, eğer $a.b = 1_R$ $(b.a = 1_R)$ olacak biçimde $b \in R$ elemanı var ise a elemanına sol (veya sağ) tersinir eleman denir. Eğer a hem sağ hem de sol tersinir oluyorsa, $a \in R$ ye tersinir eleman denir (Anderson ve F.W. Fuller, 1992).

Tanım 2.1.6 Değişmeli ve birimli bir halkanın sıfır olmayan her elemanın tersi bulunuyor ise, bu halkaya cisim (field) denir (Wisbauer, 1991).

Örnek 2.1.7 $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ halkaları birer cisim örnekleridir.

Tanım 2.1.8 R bir halka ve I, R nin boştan farklı altk ümesi olmak üzere; eğer,

i. Her $a, b \in$ I için $a - b \in I$,

ii. Her $k \in R$ ve her $a \in I$ için $a.k, k.a \in I$

koşulları sağlanıyor ise I alt kümesine R halkasının bir ideali denir. Eğer her $k \in R$ ve her $a \in I$ için $k.a \in I$ oluyor ise R alt kümesine R halkasının bir sol ideali, $a.k \in I$ oluyor ise I ya R halkasının bir sağ ideali denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Örnek 2.1.9 $3\mathbb{Z}$ ve $5\mathbb{Z}$ alt kümeleri $\mathbb{Z}$ halkasının (tam sayılar halkasının) idealleridir.

Örnek 2.1.10 R bir halka olmak üzere, R halksının $\{0_R\}$ ve R alt kümeleri R nin birer idealidir.

Tanım 2.1.11 R bir halka olmak üzere, R nin sol ve sağ idealleri I_1, I_2 olsun. Bu durumda,

i. $I_1 + I_2 = a + b : a \in I_1, b \in I_2$ sol (ve sağ) idealine I_1 ve I_2 ideallerinin toplamı,
ii. $I_1 \cdot I_2 = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n : a_i \in I_1,\ b_i \in I_2, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}\}$ sol (ve sağ) idealine I_1 ve I_2 ideallerinin çarpımı denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Tanım 2.1.12 n ∈ ℕ için R birimli, değişmeli bir halka olmak üzere; $x_1, x_2, \cdots x_n \in R$ olsun. R nin,

$$\langle x_1, x_2, \cdots x_n \rangle = \{ x_1r_1 + x_2r_2 + \ldots + x_nr_n : r_1, r_2, \cdots r_n \in R\}$$

şeklindeki idealine, $x_1, x_2, \cdots x_n$ elemanları ile üretilen ideal denir. Özel olarak $a \in R$ için $\langle a \rangle = \{ar : r \in R\}$ idealine R nin a elemanı ile üretilmiş esas (veya temel) ideali denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Tanım 2.1.13 R bir halka olsun. M, R halksının bir öz (proper) ideali olmak üzere, eğer $M \subseteq I \subseteq R$ koşulunu sağlayan her I ideali için $I = M$ ya da $I = R$ oluyor ise M ye R nin bir maksimal ideali denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Teorem 2.1.14 $\emptyset \neq R$ halkası için aşağıdakiler birbirine denktir.

i. R halkası tek sol (ve sağ) maksimal ideale sahiptir,
ii. $a \in$ R elemanı veya $1 - a$ elemanı tersinirdir,
iii. R nin bütün tersinmez (tersi olmayan) elemanlarının oluşturduğu küme I ise I, R halkasının öz (proper) idealidir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.15 Teorem 2.1.14 de verilmiş olan koşullardan birine denk R halkasına lokal veya yerel halka denir (Anderson ve F.W. Fuller, 1992).

Tanım 2.1.16 R bir halka olmak üzere, $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R halkasının işlemleriyle bir halka oluyor ise S alt kümesine R nin bir alt halkası denir (Halıcıoğlu, 2019).

Örnek 2.1.17 R bir halka olsun. $\{0\}$ ve R kümeleri R halkasının alt halkalarıdır (Rotman, 2009).

Örnek 2.1.18 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bir alt halkasıdır. Tek tam sayılar kümesi bilinen toplama (+) işlemine göre kapalı olmadığından $\mathbb{Z}$'nin bir alt halkası değildir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.19 R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. $a, b \in R$ elemanları için, $a \equiv b$ denkliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $a - b \in I$ içermesidir. Buradaki "$\equiv$" bağıntısına, R halkası üzerinde bir denklik bağıntısı denir. Bu bağıntının tüm denklik sınıflarının kümesi $R/I = \{a + I : a \in R\}$ şeklinde gösterilir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Tanım 2.1.20 R bir halka ve R'nin bir ideali I olmak üzere, her $a + I, b + I \in R/I$ için

i. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,
ii. $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$

koşulları ile tanımlı, çarpma ve toplama işlemleriyle $(R/I, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre bölüm halkası denir (Halıcıoğlu ve Üngör, 2019).

Örnek 2.1.21 $R = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Q}\}$ halkası ve R'nin $I = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$ idealini ele alalım. R/I bölüm halkasını bulalım. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ olduğu için, $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + I = (\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}) + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I$ olup, $R/I = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I : c \in \mathbb{Q}\}$ olarak bulunur.

Tanım 2.1.22 R ve S halkaları ve $f : R \to S$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$
$$f(ab) = f(a)f(b)$$

ise f ye R den S ye bir halka homomorfizması denir (Alizade ve Pancar, 2019).

Tanım 2.1.23 R bir halka ve $n \in \mathbb{N}$ için $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, R nin sağ ideallerinin bir ailesi olsun.

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

artan zinciri sonlu adım da duruyor ise, R ye sağ Noetherian halka denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Teorem 2.1.24 R bir halka ve $n \in \mathbb{N}$ için $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ R nin sağ ideallerinin bir ailesi olmak üzere; aşağıdakiler birbirine denktir.

1. R sağ Noetherian halkasıdır,
2. R halkasının her sağ ideali sonlu üretilmiştir,
3. R halkasının sağ ideallerinden oluşan her ailenin (boştan farklı) maksimal bir elemanı vardır (Pancar ve Türkmen, 2014).

Tanım 2.1.25 R bir halka olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ için $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, R'nin sağ ideallerin bir ailesi olsun.

$$\ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_1$$

azalan zinciri sonlu bir adım da duruyor ise R ye Artin halka denir (Lam, 1991).

Teorem 2.1.26 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1. R, sağ Artin halkadır,
2. R nin sağ ideallerinin (boştan farklı) her alt kümesinin bir minimal elemanı vardır (Lam, 1991).

2.2 Modüller

Tanım 2.2.1 M toplamsal bir değişmeli grup olmak üzere $M \times R \to M$, $(m, r) \to m.r$ ile tanımlı işlem her $r, r_1, r_2 \in R$ ve her $m, m_1, m_2 \in M$ elemanları için

1) $(m_1 + m_2).\, r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$
2) $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$
3) $m \cdot (\, r_1 r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

koşullarını sağlıyor ise, M ye bir sağ R-modül denir. Bu koşullara ek olarak,

4) $1_R.m = m$

koşulu da sağlıyor ise M ye sağ birimsel (unitary) R-modül denir. Sol R-modül benzer şekilde tanımlanır. Eğer R bir sol R-modül ise ${}_R M$, M bir sağ R-modül ise M_R şeklinde gösterilir. Tez çalışmamız boyunca, aksi belirtilmedikçe, modüller sağ R-modül olarak alınacaktır. Özel olarak R halkası değişmeli halka ise, sağ (veya sol) R-modülü yerine R-modül denir. R halkası bir cisim ise, M R-modülüne R üzerinde vektör uzayı denir (Aydın, 2012).

Önerme 2.2.2 N bir R-modül olmak üzere, $n \in N$ ve $a \in R$ elemanları için

i. $0_R \cdot n = 0_N$
ii. $a \cdot 0_N = 0_N$
iii. $(-a) \cdot \mathrm{n} = -(\, a \cdot n) = a \cdot (-n)$

özellikleri sağlanır (Aydın, 2012).

Örnek 2.2.3 Toplamsal ve değişmeli her grup bir sol (ve sağ) $\mathbb{Z}$-modüldür (Aydın, 2012).

Örnek 2.2.4 M, R halkasının toplama işlemine göre değişmeli bir alt grubu olsun. M, R nin çarpma işlemiyle bir R-modül olur (Aydın, 2012).

Önerme 2.2.5 $6\mathbb{Z}$ grup ve $k, n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$6\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 6\mathbb{Z}$, $(6k, n) \longrightarrow 6kn$ tanımlayalım. $6\mathbb{Z}$ grubu bu tanımla bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

Örnek. 2.2.6 $M = M_{\text{nxm}}(R)$ girdileri R de olan n x m tipindeki bütün matrislerin kümesi olsun. Matris toplamı ve çarpımıyla M bir R-modül olur (Rotman, 2009).

Örnek 2.2.7 A değişmeli bir grup ve $+$ grubun toplama işlemi olsun. $n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in A$ için

$n > 0$ ise $n\,x = x + x + \ldots + x$ (n defa),

$0 > n$ ise $nx =$ - x - x-... - x ($|n|$ defa)

koşulları sağlansın. O halde her A değişmeli grubu bir $\mathbb{Z}$-modüldür (Rotman, 2009).

Tanım 2.2.8 M bir R-modül ve $\emptyset \neq K \subseteq M$ olsun. Her $a,b \in K$ ve her $r \in R$ elemanları için

i. $0_M \in K$

ii. $a - b \in K$

iii. $ar \in K$ ($ra \in K$)

oluyor ise K ya M nin bir sol (veya sağ) R alt modülü denir (Aydın, 2012).

Örnek 2.2.9 M bir R-modül olmak üzere, $\{\emptyset\}$ alt kümesi ve M kendisinin alt modülüdür (Rotman, 2009).

Örnek 2.2.10 Bir halkanın her ideali, kendisinin bir alt modülüdür. Tersi durumda ise halkanın her alt modülü, halkanın bir ideali olur (Aydın, 2012).

