ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Çağatay ÇETİNKAYA

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINA DAYALI İSTATİSTİKSEL GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2019

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINA DAYALI İSTATİSTİKSEL GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

Çağatay ÇETİNKAYA

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 22/11/2019 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof.Dr. Ali İhsan GENÇ DANIŞMAN	Prof.Dr. Güzin YÜKSEL ÜYE	Doç.Dr. Gülsen KIRAL ÜYE
.....	.....	
Doç.Dr. Deniz İNAN ÜYE	Doç.Dr. Fatih KIZILASLAN ÜYE	

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINA DAYALI İSTATİSTİKSEL GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

Çağatay ÇETİNKAYA

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2019, Sayfa: 117
Jüri : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL
: Doç. Dr. Deniz İNAN
: Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

İstatistik güvenilirlik analizi çalışmaları kapsamında, bir bileşenin veya birden fazla bileşenden oluşan sistemlerin çalışır durumda kalma olasılıkları sağ kalım rastgele değişkenleri kullanılarak modellenir. İki yönlü kuvvet (TSP) dağılımı ise sınırlı bir $[a, b]$ aralığında değerler alan ve bir eşik noktasına sahip yaşam süresi verilerini modellemede oldukça kullanışlıdır. Bu çalışma kapsamında, ilk olarak TSP dağılımının temel güvenilirlik göstergeleri ele alınarak, bu dağılıma sahip bir bileşenin zamana bağlı olarak değişimi incelenmiştir. Ayrıca, güvenilirlik ve tehlike oranı tahminleri en çok olabilirlik (ML) ve Bayes yöntemleri kullanılarak farklı kayıp fonksiyonları altında hesaplanmıştır. Ardından, istatistiksel güvenilirlik analizi çalışmalarında önemli bir yer tutan stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği basit ve çok bileşenli sistemler varsayımları altında incelenerek ML ve Bayes tahmin yöntemleri ile elde edilmiştir. Yapılan tüm ML tahminleri için bootstrap güven aralıkları, Bayes tahminleri için ise en yüksek sonsal yoğunluk güven aralıkları Markov zinciri Monte Carlo (MCMC) algoritması yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen tüm hesaplama yöntemleri, simülasyon ve gerçek veri uygulamalarıyla örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bayesyen tahmin, en çok olabilirlik tahmini, gerilim-mukavemet güvenilirliği, iki yönlü kuvvet dağılımı, istatistiksel güvenilirlik analizi

ABSTRACT

PhD THESIS

STATISTICAL RELIABILITY ANALYSIS BASED ON THE TWO-SIDED POWER DISTRIBUTION

Çağatay ÇETİNKAYA

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2019, Pages: 117
Jury : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Assoc. Prof. Dr. Deniz İNAN
: Assoc. Prof. Dr. Fatih KIZILASLAN

Within the scope of the statistical reliability analysis studies, the probability of a component or systems consisting of more than one component to be operational is modeled using survival random variables. The two-sided power (TSP) distribution is useful in modeling life-time data that have values on a limited $[a, b]$ range and have a threshold. In this study, by considering the basic reliability indices of the TSP distribution, change over the time of a component which is modelled by the TSP distribution is examined, firstly. Furthermore, reliability and hazard rate estimates are calculated under different loss functions using maximum likelihood (ML) and Bayesian methods. Then, stress-strength reliability, which has importance in statistical reliability analysis studies, is examined under assumptions of simple and multi-component systems and estimated by ML and Bayesian estimation methods. The bootstrap confidence intervals for all ML estimates and the highest posterior density confidence intervals for Bayesian estimates by using Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithm are obtained. All obtained calculation methods are compared with simulations and exemplified with real data applications

Key Words: Bayesian inference, maximum likelihood estimation, stress-strength reliability, two-sided power distribution, statistical reliability analysis

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Sınırlı bir aralıkta değerler alan bir ömre sahip bileşenlerin/sistemlerin yaşam sürelerini modelleyebilmek amacıyla, ilk defa Mance ve ark. (2017) tarafından güvenilirlik özellikleri incelenen iki yönlü kuvvet (TSP) dağılımı, bu tez çalışması kapsamında daha detaylı bir şekilde ele alınmıştır. TSP dağılımının standart formu, STSP, dağılımı kullanılarak, $[0,1]$ değer aralığında tanımlı ve genellikle standartlaştırma/ölçeklendirme gibi işlemler sonucunda elde edilen yaşam sürelerine sahip bileşenlerin/sistemlerin istatistiksel güvenilirlik özellikleri incelenmiştir.

İlk aşamada, STSP dağılımına sahip bir bileşenin güvenilirlik, tehlike fonksiyonu, ortalama tükeniş zamanı ve benzeri temel güvenilirlik göstergeleri elde edilerek zamanla nasıl bir davranış gösterdiği incelenmiştir. Bu değişimlerin, parametrelerin farklı durumlarına göre sonuçları irdelenerek STSP dağılımının sağkalım değişkenleri arasında hangi tür bir yapıda olduğu tespit edilmiştir. Bu tespitler, STSP dağılımına sahip bir bileşenin/sistemin bakım ve onarım çalışmalarında, sistemler hakkında daha doğru stratejiler oluşturulmasında oldukça önemlidir. Ardından, en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılarak güvenilirlik ve tehlike oranı tahmin çalışmaları yapılmıştır. Farklı zaman noktalarında, bir bileşenin güvenilirliği ve tehlike oranı tahmin edilmiş ve tahminlerin beklenen riskleri farklı kayıp fonksiyonları altında hesaplanarak karşılaştırmalar yapılmıştır.

Temel güvenilirlik özelliklerinin ve hesaplamalarının incelenmesinin ardından istatistiksel güvenililirlik çalışmalarının önemli bir bölümünü oluşturan stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği ele alınmıştır. Bu amaçla, ilk aşamada STSP dağılımına sahip bağımsız bir X mukavemet ve Y gerilim rastgele değişkenleri varsayımı altında $R = P(X > Y)$ stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin tahmin çalışmaları yer almaktadır. Ardından, k tane mukavemet rasgele değişkenleri

$X_1, X_2, \cdots, X_k$ dan en az s tanesi ortak bir Y gerilimini aştığı sürece çalışan, çok bileşenli sistemler için gerilim-mukavemet güvenilirliğinin tahmin çalışmaları bulunmaktadır. Her iki sistem için R' nin tahminde en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Ardından, R için yaklaşık güven aralıkları elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicilerine ait yaklaşık bir güven aralığı olan bootstrap ortalama güven aralıkları, Bayes tahminleri için ise HPD güven aralıkları elde edilmiştir.

Elde edilen bütün teorik çalışmaların değerlendirilmesi ve performanslarının karşılaştırılması için simülasyon çalışmaları, parametrelerin farklı durumlarına göre ayrı ayrı uygulanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar tablolaştırılarak yorumlanmış ve yöntemlerin farklı durumlar altında, zayıf ve güçlü yanları raporlanmıştır. Son bölümde ise gerçek veri kümeleri kullanılarak çalışmaların örneklendirilmesi sağlanmıştır.

TEŞEKKÜR

Akademisyen bir ağaç gibidir ve henüz yaşken eğilir. Bu gerçek altında, bu meslekte filizlenmeye başladığım ilk günden bugüne sabırla ve inançla benden desteğini esirgemeyen, mesleğime olan sevgimin ve saygımın her gün daha da artmasını sağlayan, kıymetli danışmanım Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu ağaç meyve verdikçe, köklerim sağlam olsun diye gösterdiği çabalar için daima minnettar kalacağım.

Çalışmalarımın her aşamasında kahrımı çeken, zor zamanlarımda güçlü kalmamı sağlayan, hayata umutla bakmama sebep olan, birlikteliğimizden güç aldığım ve onur duyduğum sevgili eşim Merve KANDEMİR ÇETİNKAYA' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni hayata getiren ve ilkokul çağlarımdan bugünlere kadar karşılaştıkları tüm zorluklara rağmen bana inanmaktan vazgeçmeyen, sevgili annem Leyla ÇETİNKAYA ve babam Hacı Ali ÇETİNKAYA' ya minnettarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ XI
SİMGELER VE KISALTMALAR XIII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI 9
4. İSTATİSTİKSEL GÜVENİLİRLİK ANALİZİ 13
4.1. Güvenilirlik Göstergeleri 13
4.1.1. Güvenilirlik Fonksiyonu 14
4.1.2. Tehlike Fonksiyonu 16
4.1.3. Ortalama Tükeniş Zamanı 17
4.1.4. Ortalama Artık Yaşam Süresi 18
4.1.5. Belirli Bir Zamanda Ortalama Yaşam Beklentisi 21
4.1.6. Beklenen Servis Süresi 22
4.1.7. Dağılımı Eskimeye Bağlı Olarak Sınıflandırma 24
4.2. Tehlike Grafiği 27
4.3. Güvenilirlik ve Tehlike Oranı Tahmini 28
4.3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin 28
4.3.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin 29
5. STOKASTİK GERİLİM-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİĞİ 41
5.1. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği 41

5.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin 46
5.1.1.1. Bootstrap Güven Aralığı.....47
5.1.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin 50
5.1.2.1. Eşik Parametrelerinin Bilinen ve Eşit Olduğu Durum 50
5.1.2.2. Eşik Parametrelerinin Bilinen Fakat Eşit Olmadığı Durum 56
5.1.2.3. Tüm Parametrelerin Bilinmiyor Olduğu Durum 59
5.2. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği 61
5.2.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin 65
5.2.1.1. Bootstrap Güven Aralığı.....65
5.2.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin 67
6. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI.....69
6.1. Güvenilirlik ve Tehlike Oranlarının Simülasyon Çalışmaları.....69
6.2. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliğinin Simülasyon Çalışmaları 71
6.3. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliğinin Simülasyon Çalışmaları 74
7. UYGULAMA 77
7.1. Güvenilirlik ve Tehlike Oranı Tahmin Çalışmaları Dayalı Uygulamalar 77
7.2. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği Tahmin Çalışmalarına Dayalı Uygulamalar.....82
7.3. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği Tahmin Çalışmalarına Dayalı Uygulamalar.....87
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 91
KAYNAKLAR 95
ÖZGEÇMİŞ 103
EKLER 105

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. STSP dağılımına sahip bir sağ kalım değişkeninin tehlike oranına göre sınıflandırılası.....27

Çizelge 6.1. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10,20, 30, 50, 100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2,0.5,0.9)$ göre $\alpha = 2.8$ ve $\beta = 0.8$ parametre değerleri için $R(0.2) = 0.98351.$ $R(0.5) = 0.78544$ ve $R(0.9) = 0.02872$ olmak üzere $R(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri.....106

Çizelge 6.2. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10, 20, 30, 50, 100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2, 0.5,0.9)$ göre $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 0.5$ parametre değerleri için $R(0.2) = 0.87351.$ $R(0.5) = 0.5$ ve $R(0.9) = 0.04472$ olmak üzere $R(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri. 107

Çizelge 6.3. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10, 20, 30, 50,100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2, 0.5, 0.9)$ göre $\alpha = 2.8$ ve $\beta = 0.8$ parametre değerleri için $\lambda(0.2) = 0.23479.$ $\lambda(0.5) = 1.52978$ ve $\lambda(0.9) = 28$ olmak üzere $\lambda(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri. 108

Çizelge 6.4. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10, 20, 30, 50,100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2,0.5.,0.9)$ göre $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 0.5$ parametre değerleri için $\lambda(0.2) = 1.08610.$ $\lambda(0.5) = 3$ ve $\lambda(0.9) = 15$ olmak üzere $\lambda(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri. 109

Çizelge 6.5. Bilinen ve ortak yansıma parametresi durumunda R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerinin ortalamaları ve karşılık gelen hata kareler ortalamaları. 110

Çizelge 6.6. Bilinen fakat eşit olmayan yansıma parametresi durumunda R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerinin ortalamaları ve karşılık gelen hata kareler ortalamaları. 111

Çizelge 6.7. Durum 1: $(\alpha_1 = 2.8,\ \beta_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 3,\ \beta_2 = 0.55)$ ve $R = 0{,}700681$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 112

Çizelge 6.8. Durum II: $(\alpha_1 = 3,\ \beta_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 3,\ \beta_2 = 0.4)$ ve $R = 0.803333$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri. tahminlerin standart sapmaları. yanlılık değerleri. hata kareler ortalamaları (HKO). ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 113

Çizelge 6.9. Durum III: $(\alpha_1 = 2.5,\ \beta_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 0.15)$ ve $R = 0.904304$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 114

Çizelge 6.10. Durum IV: $(\alpha_1 = 4,\ \beta_1 = 0.85,\ \alpha_2 = 3.8,\ \beta_2 = 0.20)$ ve $R = 0.950840$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 115

Çizelge 6.11. Durum I baz alınarak elde edilen eşit örneklem boyutları için tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları. 115

Çizelge 6.12. Farklı (s, k) ve (n, m) değerlerine göre $(\alpha_1 = 3,\ \beta_1 = 0.7,\ \alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 0.4)$ olmak üzere gerçek $R_{1,3} = 0.86554$ ve $R_{2,4} = 0.79382$ değerleri için en çok olabilirlik ve Bayes

tahminleri, tahminlerin hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 116
Çizelge 6.13. Farklı (s,k) ve (n,m) değerlerine göre ($\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 0.85,\ \alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 0.15$) olmak üzere gerçek $R_{1,3} = 0.93395$ ve $R_{2,4} = 0.87648$ değerleri için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD). 117
Çizelge 7.1. Ölçeklendirilmiş karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi.....77
Çizelge 7.2. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi için parametrelerin en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri.....78
Çizelge 7.3. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi için Kolmogorov Smirnov test istatistikleri. (Kolmogorov Smirnov kritik test değeri $D_{58,0.05} = 0.1783$) 78
Çizelge 7.4. Farklı sabit zaman noktalarında güvenilirlik $R(t)$ tahminleri 79
Çizelge 7.5. Farklı sabit zaman noktalarında tehlike oranı $\lambda(t)$ tahminleri 80
Çizelge 7.6. Dönüştürülmüş veri seti 1 (20 mm ölçü uzunluğunda).....83
Çizelge 7.7. Dönüştürülmüş veri seti 2 (10 mm ölçü uzunluğunda).....83
Çizelge 7.8. Dönüştürüştürülmüş sıvı kromatografi ölçüm verileri.....88
Çizelge 7.9. Dönüştürüştürülmüş ise kızıl ötesi analizör 400 ölçüm verileri.....88

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. STSP (α, β) dağılımının çeşitli parametre değerlerine göre olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği 9
Şekil 4.1. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının $\beta = 0.5$ güvenilirlik fonksiyonun grafikleri. 15
Şekil 4.2. Eşik/yansıma parametrelerinin farklı değerleri altında $\alpha > 1$ (sol) ve $\alpha < 1$ (sağ) şekil parametrelerine göre STSP dağılımının güvenilirlik fonksiyonun grafikleri. 15
Şekil 4.3. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının tehlike fonksiyonun grafikleri. 16
Şekil 4.4. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının ortalama artık yaşam süresi grafiği. 20
Şekil 4.5. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının ortalama yaşam beklentisi grafiği. 21
Şekil 4.6. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının beklenen servis süresi grafiği. 23
Şekil 4.7. Eşik/yansıma parametrelerinin farklı değerleri altında $\alpha > 1$ (sol) ve $\alpha < 1$ (sağ) şekil parametrelerine göre STSP dağılımının beklenen servis süresi grafikleri. 24
Şekil 7.1. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisine ait kantil-kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri 78
Şekil 7.2. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisine ait kantil-kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri 80
Şekil 7.3. Tehlike oranı tahminlerinin iz grafiği (solda) ve sonsal dağılımın yoğunluk grafiği (sağda) 81
Şekil 7.4. Güvenilirlik (solda) ve tehlike oranı (sağda) tahminleri için otokorelasyon (ACF) grafiği. 81

Şekil 7. 5. Dönüştürülmüş veri seti 1' in STSP($\alpha 1, \beta 1$) dağılımına uyumu. 83
Şekil 7.6. Dönüştürülmüş veri seti 2' nin $STSP(\alpha 2, \beta 2)$ dağılımına uyumu. 84
Şekil 7.7. R' nin iz grafiği (solda) ve sonsal yoğunluk grafiği (sağda). 86
Şekil 7.8. R için otokorelasyon grafiği (solda) ve sürekli (ergodik) ortalama grafiği (sağda). 86
Şekil 7.9. Dönüştürüştürülmüş sıvı kromatografi ölçüm verisine ait kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri. 89
Şekil 7.10. Dönüştürüştürülmüş ise kızıl ötesi analizör 400 ölçüm verisine ait kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri. 89

SİMGELER VE KISALTMALAR

ACF : Autocorrelation Function (Otokorelasyon Fonksiyonu)
BOOT-P : Yüzdelik Bootstrap
DFR : Decreasing Failure Rate (Azalan Tükeniş Oranı)
DFRA : Decreasing Failure Rate Avarage (Azalan Ortalama Tükeniş Oranı)
ESL : Expected Servise Life (Beklenen Servis Süresi)
GA : Güven Aralığı
GELF : General Entropy Loss Function (Genel Entropi Kayıp Fonksiyonu)
GLD5 : Generalized Lindley Distribution Type 5 (5. Tip Genelleştirilmiş Lindley Dağılımı)
HKO : Hata Kareler Ortalaması
HPD : Highest Posterior Density (En Yüksek Sonsal Yoğunluk)
IFR : Increasing Failure Rate (Artan Tükeniş Oranı)
IFRA : Increasing Failure Rate Avarage (Artan Ortalama Tükeniş Oranı)
LLF : Linex Loss Function (Linex Kayıp Fonksiyonu)
MCMC : Monte Carlo Markov Chain (Monte Carlo Markov Zinciri)
MLE : Maximum Likelihood Estimation (En Çok Olabilirlik Tahmini)
MTTF : Mean Time to Failure (Ortalama Tükeniş Zamanı)
NBU : New Better Than Used (Yenisi Eskisinden Daha İyi)
NWU : New Worse Than Used (Yenisi Eskisinden Daha Kötü)
PERT : Project Evaluation and Review Technique (Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği)
SELF : Squared Error Loss Function (Hata Kareler Kayıp Fonksiyonu)
STSP : Standard Two-Sided Power Distribution (Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı)
TSP : Two-Sided Power Distribution (İki Yönlü Kuvvet Dağılımı)

1. GİRİŞ

İstatistiksel güvenilirlik analizi bir veya daha fazla bileşenden oluşan bir sistemin belirli bir zaman aralığında çalışır durumda kalabilme olasılığını inceler. Mühendislik çalışmalarında oldukça fazla uygulamalara sahip olan güvenilirlik analizi, yaşam süresi incelenen bir sistemin veya bileşenin ne kadar kullanılabilir olduğunu ölçmeye ve böylece sistemlerin tasarımı hakkında doğru kararlar almaya yardımcı olur.