Örnek 2.2.11 N bir R-modül ve $n \in N$ olsun. Rn kümesini, $Rn = \{rn : r \in R\}$ olacak şekilde tanımlayalım. Buradan N, R-modülünün bir alt modülü olur. (Rotman, 2009).

Tanım 2.2.12 T bir sağ R-modül, S de T nin öz alt modülü olsun. Eğer, T modülünün S alt modülünü kapsayan başka öz alt modülü bulunamıyor ise, S öz alt modülüne T R-modülünün bir maksimal alt modülü denir. R halkasının bir maksimal sağ alt modülüne, maksimal sağ ideal denir (Pancar ve Türkmen, 2011).

Örnek 2.2.13 Bir halkanın maksimal ideali, halka üzerindeki modülün maksimal alt modülüdür.

Önerme 2.2.14 R bir halka olmak üzere, R halkasının her sol (ve sağ) ideali bir maksimal sol (ve sağ) ideal tarafından içerilir (Pancar ve Türkmen, 2011).

Teorem 2.2.15 K bir sağ R-modül ve L, K nın bir alt kümesi olsun. L, K nın bir alt modülüdür ancak ve ancak $L \neq \emptyset$, $\forall x, y \in L$ ve $r \in R$ için $x + ry \in L$ dir (Rotman, 2009).

Tanım 2.2.16 M bir R-modül ve $N \subseteq M$ olsun. M R-modülünün N yi kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine N ile üretilen alt modül denir ve $\langle N \rangle$ şeklinde gösterilir. N kümesi sonlu bir kümeyse, kısaca N ile üretilen, sonlu üretilmiş bir alt modül denir. N, $N = \{n\}$ biçiminde ise, $\langle N \rangle = \langle n \rangle$ifadesine devirli alt modül denilir ve $\langle n \rangle = nR = \{nr : r \in \text{R}\}$ şeklinde gösterilir. Dahası, $\{A_i : i \in I\}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $N = \cup_{i \in I} A_{\text{i}}$ kümesiyle üretilen alt modüle, A_i alt modüllerinin toplamı denir. A_i alt modüllerinin toplamı $\sum_{i \in I} A_i$ biçimin de gösterilir ve $\sum_{i \in I} A_i = \{\sum_{i=1}^{k} a_i : k \in \mathbb{N}, i \in \text{I}, a_i \in A_i\} \subseteq M$ dir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.17 Herhangi bir $\{M_k : k \in K\}$ modüller kümesinin $\prod_{k\in K} M_k$ kartezyen elemanını (m_k) biçiminde gösterelim. Kartezyen çarpımın (m_k) ve (n_k) ile gösterilen iki elemanının toplamını $(m_k) + (n_k) = (m_k + n_k)$ ve $r \in R$ ile çarpımı (m_k)r $= (m_k r)$ olarak tanımlanır, $\prod_{k \in K} M_k$ çarpımının bir sağ R-modül oluşturduğunu kolayca gösterebiliriz. $\prod_{k \in K} M_k$ çarpım modülüne, M_k modüllerinin bir direkt çarpımı denir (Alizade ve Pancar, 2010).

Tanım 2.2.18 Tanım 2.2.17 deki $\prod_{k \in K} M_k$ çarpımnın, $\oplus(M_k)_{k\in \mathrm{K}} = \{(m_\mathrm{k}) \in \prod_{k \in K} M_k$: sonlu sayıda $k \in K$ için $m_k \neq 0\}$ alt modülüne m_k modüllerinin (dış) direkt toplamı denir (Alizade ve Pancar, 2010).

Tanım 2.2.19 ***N*** bir R-modül olmak üzere, $\{N_i : i \in I\}$, N modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. $1 \leq i \leq t$ aralığındaki i için $N_i \cap (N_1 + \ldots + N_{i-1} + N_{i+1} + \ldots + N_t) = 0$ koşulu sağlanıyor ise $N_1 + \ldots + N_t$ alt modülüne N_i alt modüllerinin bir iç direkt toplamı denir ve $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_\mathrm{t}$ biçiminde gösterilir (Rotman, 2009).

Önerme 2.2.20 M bir R-modül olmak üzere, $\{N_i : i \in I\}$, M nin alt modüller ailesi olsun.

$N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_t$ direkt toplam ifadesindeki her bir m elemanı $1 \leq i \leq t$ için, $n_i \in N_i$ olmak üzere

$m = n_1 + n_2 \ldots + n_t$

şeklinde tek türlü yazılır (Aydın, 2012).

Tanım 2.2.21 M bir R-modül, N, M nin bir alt modülü olsun.

$$M/_N = \{m + N : m \in M\}$$

kümesi bir R-modüldür. Böyle bir modüle M nin N ile olan bölüm modülü denir (Alizade ve Pancar, 2010).

Önerme 2.2.22 M bir sağ R-modül ve I, R nin bir ideali olsun. M R-modülünün devirli olması için gerek ve yeter koşul $M \cong R/R$ olmasıdır (Rotman, 2009).

Tanım 2.2.23 M bir R-modül olmak üzere, M nin alt modülleri yalnızca $\{0\}$ ve M ise M R-modülüne indirgenemez (irreducible) R-modül denir (Aydın, 2012).

Tanım 2.2.24 Sıfırdan farklı bir M modülü için, eğer M modülü, $\{0\}$ öz alt modülünden başka öz alt modül içermiyor ise M ye basit modül denir (F. Kasch, 1982).

Teorem 2.2.25 M bir R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. N nin maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul M/N bölüm modülünün bir basit modül olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.2.26 M bir basit modül olmak üzere, $0 \neq m \in M$ yardımıyla oluşturulan her devirli mR alt modülü için $mR = M$ dir (Pancar ve Türkmen, 2011).

Tanım 2.2.27 M bir modül olmak üzere M nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M nin radikali denir ve Rad$(M) = \{\cap K : K, M$ nin maksimal alt modülü$\}$ ile gösterilir (Anderson ve F.W. Fuller, 1992).

Tanım 2.2.28 M bir R-modül olmak üzere M nin basit alt modüllerinin toplamına, M nin sokulu denir ve Soc$(M) = \sum\{K : K, M$ nin basit alt modülü$\}$ şeklinde gösterilir (Anderson ve F.W. Fuller, 1992).

Teorem 2.2.29 Bir M sağ R-modülü için aşağıdakiler birbirine denktir.

i. M nin her alt modülü basit alt modüllerin bir toplamıdır,
ii. M, basit alt modüllerin bir toplamıdır,
iii. M, basit alt modüllerin bir direkt toplamıdır,
iv. M nin her alt modülü, M'nin bir direkt toplamıdır (Rotman, 2009).

Tanım 2.2.30 Teorem 2.2.29 daki koşullardan herhangi birini sağlayan R-modülüne yarı basit modül denir (Rotman, 2009).

Örnek 2.2.31 M yarı basit modül ise Soc$(M) = M$ dir.

Tanım 2.2.32 M bir R-modül ve N, M nin bir alt kümesi olsun. Ann$(N) = \{r \in R : rn = 0,$ her $n \in N\}$ kümesi R halkasının bir idealidir. Bu ideale N kümesinin sıfırlayanı denir ve Ann(N) şeklinde gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.33 M boştan farklı bir R-modül olsun. M, R-modülünün basit modül olması için gerekli ve yeterli koşul sıfır olmayan her $m \in M$ için, $M \cong R/$Ann(M) izomorfizması ve Ann(M) idealinin, R nin maksimal ideali olmasıdır (D. W Sharpe ve P. Vamos, 1972).

Tanım 2.2.34 R değişmeli bölge ve M bir R-modül olsun. Sıfırdan farklı en az bir $r \in R$ için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanı var ise m ye M nin burulma elemanı denir. M nin bütün burulma elemanlarının kümesi T(M) ile gösterilir. T(M) burulma kümesi M nin bir alt modülüdür ve T(M) ye M modülünün burulma alt modülü denir. Eğer T$(M) = M$ oluyor ise M modülüne burulma modülü, T$(M) = 0$ oluyor ise M ye burulmasız modül denir (Wisbauer, 1991).

Burulma modülünün değişmeli olmayan halkalardaki bir genellemesi tekil modüllerdir.

Tanım 2.2.35 M bir sağ R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. M nın boştan farklı her K alt modülü ile N alt modülünün arakesiti sıfırdan farklı ise N ye M nin bir büyük (essential) alt modülü denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir. M ise N nın büyük genişlemesi (essential extension) olarak adlandırılır. Eğer N nın M de öz (proper) genişlemesi yok ise N alt modülüne M de kapalı denir (Kasch, 1982).

Tanım 2.2.36 M bir sağ R-modül olsun. M nın $\{ m \in M : R$ nin bazı I büyük alt modülleri için $mI = 0$ dir$\}$ alt kümesine, M nin tekil elemanlarının kümesi denir ve $Z(M)$ ile gösterilir. $Z(M)$, M nin tekil alt modülü olarak adlandırılır. Tekil alt modüller burulma gruplarının genellemesidir. M

modülüne $Z(M) = 0$ ise tekilsiz modül denir ve eğer $Z(M) = M$ ise tekil modül denir. R nin sağ tekil ideali $Z_r(R) = \mathrm{Z}(R_R)$ dir. M modülünün ikinci tekil (veya Goldie burulma) alt modülü $Z_2(M)$, $Z_2(M)/\mathrm{Z}(M) = Z\left(M/\mathrm{Z}(M)\right)$ eşitliği ile tanımlanır. $Z_2(M) = M$ ise, M modülüne Goldie burulma modülü denir (Dung, 1990).

2.3 Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 ***X*** ve Y iki R-modül olsun. $\mathrm{f} : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $r \in R$ için;

i. $\mathrm{f}(x + y) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y)$

ii. $\mathrm{f}(rx) = r\mathrm{f}(x)$

koşulları sağlıyor ise f dönüşümüne R-modül homomorfizması denir ve X den Y ye bütün modül homomorfizmlerin kümesi $\mathrm{Hom}_R(X, Y) = \{\mathrm{f} : X \to Y \mid \mathrm{f}$ bir R-modül homomorfizması$\}$ ile gösterilir. Eğer $X = Y$ oluyor ise, $\mathrm{Hom}_R(X, X) = \mathrm{End}_R(X) = \{\mathrm{f} : X \to X \mid \mathrm{f}$ bir R-modül homomorfizması$\}$ (endomorfizma) ile gösterilir (Rotman, 2009).

Önerme 2.3.2 ***X*** ve Y iki R-modül $\mathrm{f} : X \to Y$, R-modül homomorfizma olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır.

$\mathrm{f}(0_X) = 0_Y$, $x \in X$ için, $\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$, $x, y \in \mathrm{X}$ için, $\mathrm{f}(x - y) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(y)$ olur (Aydın, 2012).

Tanım 2.3.3 ***X*** ve Y iki R-modül ve f: $X \to Y$ bir R-modül homomorfizmi olsun.

i. $\{x \in X : \mathrm{f}(x) = 0_Y\}$ kümesine f nin çekirdeği denir ve Çekf ile gösterilir.

ii. $\mathrm{f}(M) = \{\mathrm{f}(x) : x \in X\}$ kümesine f altında M nin homomorfik görüntüsü denir ve Görf ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 2010).

Örnek 2.3.4 ***M*** bir R-modül ve $N \leq M$ bir alt modül olsun. $f : M \to M/N$ dönüşümünü $f(a) = a + N$ şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm, Gör$f = M/N$, Çek$f = N$ olmak üzere bir R-modül homomorfizmidir (Aydın, 2012).

Tanım 2.3.5 ***X*** ve Y iki R-modül ve $f: X \to Y$ bir modül homomorfizması olsun.

i. f birebir ise f ye bir R-modül monomorfizması,

ii. f örten ise f ye bir R-modül epimorfizması,

iii. f birebir ve örten ise f ye bir R-modül izomorfizması,

denir. Eğer f bir izomorfizma oluyor ise X ile Y izomorftur denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir (Aydın, 2012).

Önerme 2.3.6 $f: X \to Y$ bir R-modül homomorfizması olsun.

i. f bir monomorfizmadır ancak ve ancak Çek$f = \{0\}$,

ii. f bir epimorfizmadır ancak ve ancak Gör$f = Y$

olur (Aydın, 2012).

Önerme 2.3.7 $f: X \to Y$ bir R-modül izomorfizması olsun. O zaman, $f^{-1}: Y \to X$, bir R-izomorfizmadır (Aydın, 2012).

Önerme 2.3.8 X ve Y iki R-modül ve $f: X \to Y$ bir R-modül homomorfizmi olsun.

i. Çek$f$, X in alt modülüdür,
ii. Görf, Y nin alt modülüdür (Aydın, 2012).

Önerme 2.3.9 R bir halka ve X, bir R-modül olsun.

i. X, R -modülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak bir $n \in \mathbb{N}$ için $\pi: R^n \to X$ epimorfizması vardır.
ii. X sonlu üretilmiş ve ß: $X \to Y$ bir R-modül epimorfizmi ise Y bir R-modül olarak sonlu üretilmiştir (Rotman, 2009).

Teorem 2.3.10 (Modüller için 1. İzormorfizm Teoremi) X, Y birer R-modül ve $f: X \to Y$ R-homomorfizmi olsun. Her $x \in$ X için $f'(x + \text{Çek}f) = f(x)$ şeklinde tanımlı, $f': {}^{X}/_{\text{Çek}f} \to$ Görf dönüşümü bir izomorfizmdir. ${}^{X}/_{\text{Çek}f}$ ve Görf izomorfiktir denir ve ${}^{X}/_{\text{Çek}f} \cong$ Görf şeklinde gösterilir (Alizade ve Pancar, 2010).

Teorem 2.3.11 (Modüller için 2. İzomorfizm Teoremi) K bir R-modül ve T ve S, K nın alt modülleri olsun. O halde, $T \leq S$ için S/T nin K/T nin alt modülü olduğu açıktır. Dolayısıyla; her $k \in K$ için

$$f: {}^{(K/T)}\Big/_{(S/T)} \to K/S$$

dönüşümü $f\big((k + \text{T}) + S/T\big) = k + S$ tanımıyla bir izomorfizmdir (Rotman, 2009).

Teorem 2.3.12 (Modüller için 3. İzomorfizm Teoremi) G bir R-modül ve X, Y de G nin alt modülleri olsun. Her $x \in X$ için $f(x + X \cap Y) = m + Y$ olacak şekilde tanımlansın. O halde, $f: X/(X \cap Y) \to (X + Y)/Y$, f dönüşümü bir izomorfizmdir (Rotman, 2009).

2.4 Kısa Tam Diziler

Tanım 2.4.1 Modüllerin ve modül homomorfizmalarının bir $\ldots \to M_{\text{n}+1} \xrightarrow{f_{\text{n}+1}} M_{\text{n}} \xrightarrow{f_{\text{n}}} M_{\text{n}-1} \to \ldots$ dizisi, her n $\in \mathbb{Z}$ tam sayısı için Çek$f_{\text{n}} =$ Gör$f_{\text{n}+1}$ oluyor ise tam dizi (exact sequence) olarak adlandırılır (Rotman, 2009).

Dizilerde sıfır modülü $\{0\}$ yerine "0" kullanılır.

Önerme 2.4.2 M ve N bir R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1. $0 \to M \xrightarrow{f} N$ bir tam dizidir ancak ve ancak f bir monomorfizmadır,
2. $M \xrightarrow{g} N \to$ 0 bir tam dizidir ancak ve ancak g bir epimorfizmdir,

3. $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ bir tam dizidir ancak ve ancak f bir izomorfizmadır.

Önerme 2.4.3 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ dizisinin, tam dizi olması için gerek ve yeter koşul;

i. f birebirdir ($\text{Çek} f = \{0\}$),
ii. $\text{Gör} f = \text{Çek} g$,
iii. g örtendir ($\text{Gör} g = P$) (Rotman, 2009).

Tanım 2.4.4 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ şeklindeki tam dizilere kısa tam diziler (short exact sequences) denir (Alizade ve Pancar, 2010).

Tanım 2.4.5 $0 \to \text{M} \xrightarrow{f} N$ ve $N \xrightarrow{g} M$ homomorfizmaları için $g \circ f = 1_M$ sağlanıyor ise f homomorfizmine ayrılabilir (split) monomorfizma, g homomorfizmine ise ayrılabilir (veya parçalanabilir) epimorfizma denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.4.6 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ kısa tam dizi olsun. f homomorfizması ayrılabilir (split) monomorfizma ve g homomorfizması ayrılabilir epimorfizma ise bu diziye ayrılabilir kısa tam dizi denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.4.7 $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ kısa tam dizi olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. Yukarıdaki dizi ayrılabilir,
ii. $f : M_1 \to M$ monomorfizması ayrılabilirdir,
iii. $\text{g} : M \to M_2$ epimorfizması ayrılabilirdir,
iv. Her p: $M_1 \to H$ homomorfizması için $\overline{p} f = p$ olacak şekilde $\overline{p} : M \to H$ homomorfizması vardır,
v. Her p: $N \to M_2$ homomorfizması için $g\overline{p} = p$ olacak şekilde $\overline{p} : N \to M$ homomorfizması vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

2.5 Projektif ve İnjektif Modüller

Teorem 2.5.1 F bir modül, $X = \{x_k : k \in K\}$ de F modülünün bir alt kümesi olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. Her $r_k \in F$ elemanı sonlu sayıda, sıfırdan farklı r_k katsayıları olmak üzere, tek türlü olarak $\alpha = \sum_{k \in K} r_k x_k$ biçiminde yazılabilir ve böyle bir toplama sonlu toplam adı verilir,
ii. Her $k \in K$ elemanı için $\text{f}_k(r) = r x_k$ biçiminde tanımlanmış $\text{f}_k : R \longrightarrow R x_k$ fonksiyonu bir izomorfizma olup, $F \cong \oplus R x_{k\,(k \in K)}$ dir (Alizade ve Pancar, 2010).

Tanım 2.5.2 Teorem 2.5.1'deki koşullardan herhangi birini sağlayan F modülüne serbest (free) modül, ayrıca $X = \{x_k : k \in K\}$ kümesine ise F modülünü serbest üreten (free generating) tabanı denir (Rotman, 2009).

Örnek 2.5.3 R bir cisim olsun. R üzerindeki her sonlu boyutlu vektör uzayı serbest R-modüldür. Serbest bir $\mathbb{Z}$-modülü, serbest değişmeli (abelian) grup olarak adlandırılır. Her R halkası için R halkası kendi üzerinde bir sağ (ve sol) R-modül ise bu modül bir serbest R-modüldür.

Serbest bir modülün tabanı ile bir vektör uzayının tabanı güçlü bir benzerliğe sahiptir. Eğer k bir cisim ise, o zaman her V_k vektör uzayının Lineer Cebir anlamında bir tabanı vardır. Bu durumda iki temel kavramının örtüştüğünü görmek kolaydır. Ayrıca, bir vektör uzayı V_k sonlu üretilmiş bir serbest k-modüldür ancak ve ancak V_k sonlu boyutludur.

Teorem 2.5.4 Her M modülü, serbest bir modülün bölüm modülüne izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.5.5 $\emptyset \neq R$ halkası değişmeli bir halka olsun.

1. Serbest bir R-modül F nin herhangi iki tabanı aynı kardinaliteye sahiptir,
2. Serbest F ve G R-modülleri birbirine izomorfiktir ancak ve ancak her birinin tabanlarının kardinalitesi aynıdır,
3. Eğer m ve n doğal sayılarsa, $R^m \cong R^n$ ancak ve ancak $m = n$ dir.