İstatistik teorisi çalışmaları kapsamında, bir bileşenin veya birden fazla bileşenden oluşan sistemlerin çalışır durumda kalma olasılıkları sağ kalım rastgele değişkenleri kullanılarak modellenir. Bir sağ kalım verisi mühendislik, klinik çalışmalar, sosyal çalışmalar ve benzeri birçok alanda güvenilirliğin hesaplanması çalışmalarında kullanılmaktadır. Bu amaçla, insanların yaşam süreleri, bileşen ömürleri, hastaların tedavi süreleri, endüstriyel robotlar, hayvan ömürleri, bitkilerin yaşam süreleri, dişli çarkların ömürleri, yazılımların çalışma süresi vb. birçok sağ kalım verisi olasılık dağılımlarıyla modellenebilir. İstatistik literatüründe sağ kalım verilerinin modellenebildiği birçok olasılık dağılımı yer almaktadır. Genellikle bir sağ kalım süresi için üst limit önerilmediğinden, bu tip veriler $[0, \infty)$ aralığında tanımlı olasılık dağılımları ile modellenmektedir. Üstel dağılım, Weibull dağılımı, log-normal dağılım, gamma dağılımı ve Pareto dağılımı sağ kalım verilerini modellemede en çok bilinen olasılık dağılımlarıdır. Fakat, birçok durumda sağ kalım verileri, sınırlı bir $[a, b]$ aralığında ortaya çıkabilir. Örneğin bir materyalin gücü, uzunluğu, basıncı, ısısı, çalışma süresi veya ağırlığı gibi bazı ölçümleri sınırlı bir aralıkta olabilir (100-300 MPa gibi) (Verma ve ark., 2015). Ayrıca sansürlü veya kesilmiş sağ kalım verileri de aynı şekilde sınırlı bir aralığa sahiptir. Bu durumda sınırlı aralıkta tanımlanan olasılık fonksiyonları yardımıyla sağ kalım verileri modellenmektedir. İstatistik teorisi çalışmaları kapsamında birçok güvenilirlik ve sağ kalım çalışmalarında sınırlı bir tanım aralığını kapsayan olasılık fonksiyonları

kullanılmıştır (Barlow ve Proschan, 1975). Mance ve arkadaşları (2017) tarafından ele alınan iki yönlü kuvvet (TSP) dağılımı da yine sınırlı aralıkta bir sağ kalım verisinin modellenmesinde kullanılmıştır. Bununla beraber, sınırlı aralığın özel bir durumu olarak $[0,1]$ aralığı ele alınabilir ve bu aralık bir deneyin başarı olasılığı hakkındaki belirsizliğin modellenmesinde kullanılabilir. Bu gibi durumlarda beta dağılımı ilk akla gelen dağılım olarak karşımıza çıkar. Beta dağılımı çok yönlü bir dağılım olup çeşitli belirsizlikler bu dağılım yardımıyla modellenebilmektedir (Gupta ve Gupta, 2000). Diğer yandan TSP dağılımının $[0,1]$ aralığında tanımlanan özel bir formu olan standart iki yönlü kuvvet (STSP) dağılımının Kotz ve van Dorp (2004) tarafından beta dağılımının pikli bir alternatifi olarak önerilmesi göz önüne alındığında, $[0,1]$ aralığını kapsayan bir sağ kalım verisinin güvenilirlik analizlerinde STSP dağılımı ile modellenmesi düşünülebilir. Ayrıca $[0,1]$ aralığında yer alan bir veri, bir eşik noktasına sahip olduğunda STSP dağılımı, yansıma/eşik parametresi yardımıyla böyle bir verinin modellenmesini kolaylaştıracaktır. Doğum oranı, ölüm oranı, başarı olasılığı, ölçeklendirilmiş yaşam süreleri, standartlaştırılmış yaşam süreleri ve benzeri birçok duruma ait sağ kalım verilerini modellemek için STSP dağılımı düşünülebilir. Örneğin, bir ülkenin yirmi yıllık ölüm oranları verisi göz önüne alındığında bu yirmi yılın içinde bir savaş veya doğal afet gibi bir durumun varlığı bu veride bir eşik noktasına sebep olacaktır. Dolayısıyla, bu ve benzeri birçok örneğe ait sağ kalım verileri STSP dağılımıyla modellenerek güvenilirlik analizi çalışmaları yapılabilir.

İstatistiksel güvenilirlik analizi çalışmalarının önemli bir parçası da stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğidir. Stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği, bir mukavemet (X) rastgele değişkeni ve bu rastgele değişkene karşı bir gerilim (Y) rastgele değişkenine sahip bir veya daha fazla bileşenin/sistemin çalışır durumda kalma olasılığını inceler. Böyle bir sistemde, mukavemet rastgele değişkeni (X), gerilim rastgele değişkenini (Y) aştığı müddetçe sistem çalışmaya devam eder ve sistemin çalışır durumda kalma olasılığı $R = P(Y < X)$ stokastik gerilim-

mukavemet güvenilirliği olarak adlandırılır. Örneğin; X rastgele değişkeninin doğum oranını ve Y rastgele değişkeninin ise ölüm oranını temsil ettiğini varsayalım. Bu durumda $R = P(Y < X)$ nüfus artışının bir ölçüsünü ifade eder. Benzer şekilde, X rastgele değişkeninin tedavi gurubunu ve Y rastgele değişkeninin de kontrol grubunu temsil ettiği klinik bir deneyde R tedavi etkisinin bir ölçümüdür (Punathumparambath, 2011).

Basit bir X mukavemet ve Y gerilim değişkeninden oluşan sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin yanı sıra birden fazla mukavemet ve/veya gerilim rastgele değişkenlerinden oluşan sistemlerde söz konusudur. Örneğin, seri sistemler, paralel sistemler, n den k çıkışlı sistemler ve uygun sistemler gibi birden fazla bileşenden oluşan sistemler de stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği araştırılmak istenilebilir.

TSP dağılımının istatistiksel güvenilirlik analizi üzerine tek çalışma Mance ve ark. (2017) tarafından yapılmıştır. Bu çalışma kapsamında, istatistiksel güvenilirlik analizinin temel ölçümlerinden olan güvenilirlik ve tehlike fonksiyonları TSP dağılımı için elde edilerek bu fonksiyonlar grafikleriyle birlikte yorumlanmıştır. Bununla birlikte TSP dağılımının parametrelerini sezgisel en küçük kareler yöntemi yardımıyla tahmin edilerek bir veri seti üzerinde sonuçları yorumlanmıştır. Ayrıca, elde edilen sonuçlar kullanılarak TSP dağılımı ve Weibull dağılımını karşılaştırılmıştır.

Mance ve ark. (2017) tarafından ortaya konulan bu çalışma incelenerek, TSP dağılımının istatistiksel güvenilirlik analizi kapsamında çok daha detaylı bir şekilde incelenmek istenmesi bu tez konusunun ortaya çıkmasında önemli bir etken olarak ortaya çıkmıştır.

Bu çalışma kapsamında, TSP dağılımının standart formu olan standart iki yönlü kuvvet dağılımı (STSP) esas alınarak, istatistiksel güvenilirlik analizi kapsamında daha detaylı incelemeler yapılmıştır. İlk olarak, genel güvenilirlik göstergeleri (güvenilirlik fonksiyonu, tehlike fonksiyonu, beklenen servis süresi,

vs.) elde edilmiştir. Ardından, STSP dağılımına sahip bir ömrün yaşlandıkça ne tür bir yapıda olacağına dair çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra güvenilirlik ve tehlike fonksiyonlarının en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri elde edilmiştir. Bayes tahminleri simetrik ve asimetrik olarak farklı kayıp fonksiyonları altında değerlendirilerek ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Böylece STSP dağılımına sahip bir bileşenin/sistemin istatistiksel güvenilirlik analizlerine dair gerekli olan hesaplamalar tamamlanmıştır. Ardından, STSP dağılımı stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği açısından incelenmiştir. İlk olarak bir mukavemet (X) rastgele değişkeni ve bu rastgele değişkene karşı bir gerilim (Y) rastgele değişkeninden oluşan basit bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonrasında ise birden fazla mukavemet (X) rastgele değişkeni ve bu rastgele değişkene karşı ortak bir gerilim (Y) rastgele değişkenine sahip n den k çıkışlı sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği benzer yöntemler kullanılarak hesaplanmıştır. Yapılan tüm hesaplamaların performanslarının değerlendirilmesi amacıyla simülasyon çalışmaları ve gerçek veri kümeleri üzerinde uygulamaları yapılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

İstatistik teorisi literatüründe, sağ kalım rasgele değişkenleri, modellendiği olasılık dağılımları göz önüne alınarak, çeşitli durumlar altında güvenilirlik analizi çalışmaları yapılmıştır. Bu kapsamda birçok kitap ve makale literatürde yer almaktadır. Örneğin; Barlow ve Proschan (1975), Smith (2002), Wolstenholme (1999), Nachlas (2017), Rausand ve Hoyland (2004) ve Lawless (2003) sağ kalım rastgele değişkenlerinin güvenilirlik analizi ve sistem güvenilirliği konularını detaylarıyla ele almışlardır. Ayrıca çeşitli dağılımlar üzerine güvenilirlik analizi çalışmaları da literatürde yer almaktadır. Örneğin; Zimmer ve ark. (1998), Burr XII dağılımını, Lai ve ark. (2003) değiştirilmiş Weibull dağılımını, Mance ve ark. (2017) iki yönlü kuvvet (TSP) dağılımını güvenilirlik analizi çalışmaları kapsamında ele almışlardır.

Literatürde ilk defa Birnbaum (1956) tarafından tanımlanan ve kapsamlı olarak Johnson (1988) tarafından incelenen stokastik gerilim-mukavemet modelleri psikoloji, tıp, pedagoji, mühendislik ve havacılık gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir (Rezaei ve ark., 2018, Kotz ve ark., 2003). Birçok disiplinde farklı uygulamalara sahip olan stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği modelleri istatistik literatüründe yoğun bir şekilde yer almaktadır. Rastgele değişkenlerin (X, Y) sahip oldukları olasılık dağılımları göz önüne alınarak stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği birçok dağılım üzerinde çalışılmıştır. Örneğin; Church ve Harris (1970), Downtown (1973), Woodward ve Kelley (1977) ve Owen, Craswell ve Hanson (1977) X ve Y rastgele değişkenleri normal dağılıma sahip olduğunda $R = P(Y < X)$ güvenilirliğini incelemişlerdir. Tong (1974) üstel dağılımı, Beg ve Singh (1979) Pareto dağılımını, Awad ve Gharraf (1986) Burr dağılımını, McCool (1991) Weibull dağılımını, Surles ve Padget (1998, 2001) Burr type-X dağılımını, Nadarajah (2004) Laplace dağılımını, Ali ve Woo (2005a, 2005b) Levy ve p-boyutlu Rayleigh dağılımlarını, Kundu ve Gupta (2005) genelleştirilmiş üstel dağılımı,

Mokhlis (2005) Burr tip-III dağılımını, Kundu ve Gupta (2006) Weibull dağılımını, Punathumparambath (2011) Lomax dağılımını, Nadar, Kızılaslan ve Papadopoulos (2014) Kumaraswamy dağılımını, Al-Mutairi, Ghitany ve Kundu (2013) Lindley dağılımını, Genç (2013) Topp-Leone dağılımını, Rezaei, Sharafi, Behboodian ve Zamani (2018) GLD5 dağılımını stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği açısından ele almışlardır. Bu çalışmalarda genellikle stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahminleri, Bayes tahminleri, sezgisel en küçük kareler tahminleri, düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicileri ve bu yöntemlere dayalı güven aralıkları elde edilmiştir.

Birden fazla bileşenden oluşan sistemler için stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği üzerinde çalışmalarda istatistik teorisinde fazlasıyla yer almaktadır. Bhattacharyya ve Johnson (1974) çok bileşenli sistemler için, Ebrahimi (1982) seri sistemler için, Pandey ve Uddin (1985) Burr dağılımına sahip çok bileşenli sistemler için, Paul ve Uddin (1997) özdeş olmayan mukavemet bileşenleri durumu için, Hanagal (2003) çok bileşenli seri sistemler için, Hassan ve Basheikh (2012) üstel Pareto dağılımına sahip özdeş olmayan mukavemet rastgele değişkenleri için, Rao (2012a, 2012b, 2012c) sırasıyla çok bileşenli sistemlerde genelleştirilmiş üstel, genelleştirilmiş ters üstel ve Rayleigh dağılımları için, Rao ve Kantam (2010) log-lojistik dağılıma sahip çok bileşenli sistemler için, Bhattarcharya ve Roychowdhury (2013) çok bileşenli uygun sistemler için, Dey, Mazucheli ve Anis (2017) Kumaraswamy dağılımına sahip n den k çıkışlı sistemler için stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğini çalışmışlardır.

Literatürde TSP dağılımı üzerine çalışmalar gittikçe artmaktadır. Yapılan bu çalışmalar kapsamında TSP dağılımının parametre tahmin edicileri ve hesaplama yöntemleri van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından verilmiştir. Ardından Perez, Rambaud ve Garcia (2005) TSP dağılımını ekonomide özellikle risk ve belirsizlik problemlerinde, örneğin PERT (Project Evaluation and Review Technique) analizi problemlerinde kullanmışlardır. TSP dağılımının çeşitli genelleştirmeleri van Dorp

ve Kotz (2003), Kotz ve van Dorp (2004), Nadarajah (2005), Oruç ve Bairamov (2005), Soltani ve Homei (2009), Herrrerias-Velasco ve ark. (2009) tarafından çalışılmıştır. Bashir ve ark. (2014) TSP dağılımının rekor değerleri üzerine, Kotz ve Seier (2008) TSP dağılımının basıklık sıralaması üzerine çalışmışlardır. Nadarajah (2005) ise TSP dağılımını aynı sayıda parametre ile farklı şekilde formülize etmiştir. Gündüz ve Genç (2016) STSP dağılımına sahip iki bağımsız değişkenin çarpımının dağılımını incelemişlerdir.

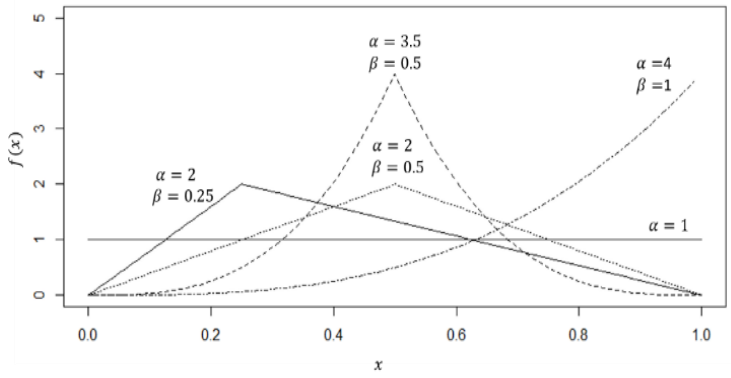
Son dönemlerde, TSP dağılımı Çetinkaya ve Genç (2018) tarafından sıra istatistikleri yönünden çalışılmıştır. Yazarlar ayrıca sıra istatistiklerinin çarpım momentlerinin kısmi yineleme bağıntılarını da çalışmışlardır (Çetinkaya ve Genç, 2017). TSP dağılımı, iki yönlü bir dağılım olması ve dört parametreli matematiksel yapısı nedeniyle hesaplamalarda zor ve karmaşık sonuçlarla karşılaşılmaktadır. Çetinkaya ve Genç (2017) bu durumu göz önüne alarak, dağılımı sıra istatistikleri yönünden ele alırken matematiksel yapısı nedeniyle daha kullanışlı olan STSP dağılımını üzerinden çalışmışlardır. Elde edilen bu sonuçları TSP dağılımına uygun olarak genelleştirebilmek amacıyla $X \sim STSP(y|\alpha,\beta)$ ve $Y \sim TSP(x|a,b,\alpha,\beta)$ olarak düşünüldüğünde;

$$Y = (b-a)X + a, \quad b > a$$

eşitliği kullanılarak (Kotz ve van Dorp,2004) STSP dağılımı için elde edilen dağılımsal sonuçlar kolaylıkla TSP dağılımı için de elde edilebilir.

3. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

Düzgün, üçgensel ve kuvvet dağılımını genelleyen iki yönlü kuvvet (TSP) dağılımı van Dorp ve Kotz (2002a, 2002b) tarafından tanımlanıp, özellikleri incelenerek, beta dağılımına alternatif bir dağılım olarak önerilmiştir. Ayrıca, dağılımın tepe noktasının sivriliği nedeniyle Laplace dağılımına benzerliği ifade edilmiştir (Kotz ve van Dorp, 2004). TSP dağılımı, dört parametreli beta dağılımına alternatif olarak mühendislikte oldukça popüler bir kullanıma sahip PERT (Program Evaluation and Review Technique) analizi ve benzeri birçok risk ve belirsizlik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Ayrıca, aşırı sivriliğe sahip finansal verilerin modellenmesinde de beta dağılımına alternatif olarak önerilmekte ve kullanılmaktadır (Kotz ve van Dorp, 2004). TSP dağılımının pozitif uzayı da beta dağılımı gibi sonlu bir aralıktır fakat TSP dağılımı beta dağılımının aksine kapalı formda bir dağılım fonksiyonuna ve kantil fonksiyonuna sahiptir. Bu açıdan bakıldığında TSP dağılımının beta dağılımına göre matematiksel açıdan daha kullanışlı olduğu söylenebilir. Üstelik, TSP dağılımı da beta dağılımı gibi şekil olarak esnektir.



Şekil 3.1. STSP (α, β) dağılımının çeşitli parametre değerlerine göre olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

3.1. Genel İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (TSP)

İki yönlü kuvvet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)

$$f(x|a,b,\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\alpha}{b-a}\left(\frac{x-a}{\beta-a}\right)^{\alpha-1}, a<x\leq\beta\\ \frac{\alpha}{b-a}\left(\frac{b-x}{b-\beta}\right)^{\alpha-1}, \beta\leq x<b\end{cases} \quad (3.1.)$$

ve kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf)

$$F(x|a,b,\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta-a}{b-a}\left(\frac{x-a}{\beta-a}\right)^{\alpha} & , a\leq x\leq\beta\\ 1-\frac{(b-\beta)}{(b-a)}\left(\frac{b-x}{b-\beta}\right)^{\alpha} & , \beta\leq x\leq b\end{cases}$$

şeklindedir. Burada a ve b dağılımın sınırları, α ($\alpha>0$) şekil parametresi, β ($a\leq\beta\leq b$) ise yansıma/eşik parametresi olarak ifade edilir. Dağılımın beklenen değer ve varyansı (3.1) eşitliği kullanılarak kolaylıkla aşağıdaki şekillerde elde edilir.

$$E(X)=\frac{a+(\alpha-1)\beta+b}{\alpha+1}$$

$$Var(X)=(b-a)^2\left\{\frac{\alpha-2(\alpha-1)\frac{(\beta-a)(b-\beta)}{(b-a)^2}}{(\alpha+2)(\alpha+1)^2}\right\}$$

TSP dağılımı, parametrelerinin özel durumlarına göre üçgensel dağılım, standart iki yönlü kuvvet dağılımı ve düzgün dağılımı içermektedir;

- $a=0$ ve $b=1$ durumunda, standart iki yönlü kuvvet (STSP) dağılımını
- $\alpha=1$ durumunda $[a,b]$ aralığında düzgün dağılımı

- $a = 0$, $b = 1$ ve $\alpha = 2$ durumunda üçgensel dağılımı ifade eder.

3.2. Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (STSP)

TSP dağılımının özel bir durumu $(a = 0, b = 1)$ olan standart iki yönlü kuvvet dağılımı (STSP) özellikle pikli bir dağılıma sahip finansal verilerin modellenmesinde kullanılır. Örneğin; Laplace dağılımının normal dağılımın pikli bir alternatifi olmasına benzer şekilde, STSP dağılımı da beta dağılımının pikli bir alternatifi olarak önerilmiş ve bu yönde çalışmalar Kotz ve van Dorp (2004) tarafından yapılmıştır. Beta dağılımına benzer şekilde esnek bir yapıya sahip olan STSP dağılımı, pikli histograma sahip birçok finansal verinin modellenmesinde beta dağılımına alternatif olarak kullanılmaktadır (van Dorp ve Kotz, 2002a). Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} & , \ 0 < x \leq \beta \\ \alpha\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} & , \quad \beta \leq x < 1 \end{cases} \tag{3.2.}$$

ve kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & , \quad 0 \leq x \leq \beta \\ 1-(1-\beta)\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha} & , \quad \beta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. TSP dağılımının özel bir durumu olduğundan dolayı benzer şekilde; α şekil parametresi, β yansıma/eşik parametresidir. STSP dağılımı, parametrelerinin farklı değerlerine göre esnek bir yapıya sahiptir (Şekil 3.1.);

- Dağılım $\beta = 0.5$ için α değeri ne olursa olsun simetriktir.
- $\alpha = 2$ durumunda üçgensel dağılım elde edilir.
- $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$ için Nagaraja (2013) tarafından çalışılan simetrik üçgensel dağılım elde edilir.
- $\alpha = 1$ durumunda $[0,1]$ aralığında düzgün dağılım elde edilir.
- $\beta = 1$ durumunda güç fonksiyonu dağılımı elde edilir.

STSP dağılımın beklenen değer ve varyansı (3.2) eşitliği kullanılarak veya TSP dağılımı için elde edilen hesaplamalarda $a = 0, b = 1$ özel durumu göz önüne alırak aşağıdaki şekillerde elde edilir.

$$E(X) = \frac{(\alpha - 1)\beta + 1}{\alpha + 1}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha - 2(\alpha - 1)\beta(1 - \beta)}{(\alpha + 2)(\alpha + 1)^2}$$

STSP dağılımı α sabit iken $\beta = 1/2$ değerinde minimum, $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ değerlerinde ise maksimum varyansa sahiptir. Ayrıca STSP dağılımı $\alpha > 1$ durumunda stokastik olarak artan, $\alpha < 1$ durumunda ise stokastik olarak azalan bir dağılım fonksiyonuna sahiptir. Ayrıca $\beta = 0$ ve $\alpha \to \infty$ durumunda STSP dağılımının limit dağılımı 0 noktasında dejenere dağılıma, $\beta = 1$ ve $\alpha \to \infty$ durumunda ise 1 noktasında dejenere dağılıma, $0 < \beta < 1$ ve $\alpha \to \infty$ durumunda ise β noktasında dejenere dağılıma, $\alpha \to 0$ ve $0 < \beta < 1$ durumunda ise Bernoulli dağılımına sahiptir. STSP dağılımının limit dağılımları beta dağılımının limit dağılımlarına denktir ve bu sonuç STSP dağılımının beta dağılımı gibi esnek bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir (Kotz ve van Dorp, 2004).

4. İSTATİSTİKSEL GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

İstatistiksel güvenilirlik analizi çalışmaları kapsamında, ilk olarak, bir sistemin veya bileşenin ömür süresini modelleyen bir sağ kalım rastgele değişkenine ait güvenilirlik fonksiyonu, tehlike fonksiyonu, ortalama tükeniş süresi, ortalama yaşam süresi, belirli bir t zamanında beklenen ömür ve beklenen servis süresi bir takım genel güvenilirlik göstergeleri elde edilir. Böylece, sistemin/bileşenin ömür süresinin zamanla nasıl değiştiğine dair çıkarsamalar yapılabilir. Ayrıca, sağ kalım rasgele değişkenleri eskimelerine bağlı olarak bazı (artan tükeniş oranı, azalan tükeniş oranı vb.) sınıflandırılmalara tabi tutulur. Bu sınıflandırmalar, bileşenlerin veya sistemlerin bakım ve iyileştirme çalışmaları açısından oldukça önem arz etmektedir. İstatistiksel olarak önemli bir diğer nokta ise güvenilirlik ve tehlike değerlerinin tahmin çalışmalarıdır. En çok olabilirlik ve Bayes gibi tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilen tahminler, belirli bir zamanda bileşenin/sistemin sağ kalım veya bozulma olasılığını tahmin edebilme imkanını sağlar. Ayrıca, bir verinin belirlenen bir dağılıma uygunluk gösterip göstermediği birikimli tehlike fonksiyonunu esas alan tehlike grafikleri kullanılarak da belirlenebilir. Birçok mühendis bu yöntemin kantil-kantil grafiklerinden daha etkili bir yöntem olduğunu iddia etmektedir (Smith, 2002).

Bu çerçevede, STSP dağılımına sahip bir bileşen istatistiksel güvenilirlik analizi çalışmaları kapsamında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1. Güvenilirlik Göstergeleri

Güvenilirlik göstergeleri, bir sistemin/bileşenin ömrünün zamanla nasıl değişime uğradığının göstergeleridir. Güvenilirlik fonksiyonu, tehlike fonksiyonu, ortalama tükeniş süresi, ortalama yaşam süresi, belirli bir t zamanında beklenen ömür ve beklenen servis süresi sıkılıkla kullanılan güvenilirlik göstergeleridir. Bu

fonksiyonlar ve zamanla değişimlerinin grafiksel gösterimleri, bileşen ömürleri hakkında iyi birer karar verme aracı olarak kullanılmaktadır.

4.1.1. Güvenilirlik Fonksiyonu

Güvenilirlik fonksiyonu, bir bileşenin çalışır durumda kalma olasılığını ifade eder ve $R(x) = 1 - F(x)$ ile gösterilir. Bir başka deyişle, bir bileşenin ömrünün belirli bir x zamanını aşması olasılığını $P(X > x)$ ifade eder. Güvenilirlik fonksiyonu literatürde sağ kalım fonksiyonu ($S(x)$) olarak da bilinmektedir. Güvenilirlik fonksiyonunun değeri zamana bağlı olarak azalır, yani $R(0) = 1$ ve $R(\infty) = 0$ koşulunu sağlar.

STSP dağılımının güvenilirlik fonksiyonu

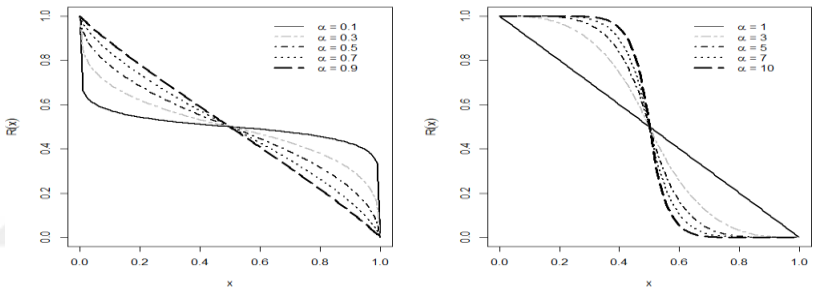
$$R(x) = \begin{cases} 1 - \beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & , \ 0 \le x \le \beta \\ (1-\beta)\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha} & , \ \beta \le x \le 1 \end{cases} \qquad (4.1.)$$

olarak elde edilir. STSP dağılımına ait bir bileşenin güvenilirliğinin zamana bağlı olarak değişimini incelemek amacıyla dağılımın simetrik ($\beta = 0.5$) ve asimetrik ($\beta \neq 0.5$) olduğu durumlar için grafikler Şekil 4.1 ve Şekil 4.2.' de verilmiştir.

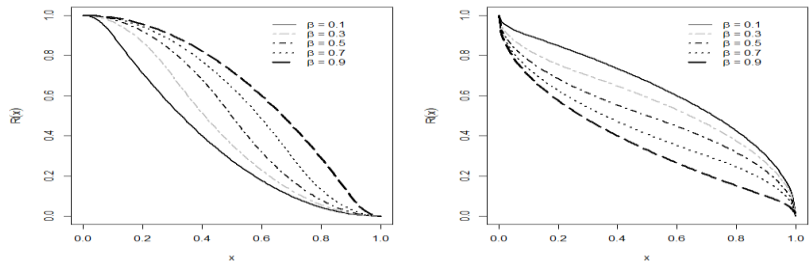
Güvenilirlik eğrisinin iç bükey veya dış bükey bir yapısı gözlemleri etkileyen çevresel koşullar ve gözlemlerin genetik yapılarına bağlı olarak değişim gösterebilmektedir. İç bükey bir güvenilirlik eğrisi, yaşam süresinin ilk evrelerinde düşük tükeniş, orta evrede kullanışlı bir yaşam süresi ve son evrede ise yüksek tükeniş oranını ifade eder. Dış bükey bir güvenilirlik eğrisi ise, yaşam süresinin ilk evrelerinde yüksek tükeniş, orta evrede kullanışlı bir yaşam süresi ve son evrede ise düşük tükeniş oranını ifade eder.

STSP dağılımının güvenilirlik fonksiyonu parametrelerindeki değişime göre

hem dış bükey hem de iç bükey bir yapıya sahiptir. Simetrik olduğu durumda, yani $\beta = 0.5$ durumunda $\alpha < 1$ ve $x < \beta$ için dış bükey, $\alpha < 1$ ve $x > \beta$ için iç bükeydir. Aynı durumda, $\alpha > 1$ ve $x < \beta$ için iç bükey, $\alpha > 1$ ve $x > \beta$ için dış bükeydir (Şekil 4.1.). Eşik parametresine göre değişim incelendiğinde ise, $\alpha > 1$ durumunda eşik parametresi β değeri arttıkça iç bükeyden dış bükeye doğru bir değişim gözlenmektedir. Bununla beraber, $\alpha < 1$ durumunda eşik parametresi β değeri azaldıkça iç bükeyden dış bükeye doğru bir değişim gözlenmektedir (Şekil 4.2.). Şekil parametresinin sabit $\alpha = 1$ değeri için sabit azalan bir güvenilirlik söz konusudur.



Şekil 4.1. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının $(\beta = 0.5)$ güvenilirlik fonksiyonun grafikleri.



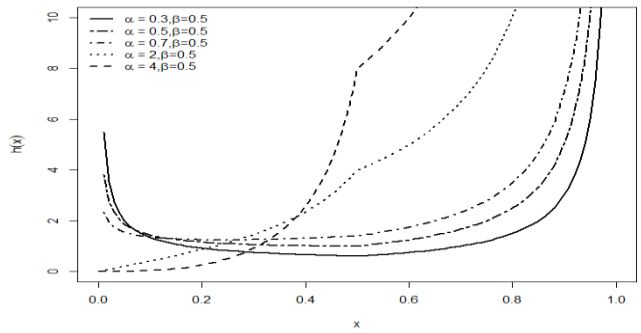
Şekil 4.2. Eşik/yansıma parametrelerinin farklı değerleri altında $\alpha > 1$ (sol) ve $\alpha < 1$ (sağ) şekil parametrelerine göre STSP dağılımının güvenilirlik fonksiyonun grafikleri.

4.1.2. Tehlike Fonksiyonu

Bir sistemin/bileşenin ömründe bir zaman aralığında verilen bir noktanın ötesinde meydana gelen kayıp olasılığını ölçer (Smith, 2002). Tehlike fonksiyonu literatürde tehlike oranı veya tükenişin gücü gibi farklı isimlerle de anılmaktadır. Bir bileşenin/sistemin tehlike fonksiyonu $\lambda(x)$, olasılık yoğunluk fonksiyonunun güvenlik fonksiyonuna oranı olarak ifade edilir ve STSP dağılımı için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1} - x} & , \quad 0 \le x \le \beta \\ \dfrac{\alpha}{1-x} & , \quad \beta \le x \le 1 \end{cases} \tag{4.2.}$$

STSP dağılımına ait bir bileşenin tehlike oranının zamana bağlı olarak değişimini incelemek amacıyla çeşitli parametreleri değerlerine göre tehlike fonksiyonunun grafiği Şekil 4.3.' de verilmiştir.



Şekil 4.3. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının tehlike fonksiyonun grafikleri.

STSP dağılımının tehlike fonksiyonunun grafiği incelendiğinde, dağılımın

hiçbir durumunda sabit tehlike durumunun gözlenmediği yani dağılımın anlık riskin zamanla değişmediği bir duruma sahip olmadığı gözlenmektedir. Bununla birlikte, STSP dağılımı $\alpha > 1$ durumunda artan tükeniş oranına sahip iken $\alpha < 1$ durumunda ise banyo küveti eğrisine sahiptir. Banyo küveti eğrisine sahip tehlike fonksiyonları, güvenilirlik çalışmalarında oldukça fazla yer almaktadır. Bir banyo küveti eğrisi, bir sistem veya bileşen ömrünün ilk dönemlerinde azalan tehlike oranını, kullanışlı yaşam süresi olarak adlandırılan orta dönemde dengeli bir tükeniş oranını, tükeniş dönemi olarak adlandırılan son dönemde ise hızlı bir tükeniş oranını ifade eder (Barlow ve Proschan, 1975). STSP dağılımı şekil parametresinin belli değerlerinde $(\alpha < 1)$ banyo küveti eğrisinde bir tehlike oranına sahip olduğundan dolayı güvenilirlik çalışmalarında kullanışlı bir yapıya sahiptir.

STSP dağılımının tehlike fonksiyonu Bölüm 4.2.' de daha detaylı olarak incelenerek güvenilirlik çalışmalarında oluşturulan sınıflara göre sınıflandırılacaktır.

4.1.3. Ortalama Tükeniş Zamanı

Ortalama tükeniş zamanı, bir bileşenin/sistemin tükenmeden önce çalışır durumda kaldığı ortalama zamanı ifade eder. Eğer, bir sağ kalım rasgele değişkeni beklenen değere sahip ise; o zaman tükeniş için ortama süre bu beklenen değer ile ifade edilir. Literatürde MTTF olarak adlandırılan ortalama tükeniş süresi, bir sağ kalım rasgele değişkeni X düşünüldüğünde $MTTF = E(X)$ olarak ifade edilir. STSP dağılımına sahip bir bileşen için ortalama tükeniş zamanı ise

$$E(X) = \frac{\beta(\alpha - 1) + 1}{\alpha + 1}$$

olarak elde edilir.

4.1.4. Ortalama Artık Yaşam Süresi

Ortalama artık yaşam süresi, bir sistemin/bileşenin herhangi bir t zamanında ortalama kalan yaşam süresini belirtir ve $r(t) = E(X - t|X > t)$ olarak ifade edilir. Ortalama yaşam süresi de tehlike fonksiyonu gibi bir bileşenin yaşam süresi davranışlarını inceleme imkanı verir.

Bir sağ kalım rasgele değişkeni X için ortalama artık yaşam süresi

$$r(t) = E(X - t|X > t) = \int_0^{\infty} (x - t) f(x|x > t) dx$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. STSP dağılımına sahip bir bileşenin ortalama artık yaşam süresini elde edebilmek için öncelikle $X > t$ durumunda X' in koşullu dağılımı

$$f(X|X > t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{1 - \beta \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} & , \quad 0 < t < x < \beta \\ \dfrac{\alpha \left(\dfrac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}}{1 - \beta \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} & , \quad 0 < t < \beta < x \\ \dfrac{\alpha}{1-x} \left(\dfrac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha} & , \quad \beta < t < x < 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, STSP dağılımının olasılık, tehlike ve güvenilirlik fonksiyonları aşağıda belirtildiği gibi parçalanabilir.

Öncelikle; $f_1(x) = \alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}$ ve $f_2(x) = \alpha\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}$ olmak üzere STSP dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} f_1(x) & , \quad 0 < x \leq \beta \\ f_2(x) & , \quad \beta \leq x < 1 \end{cases}$$

olarak ifade edilebilir. Bununla birlikte $R_1(x) = 1 - \beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}$ ve $R_2(x) = (1-\beta)\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha}$ olmak üzere STSP dağılımının güvenilirlik fonksiyonu

$$R(x) = \begin{cases} R_1(x) & , \quad 0 \leq x \leq \beta \\ R_2(x) & , \quad \beta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca $\lambda_1(x) = \alpha / \left\{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1} - x\right\}$ ve $\lambda_2(x) = \alpha\ /\ (1-x)$ olmak üzere STSP dağılımının tehlike fonksiyonu

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1(x) & , \quad 0 \leq x \leq \beta \\ \lambda_2(x) & , \quad \beta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece, STSP dağılımına sahip bir bileşenin t zamanında ortalama artık yaşam süresi $r(t) = E(X - t|X > t)$

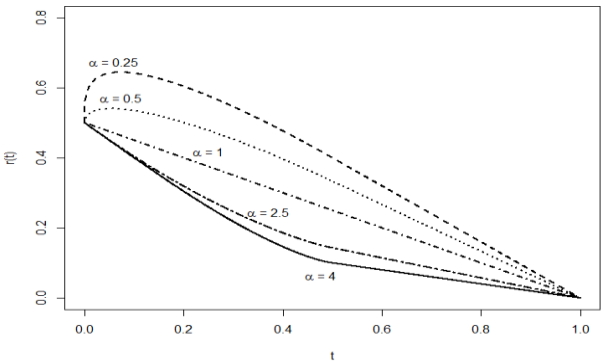
$t \leq \beta$ için $\frac{\int_t^1 R(x)dx}{R(t)} = \frac{\int_t^\beta R_1(x)dx + \int_\beta^1 R_2(x)dx}{R(t)}$

$t > \beta$ için $\frac{\int_t^1 R(x)dx}{R(t)} = \frac{\int_t^1 R_2(x)dx}{R(t)}$

durumları göz önüne alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r(t) = \begin{cases} \dfrac{\left[1 + \beta(\alpha - 1) + \beta t \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right](\alpha + 1)^{-1} - t}{1 - \beta \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} & , \quad t \leq \beta \\ \dfrac{1 - t}{\alpha + 1} & , \quad t > \beta \end{cases}$$

STSP dağılımına sahip bir bileşenin ortalama artık yaşam süresini incelemek amacıyla parametrelerinin farklı durumlarına göre grafik Şekil 4.4.' de verilmiştir.