Tanım 2.5.6 K bir R-modül olmak üzere, her $g : \mathrm{M} \to N$ epimorfizması ve her $f : \mathrm{K} \to N$ homomorfizması için $f = g \circ \mathrm{h}$ koşulunu sağlayan bir $\mathrm{h} : \mathrm{K} \to M$ homomorfizması bulunuyorsa, K R-modülüne projektif modül denir. Denk olarak,

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \swarrow & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \end{array}$$

şeklindeki diyagram değişmeli, yani $g \circ h = f$ olacak biçimde bir $h : K \to M$, R-modül homomorfizması varsa, K R-modülüne projektif modül denir (Rotman, 2009).

Önerme 2.5.7 ***H*** bir R-modül olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. H projektiftir,

ii. Her $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} H \to 0$ kısa tam dizisi ayrılabilirdir (Rotman, 2009).

Teorem 2.5.8 Her serbest R-modül bir projektif R-modüldür (Rotman, 2009).

Önerme 2.5.9 Her basit sağ R-modül ya projektiftir ya da tekildir.

Önerme 2.5.10 ***P*** projektif modül olsun. Her A R-modülü için bir g : $P \rightarrow A$ epimorfizması vardır.

Teorem 2.5.11 $\{M_i\}_{i\in I}$ kümesi R -modüllerin bir kümesi olmak üzere, her $i \in I$ için $\oplus M_i$ projektiftir ancak ve ancak her M_i projektiftir.

Tanım 2.5.12 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için M ve N sonlu üretilmiş ve N serbest modül ise P ye sonlu gösterime sahip modül denir (Rotman, 2009).

Tanım 2.5.13 ***J*** bir R-modül olmak üzere, her g : M $\rightarrow$ N monomorfizması ve her f : M $\rightarrow$ J homomorfizması için f = h ∘ g olacak şekilde bir h : N $\rightarrow$ J homomorfizması bulunuyorsa, J R-modülüne injektif modül denir. Denk olarak,

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow M & \xrightarrow{g} & N \\ & f \downarrow \swarrow h & \\ & J & \end{array}$$

şeklindeki diyagram değişmeli oluyor ise, yani h ∘ $g = f$ olacak şekilde h : N $\rightarrow$ J, R-modül homomorfizması bulunabiliyor ise, J ye injektif modül denir (Rotman, 2009).

Önerme 2.5.14 ***I*** injektif bir modül olsun. Her M R-modülü için f : $M \rightarrow I$ monomorfizması vardır.

Önerme 2.5.15 Her R-modül M, injektif bir R-modül içine gömülebilir.

Tanım 2.5.16 R halkası sağ (ve sol) Artin, sol (ve sağ) injektif halka ise R halkasına Quasi-Frobenius (QF) halka denir (Nicholson ve Yousif, 2003).

Teorem 2.5.17 R halkası QF tir ancak ve ancak aşağıdaki denk koşullardan birini sağlar:

i. R injektif sağ R-modüldür ve R sağ veya sol Artin halkasıdır,
ii. Her injektif sağ R-modül projektif sağ R-modüldür,
iii. Her projektif sağ R-modül injektif sağ R-modüldür (Nicholson ve Yousif, 2003).

Tanım 2.5.18 Bir R halkasının her sağ (ve sol) ideali projektif oluyor ise R halkasına sağ (ve sol) kalıtsal (hereditary) halka denir (Rotman, 2009).

Örnek 2.5.19 Her serbest grubun alt grubu da serbest olduğundan dolayı $\mathbb{Z}$ kalıtsal halkadır.

Teorem 2.5.20 Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir.

i. R halkası sağ kalıtsal halkadır,
ii. M projektif R-modül ise M nin her alt modülü projektiftir,
iii. N injektif R-modül ise N nin her bölüm modülü injektiftir (Rotman, 2009).

Tanım 2.5.21 M bir R-modül ve N sonlu gösterime sahip R-modül olsun.
Her $g: X \rightarrow M$, örten homomorfizması ve $f: N \rightarrow M$ homomorfizması için $gh = f$ olacak şekilde $h: N \rightarrow X$, homomorfizması varsa M ye düz (flat) modül denir (Rotman, 2009).

Önerme 2.5.21 Her projektif R-modül bir düz (flat) modüldür (Rotman,2009).

Tanım 2.5.22 Her sağ düz R-modül projektif oluyor ise o halde, R halkasına mükemmel (perfect) halka denir (Goodearl,1976).

Tanım 2.5.23 Bir R halkası üzerinde, sağ R-modülü projektif veya sağ R-modüllerin her $0 \rightarrow \mathbf{M} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ dizisi ayrılabilir bir kısa tam dizi oluyor ise R halkasına yarı basit halka denir (Alizade ve Pancar, 2010).

3. PROJEKTİF OLMAYAN MODÜLLER ARASINDA SIFIRDAN FARKLI HOMOMORFİZMALARA SAHİP OLAN HALKALAR

Bu bölümde, projektif olmayan modüller arasındaki homomorfizmalar aracılığıyla halkaların sınıflandırılması ile ilgili yapılan çalışmalardan esinlenerek tanımladığımız iki özellik yardımıyla halkaların sınıflandırılması çalışılmıştır.

Tüm projektif sağ R-modüllerin sınıfını $\mathcal{P}$ ile gösterelim. R-modüllerin (T) özelliği Türkoğlu (2022) çalışmasında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

(T): Her $A, B \in$ Mod-$R \setminus \mathcal{P}$ için $\mathrm{Hom}(B, A) \neq 0$.

(T) özelliğine sahip halkalar yakın tarihte yayınlanan Türkoğlu (2022) makalesinde çalışılmıştır. (T) özelliğine sahip halkaların incelenmesinde, basit tekil modüller önemli bir rol oynamışlardır. Bu nedenle, (T) özelliğinin zayıflatılmış iki versiyonunu, basit tekil modüllerin sınıfı $\mathcal{S}$ kullanarak, aşağıdaki gibi tanımladık.

(T1): Herhangi bir $B \in$ Mod-$R \setminus \mathcal{P}$ ve herhangi bir $A \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(B, A) \neq 0$.

(T2): Herhangi bir $B \in$ Mod-$R \setminus \mathcal{P}$ ve herhangi bir $A \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$.

3.1 (T1) ve (T2) Özelliklerine Sahip Halkalar

Önerme 3.1.3 (T1) veya (T2) özelliklerinden birini sağlayan R halkası, yalnız bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit sağ R-modüle sahiptir.

Kanıt. R nin (T1) veya (T2) özelliğini sağladığını varsayalım. $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \ncong B$ olsun. Varsayımımızdan $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$ olur. Basit modüllerin özelliklerinden dolayı, A dan B ye bir izomorfizm vardır. Bu ise varsayımımız ile çelişir. O halde, R yalnız bir tekil basit sağ R-modüle sahiptir. ■

Tanım 3.1.4 Bir modülün her öz (proper) alt modülü, modülün maksimal bir alt modülü tarafından kapsanıyor ise (veya içeriliyor ise) bu modüle eş atomik (coatomic) modül denir (Kasch, 1982).

Örnek 3.1.5 Yarı basit modüller, sonlu üretilmiş modüller birer eş atomik modüllerdir.

Önerme 3.1.6 Bir M modülü yarı basittir ancak ve ancak M eş atomiktir ve her maksimal alt modülü direkt toplam terimidir.

Kanıt. M yarı basit ise, M modülünün eş atomik olduğu açıktır. Yeter durum için, M nin yarı basit olmadığını varsayalım. Diğer bir deyişle, $\mathrm{Soc}(M) \neq M$ olsun. M eş atomik olduğundan, M nin $\mathrm{Soc}(M) \leq K$ olacak biçimde maksimal bir alt modülü vardır. Kabülümüz gereği; M nin, $M = K \oplus N$ olacak şekilde bir N alt modülü vardır. $N \cong M/K$ basit olduğundan, $\mathrm{Soc}(M) = \mathrm{Soc}(K) \oplus N \subset K$ olur. Dolayısıyla M yarı basittir. ■

Tanım 3.1.7 Boştan farklı her sağ R-modülün maksimal bir alt modülü varsa, R ye sağ maks halka denir. Buna eşdeğer olarak R halkasının bir sağ maks halka olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her sağ R-modülü eş atomiktir (Anderson and Fuller, 1992).

Önerme 3.1.8 Bir R halkası (T1) özelliğini sağlar ancak ve ancak R yalnız bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit sağ R-modüle sahip maks halkadır.

Kanıt. Genel olarak her projektif sağ (ve sol) R-modülün maksimal bir alt modülü olduğu iyi bilinmektedir. Bu yüzden, projektif olmayan modüllerin bir maksimal alt modülü olduğunu göstermemiz yeterlidir. R nin (T1) özelliğini sağladığını varsayalım. O halde, Önerme 3.1.3'den R nin S adını vereceğimiz yalnız bir tekil basit sağ R-modülü vardır. A projektif olmayan bir sağ R-modül olsun. Varsayım gereği; $\mathrm{Hom}(A, S) \neq 0$ dır. O zaman A nın, $A/N \cong S$ olacak şekilde N maksimal alt modülü vardır. Tersine projektif olmayan bir A sağ R-modülü için $\mathrm{Hom}(A, S) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu, A nın her maksimal alt modülünün direkt toplamı olduğunu söylemeye eşdeğerdir. Diğer taraftan, R maks halkadır ve dolayısıyla A eş atomiktir. O halde A, Önerme 3.1.6 gereği yarı basit olmalıdır. $\mathrm{Hom}(A, S) = 0$ olduğundan, A projektif basit modüllerin direkt toplamıdır. Bu ise A nın projektif olmadığı varsayımı ile çelişmektedir. ■

Şimdi (T1) özelliğinin iyi bilinen, (T) özelliğinin bir genellemesi olduğunu göstermek için bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.1.9 (T) özelliğini sağlayan halkalar (T1) özelliğini sağlar ancak tersi her zaman doğru değildir. K bir cisim, $\mathrm{L} = \prod_{i\in\mathbb{N}} K$, $J = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} K$ ve R, L nin 1 ve J tarafından üretilen alt cebiri olsun. O halde; $Z(R) = 0$, $J = \mathrm{Soc}(R)$ ve J, R nin bir maksimal esas idealidir (Goodeal, 1976) öyle ki R/J ye izomorfik olacak şekilde yalnız bir tekil basit S modülü vardır.

$$\Lambda = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a \in R, b \in S\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada Λ, bir sağ maks halkasıdır. Ayrıca, $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ modülüne izomorf yalnız bir tekil basit sağ R-modüle sahiptir, Λ halkası (T) özelliğini sağlamaz (Türkoğlu, 2022). Fakat Λ, Önerme 3.1.8 gereği (T1) özelliğini sağlar.