Şekil 4.4. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının ortalama artık yaşam süresi grafiği.

Şekil 4.4. incelendiğinde, şekil parametresindeki artışla birlikte $r(t)$ eğrisi iç bükeyden dış bükeye doğru bir değişim göstermektedir. Ayrıca, tehlike grafiğinde elde edilen sonuçlara paralel olarak $\alpha < 1$ durumunda ve bileşen ömrünün ilk dönemlerinde ortalama tükeniş hızlı bir artış göstermektedir. Ardından, bileşenin ömrünün orta dönemlerinde bir zirve yaparak durağan bir sürecin ardından ömrünün sonunda hızlı bir azalış göstermektedir. İhtiyaca göre, parametrelerin tüm farklı

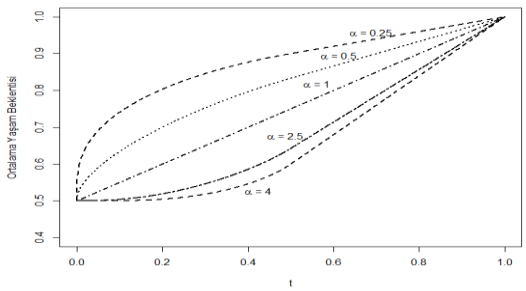
durumları göz önüne alınarak bu tespitler artırılabilir.

4.1.5. Belirli Bir Zamanda Ortalama Yaşam Beklentisi

Bir başka güvenilirlik gösterge aracı olan ortalama yaşam beklentisi, belirli bir t zamanına kadar hayatta kalan bir bileşenin ortalama ne kadar bir ömrünün kaldığı sorusunu yanıtlar ve $E(X|X>t) = t + r(t)$ ile gösterilir. Burada $r(t)$ ortalama artık yaşam süresi olarak bir önceki bölümde elde edilmiştir. Böylece STSP dağılımına ait bir bileşenin ortalama yaşam beklentisi

$$E(X|X>t) = \begin{cases} \dfrac{\left[1+\beta(\alpha-1)+\alpha\beta t\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right](\alpha+1)^{-1}}{1-\beta\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} & , \quad t \le \beta \\ \dfrac{\alpha t+1}{\alpha+1} & , \quad t > \beta \end{cases}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. STSP dağılımının farklı parametre değerlerine göre ortalama yaşam beklentisi grafiği Şekil 4.5.‘ de verilmiştir. Bu grafik incelendiğinde, tehlike fonksiyonu ve ortalama artık yaşam süresi grafikleri ile elde edilen sonuçların elde edildiği gözlenmektedir.



Şekil 4.5. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının ortalama yaşam beklentisi grafiği.

4.1.6. Beklenen Servis Süresi

Beklenen servis süresi, bir bileşenin t yaşına ulaştığında değiştirildiği durumlarında kullanılmaktadır (Brick ve ark., 1989). Özellikle, sistemlerin veya bileşenlerinin yıpranma ve bozulma durumlarında ortaya çıkabilecek verim kayıplarını önlemek amacıyla başvurulan bu göstergeye mühendislik çalışmalarında sıklıkla başvurulmaktadır. Beklenen servis süresi literatürde $ESL(t)$ olarak tanımlanmakta ve $Z = \min\{X, t\}$ karışım rasgele değişkeninin beklenen değeri olarak tanımlanmaktadır ve aşağıda verilen eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır (Smith, 2002).

$$ESL(t) = \int_0^t xf(x)dx + \int_t^1 tf(x)dx$$

STSP dağılıma sahip bir bileşenin beklenen servis süresi ise $t \leq \beta$ durumunda

$$ESL(t) = \int_0^t xf_1(x)dx + \int_t^\beta tf_2(x)dx + \int_\beta^1 tf_2(x)dx$$
$$= \int_0^t xf_1(x)dx + tR_1(t)$$

Diğer durumda, yani $t > \beta$ durumunda ise

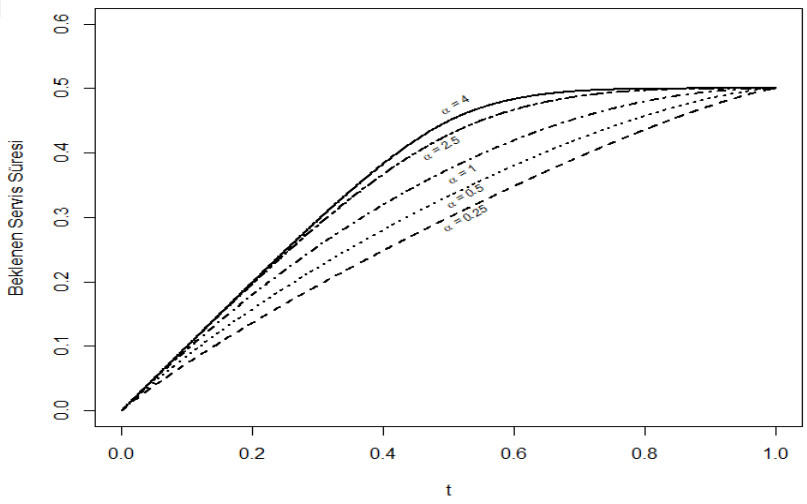
$$ESL(t) = \int_0^\beta xf_1(x)dx + \int_\beta^t xf_2(x)dx + \int_t^1 tf_2(x)dx$$

$$= \int_0^{\beta} x f_1(x)dx + \int_{\beta}^{t} x f_2(x)dx + rR_2(t)$$

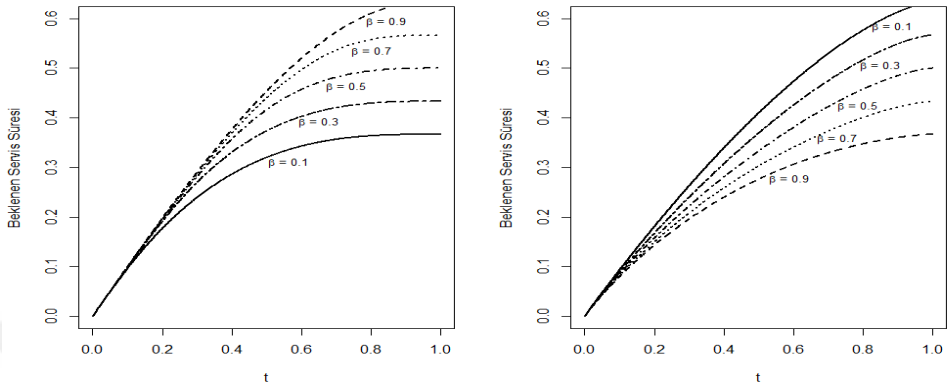
eşitlikleri hesaplanarak elde edilir. Böylece STSP dağılımı için beklenen süresi aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanabilir.

$$ESL(t) = \begin{cases} t - \dfrac{\beta t \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}{\alpha + 1} & , \quad t \leq \beta \\ \dfrac{\alpha\beta + (1-\beta)\left[1 - (1-t)\left(\frac{1-t}{1-\beta}\right)^{\alpha}\right]}{\alpha + 1} & , \quad t > \beta \end{cases}$$

STSP dağılımı için beklenen servis süresinin farklı parametre durumlarına göre grafikleri Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.' de verilmiştir.



Şekil 4.6. Şekil parametresinin farklı değerlerine göre simetrik STSP dağılımının beklenen servis süresi grafiği.



Şekil 4.7. Eşik/yansıma parametrelerinin farklı değerleri altında $\alpha > 1$ (sol) ve $\alpha < 1$ (sağ) şekil parametrelerine göre STSP dağılımının beklenen servis süresi grafikleri.

STSP dağılımının simetrik olduğu durumda, artan şekil parametresine paralel olarak beklenen servis süresi eğrisi iç bükey bir yapıya doğru ilerlemektedir. Sabit $\alpha > 1$ durumunda artan β değerlerine paralel olarak $ESL(t)$ değerleri de artmakta ve iç bükey bir eğri elde edilmektedir. Sabit $\alpha < 1$ durumunda ise artan β değerlerine paralel olarak $ESL(t)$ değerleri azalmakta ve benzer şekilde iç bükey bir eğri elde edilmektedir.

4.1.7. Dağılımı Eskimeye Bağlı Olarak Sınıflandırma

Sağ kalım rasgele değişkenlerini modelleyen olasılık dağılımları, sistemlerin ve bileşenlerin bakım, onarım ve yer değiştirme gibi operasyonel işlemlerine dair politikalar üretilmesi açısından, önemli yer tutmaktadır. Uygulanan bakım politikaları, sistem bozulmalarını azaltma ve operasyonel devamlılığı sağlama açısından oldukça önemlidir (Barlow ve Proschan, 1975). Bu amaçla sağ kalım

rasgele değişkenlerinin sahip olduğu dağılımlar, bileşenlerin zamanla gösterdiği değişime göre, diğer bir deyişle eskimeye dayalı olarak sınıflandırılmalara tabii tutulmuşlardır. Bu sınıflandırmaların en bilinenleri; artan tükeniş oranı (IFR) sınıfı dağılımlar, azalan tükeniş oranı (DFR) sınıfı dağılımlar, yenisi eskisinden daha iyi (NBU) sınıfı dağılımlar, eskisi yenisinden daha iyi (NWU) sınıfı dağılımlar, artan ortalama tükeniş oranı (IFRA) sınıfı dağılımlar, azalan ortalama tükeniş oranı (DFRA) sınıfı dağılımlar olup, bu sınıflandırmalar arasındaki ilişkiler

IFR→IFRA→NBU
DFR→DFRA→NWU

olarak ifade edilmektedir (Pham, 2006). Yani IFR sınıfına ait bir sağ kalım dağılımı aynı zamanda IFRA ve dolayısıyla NBU sınıfına aittir. Diğer yandan, DFR sınıfına ait bir sağ kalım dağılımı aynı zamanda DFRA ve NWU sınıfına aittir.

Bir sağ kalım rasgele değişkeninin tehlike fonksiyonu, artan bir fonksiyon ise bu sağ kalım değişkeni IFR sınıfı bir dağılım iken azalmayan ortalamaya sahip ise IFRA sınıfı bir sağ dağılımdır. Bu sınıfa ait sağ kalım dağılımları birçok avantaja sahiptir. Örneğin; dağılım fonksiyonları, ortalama veya bir kantil değerlerine göre alttan ve üstten sınırlandırılabilir. Bu da güvenilirlik sınırları belirlemeye yardımcı olur. Bu sınıfa ait dağılımların, basit bir bileşen, uygun bir sistem veya birikimli şoklara tabi tutulan sistemler ve benzeri sistemlerin güvenilirlik çalışmalarına dair kullanışlı özellikleri bulunmaktadır (Srivastava ve ark., 2012).

STSP dağılımının tehlike fonksiyonunun zamana göre değişimi incelenerek, dağılımın hangi durumlarda IFR, hangi durumlarda DFR sınıfına tabii olduğunun belirlenmesi, STSP dağılımına sahip bir ömre sahip bileşenin/sistemin daha verimli ve işlevsel çalışmasına dair politikalar belirlenmesinde önemli bir yer tutacaktır.

Teorem 4.1. STSP dağılımı $\alpha > 1$ durumunda IFR sınıfı bir dağılımdır. Diğer

yandan, $\alpha < 1$ durumunda ise $x < min\{((1-\alpha)/(\beta^{1-\alpha}))^{1/\alpha}, \beta\}$ olduğunda DFR, $((1-\alpha)/(\beta^{1-\alpha}))^{1/\alpha} \leq x \leq \beta$ olduğunda ise IFR sınıfı bir dağılımdır.

İspat: Öncelikle $\alpha > 1$ durumu incelendiğinde $x \leq \beta$ durumunda tehlike fonksiyonunun birinci dereceden türevi

$$\lambda'(x) = \alpha \left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta} - 1\right]^{-2} \frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta}(\alpha - 1) + 1\right]$$

olarak elde edilir. $\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta} > 1$ olduğundan dolayı $\lambda'(x) > 0$ olacaktır. Ayrıca $x > \beta$ durumunda ise

$$\lambda'(x) = \frac{\alpha}{(1-x)^2} > 0 \text{ , (tüm } \alpha \text{ değerleri için)}$$

olduğundan dolayı STSP dağılımının tehlike fonksiyonu $\alpha > 1$ durumunda daima artandır. Diğer yandan $\alpha < 1$ durumu incelendiğinde $x \leq \beta$ durumunda $\lambda'(x)$' in pozitif veya negatif olma ihtimali

$$\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta}(\alpha - 1) + 1$$

eşitliğinin alacağı değerlere bağlı olarak değişir. $x > \left(\frac{1-\alpha}{\beta^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$ değerleri için $\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta}(\alpha - 1) + 1 > 0$ olduğundan bu durumda $\lambda'(x) > 0$ olacaktır. Diğer yandan, $x \leq min\left\{\left(\frac{1-\alpha}{\beta^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}, \beta\right\}$ değerleri için $\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\beta}(\alpha - 1) + 1 < 0$ olduğundan $\lambda'(x) < 0$ olacaktır.

Böylece STSP dağılımına sahip bir bileşenin/sistemin yaşam süresi boyunca

tehlike oranında ortaya çıkan değişim gözlemlenerek dağılımın hangi sınıfa ait olduğu belirlenmiştir. Çizelge 4.1 elde edilen sonuçların özetlenerek tablo üzerinde gösterimini sağlamaktadır.

Çizelge 4.1. STSP dağılımına sahip bir sağ kalım değişkeninin tehlike oranına göre sınıflandırılası

Parametre	Aralık	Tehlike Türü
$\alpha < 1$	$x \leq min\left\{\left(\frac{1-\alpha}{\beta^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}, \beta\right\}$	Azalan Tehlike
	$x > \left(\frac{1-\alpha}{\beta^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$	Artan Tehlike
$\alpha > 1$	$x \leq \beta, x > \beta$	Artan Tehlike

4.2. Tehlike Grafiği

Tehlike grafikleri, bir verinin belirlenen bir dağılıma uygunluğunun tespitinde kullanılan yöntemlere alternatif kullanılmaktadır. Birçok mühendis tarafından olasılık grafiklerinden daha basit bir araç olarak önerilmekte ve kullanılmaktadır (Smith, 2002). Bir tehlike grafiği $a_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{n-i+1}$ olmak üzere (a_j, x_j) noktalarının basit bir grafiğidir. Ele alınan dağılımın araştırılan dağılıma uygunluğunu ölçmek için ise birikimli tehlike fonksiyonunun yapısını incelemek gerekir. STSP dağılımının birikimli tehlike fonksiyonu ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H(x) = -\ln\{R(x)\} = \begin{cases} \ln\left[1-\beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]^{-1} & , \quad 0 < x \leq \beta \\ \ln\left[\frac{(1-\beta)^{\alpha-1}}{(1-x)^{\alpha}}\right] & , \quad \beta \leq x < 1 \end{cases}$$

Elde edilen birikimli tehlike fonksiyonun yapısı Weibull dağılımına ait birikimli tehlike fonksiyonuna benzer şekilde logaritmik formda elde edilmiştir. Bu durumda,

bir verinin STSP dağılımına uygunluğunun tespiti için $\ln(a_j)$ ve $\ln(x_j)$ noktalarının grafiğinin 45^0 açıya sahip bir doğru etrafında seyretmiş olması beklenir.

4.3. Güvenilirlik ve Tehlike Oranı Tahmini

Bu bölümde, STSP dağılımına sahip bir bileşenin/sistemin belirli bir t anında güvenilirliğinin ve tehlike oranının tahmini araştırılmıştır. Tahminler en çok olabilirlik (ML) ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir.

4.3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin

STSP dağılımına sahip bir rasgele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ örneklemi için, $x_{(i)}$ verilerin sıralı $(i = 1,2, \cdots, n)$ gözlem değerleri, $x_{(0)} \equiv 0$, $x_{(n+1)} \equiv 1$ ve $x_{(r)} \leq \beta < x_{(r+1)}$ olmak üzere gözlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta) = \alpha \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r} x_{(i)} \prod_{i=r+1}^{n} (1 - x_{(i)})}{\beta^r (1-\beta)^{n-r}} \right\}^{\alpha-1}$$

olarak elde edilir. Parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri ise van Dorp ve Kotz (2002a) tarafından aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\hat{\beta} = X_{(\hat{r})}$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\log M(\hat{r})}$$

Burada, $\hat{r} = \arg max_{\{r \in 1,2,\cdots,n\}} M(r)$ ve

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^{n} \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}}$$

olarak tanımlanır. Böylece, güvenilirlik ve tehlike oranının tahminleri, $\hat{R}_{ML}$ ve $\hat{\lambda}_{ML}$, en çok olabilirlik tahmin edicilerin değişmezlik özelliği göz önüne alınarak, 4.1. ve 4.2. eşitliklerinde, parametrelerin en çok olabilirlik tahmin değerleri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ ile değiştirilmesi ile elde edilirler.

4.3.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin

İstatistiksel tahmin ve modelleme çalışmalarında birçok avantaja sahip olan Bayes yöntemleri, istatistiksel çalışmalarda ve farklı disiplinlerde oldukça yaygın olarak yer almaktadır. Bayes tahmin yöntemlerinde klasik istatistik yaklaşımlarından farklı olarak bilinmeyen parametreler bir rastgele değişken olarak ele alınırlar. Bayes tahmin yöntemleri, parametrelere dair ön/önsel bilgiler kullanılarak, bir sonsal dağılım elde edilmesini amaçlayan yöntemler topluluğu olarak ifade edilir (Berger,1985).

Güvenilirlik ve tehlike oranının Bayes tahminlerini elde etmek için öncelikle bilinmeyen parametreler için önsel dağılımlar $\pi(\alpha)$ ve $\pi(\beta)$ belirlenir. Önsel dağılım belirleme problemi Bayes tahmin çalışmalarının başlıca konuları arasında yer alır. Önsel dağılımlar, deneyimlerine bağlı olarak veya parametrelerin değer kümesine bağlı olarak belirleneceği gibi, Jeffrey yöntemi gibi yöntemler de mevcuttur. Önsel dağılımların belirlenmesinin ardından parametrelerin ortak sonsal dağılım fonksiyonu, $L(veri|\alpha, \beta)$ gözlenen verilen olabilirlik fonksiyonu olmak üzere

$$\pi(\alpha,\beta|veri) = \frac{L(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha)\,\pi(\beta)}{\int_0^\infty \int_0^1 L(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha)\,\pi(\beta)d\alpha d\beta}$$

olarak elde edilir. Böylece $g(\alpha,\beta)$ parametrelerin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere, karesel hata kayıp fonksiyonu altında bu fonksiyonun Bayes tahmini

$$\hat{g}_B(\alpha,\beta) = \frac{\int_0^\infty \int_0^1 g(\alpha,\beta)L(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha)\,\pi(\beta)\,\mathrm{d}\alpha d\beta}{\int_0^\infty \int_0^1 L(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha)\,\pi(\beta)\,\mathrm{d}\alpha d\beta} \qquad (4.3.)$$

eşitliği hesaplanarak elde edilir.

Parametrelerin birer fonksiyonu olarak $\hat{R}_B$ ve $\hat{\lambda}_B$ tahminleri Bayes yöntemi ile farklı kayıp fonksiyonları göz önünde bulundurularak elde edilebilir. Karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) en sık kullanılan kayıp fonksiyonudur. Simetrik olmasının yanında aşırı tahmin ve düşük tahmine eşit uzaklıkta tahminler üretmesi göz önüne alınarak çalışmalarda sıklıkla tercih edilmektedir. Fakat, istatistiksel güvenilirlik çalışmalarının bazı durumlarında aşırı tahmin veya düşük tahmin daha tercih edilebilir olabilmektedir. Bu durumlar için ise Varian (1975) tarafından tanımlanan Linex kayıp fonksiyonu (LLF) ve Calabria ve Pulcini (1996) tarafından tanımlanan genel entropi kayıp fonksiyonu (GELF) kullanılan diğer kayıp fonksiyonlarıdır. Bu çalışma kapsamında ise güvenilirlik ve tehlike oranının Bayes tahminleri aşağıda tanımları verilen bu üç kayıp fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

SELF→ $L_1(\hat{\theta},\theta) = (\hat{\theta}-\theta)^2$

LLF→ $L_2(\hat{\theta},\theta) = e^{p(\hat{\theta}-\theta)} - p(\hat{\theta}-\theta) - 1, \quad p \neq 0$

$$\text{GELF}\rightarrow L_3(\hat{\theta},\theta)=\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^c - c\log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1$$

Burada, p ve c simetriklikten uzaklığı, $\hat{\theta}$ ise herhangi bir θ parametresinin tahminini ifade etmektedir. Bu kayıp fonksiyonları altında parametrelerin Bayes tahminleri, sonsal dağılımları kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\text{SELF}\rightarrow \hat{\theta}_{B1}=E(\theta|veri)$$

$$\text{LLF}\rightarrow \hat{\theta}_{B2}=-\frac{1}{p}\log\{E(e^{-p\theta}|veri)\}$$

$$\text{GELF}\rightarrow \hat{\theta}_{B3}=\{E(\theta^{-c}|veri)\}^{-1/C}$$

Bu kayıp fonksiyonları altında, güvenilirlik $R(veri|\alpha,\beta)$ için Bayes tahminleri

$$\hat{R}_{B1}=\int_0^\infty\int_0^1 R(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha$$

$$\hat{R}_{B2}=-\frac{1}{p}\log\left\{\int_0^\infty\int_0^1 e^{-pR(veri|\alpha,\beta)}\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha\right\}$$

$$\hat{R}_{B3}=\left\{\int_0^\infty\int_0^1 R(veri|\alpha,\beta)^{-c}\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha\right\}^{-1/c}$$

eşitlikleri hesaplanarak, tehlike oranı $\lambda(veri|\alpha,\beta)$ için Bayes tahminleri ise

$$\hat{\lambda}_{B1} = \int_0^{\infty}\int_0^{1} \lambda(veri|\alpha,\beta)\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha$$

$$\hat{\lambda}_{B2} = -\frac{1}{p}\log\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{1} e^{-p\lambda(veri|\alpha,\beta)}\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha\right\}$$

$$\hat{\lambda}_{B3} = \left\{\int_0^{\infty}\int_0^{1} \lambda(veri|\alpha,\beta)^{-c}\pi(\alpha,\beta|veri)d\beta d\alpha\right\}^{-1/c}$$

eşitlikleri hesaplanarak elde edilirler.

Ancak, STSP dağılımının yoğunluk fonksiyonu incelendiğinde, dağılımın sınırlarının eşik parametresi β' ya bağlı olması, bu dağılım için tüm parametrelerin bilinmediği durumlarda bir Bayes modeli oluşturmayı imkansız hale getirmektedir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için aşamalı model ve beklenen Bayes yöntemleri gibi farklı yöntemler de denenmiş fakat olumlu sonuçlar elde edilememiştir. Ardından, STSP dağılımı bir yardımcı değişken yardımıyla yeniden parametrize edilerek Gibbs algoritması yardımıyla Bayes tahmini yapabilmeye uygun hale getirilmiştir. Daha önce Ho ve ark. (2017), tarafından da ele alınan yardımcı değişken kullanımının amacı parametrelerin marjinal dağılımlarının kolaylıkla elde edilebileceği yeni bir model oluşturmaktır.

Öncelikle, kullanılacak olan yardımcı değişken seçimi oldukça fazla deneme ve tecrübe gerektirmektedir. Farklı yardımcı değişkenler kullanılarak dağılım yeniden parametrize edilebilir. Aşağıda verilen teoremler yardımıyla STSP dağılımı yeniden parametrize edilmiştir.

Teorem 4.2. Bir v rastgele değişkeni $\alpha > 0$ parametresine sahip olmak üzere,

yoğunluk fonksiyonu;

$$f(v) = \alpha[1 - (1 - v)^{1/(\alpha-1)}\ ]\ ,\quad 0 < v < 1$$

olarak ifade edildiğinde; Ayrıca, $V = v$ verildiğinde gözlenen veri X' in koşullu dağılımı düzgün dağılım olmak üzere

$$f(x|v) = U\left[\beta(1-v)^{\frac{1}{(\alpha-1)}}, 1 - (1-\beta)(1-v)^{\frac{1}{(\alpha-1)}}\right]$$
$$= \frac{1}{1 - (1-v)^{1/(\alpha-1)}}$$

gibi verilmiş olsun. Böylece X' in marjinal dağılımı Eşitlik (3.2.)' te verilen STSP dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir.

İspat: Öncelikle X ve V' nin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,v) = f(x|v)f(v)$$
$$= \alpha\ I_{0<v<1}\ I_{\beta(1-v)^{1/(\alpha-1)}<x<1-(1-\beta)(1-v)^{1/(\alpha-1)}}$$

olarak ifade edilir. Burada $I_{(.)}$gösterge fonksiyonu temsil eder. Ardından, v üzerinden integral alınarak X' in marjinal yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \int f(x,v)dv = \alpha \int_0^1 I_{\beta(1-v)^{1/(\alpha-1)}<x<1-(1-\beta)(1-v)^{1/(\alpha-1)}}\ dv$$
$$= \alpha \int_{max\left\{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}, 1-\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}\right\}}^{1} dv$$

$$= \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} & , \quad 0 < x \leq \beta \\ \alpha \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} & , \quad \beta \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Bu teorem, parametrelerin koşullu dağılımlarını elde ederek Gibbs algoritması oluşturmaya kolaylık sağlamaktadır. Gibbs algoritması, parametrelerin koşullu dağılımlarının elde edilmesini esas aldığından, öncelikle bu koşullu dağılımlar elde edilmiştir. İlk olarak v yardımcı değişkeninin koşullu dağılımı

$$f(v|\alpha,\beta,x) = \frac{f(v,\alpha,\beta,x)}{f(\alpha,\beta,x)}$$
$$\propto f(v,\alpha,\beta,x) = f(x|\alpha,\beta,v) f(\alpha,\beta,v)$$

olarak ifade edilebilir. Burada;

$$f(\alpha,\beta,v) = f(v|\alpha,\beta) f(\alpha,\beta)$$
$$\propto f(v|\alpha,\beta) \propto f(v|\alpha)$$

şeklinde ifade edilebildiğinden, diğer değişkenler verildiğinde v yardımcı değişkeninin koşullu dağılımı

$$f(v|\alpha,\beta,x) \propto f(v|\alpha) f(x|\alpha,\beta,v) = \alpha\, I_{max\left\{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1},\, 1-\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}\right\}<v<1}$$
$$\propto I_{max\left\{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1},\, 1-\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}\right\}<v<1} \qquad (4.4.)$$

olarak elde edilir. Ardından şekil parametresi α ve eşik parametresi β için benzer

işlemler uygulanarak, bu değişkenlerin de koşullu dağılımları aşağıdaki şekilde elde edilir. İlk olarak β için

$$f(\beta|\alpha,v,x) = \frac{f(\beta,\alpha,v,x)}{f(\alpha,v,x)} \propto f(\beta,\alpha,v,x)$$
$$= f(x|\alpha,\beta,v)f(\alpha,\beta,v) \propto f(x|\alpha,\beta,v)f(v|\alpha,\beta)$$
$$\propto f(x|\alpha,\beta,v)$$

olarak elde edilir. Böylece diğer değişkenler (α, v) verildiğinde β parametresinin koşullu dağılımı

$$f(\beta|\alpha,v,x) \propto f(x|\alpha,v,\beta)$$
$$\propto I_{1-\frac{1-x}{(1-v)^{1/(\alpha-1)}}<\beta<\frac{x}{(1-v)^{1/(\alpha-1)}}} \quad (4.5.)$$

şeklinde elde edilir. Ardından, α için

$$f(\alpha|\beta,v,x) = \frac{f(\alpha,\beta,v,x)}{f(\beta,v,x)} \propto f(\beta,\alpha,v,x)$$
$$= f(x|\alpha,\beta,v)f(\alpha,\beta,v) \propto f(x|\alpha,\beta,v)f(v|\alpha,\beta)$$

olmak üzere

$$f(\alpha|\beta,v,x) \propto f(x|\alpha,\beta,v)f(v|\alpha,\beta)$$
$$\propto \frac{1}{1-(1-\beta)(1-v)^{\frac{1}{(\alpha-1)}}-\beta(1-v)^{\frac{1}{(\alpha-1)}}} \alpha\left[1-(1-v)^{1/(\alpha-1)}\right]$$
$$\propto \alpha\, I_{1<\alpha<\min\left\{\ln(1-v)/ln\left(\frac{x^{<}}{\beta}\right)+1,\ln(1-v)/ln\left(\frac{1-x^{>}}{1-\beta}\right)+1\right\}} \quad (4.6.)$$

olarak elde edilir. Burada; $x^{<}$, β değerinden küçük x değerlerini, $x^{>}$ ise β değerinden büyük x değerlerini ifade eder. Böylece, şekil ve eşik parametreleri için $\pi(\alpha)$ ve $\pi(\beta)$ önsel dağılımlarının da belirlenmesiyle (4.5.) ve (4.6.) eşitlikleri yardımıyla Gibbs algoritması kullanılarak parametrelerin ve dolayısıylada bu parametrelerin herhangi bir fonksiyonunun Bayes tahmini elde edilebilir. Öncelikle, β için önsel dağılım olarak bilgilendirici olmayan durumda (herhangi bir önsel koşul veya bilginin olmadığı) düzgün dağılım $U[0,1]$ ele alınmıştır. Ayrıca, düzgün dağılımın dışında beta dağılımı da önsel dağılım olarak düşünülebilir. Benzer şekilde α için önsel dağılım olarak da $U[1,c]$ olacak şekilde bir düzgün dağılım düşünülmüştür. Bu düzgün dağılıma alternatif olarak $GA_{(1,\infty)}(a,b)$ formunda bir kesilmiş gamma dağılımı da düşünülebilir. Bu durumda ise α parametresinin sonsal dağılımı $GA_{(1,\infty)}(n+a,b)$ olarak elde edilir. Fakat bu durumda, büyük n değerleri için kesilmiş gamma önsel dağılımı ile nümerik olarak sonuçlar hesaplanamamaktadır. Yapılan simülasyon çalışmalarında, bu önsel dağılımın kullanılabilmesi için örneklem hacminin en fazla 60 olması gerektiği görülmüştür. Bu nedenle α için düzgün dağılım, önsel dağılım olarak belirlenmiştir. Böylece; diğer parametreler sabit iken β parametresinin $\pi(\beta)\sim U[0,1]$ varsayımı altında koşullu sonsal dağımı

$$f(\beta|\vec{\alpha},\vec{v},\vec{x}) \propto \pi(\beta)\ \prod_{i=1}^{n} f(\beta_i|\alpha,v,x) \propto I_{max\left(1-\frac{1-x_i}{(1-v_i)^{1/\alpha-1}},0\right)<\beta<min\left(1-\frac{x_i}{(1-v_i)^{1/\alpha-1}},1\right)} \quad (4.7.)$$

olarak elde edilirken, α parametresinin $\pi(\alpha)\sim U[1,c]$ varsayımı altında koşullu sonsal dağımı

$$f\left(\alpha\middle|\vec{\beta},\vec{v},\vec{x}\right) \propto \pi(\alpha)\ \prod_{i=1}^{n} f(a_i|\alpha,v,x)$$

$$\propto \frac{(n+1)}{k^{n+1}-1}\alpha^n \ , \ 1<\alpha<k \qquad (4.8.)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$k = min\left\{1+\frac{\ln(1-v_i)}{ln\left(\frac{x_i^{<}}{\beta_i}\right)}, 1+\frac{\ln(1-v_i)}{ln\left(\frac{1-x_i^{>}}{1-\beta_i}\right)}, c\right\}$$

olarak ifade edilir. Böylece, (4.4.), (4.7.) ve (4.8.) eşitlikleri kullanılarak aşağıda verilen Gibbs örnekleme algoritması Markov Zinciri Monte Carlo örneklemesi yardımıyla STSP dağılımının güvenilirlik ve tehlike oranının Bayes tahminleri $\hat{R}_B$ ve $\hat{\lambda}_B$ ve Bayesyen en yüksek sonsal yoğunluk (HPD) güven aralıkları elde edilebilir.

1. **Adım:** Parametreler için birer $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ başlangıç değerleri atanır.
2. **Adım:** $t=1$ olarak atama yapılır.
3. **Adım:** $\alpha^{(t-1)}$, $\beta^{(t-1)}$ ve $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ örneklemi (4.4.) eşitliğinde kullanılarak $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ yardımcı değişkenleri üretilir.
4. **Adım:** $\alpha^{(t-1)}$, $\beta^{(t-1)}$, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ değerleri kullanılarak $\pi(\beta)\sim U[0,1]$ varsayımı altında aşağıdaki eşitlik kullanılarak $\beta^{(t)}$ değerleri üretilir.

$$\boldsymbol{I}\left(\max\left\{1-\frac{1-x_i}{(1-v_i)^{1/(\alpha^{(t-1)}-1)}}, 0\right\} < \beta < \min\left\{1-\frac{x_i}{(1-v_i)^{1/(\alpha^{(t-1)}-1)}}, 1\right\}\right)$$

5. **Adım:** Elde edilen $\beta^{(t)}$, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ değerleri kullanılarak, α için $U[1,c]$ önsel dağılımı varsayımı altında $c=100$ alınarak, (4.8.) eşitliğinde verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunda ters dönüşüm yöntemi

kullanılarak $\alpha^{(t)}$ değeri üretilir.

6. **Adım:** Eşitlik (4.1.) ve (4.2.) kullanılarak her bir $\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}$ için $\hat{R}_B^{(t)}$ ve $\hat{\lambda}_B^{(t)}$ değerleri hesaplanır.
7. **Adım:** $t = t + 1$ olarak atama yapılır.
8. **Adım:** Döngüde 2-7. adımlar N defa olarak tekrar edilerek $\hat{R}_B^{(t)}; t = 1,2,\cdots,N$ ve $\hat{\lambda}_B^{(t)}; t = 1,2,\cdots,N$ sonsal örneklemleri elde edilir.

Elde edilen MCMC örneklemi yardımıyla SELF, LLF ve GELF kayıp fonksiyonları altında $\hat{R}_{B1}, \hat{R}_{B2}, \hat{R}_{B3}, \hat{\lambda}_{B1}, \hat{\lambda}_{B2}$ ve $\hat{\lambda}_{B3}$ tahminleri aşağıdaki eşitlikler kullanılarak elde edilir.

$$\hat{R}_{B1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_B^{(t)}$$

$$\hat{R}_{B2} = -\frac{1}{p}\ln\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{-pR_B^{(t)}}\right\}$$

$$\hat{R}_{B3} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {R_B^{(t)}}^{-c}\right\}^{-1/c}$$

$$\hat{\lambda}_{B1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_B^{(t)}$$

$$\hat{\lambda}_{B2} = -\frac{1}{p}\ln\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{-p\lambda_B^{(t)}}\right\}$$

$$\hat{\lambda}_{B3} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_B^{(t)^{-c}} \right\}^{-1/c}$$

5. STOKASTİK GERİLİM-MUKAVEMET GÜVENİLİRLİĞİ

Bu bölüm, STSP dağılımına sahip bağımsız X mukavemet ve Y gerilim rastgele değişkenleri göz önüne alınarak stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği çalışmalarını kapsamaktadır. İlk olarak, bağımsız bir X mukavemet ve ona karşı bir Y gerilim rasgele değişkeninden oluşan basit bir sistem için $R = P(Y < X)$ stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği yer almaktadır. Ardından, k tane mukavemet rasgele değişkenleri $X_1, X_2, \cdots, X_k$' dan en az s tanesi ortak bir Y gerilimini aştığı sürece çalışan, çok bileşenli sistemler için gerilim-mukavemet güvenilirliği çalışmaları bulunmaktadır. Bu amaçla, R tahmini için en çok en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Ardından, R için yaklaşık güven aralıkları elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicilerine ait yaklaşık bir güven aralığı olan bootstrap ortalama güven aralıkları, Bayes tahminleri için ise HPD güven aralıkları elde edilmiştir.

5.1. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği

Bağımsız ve aynı dağılıma sahip X mukavemet ve Y gerilim rastgele değişkenlerinden oluşan basit bir sistem için stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği, $f_X(x)$ mukavemet rasgele değişkeninin, $f_Y(y)$ ise gerilim rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere

$$R = P(Y < X) = \int_0^\infty \int_0^x f_Y(y)\, f_X(x)\, dydx \qquad (5.1.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır.

$X \sim STSP(\alpha_1, \beta_1)$ ve $Y \sim STSP(\alpha_2, \beta_2)$ dağılımına sahip iki bağımsız rastgele değişken olarak düşünüldüğünde böyle basit bir sistemin gerilim mukavemet güvenilirliği $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ sırasıyla ve X ve Y rastgele değişkenlerine ait olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere

$$R = P(Y < X) = \int_0^1 \int_0^x f(x; \alpha_1, \beta_1) g(y; \alpha_2, \beta_2)\, dydx \qquad (5.2.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. STSP dağılımının iki yönlü bir dağılım olması nedeniyle olasılık yoğunluk fonksiyonunu aşağıda verildiği gibi parçalı olarak ele alabiliriz.

$$f(x; \alpha_1, \beta_1) = \begin{cases} f_1(x; \alpha_1, \beta_1) & , 0 < x \leq \beta_1 \\ f_2(x; \alpha_1, \beta_1) & , \beta_1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$g(y; \alpha_2, \beta_2) = \begin{cases} g_1(y; \alpha_2, \beta_2) & , 0 < y \leq \beta_2 \\ g_2(y; \alpha_2, \beta_2) & , \beta_2 \leq y < 1 \end{cases}$$

Burada

$$f_1(x; \alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 \left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 - 1}, \; f_2(x; \alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 \left(\frac{1-x}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1 - 1}$$

$$g_1(y; \alpha_2, \beta_2) = \alpha_2 \left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1}, \; g_2(y; \alpha_2, \beta_2) = \alpha_2 \left(\frac{1-y}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1}$$

olmak üzere f_i ve g_i' ler birer olasılık yoğunluk fonksiyonu değil, bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun parçalarıdır. (5.2.) eşitliğini hesaplamak için genelliği kaybetmeden $\beta_2 < \beta_1$ olduğu varsayımı altında, parametrelerin olası tüm durumları göz önüne alındığında aşağıdaki gibi beş farklı durum ortaya çıkmaktadır.