Örnek 3.1.9'de (T1) özelliğinin (T) özelliği için yeter fakat gerek olmadığını gözlemledik. Tersi için (T2) özelliğine ihtiyacımız var.

Önerme 3.1.10 Bir R halkası (T) özelliğini sağlar ancak ve ancak R halkası (T1) ve (T2) özelliklerini sağlar.

Kanıt. (T) özelliğine sahip R halkasının, (T1) ve (T2) özelliklerini sağladığı aşikardır. Tersi için, A ve B, $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ olacak şekilde projektif olmayan sağ R-modüller olsun. (T1) özelliğinden dolayı herhangi bir $S \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(A, S) \neq 0$ dir. Dolayısıyla bir $0 \to \mathrm{Ker}f \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{f} S \to 0$ tam dizisi vardır. O halde, $0 \to \mathrm{Hom}(S, B) \to \mathrm{Hom}(A, B) = 0 \ldots$, olacak şekilde bir tam dizi vardır. Buradan, her $S \in \mathcal{S}$ için, $\mathrm{Hom}(S, B) = 0$ olduğu elde edilir. Bu durum R halkasının (T2) özelliği ile çelişir. ■

Önerme 3.1.11 $\mathbb{M}$ sağ R-modüllerin bir sınıfı olmak üzere, aşağıdakiler birbirine denktir.

1. Her $B \in \mathbb{M}$ ve her $A \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$
2. Her $B \in \mathbb{M}$ ve her $A \in \mathcal{C}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$
3. Her $B \in \mathbb{M}$ ve her $A \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$
4. Her $B \in \mathbb{M}$ ve her $A \in \mathcal{C}_a$ için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$

Kanıt. 4) ⇒ 3) ⇒ 2) ⇒ 1) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_{\mathrm{a}}$ kapsamları aracılığıyla doğrudan elde edilir.
1) ⇒ 4): Bir $B \in \mathbb{M}$ ve $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{a}}$ için $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde; A projektif olmayan eş atomik R-modül olduğundan, Önerme 3.1.6'den bir $S \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(A, S) \neq 0$ olur. $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(A, S)$ olsun. S basit olduğundan f epimorfizmdir ve bir $0 \to \mathrm{Ker} f \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{f} S \to 0$ tam dizisi vardır. Bu tam diziye $\mathrm{Hom}(-, B)$ funktorunu uygulayalım. $0 \to \mathrm{Hom}(S, B) \to \mathrm{Hom}(A, B) = 0 \ldots$ dizisini elde ederiz. Dolayısıyla; bir $S \in \mathcal{S}$ için $\mathrm{Hom}(S, B) = 0$ olur. Bu durum 1) ile çelişir. ■

Tanım 3.1.12 Her basit sağ R-modül, R içerisine gömülebiliyor ise R ye sağ Kasch halka denir (Jain ve Rizvi, 1997).

Aşağıdaki Sonuç, Önerme 3.1.11'den $\mathbb{M} = \{R_R\}$ alınarak kolayca gösterilebilir.

Sonuç 3.1.13 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1. R bir sağ Kasch halkadır,
2. Her $A \in \mathcal{C}$ için $\mathrm{Hom}(A, R) \neq 0$,
3. Her $A \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{Hom}(A, R) \neq 0$,
4. Her $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{a}}$ için $\mathrm{Hom}(A, R) \neq 0$.

Bir M modülü Artindir ancak ve ancak (I) M nin sıfır olmayan her bölüm modülü basit bir alt modül içerir ve (II) M nin her bölüm modülünün sokulu sonlu üretilmiştir.

Tanım 3.1.14 Bir M modülü yukarıdaki (I) özelliğini sağlıyor ise M ye yarı-Artin modül denir. Her sağ R-modülü yarı-Artin olan R halkasına sağ yarı-Artin halka denir (B. Stensröm, 2012).

Tanım 3.1.15 Her devirli tekil sağ R-modül yarı-Artin ise R ye sağ C-halka denir (B. Stensröm, 2012).

Örnek 3.1.16 Sağ yarı-Artin ve sol mükemmel halkalar, sağ C −halkaları örnekleridir.

Tanım 3.1.17 M bir modül olmak üzere, $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ koşulunu sağlayan $Z_2(M)$ alt modülüne M nin ikincil (veya Goldie burulmalı) alt modülü denir (Dung, 1990).

Önerme 3.1.18 Herhangi bir $A \in \mathcal{S}$ ve sıfırdan farklı her B sağ R-modülü için $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$ dır ancak ve ancak R yalnız bir tekil basit sağ R-modüle sahip sağ Goldie burulmalı sağ yarı-Artin halkadır. Özel olarak, R bir sağ Kasch halkadır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\boldsymbol{A}, B \in \mathcal{S}$ için $A \ncong B$ olsun. Varsayımımızdan dolayı Hom$(A, B) \neq 0$ olur. Basit modüllerin özelliklerinden A dan B ye olan her homomorfizma bir izomorfizmadır, çelişki. Dolayısıyla, R nin S adını vereceğimiz bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit sağ R-modülü vardır. Kabulümüzden, Hom$(S, R) \neq 0$ olduğunu not edelim. A basit sağ R-modül olsun. $A \cong S$ veya $A \ncong S$ durumları vardır. İlk durumda, Hom$(S, R) \neq 0$ olduğundan A, R içine gömülür. İkinci durumda, S nin tek olmasından dolayı, A projektiftir ve dolayısıyla R nin direkt toplam terimine izomorftur. Bu yüzden, R sağ Kasch halkasıdır. R sağ Goldie burulmalı halka olmasın, yani $Z_2(æR) \neq R$ olduğunu varsayalım. Hipotez gereği, $R/Z_2(R) \neq 0$ ve Hom$(S, R/Z_2(R)) \neq 0$ olur. $R/Z_2(R)$ bölüm modülünün tekilsiz modül olduğunu not edelim. Fakat, S tekil olduğundan Hom$(S, R/Z_2(R)) = 0$ olup çelişki elde edilir. Bu yüzden R sağ Goldie burulma olur. Şimdi, R halkasının bir sağ yarı-Artin halka olduğunu göstereceğiz. M sıfırdan farklı sağ R-modül olsun. Hom$(S, M) \neq 0$ olduğundan, M nin S basit modülüne izomorfik basit alt modülü vardır.

($\Longleftarrow$) R nin yalnız bir tekil basit sağ modüle sahip sağ Goldie burulmalı sağ yarı-Artin halka olduğunu varsayalım. R sıfırdan farklı sağ R-modül olsun. B Goldie burulmalı ve yarı-Artin modüldür. Bundan dolayı; B nin tekil (veya Goldie burulmalı) basit alt modülü J vardır. S nin tekliğinden (uniqueness) $S \cong J$ ve bu yüzden Hom$(S, B) \neq 0$ olur. ■

Önerme 3.1.19 Her sağ R-modül $B \in$ Mod-$R\backslash\mathbb{N}$ ve her $A \in \mathcal{S}$ için Hom$(A, B) \neq 0$ ancak ve ancak R, yalnız bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit sağ R-modüle sahip C-halkasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) Önerme 3.1.18 den, R nin S adını verdiğimiz yalnız bir tekil basit sağ R-modülü vardır. Varsayım gereği S, her basit sağ R-modülü içerisine gömülebilir, ve dolayısıyla R bir sağ C-halkasıdır.

($\Longleftarrow$)R, bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit S sağ R-modüle sahip C-halkası olsun. $X \in$ Mod-$R\backslash\mathbb{N}$ için, $0 \to Z_2(X) \to \boldsymbol{X} \xrightarrow{f} X/Z_2(X) \to 0$ tam dizisini düşünelim. Bu tam diziye Hom$(S, -)$ funktoru uygulayalım. $X/Z_2(X)$ tekilsiz modül olduğundan, Hom$(S, X/Z_2(X)) = 0$ olduğunu not edelim. Dolayısıyla, $0 \to \text{Hom}\big(S, Z_2(X)\big) \to \text{Hom}(S, X) \to 0$ tam dizisi elde edilir. $\text{Hom}\big(S, Z_2(X)\big) \cong \text{Hom}(S, X)$ ve R sağ C-halka olduğundan, Hom$(S, X) \neq 0$ olur. ■

Şimdi (T2) özelliğini sağlayan halkaların karakterizasyonunu verebiliriz. Eğer M nin her B alt modülü için $A \cap B \subseteq Z_2(M)$, $B \subseteq Z_2(M)$ olmasını gerektiriyorsa, M nin A alt modülüne M nin t-büyük alt modülü denir. Eğer M nin C alt modülünün M de öz (proper) t-büyük genişlemesi yok ise C ye M de t-kapalı alt modül denir. Eğer her serbest sağ R-modüllerin, her t-kapalı alt modülü doğrudan toplam ise, R ye $\sum-$t extending denir (Asgari, Haghany, 2011). (Asgari, Haghany, 2011) de gösterildiği üzere; her tekilsiz modül projektiftir ancak ve ancak R sağ $\sum-$t extending halkadır.

Önerme 3.1.20 Bir R halkasının (T2) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul R'nin yalnız bir tekil basit R-modülü olan sağ $\sum-$t extending sağ C-halka olmasıdır.