$0 < x < \beta_2 \, , 0 < y < \beta_2$ ise $f_1(x)g_1(y)$

$\beta_2 < x < \beta_1 \, , \beta_2 < y < 1$ ise $f_1(x)g_2(y)$

$\beta_2 < x < \beta_1 \, , 0 < y < \beta_2$ ise $f_1(x)g_1(y)$

$\beta_1 < x < 1 \, , \beta_2 < y < 1$ ise $f_2(x)g_2(y)$

$\beta_1 < x < 1 \, , 0 < y < \beta_2$ ise $f_2(x)g_1(y)$

Tüm bu durumlar göz önüne alınarak STSP dağılımının stokastik gerilim mukavemet güvenilirliği

$$R = \int_0^{\beta_2} \int_0^{x} f_1(x)g_1(y)\, dydx + \int_{\beta_2}^{\beta_1} \int_{\beta_2}^{x} f_1(x)g_2(y)\, dydx + \int_{\beta_2}^{\beta_1} \int_0^{\beta_2} f_1(x)g_1(y)\, dydx + \int_{\beta_1}^{1} \int_{\beta_2}^{x} f_2(x)g_2(y)\, dydx + \int_{\beta_1}^{1} \int_0^{\beta_2} f_2(x)g_1(y)\, dydx \qquad (5.3.)$$

eşitliğinin çözümü ile elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin sağ tarafında yer alan integraller sırasıyla $I_i \, , i = 1,2, \cdots ,5$ olarak adlandırılarak bu integrallerin sonuçları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_1 = \int_0^{\beta_2} \int_0^{x} f_1(x)g_1(y)\, dydx = \int_0^{\beta_2} \int_0^{x} \alpha_1 \left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 \left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1} dydx$$

$$= \frac{\alpha_1 {\beta_1}^{1-\alpha_1} {\beta_2}^{1+\alpha_1}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$I_2 = \int_{\beta_2}^{\beta_1}\int_{\beta_2}^{x} f_1(x)g_2(y)\,dydx = \int_{\beta_2}^{\beta_1}\int_{\beta_2}^{x} \alpha_1\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}\alpha_2\left(\frac{1-y}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}dydx$$
$$= {\beta_1}^{1-\alpha_1}(1-\beta_2)({\beta_1}^{\alpha_1} - {\beta_2}^{\alpha_1}) - A\alpha_1{\beta_1}^{1-\alpha_1}(1-\beta_2)^{1-\alpha_2}$$

Burada $A = B(\beta_1;\alpha_1,\alpha_2+1) - B(\beta_2;\alpha_1,\alpha_2+1)$ ifadesi tamamlanmamış beta fonksiyonlarının farkını ifade eder.

$$I_3 = \int_{\beta_2}^{\beta_1}\int_{0}^{\beta_2} f_1(x)g_1(y)\,dydx = \int_{\beta_2}^{\beta_1}\int_{0}^{\beta_2} \alpha_1\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}\alpha_2\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}dydx$$
$$= {\beta_1}^{1-\alpha_1}\beta_2({\beta_1}^{\alpha_1} - {\beta_2}^{\alpha_1})$$

$$I_4 = \int_{\beta_1}^{1}\int_{\beta_2}^{x} f_2(x)g_2(y)\,dydx$$
$$= \int_{\beta_1}^{1}\int_{\beta_2}^{x} \alpha_1\left(\frac{1-x}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}\alpha_2\left(\frac{1-y}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}dydx$$
$$= (1-\beta_1)(1-\beta_2)\left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right]$$

$$I_5 = \int_{\beta_1}^{1}\int_{0}^{\beta_2} f_2(x)g_1(y)\,dydx$$
$$= \int_{\beta_1}^{1}\int_{0}^{\beta_2} \alpha_1\left(\frac{1-x}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}\alpha_2\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}dydx = \beta_2(1-\beta_1)$$

Böylece, STSP dağılımın stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği $R = \sum_{i=1}^{5} I_i$;

$$R = 1 - \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\left[\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \beta_2\beta_1 - \left(\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_1} (1-\beta_2)(1-\beta_1)\right] - \alpha_1{\beta_1}^{1-\alpha_1}(1-\beta_2)^{1-\alpha_2}[B(\beta_1;\alpha_1,\alpha_2+1) - B(\beta_2;\alpha_1,\alpha_2+1)] \quad (5.4.)$$

olarak elde edilir. Elde edilen eşitliğin karmaşık yapısı ve hesaplama zorluğu göz önüne alındığında (5.4.) eşitliği parametrelerin $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ özel durumunda, aşağıdaki gibi daha sade hale indirgenebilir.

$$R = \frac{\alpha_1\beta + \alpha_2(1-\beta)}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Ayrıca, $\beta = 0$ durumunda

$$R = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

ve $\beta = 1$ durumunda

$$R = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

eşitlikleri kullanılarak STSP dağılımının stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği R hesaplanabilir.

5.1.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin

Bağımsız $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ rastgele örneklemleri sırasıyla $X \sim STSP(\alpha_1, \beta_1)$ ve $Y \sim STSP(\alpha_2, \beta_2)$ dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Böylece gözlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | x, y) = \alpha_1^n \alpha_2^m \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r} x_{(i)} \prod_{i=r+1}^{n} (1 - x_{(i)})}{{\beta_1}^r (1-\beta_1)^{n-r}} \right\}^{\alpha_1 - 1} \times \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r'} y_{(i)} \prod_{i=r'+1}^{m} (1 - y_{(i)})}{{\beta_2}^{r'} (1-\beta_2)^{m-r'}} \right\}^{\alpha_2 - 1}$$

olarak ifade edilir. Burada; $x_{(i)} \equiv 0$, $y_{(i)} \equiv 0$, $x_{(n+1)} \equiv 1, y_{(m+1)} \equiv 1$ olmak üzere

$$x_{(r)} \leq \beta_1 < x_{(r+1)} \ , \ y_{(r')} \leq \beta_2 < y_{(r'+1)}$$

olarak belirtilir.

STSP dağılımına ait parametrelerin (α, β) en çok olabilirlik tahminleri $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ van Dorp ve Kotz (2002) tarafından n birimlik bir örneklem için aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\hat{\beta} = X_{(\hat{r})}$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\log M(\hat{r})}$$

Burada, $\hat{r} = \arg max_{r \epsilon \{1, \cdots, s\}} \ M(r)$ ve

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^{n} \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}}$$

olarak ifade edilir. Açıkça görülüyor ki; $\hat{\beta}$ bir sıra istatistiğidir ve kolaylıkla elde edilebilir. β' nın bilinmesi durumunda ise α' nın en çok olabilirlik tahmini;

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{r} \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) \sum_{i=r+1}^{n} \ln\left(\frac{1 - x_i}{1 - \beta}\right)}$$

olarak elde edilir. En çok olabilirlik tahmin edicilerin değişmezlik özelliği göz önüne alındığında, (5.4.) eşitliğinde parametreler yerine en çok olabilirlik tahmin edicileri yazılarak R' nin en çok olabilirlik tahmini $\hat{R}$ elde edilir.

5.1.1.1. Bootstrap Güven Aralığı

STSP dağılımının stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği R için elde edilen (5.4.) eşitliği incelendiğinde R' nin bir dağılımını ve bununla birlikte bir güven aralığını elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, R' nin güven aralığını elde etmek için alternatif yöntemler olarak parametrik ve parametrik olmayan bootstrap yöntemleri ele alınmıştır.

Bootstrap yöntemi, bir kitlenin dağılımını yeniden örnekleme teknikleri kullanarak tahmin etme amacıyla parametrik olmayan Monte Carlo yöntemlerinin bir sınıfı olarak ortaya çıkmıştır. Literatürde ilk defa Efron (1979) tarafından ele alınan bootstrap tekniği, kitle dağılımının bilinmediği durumlarda, çıkarsama yapılmasını sağlayan ve yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Yeniden örnekleme yöntemleri ise gözlenen bir örnekleme sonlu bir kitle olarak yaklaşarak, bu örneklemden kitle karakteristiğini ortaya çıkaracak rastgele örneklemler üretmeye

dayalı yöntemlerdir (Rizzo, 2008). Yeniden örnekleme tekniğinin yapısına bağlı olarak da parametrik ve parametrik olmayan bootstrap yöntemleri ortaya çıkmıştır.

Parametrik ve parametrik olmayan bootstrap örneklemlerinin oluşturulmasının ardından hedef kitleye ait yaklaşık bir bootstrap güven aralığı oluşturulabilir. Bu güven aralıklarını oluşturmak için standart normal bootstrap, yüzdelik bootstrap (boot-p), studentized bootstrap (boot-t) gibi farklı yöntemler kullanılmaktadır. Standart normal bootstrap yöntemi çok yaygın kullanılmamakla birlikte, literatürdeki çalışmalarda sıklıkla boot-p ve boot-t yöntemleri kullanılmaktadır. Boot-t yöntemi parametrelerin asimptotik varyansının kullanıldığı bir yöntem olup, boot-p yöntemi ise elde edilen bootstrap örneklemin yüzdeliklerine göre güven aralığı oluşturulan bir yöntemdir. STSP dağılımının sınırları bilinmeyen eşik parametresi β' ya bağlı olduğundan dolayı Fisher bilgi matrisi kullanılarak bilinmeyen parametrelerin asimptotik varyansı hesaplanamamaktadır. Bu nedenle R için studentized bootstrap (boot-t) güven aralıklarını elde etmek münkün değildir. Fakat R' nin yaklaşık bir güven aralığı boot-p yöntemi ile elde edilebilmektedir. Böylece, parametrik ve parametrik olmayan bootstrap örneklemler elde edilerek R için boot-p güven aralıkları elde edilmiştir.

Bootstrap örneklemleri, yeniden örnekleme tekniğine bağlı olarak parametrik ve parametrik olmayan olarak ikiye ayrılmaktadır. Parametrik olmayan bootstrap yönteminde yeniden örnekleme işlemi, parametrelerden üretilen bir örneklem içerisinden yapılırken parametrik bootstrap yönteminde ise parametrelerden üretilen örneklemlerin de parametre tahminleri kullanılarak yeni bir örneklem üretme şeklinde yapılır. STSP dağılımının stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği R için her iki duruma ait bootstrap güven aralıkları aşağıdaki gibi elde edilir.

R için $100(1-\gamma)\%$' lık parametrik ve parametrik olmayan boot-p güven aralıklarını oluşturmak için kullanılacak algoritma aşağıdaki gibidir.

1. **Adım:** Sırasıyla $STSP(\alpha_1, \beta_1)$, $STSP(\alpha_2, \beta_2)$ dağılımlarından $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ve $y_1, y_2, \cdots, y_m$ rastgele örneklemleri elde edilir.
2. **Adım (Parametrik Olmayan):** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ve $y_1, y_2, \cdots, y_m$ rastgele örneklemleri kullanarak yerine koyma örneklemesi ile $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ ve $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*$ bootstrap örneklemleri üretilir.

2. **Adım (Parametrik):** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ve $y_1, y_2, \cdots, y_m$ rastgele örneklemlerine ait parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2$ hesaplanır ve ardından $STSP(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)$ ve $STSP(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)$ dağılımlarından $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ ve $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*$ bağımsız bootstrap örneklemleri üretilir.
3. **Adım:** Bir önceki adımda üretilen parametrik veya parametrik olmayan bootstrap örneklemlere ait parametre tahminleri $\hat{\alpha}_1^*, \hat{\beta}_1^*, \hat{\alpha}_2^*, \hat{\beta}_2^*$, hesaplanır.
4. **Adım:** Boostrap parametre tahminleri (5.4.) denkleminde parametrelerin yerine kullanılarak $\hat{R}^*$ bootstrap tahmini elde edilir.
5. **Adım:** İkinci adım B defa tekrar edilerek $STSP(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)$ ve $STSP(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)$ ile bağımsız bootstrap örnekleri oluşturularak R'nin bootstrap tahminlerinin bir kümesini $\{\hat{R}_i^* : i = 1,2, \cdots, B\}$ elde edilir.
6. **Adım:** $\hat{R}^{*(\tau)}$ bootstrap tahminlerinin bir kümesinin τ. yüzdeliği, öyle ki

$$\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} I\left(\hat{R}_i^* \leq \hat{R}^{*(\tau)}\right) = \tau \ , \qquad 0 < \tau < 1$$

ve $I(\cdot)$ gösterge fonksiyon olmak üzere $(\hat{R}^{*(\gamma/2)}, \hat{R}^{*(1-\gamma/2)})$ olarak parametrik ve parametrik olmayan güven aralıkları elde edilir.

Böylece, STSP dağılımından alınmış iki bağımsız gerilim ve mukavemet rastgele değişkenlerine sahip basit bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmini ve bu tahmine ait yaklaşık bir güven aralığı

olarak bootstrap güven aralığı yukarıda elde elde edilen yöntemler kullanılarak hesaplanabilir.

5.1.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin

STSP dağılımının sınırlarının yansıma/eşik parametresi β' ya bağlı olması ve ayrıca (5.4.) eşitliğinin karmaşık yapısı, R' nin bir dağılımını bulmayı ve bununla birlikte bir güven aralığını elde etmeyi imkansız hale getirmektedir. Ayrıca, Bayes tahmin edicilerin, en çok olabilirlik tahmin edicilerinin sahip olduğu değişmezlik özelliğine sahip olmaması nedeniyle, R' nin Bayes tahmini ve yaklaşık güven aralığı farklı durumlar göz önüne alınarak ele alınmıştır. İlk olarak, yansıma/eşik parametreleri β_1 ve β_2' nin bilinen ve eşit varsayıldığı durum, ardından β_1 ve β_2' nin bilinen fakat eşit varsayılmadığı durum, son olarak da tüm parametrelerin bilinmeyen parametreler olduğu durum esas alınarak Bayes tahmin çalışmaları incelenmiştir.

5.1.2.1. Eşik Parametrelerinin Bilinen ve Eşit Olduğu Durum

Bağımsız mukavemet $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ve gerilim $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ rastgele örneklemleri sırasıyla $X \sim STSP(\alpha_1, \beta_1)$ ve $Y \sim STSP(\alpha_2, \beta_2)$ dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu bölümde, yansıma/eşik parametrelerinin eşit olarak bilinen bir β_0 değerine eşit olduğu durum ele alınmıştır ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$). Ayrıca, şekil parametreleri α_1 ve α_2 ise bağımsız rastgele değişkenler olarak ele alınmıştır. Böyle bir durum göz önüne alındığında, STSP dağılımının stokastik gerilim mukavemet güvenilirliği

$$R = \beta_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} + (1-\beta_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \qquad (5.5.)$$

olarak daha sade bir şekilde elde edilir. Öncelikle, bilinmeyen parametreler α_1 ve α_2 için eldeki tek önsel bilgi, bu parametrelerin [0,∞] aralığında değerler almasıdır. Bu aralıkta değerler alan bir rastgele değişken için en yaygın olarak kullanılan dağılım, gamma dağılımı olduğundan, şekil parametrelerinin önsel dağılımı olarak gamma dağılımı düşünülmüştür. Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad , x > 0 \, , \alpha > 0 \, , \beta > 0 \tag{5.6.}$$

olmak üzere; α_1 ve α_2 için önsel dağılımlar $\alpha_1 \sim GA(a_1, b_1)$ ve $\alpha_2 \sim GA(a_2, b_2)$ olarak ele alınmıştır. Böylece, bu önsel dağılımların yoğunluk fonksiyonları;

$$\pi(\alpha_1) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \quad , a_1 > 0 \, , b_1 > 0 \, , \alpha_1 > 0$$

$$\pi(\alpha_2) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \quad , a_2 > 0 \, , b_2 > 0 \, , \alpha_2 > 0$$

ve gözlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(x, y | \alpha_1, \alpha_2, \beta_0) = \alpha_1^n \alpha_2^m \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r} x_{(i)} \prod_{i=r+1}^{n} (1 - x_{(i)})}{{\beta_0}^r (1 - \beta_0)^{n-r}} \right\}^{\alpha_1 - 1} \times \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r'} y_{(i)} \prod_{i=r'+1}^{m} (1 - y_{(i)})}{{\beta_0}^{r'} (1 - \beta_0)^{m-r'}} \right\}^{\alpha_2 - 1}$$

olarak ifade edilir. Burada; $x_{(0)} \equiv 0$, $y_{(0)} \equiv 0$, $x_{(n+1)} \equiv 1$, $y_{(m+1)} \equiv 1$ olmak üzere

$$x_{(r)} \leq \beta_0 < x_{(r+1)}\ ,\ y_{(r')} \leq \beta_0 < y_{(r'+1)}$$

olarak belirtilir. Böylece, verilerin ve parametrelerin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}\pi(x, y, \alpha_1, \alpha_2) &= L(x, y|\alpha_1, \alpha_2, \beta_0)\pi(\alpha_1)\pi(\alpha_2) \\ &= \alpha_1^n \alpha_2^m e^{-(T_1+T_2)(\alpha_1-1)} e^{-(T_3+T_4)(\alpha_2-1)} \\ &\quad \times\ \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1\alpha_1} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2\alpha_2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$T_1 = -\sum_{i=1}^{r} \ln\left(\frac{x_{(i)}}{\beta_0}\right) \quad , T_2 = -\sum_{i=r+1}^{n} \ln\left(\frac{1-x_{(i)}}{1-\beta_0}\right)$$

$$T_3 = -\sum_{i=1}^{r'} \ln\left(\frac{y_{(i)}}{\beta_0}\right) \quad , T_4 = -\sum_{i=r'+1}^{m} \ln\left(\frac{1-y_{(i)}}{1-\beta_0}\right)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Ardından α_1 ve α_2' ye ait sonsal dağılımlar

$$f(\alpha_1|x) \propto \alpha_1^{n+a_1-1} e^{-\alpha_1(T_1+T_2+b_1)},\quad a_1 > 0\ , b_1 > 0\ , \alpha_1 > 0$$

$$\alpha_1|x\ \sim\ GA(n + a_1, b_1 + T_1 + T_2)$$

$$f(\alpha_2|y) \propto \alpha_2^{m+a_2-1} e^{-\alpha_2(T_3+T_4+b_2)},\quad a_2 > 0\ , b_2 > 0\ , \alpha_2 > 0$$

$$\alpha_2|y\ \sim\ GA(m + a_2, b_2 + T_3 + T_4)$$

olarak elde edilir. Sonsal dağılımları elde edilen şekil parametrelerinin (α_1 ve α_2) bağımsızlığı göz önüne alındığında $U_1 = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ ve $U_2 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$ olmak üzere bu rastgele değişkenlerin beklenen değerleri

$$E(U_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty U_1 \pi(\alpha_1; x)\pi(\alpha_2; y) d\alpha_1 d\alpha_2$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \pi(\alpha_1; x)\pi(\alpha_2; y) d\alpha_1 d\alpha_2$$

ve

$$E(U_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty U_2 \pi(\alpha_1; x)\pi(\alpha_2; y) d\alpha_1 d\alpha_2$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \pi(\alpha_1; x)\pi(\alpha_2; y) d\alpha_1 d\alpha_2$$

integrallerinin çözümlenmesiyle hesaplanabilir. Böylece (5.5.) denklemi göz önüne alınarak, karesel hata kayıp fonksiyonu altında R 'nin beklenen değeri

$$E(R) = \beta_0 E(U_1) + (1 - \beta_0) E(U_2) \qquad (5.7.)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, $E(U_1)$ ve $E(U_2)$ eşitliklerinin hesaplanarak (5.7.) denkleminde yerine yazılmasıyla β_1 ve β_2 eşit ve biliniyor olduğu durumda R' nin Bayes tahmini elde edilir.