Kanıt. R nin (T2) özelliğini sağladığını varsayalım. Önerme 3.1.3 gereği, R halkasının S olarak adlandıracağımız yalnız bir tekil basit R-modülü vardır. Sıfırdan farklı N tekilsiz modülünü alalım. Kabulümüzden, $\mathrm{Hom}(S, N) \neq 0$ veya N projektif modüldür. $\mathrm{Hom}(S, N) \neq 0$ ise, S tekil modülü, N tekilsiz modülün bir alt modülüne izomorftur ve bu yüzden $S = \{0\}$ olur. Bu yüzden, N projektif olmak zorundadır. Önerme 3.1.19'da gösterildiği üzere, R sağ C-halkasıdır.

R nin yalnız bir tekil basit S sağ R-modülü olan sağ $\sum -$t extending sağ C-halka olsun. X, projektif olmayan sağ R-modül olsun. R, sağ $\sum -$t extending halka olduğundan, X tekilsiz değildir. $0 \to Z_2(X) \to \boldsymbol{X} \xrightarrow{f} X/Z_2(X) \to 0$ tam dizisini düşünelim. Bu tam diziye $\mathrm{Hom}(S, -)$ funktoru uygulayalım. $X/Z_2(X)$ tekilsiz modül olduğundan, $\mathrm{Hom}(S, X/Z_2(X)) = 0$ olduğunu not edelim. Dolayısıyla, $0 \to \mathrm{Hom}\big(S, Z_2(X)\big) \to \mathrm{Hom}(S, X) \to 0$ tam dizisi elde edilir. $\mathrm{Hom}\big(S, Z_2(X)\big) \cong \mathrm{Hom}(S, X)$ ve R sağ C-halka olduğundan, $\mathrm{Hom}(S, X) \neq 0$ olur. ■

Tüm tekilsiz modüllerin injektif olduğu halkalar sağ t-yarı basit halka olarak adlandırılır (Asgari ve ark., 2013). Benzer şekilde, R halkasının sağ t-yarı basit halka olması için gerek ve yeter koşulun $\frac{R}{Z_2(R_R)}$ yarı basit olmasıdır. Her sağ t-yarı basit halka $\sum -$t extending halkasıdır (Asgari ve ark., 2013, Sonuç 3.6). Bir sonraki örnekte gösterildiği gibi (T) özelliğini sağlayan halkalar sınıfı, (T2) özelliğini sağlayan halkalar sınıfı tarafından kapsanır.

Örnek 3.1.21 (T) özelliğini sağlayan halkaların (T2) özelliğini sağladığı açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. k herhangi bir cisim ve J, k cismi üzerinde tanımlı köşegen üstünde sonlu sayıda girdisi sıfırdan farklı olan sonsuz matrislerin kümesi olsun. 1, köşegenleri 1 (diag(1, 1, 1, …)) olan sonsuz matris olmak üzere, $R = k.1 + J$ olsun. R, yarı basit olmayan yerel sol yarı-Artin halkadır. Bu yüzden; R, bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit sol R-modüle sahip sol C-halkadır. Öte yandan, R, (Diop ve ark., 2022)'e göre bir sol t-yarı basit halkadır ve dolayısıyla her tekil olmayan sol R-modülü, (Asgari ve ark., 2013) ve (Asgari ve Haghany, 2011)'e göre projektiftir. Dolayısıyla; Önerme 3.1.20'den R, (T2) özelliğine sahiptir. Yine (Lam, 2001)'e göre, R bir sol mükemmel halka değildir ve dolayısıyla (Turanbaey, 2003)'e göre R bir sol maks halka değildir. Bu yüzden R, (T1) ve (T) özelliklerini sağlamaz.

Bir sonraki sonuçla, $Z_{\mathrm{r}}(R) \neq 0$ koşulu altında (T2) özelliğini sağlayan halkalar için gerek ve yeter koşulları vereceğiz. Öncelikle aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 3.1.22 ***I***, $(\mathrm{R}/I)_R$ tekilsiz bir halka olacak biçimde R halkasının sağ ve sol ideali olsun. Eğer R halkası (T1) (sırasıyla, (T2)) özelliğini sağlıyor ise R/I (T1) (sırasıyla, (T2)) özelliğini sağlar.

Kanıt. R nin (T1) (sırasıyla, (T2)) özelliğini sağladığını kabul edelim. A projektif olmayan ve B tekil basit R/R-modüller olsun. A nın projektif olmayan R-modül olduğu açıktır. $(R/I)_R$ nin tekilsiz olması, (Goodeal, 1976)'e göre, B nin tekil basit R-modülü olmasını gerektirir. Buradan dolayı, $\mathrm{Hom}_R(B, a) \neq 0$ ($\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq 0$) olur. Sıfırdan farklı R-modül homomorfizmalar, R/I-modülü homomorfizmaları olarak alınabildiğinden, R/I, (T1) (sırasıyla, (T2)) özelliğini sağlar. ■

Tanım 3.1.23 R nin herhangi bir A ve B alt modülü için $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$ ise, M modülüne tek-serili (uniserial) denir. Bir seri (serial) modül, tek-serili modüllerin doğrudan toplamıdır. R_R ve ${}_RR$ modüllerinin her ikisi de seri modüllerse, R ye seri halkası denir (Rotman, 2009).

Örnek 3.1.24 Yarı basit Artin halkaları ve bir cisim üzerindeki üçgensel matris halkaları seri halkalarıdır (Rotman, 2009).

Tanım 3.1.25 N bir R-modül olsun. M, N nin bir alt modülü olmak üzere, eğer M nın N içerisinde aşikar büyük genişlemesi yoksa, o zaman M ye N nin kapalı (closed) alt modülü denir (Lam, 2001).

Tanım 3.1.26 Eğer bir M modülünün her kapalı alt modülü bir doğrudan toplam terimiyse, M modülüne CS-modül (veya genişleyen modül) denir (Dung vd, 1990).

Terorem 3.1.27 $Z_r(R) \neq 0$ olmak üzere, R (T2) özelliğine sahiptir ancak ve ancak R, yalnız bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit R-modülüne sahip ve aşağıdaki iki özelliği sağlayan C-halkasıdır.

i. $Z_2(R_R)$, R_R nin sıfırdan farklı yarı-Artin direkt toplam terimidir ve

ii. $T = \frac{R}{Z_2(R_R)}$ sağ ve sol Artin kalıtsal (hereditary) seri halkasıdır.

Kanıt. $Z_r(R) \neq 0$ olmak üzere, R nin (T2) özelliğine sahip bir halka olduğunu varsayalım. Buradan R, Önerme 3.1.20'den dolayı, yalnız bir tekil basit S R-modülüne sahip C-halkası olur. $\frac{R}{Z_2(R_R)}$ tekilsiz olduğundan dolayı, tekilsiz $\frac{R}{Z_2(R_R)}$ halkası, Önerme 3.1.22'den, (T2) özelliğini sağlar. Bir sonra ki alt bölümde verdiğimiz Teorem 3.2.2'den, (ii) özelliği sağlanır. $\frac{R}{Z_2(R_R)}$ tekilsiz olduğu için, Önerme 3.1.20'den $\frac{R}{Z_2(R_R)}$ projektiftir ve bu yüzden $Z_2(R_R)$, R_R'nin direkt toplam terimidir. Şimdi $Z_2(R_R)$'nin yarı-Artin olduğunu gösterelim. $Z_r(R) \neq 0$ ve R sağ C-halka olduğundan $Z_r(R)$ tekil basit modülü vardır ve bu yüzden $\mathrm{Hom}\big(S, Z_2(R)\big) \neq 0$ olur. $0 \neq K$, $Z_2(R_R)$ nin öz alt modülü olsun. Eğer $Z_2(R_R)/K$ projektif değil ise (T2) özelliğinden $\mathrm{Hom}(S, Z_2(R_R)/K) \neq 0$ ve dolayısıyla $Z_2(R_R)/K$ nın sıfırdan farklı sokulu vardır. Eğer $Z_2(R_R)/K$ projektif ise bir $T \subseteq Z_2(R_R)$ için $Z_2(R_R) = K \oplus T$ olur. $Z_r(R)$, $Z_2(R_R)$ de her zaman esas olduğundan, $Z_r(R) \subsetneq K$ sonucunu elde ederiz. O zaman, $0 \neq a \in Z_2(R_R) - K$ olacak şekilde bir a elemanı vardır. $A = \frac{aR + K}{K} \subseteq Z_2(R_R)/\mathrm{K}$ olsun. $a \in Z_r(R)$ ve $\frac{aR + K}{\mathrm{K}} \cong \frac{aR}{ar \cap K}$ olduğundan, A tekildir. R bir sağ C-halkası olduğundan dolayı, $Z_2(R_R)/\mathrm{K}$ sıfırdan farklı sokula sahiptir. Sonuç olarak $Z_2(R_R)$ yarı-Artindir.

Tersine, B projektif olmayan bir sağ R-modül olsun. (Türkoğlu, 2022)'dekine benzer argümanları uygulayacağız. Eğer $B\, Z_2(R_R) = 0$ ise, $Z_2(R_R) \subseteq \mathrm{Ann}(B)$ olur ve bu yüzden R bir T-modüldür. Öyleyse $B \cong T^{(I)}/\mathrm{L}$ olacak şekilde bir $0 \to L \to T^{(I)} \to B \to 0$ kısa tam dizisi vardır. Eğer L, $T^{(I)}$ de kapalıysa, T bir $\sum - CS$ halkası olduğundan dolayı, L $T^{(I)}$ in direkt toplam terimidir.

Bu ise B nin projektif olmaması ile çelişir. Dolayısıyla bir C vardır ki $L \leq_e C \leq T^{(I)}$ olur. C/L, $T^{(I)}/L$ nin bir tekil alt modülü olduğu için, (Khuri, 1991) den, $Z_T(R) = Z_R(B) \neq 0$ olur. Önerme 3.1.19'dan $\mathrm{Hom}_R(S,B) \neq 0$ dır. Eğer $B\, Z_2(R_R) \neq 0$ ise B, $Z_2(R_R)$ nin sıfırdan farklı bir alt faktörünü içerir, diğer bir deyişle $0 \neq D/E \subseteq Z_2(R_R)$/E vardır öyle ki $D/E \subseteq B$ dir. D/E yarı-Artin olduğu için B, S nin bir kopyasını içerir ve bu nedenle $\mathrm{Hom}_R(S,B) \neq 0$ olur. ■

3.2 (T) Özelliğini Sağlayan Halkalar

Geri çekilebilir (retractable) modüller birçok yazar tarafından çeşitli bakış açılarıyla incelenmiştir. Geri çekilebilir modüllerin önemi, modül kafesleri (Zhou, 1994), sıkıştırılabilir modüller (Smith ve Vedadi, 2008), Baer modülleri (Rizvi ve Rotman, C.S., 2008) ve tekilsiz modüllerin (Khuri, 1991) endomorfizm halkaları çalışmalarıyla bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. Geri çekilebilir modüllerin ikili kavramı Ershad, Amini ve Sharif (2009) makalesinde tanıtılmıştır. A nın herhangi bir öz alt modülü B için $\mathrm{Hom}_R(A/B, A) \neq 0$ ise A, R-modülü tam eş geri çekilebilir (coretractable) olarak adlandırılır. Her sağ R-modül tam eş geri çekilebilir ise, R halkasına CC-halkası denir (Ershad, Amini ve Sharif, 2009). Eş geri çekilebilir (coretractable) modüller ve CC halkaları son zamanlarda birçok yazar (Abyzoy and Tuganbaev, 2016; Ershad ve ark., 2009; Sharpe ve ark., 1972; Turganbaev, 2003) tarafından incelenmiştir.

Bu bölümde, CC halkaları kullanarak (T) özelliğini sağlayan halkaların bazı karakterizasyonlarını bulduk.

Önerme 3.2.1 Eğer R halkası (T) özelliğini sağlıyor ise, her projektif olmayan sağ R-modül eş geri çekilebilirdir.

Kanıt. A projektif olmayan bir sağ R-modül ve B, A nın öz alt modülü olsun. Eğer A/B projektif değil ise, (T) özelliğinden $\mathrm{Hom}(A/B, A) \neq 0$ olur. Eğer A/B projektif ise, $0 \to B \to \boldsymbol{A} \to A/B \to 0$ kısa tam dizisi ayrılabilirdir, dolayısıyla $\mathrm{Hom}(A/B, A) \neq 0$ olur. Bu A nın eş geri çekilebilir olduğu anlamına gelir. ■

Teorem 3.2.2 R, ya $J(R) = 0$ ya da $\mathrm{Soc}(R_R)$ projektif olan bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

i. R, (T) özelliğini sağlar,
ii. R, (T2) özelliğini sağlar,
iii. R, yalnız bir tekil basit sağ R-modülüne sahip sağ ve sol Artin kalıtsal seri halkadır.

Kanıt. (i) ⇒ (ii) açıktır. (ii) ⇒ (iii) Önerme 3.1.20 den her tekilsiz sağ R-modülü projektiftir ve R, yalnız bir tekil basit S sağ R-modüle sahip sağ C-halkadır. O halde ya $\mathrm{Hom}(S, R) = 0$ ya da $\mathrm{Hom}(S, R) \neq 0$ koşullarından birisi gerçeklenir. İkinci durumda; S, $m \in R$ için bir mR minimal idealine izomorftur. Fakat bu durum mümkün değildir. Eğer $\mathrm{J}(R) = 0$ ise, R nin $Rm \nsubseteq J$ olacak şekilde bir J

maksimal sağ ideali vardır ve böylece $Rm \oplus J = R$ olur. Bu durum ise S nin tekilliği ile çelişir. Eğer Soc(R_R) projektif ise Rm de projektif olmalıdır ve bu durum yine S nin tekilliği ile çelişmektedir. İlk durumda R sağ C-halka olduğundan, $Z_2(R_R) = 0$ ve dolayısıyla R sağ tekilsiz halkadır. Elde edilen bulgular ve (Dung, 1990, Sonuç 3.2) aracılığıyla, istenilen sonuç elde edilir.

(iii) ⇒ (i) Bir sağ Artin halkasının, bir sağ C-halkası ve bir sağ maks halkası olduğunu not edelim. Önerme 3.1.20 ve (Dung, 1990)'den R, (T2) özelliğini sağlar. Önerme 3.1.3 den R, (T1) özelliğini sağlar. O zaman Önerme 3.1.10 dan R, (T) özelliğini sağlar. ■

Sonuç 3.2.3 Bir R halka için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. (T) özelliğini sağlayan her R halkası sağ mükemmel halkadır,
ii. $Z_r(R) \neq 0$ koşulu altında (T) özelliğine sahip her R halkası sağ Kasch halkadır.

Kanıt. (i) R nin (T) özelliğini sağladığını kabul edelim. O halde $R/J(R)$, (T) özelliğini sağlar ve böylece Teorem 3.2.2'den $R/J(R)$ sağ Artindir. Bu ise R nin yarı-yerel (semilocal) halka olduğu anlamına gelir. Öte yandan, Önerme 3.1.8'e göre R bir sağ maks halka olduğundan, (Turganbaev, 2003) yardımıyla R bir sağ mükemmel halka olduğu elde edilir.

(ii) R nin $Z_r(R) \neq 0$ koşuluyla (T) özelliğini sağladığını varsayalım. O zaman Önerme 3.1.20'den R, bir (izomorfizmaya bağlı olarak) tekil basit S sağ R-modülü olan C-halkasıdır. $Z_r(R) \neq 0$ ve R sağ C-halka olduğundan, $Z_r(R)$ tekil basit bir modülü içerir ve bu nedenle Hom(S, $Z_2(R)) \neq 0$ olur. $0 \to Z_2(R) \to R \xrightarrow{f} R/Z_2(R) \to 0$ tam dizisini düşünelim. Bu tam diziye Hom(S, $-$) funktoru uygulayalım. $R/Z_2(R)$ tekilsiz modül olduğundan, Hom(S, $R/Z_2(R)) = 0$ olduğunu not edelim. Dolayısıyla $0 \to$ Hom(S, $Z_2(R)) \to$ Hom(S, $R) \to 0$ tam dizisi elde edilir. Hom(S, $Z_r(r)) \cong$ Hom(S, R) olduğundan, Hom(S, $R) \neq 0$ olur. Dolayısıyla R sağ Kasch halkasıdır. ■

$Z_2(R_R) = R$ ise, R halkasına sağ Goldie burulma halkası denir.

Teorem 3.2.4 Bir sağ Goldie burulmalı R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) R, (T) özelliğini sağlar,
(2) R, yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan sağ CC-halkasıdır.

Kanıt. (1) ⇒ (2) A bir sağ R-modül ve B, A nın öz (proper) alt modülü olmak üzere, eğer A projektif değil ise Önerme 3.2.1'den, A eş geri çekilebilirdir. A projektif sağ R-modül olsun. Eğer A/B projektif ise, $\mathrm{Hom}_R(A/B,\ A) \neq 0$ olduğu açıktır. A/B nin projektif olmadığını varsayalım. R sağ Goldie burulmalı halka olduğundan A goldie burulmalı, yani $Z_2(A) = A$ ve dolayısıyla $Z(A) \neq 0$ olur. R, (T) özelliğini sağladığından, R yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan sağ C-halkasıdır.

Bu yüzden, $\mathrm{Hom}(S,S) \neq 0$. Dolayısıyla $\mathrm{Hom}_R(R/B,S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A/B,A)$ monomorfizma olacak şekilde $S \longrightarrow A$ monomorfizması vardır. A/B projektif olmadığından ve R halkası (T) özelliğine sahip olduğundan, $\mathrm{Hom}_R(R/B,S) \neq 0$ olur. Bu $\mathrm{Hom}_R(R/\mathrm{B},A) \neq 0$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, A eş geri çekilebilirdir.

$(2) \Rightarrow (1)$ R nin yalnız bir tekil basit S sağ R-modülü olan sağ CC-halka olduğunu varsayalım. Öncelikle her sonlu üretilmiş tekilsiz sağ R-modülün projektif olduğunu göstereceğiz. M sonlu üretilmiş tekilsiz bir sağ R-modül ve K, M nin maksimal alt modülü olsun. O halde (2) den M eş geri çekilebilir, dolayısıyla $\mathrm{Hom}_R(M/K,M) \neq 0$ olur. M tekilsiz olduğundan ve her tekilsiz modülün alt modülü de tekilsiz olduğundan, M/K tekilsizdir. Fakat M/K basit modüldür, bu yüzden M/K projektif olmak zorundadır. Dolayısıyla, K maksimal alt modülü M de doğrudan toplamdır. Böylece, sonlu üretilmiş M modülünün her maksimal alt modülünün doğrudan toplam terimi olduğunu gösterdik. M sonlu üretilmiş olduğundan, M eş atomik modüldür, ve dolayısıyla Önerme 3.1.16 dan yarı basittir. M tekilsiz ve yarı basit olduğundan, M projektiftir. (Rotman, 2009) yardımıyla, bir X modülünün her sonlu üretilen alt modülü düz ise, X modülünün düz olduğunu hatırlayalım. Bu sonuç yardımıyla, her tekilsiz sağ R-modülünün düz (flat) olduğu sunucuna varıyoruz. R sağ CC-halka olduğundan, (Ershad ve ark., 2009) ve (Abyov ve Turganbaev, 20016)'dan R sağ ve sol mükemmel halkadır, dolayısıyla R tekilsiz sağ R-modülleri projektif olan bir sağ C-halkasıdır. Böylece R, Önerme 3.1.20'den R, (T2) özelliğini sağlar. Ayrıca R bir sağ maks halkası olduğundan, Önerme 3.1.8'den R, (T1) özelliğini sağlar. Önerme 3.1.10 yardımıyla iddiamızı ispatlamış oluyoruz. ■

Bir sonraki teoremde, değişmeli bir halkanın (T) özelliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşulları verdik. İlk önce aşağıdaki iki ara sonucu kanıtlayacağız.