Ayrıca, şekil parametrelerinin sonsal dağılımlarının birer gamma dağılımı olarak elde edilmesiyle birlikte U_1 ve U_2 rastgele değişkenleri gamma dağılımına

sahip iki rastgele değişkenin fonksiyonları olarak ifade edilmiştir. Böylece, klasik dönüşüm yöntemleri kullanılarak U_1 ve U_2 rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları, $\lambda_1 = b_1 + T_1 + T_2$, $\lambda_2 = b_2 + T_3 + T_4$, $\delta_1 = n + a_1$ ve $\delta_2 = m + a_2$ olmak üzere

$$f_{U_1}(U_1) = \frac{{\lambda_1}^{\delta_1}{\lambda_2}^{\delta_2}}{B(\delta_1, \delta_2)} {u_1}^{\delta_1 - 1}(1-u_1)^{\delta_2 - 1}[\lambda_1 u_1 + \lambda_2(1-u_1)]^{-(\delta_1+\delta_2)}$$

$$, 0 \le u_1 \le 1$$

$$f_{U_2}(U_2) = \frac{{\lambda_1}^{\delta_1}{\lambda_2}^{\delta_2}}{B(\delta_1, \delta_2)} {u_2}^{\delta_2 - 1}(1-u_2)^{\delta_1 - 1}[\lambda_2 u_2 + \lambda_1(1-u_2)]^{-(\delta_1+\delta_2)}$$

$$, 0 \le u_2 \le 1$$

olarak elde edilir. Ardından U_1 ve U_2 rastgele değişkenlerinin beklenen değeri aşağıda verilen bazı özel fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir.

Gradshteyn ve Ryzhik (2007) tarafından verilen formül 3.197.3' te ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu, $(z)_j = z(z+1)\cdots(z+j-1)$ artan faktöriyeli belirtmek üzere

$${}_2F_1(a, b; c, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{x^j}{j!}$$

ve

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-\beta x)^{-v} dx = B(\lambda, \mu)\ {}_2F_1(v, \lambda; \lambda+\mu; \beta)$$

$$, \mu > 0, \lambda > 0, |\beta| < 1 \qquad (5.8.)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca Gradshteyn ve Ryzhik (2007) formül 9.131.1' de

$$ {}_2F_1(a,\beta;\gamma,z) = (1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right), \qquad (5.9.) $$

eşitlikleri verilmiştir. Böylece, (5.8.) ve (5.9.) eşitlikleri yardımıyla U_1 ve U_2 rastgele değişkenlerinin beklenen değerleri

$$ E(U_1) = \int_0^1 \frac{{\lambda_1}^{\delta_1}{\lambda_2}^{\delta_2}}{B(\delta_1,\delta_2)} {u_1}^{\delta_1-1}(1-u_1)^{\delta_2-1}\,[\lambda_1 u_1 + \lambda_2(1-u_1)]^{-(\delta_1+\delta_2)}du_1 $$

$$ = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\delta_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\right)\ {}_2F_1\left(\delta_1+\delta_2,\delta_1+1;\delta_1+\delta_2+1;1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) & ,\lambda_1<\lambda_2 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\delta_2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\right)\ {}_2F_1\left(\delta_1+\delta_2,\delta_2;\delta_1+\delta_2+1;1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) & ,\lambda_1\geq\lambda_2 \end{cases} $$

ve

$$ E(U_2) = \int_0^1 \frac{{\lambda_1}^{\delta_1}{\lambda_2}^{\delta_2}}{B(\delta_1,\delta_2)} {u_2}^{\delta_2-1}(1-u_2)^{\delta_1-1}[\lambda_2 u_2 + \lambda_1(1-u_2)]^{-(\delta_1+\delta_2)}du_2 $$

$$ = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\delta_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right)\ {}_2F_1\left(\delta_1+\delta_2,\delta_2+1;\delta_1+\delta_2+1;1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) & ,\lambda_1>\lambda_2 \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\delta_1}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right)\ {}_2F_1\left(\delta_1+\delta_2,\delta_1;\delta_1+\delta_2+1;1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) & ,\lambda_1\leq\lambda_2 \end{cases} $$

olarak elde edilir. Ardından, $E(U_1)$ ve $E(U_2)$, (5.7.) denkleminde yerine yazılarak β_1 ve β_2 eşit ve biliniyor olduğu durumda R' nin Bayes tahmini elde edilir.

5.1.2.2. Eşik Parametrelerinin Bilinen Fakat Eşit Olmadığı Durum

Bu alt bölümde, yansıma/eşik parametreleri β_1 ve β_2 biliniyor fakat eşit olmadığı varsayımı altında olmadan stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği incelenmiştir. Şekil parametreleri α_1 ve α_2 ise aynı şekilde bağımsız rastgele değişkenler olarak ele alınmıştır. Böyle bir durumda STSP dağılımının stokastik gerilim mukavemet güvenilirliği

$$R = 1 - \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left[\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\beta_2\beta_1 - \left(\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_1}(1-\beta_2)(1-\beta_1)\right] - \alpha_1{\beta_1}^{1-\alpha_1}(1-\beta_2)^{1-\alpha_2}[B(\beta_1;\alpha_1,\alpha_2+1) - B(\beta_2;\alpha_1,\alpha_2+1)] \quad (5.10.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Bir önceki duruma benzer şekilde α_1 ve α_2 için önsel dağılımlar $\alpha_1 \sim GA(a_1, b_1)$ ve $\alpha_2 \sim GA(a_2, b_2)$ olarak ele alınmıştır. Belirlenen koşullar altında gözlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonu

$$L(x, y|\alpha_1, \alpha_2, \beta_0) = \alpha_1^n \alpha_2^m \left\{\frac{\prod_{i=1}^{r} x_{(i)} \prod_{i=r+1}^{n}(1-x_{(i)})}{{\beta_1}^r (1-\beta_1)^{n-r}}\right\}^{\alpha_1-1} \times \left\{\frac{\prod_{i=1}^{r'} y_{(i)} \prod_{i=r'+1}^{m}(1-y_{(i)})}{{\beta_2}^{r'}(1-\beta_2)^{m-r'}}\right\}^{\alpha_2-1}$$

olarak ifade edilir. Burada; $x_0 \equiv 0, y_0 \equiv 0$, $x_{n+1} \equiv 0$, $y_{m+1} \equiv 0$ olmak üzere;

$$x_{(r)} \leq \beta_1 < x_{(r+1)} \ , \ y_{(r')} \leq \beta_2 < y_{(r'+1)}$$

olarak belirtilir. Böylece, verilerin ve parametrelerin ortak yoğunluk fonksiyonu;

$$\pi(x, y, \alpha_1, \alpha_2) = L(x, y|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\pi(\alpha_1)\pi(\alpha_2)$$
$$= \alpha_1^n \alpha_2^m e^{-(T_1+T_2)(\alpha_1-1)} e^{-(T_3+T_4)(\alpha_2-1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1\alpha_1} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2\alpha_2}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$T_1 = -\sum_{i=1}^{r} \ln\left(\frac{x_{(i)}}{\beta_1}\right) \quad , T_2 = -\sum_{i=r+1}^{n} \ln\left(\frac{1-x_{(i)}}{1-\beta_1}\right)$$

$$T_3 = -\sum_{i=1}^{r'} \ln\left(\frac{y_{(i)}}{\beta_2}\right) \quad , T_4 = -\sum_{i=r'+1}^{m} \ln\left(\frac{1-y_{(i)}}{1-\beta_2}\right)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Ardından α_1 ve α_2' ye ait sonsal dağılımlar

$$f(\alpha_1|\beta_1, x) \propto \alpha_1^{n+a_1-1} e^{-\alpha_1(T_1+T_2+b_1)}, \quad a_1 > 0\,, b_1 > 0\,, \alpha_1 > 0$$

$$\alpha_1|\beta_1, \vec{x} \sim GA(n + a_1, b_1 + T_1 + T_2)$$

$$f(\alpha_2|\beta_2, y) \propto \alpha_2^{m+a_2-1} e^{-\alpha_2(T_3+T_4+b_2)}, \quad a_2 > 0\,, b_2 > 0\,, \alpha_2 > 0$$

$$\alpha_2|\beta_2, \vec{y} \sim GA(m + a_2, b_2 + T_3 + T_4)$$

olarak elde edilir. Böylece, karesel hata kayıp fonksiyonu altında R' nin Bayes tahmini $\hat{R}_B$

$$\hat{R}_B = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R\, \pi(\alpha_1, \alpha_2 | \beta_1, \beta_2, x, y)\, d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (5.11.)$$

eşitliğinin çözümü ile elde edilir. Fakat sonsal ortalamayı hesaplamak için bu integralin açık bir formunu elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, Gibbs örnekleme algoritması kullanılarak Markov Zinciri Monte Carlo yöntemi yardımıyla $\hat{R}_B$ için sonsal bir ortalama elde edilebilir. Algoritma ise aşağıdaki gibidir.

1. Adım: $t = 1$ olarak atama yapılır.

2. Adım: $GA(n + a_1, b_1 + T_1 + T_2)$ dağılımından $\alpha_1^{(t)}$ üretilir.

3. Adım: $GA(m + a_2, b_2 + T_3 + T_4)$ dağılımından $\alpha_2^{(t)}$ üretilir.

4. Adım: $\alpha_1^{(t)}$ ve $\alpha_2^{(t)}$ kullanılarak $\hat{R}_B^{(t)}$ hesaplanır.

5. Adım: $t = t + 1$ olarak atama yapılır.

6. Adım: 2-5. adımlar N defa olarak tekrar edilerek $\hat{R}_B^{(t)}: t = 1,2,\cdots,N$ sonsal örneklemi elde edilir.

Böylece yaklaşık sonsal ortalama

$$\hat{R}_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{R}_B^{(t)} \qquad (5.12.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Ayrıca, Chen ve Shao (1999) tarafından önerilen bir $100\ (1-\gamma)\%$ en yüksek sonsal yoğunluk (Highest Posterior Density-HPD) güven aralığı, $\left[\frac{\gamma}{2}N\right]$ ve $\left[1-\frac{\gamma}{2}N\right]$ sırasıyla $\frac{\gamma}{2}N$ ve $1-\frac{\gamma}{2}N$ değerlerine eşit veya daha küçük en küçük tamsayılar olmak üzere

$$\left(\hat{R}_{B\left[\frac{\gamma}{2}N\right]}, \hat{R}_{B\left[1-\frac{\gamma}{2}N\right]}\right) \quad (5.13.)$$

olarak elde edilir.

5.1.2.3. Tüm Parametrelerin Bilinmiyor Olduğu Durum

Bir veriyi meydana getiren birçok mühendislik ve doğa olayında, veriyi temsil eden dağılımın parametrelerinin önceden bilinmesi, pratikte pek kolay ve karşılaşılan bir durum değildir. Bu nedenle, gözlenen örneklemin tüm parametrelerinin, bilinmeyen rastgele parametreler olarak ele alınarak yapıldığı hesaplamalar daha fazla önem kazanmaktadır. Fakat, STSP dağılımının yoğunluk fonksiyonunun matematiksel yapısından kaynaklanan bazı zorluklar ve sınırlarının eşik parametresine bağlı olmasından dolayı tüm parametrelerin bilinmediği durumda parametrelerinin Bayes tahminin elde edilemediği Bölüm 4.3.2' de belirtilmişti. Bu problemin üstesinden gelmek için oluşturulan hiyerarşik model aynı şekilde stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği için de kullanılabilir. R' nin, eşitlik (5.4.) olarak elde edilen formulü, parametrelerin bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde, yardımcı değişken kullanarak elde edilen Gibbs algoritması MCMC yöntemi stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği için de kullanılabilir.

Parametrelerin koşullu dağılımları kullanılarak, tüm parametrelerin bilinmediği durumda R' nin Bayes tahmini için aşağıda verilen Gibbs algoritması kullanılır.

1. **Adım:** $\alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}$ için başlangıç değerleri atanır.
2. **Adım:** $t = 1$ olarak atama yapılır.
3. **Adım:** $STSP\left(\alpha_1^{(t-1)}, \beta_1^{(t-1)}\right)$ ve $STSP\left(\alpha_2^{(t-1)}, \beta_2^{(t-1)}\right)$ dağılımlarından

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ rastgele örneklemleri üretilir.

4. **Adım:** Elde edilen $\alpha_1^{(t-1)}$, $\beta_1^{(t-1)}$, $\alpha_2^{(t-1)}$, $\beta_2^{(t-1)}$parametreleri ve $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ örneklemleri ile $(4.4.)$ eşitliği kullanılarak $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri üretilir.
5. **Adım:** $\alpha_1^{(t-1)}$, $\alpha_2^{(t-1)}$, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik yardımıyla $\beta_1^{(t)}$ ve $\beta_2^{(t)}$ değerleri sırasıyla üretilir $(i = 1,2,\ \ j = 1,2, \cdots, n|m)$.

$$\boldsymbol{I}\left(\max\left\{1 - \frac{1 - x_{i_j}}{\left(1 - v_{i_j}\right)^{1/\left(\alpha_i^{(t-1)} - 1\right)}}, 0\right\} < \beta_i < \min\left\{1 - \frac{x_{i_j}}{\left(1 - v_{i_j}\right)^{1/\left(\alpha_i^{(t-1)} - 1\right)}}, 1\right\}\right)$$

6. **Adım:** Elde edilen $\beta_1^{(t)}$, $\beta_2^{(t)}$, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri kullanılarak ve $c = 100$ alınarak, $(4.8.)$ eşitliğinde verilen olasılık yoğunluk fonksiyonundan ters dönüşüm yöntemi ile $\alpha_1^{(t)}$ ve $\alpha_2^{(t)}$ değerleri üretilir.
7. **Adım:** $\alpha_1^{(t)}$, $\beta_1^{(t)}$, $\alpha_2^{(t)}$ ve $\beta_2^{(t)}$ kullanılarak $\hat{R}_B^{(t)}$ hesaplanır.
8. **Adım:** $t = t + 1$ olarak atama yapılır.
9. **Adım:** Döngüde 2-8. adımlar N defa olarak tekrar edilerek $\hat{R}_B^{(t)}; t = 1,2, \cdots, N$ sonsal örneklemi elde edilir.

Ardından, elde edilen N birimlik örneklem kullanılarak $\hat{R}_B$ sonsal ortalama ve bir $100\ (1 - \gamma)\%$ en yüksek sonsal yoğunluk güven aralığı sırasıyla $(5.12.)$ ve $(5.13.)$ eşitlikleri kullanılarak hesaplanır.

5.2. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği

Birden fazla bileşenden oluşan sistemler için stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği istatistiksel güvenilirlik analizi çalışmaları kapsamında çalışmalara konu olmaktadır ve literatürde sıklıkla yer almaktadır. Bu çalışmalar kapsamında, üzerinde en fazla durulan sistem k' den s çıkışlı sistemler olup, bu sistemin gerilim-mukavemet güvenilirliği çeşitli sağ kalım rasgele değişkenleri varsayımı altında incelenmiştir.

Bağımsız ve özdeş $X_1, X_2, \cdots, X_k$ gerilim rasgele değişkenlerinin ortak bir Y mukavemet rasgele değişkenine maruz kaldığı sistemler k' den s çıkışlı sistemler olarak adlandırılır ve böyle bir sistemin iki farklı türü mevcuttur;

- En azından s tane $X_1, X_2, \cdots, X_k$' nın $(1 \leq s \leq k)$ Y'yi aştığı müddetçe çalışan sistem: k' den s çıkışlı: G sistem.
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$' dan s. bileşen Y'yi aşamadığında bozulan sistem: k' den s çıkışlı: F sistem.

Burada ifade edilen "G" ve "F" sistem isimleri ingilizce karşılıkları olan "Good (sağlam)" ve "Fail(başarısız/tükenmiş)" kelimelerinden gelmektedir. Bu sistemlere gerçek hayatta birçok örnek verilebilir. Örneğin; sekiz silindir V tipi motora sahip bir araç ancak ve ancak en az dört silindir ateşlendiği müddetçe hareket edebilir ve dört silindirden aşağı ateşleme olursa araç hareket edemez. Böyle bir sistem 8' den 4 çıkışlı: G sistem örneğidir. Ayrıca, "Boeing 787 Dreamliner" çift motorlu bir jet yolcu uçağı iken "Airbus A-380" dört motora sahiptir. Dört motordan ancak ve ancak en az ikisi çalıştığı sürece uçuş yapabilen bir uçak 4' ten 2 çıkışlı bir sistemin örneğidir (Dey ve ark. 2017).

$X_1, X_2, \cdots, X_k$; F_X dağılım fonksiyonuna sahip, bağımsız ve özdeş gerilim

rastgele değişkenleri ve Y, F_Y dağılım fonksiyonuna sahip ortak mukavemet rastgele değişkeni olarak varsayıldığında, k' den s çıkışlı: G sistemin çalışır durumda kalma olasılığı $R_{s,k}$ Bhattacharyya ve Johnson (1974) tarafından aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$R_{s,k} = P[\text{en azından s tane } (X_1, X_2, \cdots, X_k), Y'\text{yi aşması}]$$
$$= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y) \qquad (5.14.)$$

Böyle bir sistem en az s tane $X_1, X_2, \cdots, X_k$' nın $(1 \leq s \leq k)$ Y'yi aştığı müddetçe çalışır ve $s = 1$ iken en azından bir bileşen çalıştığı sürece çalışan paralel sisteme $s = k$ iken ise tüm bileşenler çalıştığı müddetçe çalışan seri sisteme denk olur.