Önerme 3.2.5 Sağ Kasch olmayan bir R halkası, (T2) özelliğine sahiptir ancak ve ancak R yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan sağ ve sol Artin kalıtsal seri halkasıdır.

Kanıt. R, (T) özelliğine sahip, sağ Kasch olmayan bir halka olsun. Önerme 3.1.20'den her tekilsiz sağ R-modül projektiftir ve R yalnız bir tekil basit S sağ R-modülü olan sağ C-halkasıdır. O halde ya $\mathrm{Hom}(S, R) = 0$ ya da $\mathrm{Hom}(S, R) \neq 0$ olmalıdır. $\mathrm{Hom}(S, R) \neq 0$ durumunda, R bir sağ Kasch halkası olup, bu durum ise varsayımımız ile çelişmektedir. $\mathrm{Hom}(S, R) = 0$ durumunda da, R sağ C-halka olduğundan, $Z_2(R_R) = 0$ olur. Dolayısıyla R, tekilsiz sağ halkadır. (Dung, 1990) sonucu yardımıyla, iddiamızı ispat etmiş oluruz. Tersine, R yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan sağ ve sol Artin kalıtsal seri halka ise, Önerme 3.1.20 ve (Dung, 1990)'dan, R halkası (T2) özelliğine sahiptir. ■

Sonuç 3.2.6 Sağ Kasch olmayan bir R halkasının (T2) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul R halkasının (T) özelliğine sahip olmasıdır.

Kanıt. Yeter koşul açıktır. Gereklilik için, R nin Önerme 3.1.10 ve Önerme 3.1.8'den R halkası maks halkasıdır. Böylece Önerme 3.2.5'den, R halkasının (T) özelliğine sahip olduğu ispat edilmiş olur. ■

Son sonucumuzda, değişmeli halkalar üzerinde (T) özelliğini sağlayan halkaların karakterizasyonunu veriyoruz.

Teorem 3.2.7 Değişmeli bir R halkasının (T) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul $R \cong A \times B$ olacak şekilde bir halka ayrışmının (ring decomposition), bir A yarı basit Artin halkası ve aşağıdaki koşullardan birini sağlayan B için var olmasıdır:

(1) B, yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan bir yarı-Artin maks halkasıdır,

(2) B, yalnız bir tekil basit sağ R-modülü olan bir Artin kalıtsal seri halkasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) Önerme 3.1.20'den her tekilsiz R-modülü projektif ve R, yalnız bir tekil basit R-modülü S ye sahip C-halkasıdır. Dolayısıyla, $A = Z_2(R)$ ve $B \cong R/Z_2(R)$ olmak üzere, $R \cong A \times B$ halka ayrışımı vardır. Eğer S bir A-modül ise, o zaman B yarı basit Artindir ve (Türkoğlu, 2022)'den, A halkası (T) özelliğine sahiptir. A halkası Goldie burulmalı olduğundan ve Önerme 3.1.20'den R C-halkasıdır, ve dolayısıyla A yarı-Artindir. Ayrıca Önerme 3.1.8'den, A halkası bir maks halkasıdır. Eğer S bir B-modül ise, A yarı basit Artindir. Yine B, (T) özelliğine sahip olur. Önerme 3.2.5'den B Artin kalıtsal seri halkasıdır.

($\Longleftarrow$) B halkasının (1) koşulunu sağladığını kabul edelim. O zaman, Önerme 3.1.20 ve Önerme 3.1.8'den, B halkası (T) özelliğini sağlar. O zaman, (Türkoğlu, 2022)'den R halkası (T) özelliğine sahiptir. Eğer B halkası (2) koşulunu sağlar ise, Önerme 3.2.5 den B halkası (T) özelliğine sahip olur. (Türkoğlu, 2022)'den R halkası (T) özelliğine sahiptir. ■

4. SONUÇ

Z. Türkoğlu'nun 2022 yılında yayınlanan makalesinde, projektif olmayan her modülün arasında sıfırdan farklı bir homomorfizma var olması ((T) özelliği) koşulu altında halkaların sınıflandırılması çalışılmıştır.

Tezimizde, öncelikle, bu (T) özelliğinin (T1) ve (T2) genellemesi basit modüller aracılığıyla tanıtılmış ve bu iki genellemeleri kullanarak halkaların sınıflandırılması çalışılmıştır. (T), (T1) ve (T2) özelliklerinin birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrı ayrı (T1) ve (T2) özelliklerini sağlayan halkaların sınıflandırılmaları çalışılmıştır. Son olarak, (T) özelliğini sağlayan halkalar ile ilgili bazı açık problemler çözülmüştür.

KAYNAKLAR

Aydın, N. (2012). Modül Teori, https://nesetaydin.files.wordpress.com/2012/03/moduldersnotu.pdf [Son erişim tarihi: 22.05.2023].

Alagöz, Y., Durğun, Y., İzci, K. (2022). On rings admitting nonzero homomorphisms between non-projektif mudues. Comm, Algebra 51(4):1614-1622

Diop, P. C., Diallo, A. D., Tribak, R. (2022). On a generalization of c2-modules. Hacet. J. Math. Stat 52(2):430. DOI: 10.15672/hujms.792212

Abyzov and A. N., Tuganbaev (2016), Retractable and coretractable modules, J. Math. Sci. 213:132-142. DOI: 10.1007/s10958-016-2705-5

Asgari, Sh., Haghany, A. (2011). t-extending modules and t-bear modules, Comm. Algebra 39(5):1605-1623, DOI: 10.1080/00927871003677519

Asgari, Sh., Haghany, A., and Toloei, Y. (2013). T-semisimple modules and T-semisimple rings, Comm. Algebra 41(5):1882-1902. DOI: 10.1080/00927872.2011.653065

Ershad, M., Amini, B., Sharif, H. (2009). Coretractable modules, J. Aust. Math. Soc. 86:289-304. DOI: 10.1017/S1446788708000360

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., and Wisbauer, R. (2006). Lifting modules, Birkhâuser Verlag, Basel.

Dung, N. V. (1990). A note on hereditary ring sor non-singular rings with chain condition, Math. Scand. 266(2):301-306. DOI: 10.7146/math.scand.a-12313

Er, N., and Türkoğlu, Z. (2018). Rings admitting nonzero homomorphisms between non-injective modules, Comm. Algebra 46(9):4052-4063. DOI: 10.1080/00927872.20018.143589

Faith, C. (1976). Algebra. II: Ring theory. Grundlehren Math. Wiss, Bd., Vol. 191. Berlin: Springer.

Goodeal, K. R. (1976). Ring theory: Nonsingular rings and modules, Pure and Applies Mathematics, Vol. 33. New York-Basel: Marcel Dekker, Inc.

Halıcıoğlu, S. ve Üngör, B. (2019). Cebir I-II, Ankara Üniversitesi. https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=1011 (23 Haziran 2023).

Kasch, F. (1982). Modules and Rings, Academic Press İnc., 189-210s Munich Germany.

Khuri, S. M. (1991). Nonsingular retractable modules and their endomorphism rings, Bull. Austral. Math. Soc. 43(1):63-71. DOI: 10.1017/S00049720002877X

Lam, T. Y. (2001). A first course in noncommutative rings, Second, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

Rizvi, S. T., and Roman, C. S. (2009). On direct sums of Baer modules, J. Algebra 321(2):682-696. DOI: 10.1016/j.jabgebra.2008.10.002

Rotman, J. J. (2009). An Introduction to Homological Algebra, Second ed. New York: Springer Science and Business Media.

Smith, P. F. and Vedadi, M. R. (2008). Submodules of direct sums of compressible modules, Comm. Algebra 36(8):3042-3049. DOI: 10.1080/00927870802110854

Sharpe, D. W. and Vamos, P. (1972). İnjective modules, Cambridge at the University Press.

Stenström, B. (2012). Rings of qutients: An introduction to methods of ring theory, Vol. 217. Berlin: Springer Science and Business Media.

Tuganbaev, A. (2003). Max rings and v-rings, Vol. 3, Handbook of Algebra, North-Holland, Amsterdam. DOI: 10.1016/S1570-7954(03)80071-2

Türkoğlu, Z. (2022). Rings with nonzero maps between non-projective modules. Comm. Algebra, DOI: 10.1080/00927872.2021.1998827

Tütüncü, D. K., Ertaş, N. O. and Tribak, R. (2016). A variation of coretractable modules, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 41:1275-1291. DOI: 10.1007/s40840-016-0390-7

Tütüncü, D. K. and Tribak, R. (2019). Retractable and coretractable modules over formal triangular matrix rings. Bull. Iran. Math. Soc. 45:429-445. DOI: 10.1007/s41980-018-0141-7

Üngör, B. (2009). Strongly large and strongly essential submodules. Yüksek Lisans tezi, Ankara Üniversitesi, 97s.

Zemlicka, J. (2013). Completely coretractable rings, Bull. Iran. Math. Soc. 39(3):523-528.

Zhou, Z. (1994). A lattice isomorphism theorem for nonsingular retractable modules, Canad. Math. Bull. 37(1):140-144. DOI: 10.4153/CMB-1994-020-5

Wisbauer, R. (1991). Foundations of modules and ring theory, Gordon and Breach Philadelphia.

ÖZGEÇMİŞ

Kemal İZCİ, orta öğrenimini Mersin Ersoy İlköğretim okulunda tamamladı. Lise eğitimini Mersin'de Zeytinli Bahçe Mesleki ve Anadolu lisesinde tamamladı. 2016'da Çukurova Üniversitesi Matematik bölümüne başladı ve 2020 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2020 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik bölümü yüksek lisansa başladı.