$X_1, X_2, \cdots, X_k$; $STSP(\alpha_1, \beta_1)$ dağılımına sahip bağımsız ve özdeş gerilim rastgele değişkenleri ve $Y, STSP(\alpha_2, \beta_2)$ dağılımına sahip ortak bir mukavemet rastgele değişkeni olmak üzere STSP dağılımına sahip k den s çıkışlı: G sistem için $R_{s,k}$, genelliği kaybetmeden $\beta_2 < \beta_1$ varsayımı altında

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y)$$
$$= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \left[\int_{0}^{\beta_2} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y) \right.$$
$$+ \int_{\beta_2}^{\beta_1} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y)$$
$$\left. + \int_{\beta_1}^{1} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y) \right]$$

eşitliğinin hesaplanmasıyla elde edilir. Böylece, yukarıda verilen eşitlik içerisindeki köşeli parantezler içerisinde yer alan integraller sırasıyla I_1, I_2 ve I_3 olarak adlandırılarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$I_1 = \int_0^{\beta_2} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y)$$
$$= \int_0^{\beta_2} \left[1 - \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^i \left[\beta_1 \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^{k-i} \alpha_2 \left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1} dy$$

bu integrali çözümlemek için $u = \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}$ dönüşümü uygulanarak I_1 eşitliği $\rho = \alpha_2/\alpha_1$ ve $\delta = \beta_2/\beta_1$ olmak üzere

$$I_1 = \rho \frac{\beta_1^{\rho(\alpha_1 - 1)}}{\beta_2^{(\alpha_2 - 1)}} B(\beta_1 \delta^{\alpha_1}; k - i + \rho, i + 1)$$

olarak elde edilir. Ardından, ikinci integral

$$I_2 = \int_{\beta_2}^{\beta_1} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y)$$
$$= \int_0^{\beta_2} \left[1 - \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^i \left[\beta_1 \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^{k-i} \alpha_2 \left(\frac{1 - y}{1 - \beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1} dy$$

olarak ifade edilmiştir. Burada i-üzeri olan ifadeye binom açılımı uygulanarak

$$I_2 = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j \beta_1^{(1-\alpha_1)(j+k-i)} (1-\beta_2)^{(1-\alpha_2)} \times \alpha_2[B(\beta_1; \alpha_1(k+j-i)+1, \alpha_2) - B(\beta_2; \alpha_1(k+j-i)+1, \alpha_2)]$$

olarak elde edilir. Son olarak

$$I_3 = \int_{\beta_1}^{1} [1-F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dF_Y(y) = \int_{0}^{\beta_2} \left[(1-\beta_1)\left(\frac{1-y}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^i \left[1-(1-\beta_1)\left(\frac{1-y}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right]^{k-i} \times \alpha_2 \left(\frac{1-y}{1-\beta_2}\right)^{\alpha_2-1} dy$$

integralini çözümlemek için $u = (1-\beta_1)\left(\frac{1-y}{1-\beta_1}\right)^{\alpha_1}$ dönüşümü uygulandığında

$$I_3 = \rho \frac{(1-\beta_1)^{\rho(\alpha_1-1)}}{(1-\beta_2)^{(\alpha_2-1)}} B(1-\beta_1; i+\rho, k-i+1)$$

olarak elde edilir. Böylece, elde edilen integral çözümlerinin birleştirilmesiyle $R_{s,k}$ en sade haliyle

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \rho \left[\frac{\beta_1^{\rho(\alpha_1-1)}}{\beta_2^{(\alpha_2-1)}} B(\beta_1 \delta^{\alpha_1}; k-i+\rho, i+1) \right. \quad + (1$$

$$- \beta_2)^{(1-\alpha_2)} \left(\alpha_1 \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j \beta_1^{(1-\alpha_1)(j+k-i)} \left[B(\beta_1; \alpha_1(k+j-i) \right. \right.$$

$$+ 1, \alpha_2) - B(\beta_2; \alpha_1(k+j-i)+1, \alpha_2)]$$

$$\left. \left. + (1-\beta_1)^{\rho(\alpha_1-1)} B(1-\beta_1; i+\rho, k-i+1) \right) \right] \quad (5.15.)$$

olarak elde edilir.

5.2.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Tahmin

STSP dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri van Dorp ve Kotz (2002) tarafından bulunmuş ve Bölüm 5.1.1. de verilmiştir. Basit sistemin gerilim-mukavemet güvenilirliğinde olduğu gibi $R_{s,k}{}'$ nın en çok olabilirlik tahmini $\hat{R}_{s,k}$ en çok olabilirlik tahmin edicilerin değişmezlik özelliği göz önüne alındığında, (5.15.) eşitliğinde parametreler yerine en çok olabilirlik tahmin edicileri yazılarak elde edilir.

5.2.1.1. Bootstrap Güven Aralığı

STSP dağılımının çok bileşenli stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği $R_{s,k}$ için elde edilen (5.15.) eşitliği incelendiğinde $R_{s,k}$ nın bir dağılımını ve bununla birlikte bir güven aralığını elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, $R_{s,k}$ nın güven aralığını elde etmek için alternatif yöntemler olarak Bölüm 5.1.1.1. de olduğu gibi parametrik ve parametrik olmayan bootstrap yöntemleri ele alınmıştır.

$R_{s,k}$ için $100(1-\gamma)\%$' lık parametrik ve parametrik olmayan boot-p güven aralıklarını oluşturmak için kullanılacak algoritma aşağıdaki gibidir.

1. **Adım:** Sırasıyla $STSP(\alpha_1,\beta_1)$, $STSP(\alpha_2,\beta_2)$ dağılımlarından $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ve $y_1,y_2,\cdots,y_m$ rastgele örneklemleri elde edilir.
2. **Adım (Parametrik Olmayan):** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ve $y_1,y_2,\cdots,y_m$ rastgele örneklemleri kullanarak yerine koyma örneklemesi ile $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ ve $y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*$ bootstrap örneklemleri üretilir.
3. **Adım (Parametrik):** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ve $y_1,y_2,\cdots,y_m$ rastgele örneklemlerine ait parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2$ hesaplanır ve ardından $STSP(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1)$ ve $STSP(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)$ dağılımlarından $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ ve $y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*$ bağımsız bootstrap örneklemleri üretilir.
4. **Adım:** Bir önceki adımda üretilen parametrik veya parametrik olmayan bootstrap örneklemlere ait parametre tahminleri $\hat{\alpha}_1^*,\hat{\beta}_1^*,\hat{\alpha}_2^*,\hat{\beta}_2^*$, hesaplanır.
5. **Adım:** Boostrap parametre tahminleri (5.15.) denkleminde parametrelerin yerine kullanılarak $\hat{R}_{s,k}^*$ bootstrap tahmini elde edilir.
6. **Adım:** İkinci adım B defa tekrar edilerek $STSP(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1)$ ve $STSP(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)$ ile bağımsız bootstrap örnekleri oluşturularak R'nin bootstrap tahminlerinin bir kümesini $\{\hat{R}_{s,k(i)}^*: i=1,2,\cdots,B\}$ elde edilir.
7. **Adım:** $\hat{R}^{*(\tau)}$ bootstrap tahminlerinin bir kümesinin τ. yüzdeliği, öyle ki

$$\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} I\left(\hat{R}_{s,k(i)}^* \le \hat{R}_{s,k}^{*(\tau)}\right)=\tau\ , \qquad 0<\tau<1$$

ve $I(\cdot)$ gösterge fonksiyon olmak üzere $\left(\hat{R}_{s,k}^{*(\tau/2)},\hat{R}_{s,k}^{*(1-\tau/2)}\right)$ olarak parametrik ve parametrik olmayan güven aralıkları elde edilir.

5.2.2. Bayes Yöntemi ile Tahmin

STSP dağılımının parametrelerinin Bayes tahminlerini elde etmenin zorluklarından Bölüm 4.1.2.3.' de bahsedilmişti. Dolayısıyla $R_{s,k}{}'$ nın Bayes yöntemi ile tahminini elde etmek için Bölüm 5.1.2.3.' de detaylı verilen yardımcı değişken kullanarak elde edilen Gibbs algoritması MCMC yöntemi kullanılır. Böylece, $R_{s,k}{}'$ nın Bayes tahmini $\hat{R}_{s,k}^{B}$ için aşağıda verilen Gibbs algoritması kullanılır.

1. **Adım:** $\alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}$ için başlangıç değerleri atanır.
2. **Adım:** $t = 1$ olarak atama yapılır.
3. **Adım:** $STSP\left(\alpha_1^{(t-1)}, \beta_1^{(t-1)}\right)$ ve $STSP\left(\alpha_2^{(t-1)}, \beta_2^{(t-1)}\right)$ dağılımlarından $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ rastgele örneklemleri üretilir.
4. **Adım:** Elde edilen $\alpha_1^{(t-1)}, \beta_1^{(t-1)}, \alpha_2^{(t-1)}, \beta_2^{(t-1)}$ parametreleri ve $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ örneklemleri ile (4.4.) eşitliği kullanılarak $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri üretilir.
5. **Adım:** $\alpha_1^{(t-1)}, \alpha_2^{(t-1)}, \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}, \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik yardımıyla $\beta_1^{(t)}$ ve $\beta_2^{(t)}$ değerleri sırasıyla üretilir.

$$\boldsymbol{I}\left(\max\left\{1-\frac{1-x_i}{(1-v_i)^{1/(\alpha^{(t-1)}-1)}}, 0\right\} < \beta < \min\left\{1-\frac{x_i}{(1-v_i)^{1/(\alpha^{(t-1)}-1)}}, 1\right\}\right)$$

6. **Adım:** Elde edilen $\beta_1^{(t)}, \beta_2^{(t)}, \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}, \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $\{v_1', v_2', \cdots, v_m'\}$ değerleri kullanılarak ve $c = 100$ alınarak, (4.8.)

eşitliğinde verilen olasılık yoğunluk fonksiyonundan ters dönüşüm yöntemi ile $\alpha_1^{(t)}$ ve $\alpha_2^{(t)}$ değerleri üretilir.

7. **Adım:** $\alpha_1^{(t)}$, $\beta_1^{(t)}$, $\alpha_2^{(t)}$ ve $\beta_2^{(t)}$ (5.15.) eşitliği kullanılarak $\hat{R}_{s,k}^{B(t)}$ hesaplanır.
8. **Adım:** $t = t + 1$ olarak atama yapılır.
9. **Adım:** Döngüde 2-8. adımlar N defa olarak tekrar edilerek $\hat{R}_{s,k}^{B(t)}; t = 1,2,\cdots,N$ sonsal örneklemi elde edilir.

Ardından, elde edilen N birimlik örneklem kullanılarak $\hat{R}_{s,k}^{B}$ sonsal ortalama

$$\hat{R}_{s,k}^{B} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{R}_{s,k}^{B(t)}$$

ve $100\ (1-\gamma)\%$ en yüksek sonsal yoğunluk güven aralığı

$$\left(\hat{R}_{s,k\left[\frac{\gamma}{2}N\right]}^{B}, \hat{R}_{s,k\left[1-\frac{\gamma}{2}N\right]}^{B}\right)$$

olarak elde edilir.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Bu bölümde, öncelikle Bölüm 4.4.' de elde edilen, belirli t zaman noktalarında güvenilirlik ve tehlike oranının tahminleri, parametrelerin farklı durumları göz önüne alınarak en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Ardından, parametrelerin olası durumlarına göre sırasıyla Bölüm 5.1.' de verilen basit bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin tahminleri ve Bölüm 5.2.' de verilen çok bileşenli bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğinin tahminleri elde edilmiştir.

6.1. Güvenilirlik ve Tehlike Oranlarının Simülasyon Çalışmaları

Bu alt bölümde, farklı kayıp fonksiyonları altında güvenilirlik ve tehlike oranlarının en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri elde edilerek, tahminlerin performansları karşılaştırılmıştır. Farklı sabit t zaman noktaları ve örneklem hacimleri göz önüne alınarak ortalama tahminler ve bu tahminlere karşılık gelen beklenen riskler elde edilmiştir. Tahminlerin beklenen riskleri Bölüm 4.4.' te detayları verilen kayıp fonksiyonları (SELF, LLF, GELF) esas alınarak, $\hat{\theta}$ herhangi bir θ parametresinin tahmini olmak üzere

$$ER_1(\theta) = \sum_{i=1}^{M} \left(\hat{\theta}_i - \theta\right)^2 / M$$

$$ER_2(\theta) = \sum_{i=1}^{M} \left(e^{p\left(\hat{\theta}_i - \theta\right)} - p\left(\hat{\theta}_i - \theta\right) - 1\right) / M$$

$$ER_3(\theta) = \sum_{i=1}^{M} \left(\left(\frac{\hat{\theta}_i}{\theta}\right)^c - c \log\left(\frac{\hat{\theta}_i}{\theta}\right) - 1\right) / M$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmıştır. Öncelikle, güvenilirlik değerlerinin nokta

tahminleri $\hat{R}_{ML}$ ve $\hat{R}_B$, farklı sabit zaman noktaları $t = (0.2, 0.5, 0.9)$ için sırasıyla $(\alpha, \beta) = (2.8,\ 0.8)$ ve $(\alpha, \beta) = (1.5,\ 0.5)$ parametre değerleri esas alınarak SELF, LLF ($p = -0.5, 0.5, 1$) ve GELF ($c = -0.5, 0.5, 1$) kayıp fonksiyonları altında elde edilmiştir. Örneklem boyutları $n = 10{,}20{,}30{,}50{,}100$ olmak üzere 2000 tekrar yapılmıştır. Bayes tahminleri için, Gibbs algoritması MCMC algoritması için Bölüm 4.4.2.' de verilen algoritma kullanılarak 3500 boyutlu bir Markov zinciri elde edilmiştir. İlk 500 değer yakma periyodu olarak değerlendirilerek atılmış ve her üçüncü değer incelme sürecinde bağımsız ve özdeş gözlem olarak alınmıştır. Böylece aralarında otokorelasyon bulunmayan 1000 birimlik bir örneklem elde edilerek sonsal tahminler elde edilmiştir. Ardından bu süreç 2000 defa tekrar edilerek Bayes tahminleri elde edilmiş ve sonuçlar Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2.' de verilmiştir.

Sonuçlar incelendiğinde beklenen risklerin örneklem boyutları arttıkça azaldığı gözlemlenmiştir. Tüm durumlarda $(t \leq \beta, t > \beta)$ en çok olabilirlik tahminlerinin aşırı tahmin eğiliminde olduğu, aşırı tahmin veya düşük tahmin elde etmenin sadece kayıp parametrelerine (c, p) bağlı olmadığı, ayrıca sabit zaman noktası t' nin eşik parametresinden düşük veya yüksek olmasına da bağlı olduğu gözlenmiştir. SELF altında Bayes tahmini $\hat{R}_{B1}$ ve LLF altında Bayes tahmini $\hat{R}_{B2}$, $t \leq \beta$ durumunda düşük tahmin ve $t > \beta$ durumunda ise aşırı tahmin değerleri verirken, GELF altında Bayes tahmini $\hat{R}_{B3}$, $t \leq \beta$ durumunda düşük tahmin fakat $t > \beta$ durumunda $c > 0$ değerleri için düşük tahmin $c < 0$ değerleri için ise aşırı tahmin değerleri vermektedir. Ayrıca, en çok olabilirlik tahminlerin SELF altında Bayes tahminlerine göre daha düşük, LLF ve GELF altında Bayes sonuçlarına göre daha yüksek beklenen riske sahip olduğu gözlenmiştir. Özellikle, en düşük beklenen riskin $p = 0.5$ ve $c = 0.5$ kayıp parametre değerlerinde elde edildiği ve bu değerler pozitif yönde artıkça riskin de arttığı sonuçlarına varılmıştır.

Benzer parametre değerleri ve örneklem boyutları esas alınarak tehlike oranının nokta tahminleri $\hat{\lambda}_{ML}$ ve $\hat{\lambda}_B$ elde edilerek Çizelge 6.3. ve Çizelge 6.4.' de

verilmiştir. Ancak, güvenilirlik tahmini için yapılan simülasyon çalışmalarından farklı olarak tehlike oranlarının Bayes tahminlerinde Linex kayıp fonksiyonu kullanılmamış, yalnızca SELF ve GELF kullanılmış ve sırasıyla $\hat{\lambda}_{B1}$ ve $\hat{\lambda}_{B2}$ olarak gösterilmiştir. Bu durumun sebebi, $\lambda(t)$ fonksiyonunun $t > \beta$ durumunun sadece şekil parametresi α' ya bağlı olması ve α' da oluşan küçücük bir değişimde bile paydada yer alan $(1-t)$ değerinin etkisiyle çok büyük sapmalara ve dolayısıyla tutarsız beklenen risk değerlerine sahip olmasıdır.

Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.3. ve Çizelge 6.4.' de incelendiğinde, GELF altında Bayes tahminlerin daha düşük beklenen riske sahip olduğu ve tehlike oranının gerçek değerlerinin $\lambda > 1$ olduğu durumlar için $c = 0.5$ kayıp parametresi altında en düşük riske sahip tahminlerin elde edildiği gözlenmiştir. Diğer yandan, en çok olabilirlik tahminleri ise tehlike fonksiyonunun gerçek değerlerinin $\lambda \to 0$ durumunda en düşük riske sahip tahminleri vermektedir. Bu durumda $(\lambda \to 0)$ en çok olabilirlik tahminleri beklenen risk açısından Bayes tahminlerine göre daha avantajlıdır. Beklendiği üzere, beklenen risklerinin örneklem boyutları arttıkça azaldığı gözlemlenmiştir.

6.2. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliğinin Simülasyon Çalışmaları

Bu alt bölümde, parametrelerin tüm olası durumları göz önüne alınarak en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri uygulanmış ve sonuçları karşılaştırılmıştır. İlk olarak, yansıma/eşik parametrelerinin eşit olarak bilinen bir β_0 değerine eşit olduğu $(\beta_1 = \beta_2 = \beta_0)$ durum ele alınarak R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri karşılaştırılmış. Bilinen β_0 değeri sırasıyla 0.2, 0.4, 0.6 ve 0.8, önsel gamma dağılımının şekil parametreleri (a_1, b_1, a_2, b_2) ise sırasıyla (0.9,0.5,8,0.4), (0.9,0.5,8,0.4), (8,0.4,1.1,0.5) ve (8,0.5,1.1,1) olarak seçilmiştir. Örneklem hacimleri (n, m) ise küçük örneklem olarak (5,10), orta örneklem olarak

(10,20) ve (20,30), büyük örneklem olarak ise (50,50) ve (100,100) olarak belirlenmiştir. Böylece, 10000 örneklem üretilmiştir. Her bir örneklem hacminde gamma dağılımından veriler üretildiğinden dolayı gerçek R değeri de değişmektedir. Sonuçlar Çizelge 6.5.' te verilmiştir.

Çizelge 6.5. incelendiğinde her iki tahmin edicinin de gerçek değere yakın sonuçlar verdiği hataların örneklem hacmine paralel olarak azaldığı gözlenmektedir. Beklenildiği üzere, Bayes tahminlerinin küçük örneklemlerde daha iyi sonuçlar verdiği ve daha küçük hata kareler ortalamasına sahip olduğu gözlenmiştir. Diğer yandan, örneklem hacmi büyüdükçe en çok olabilirlik tahminlerinin daha küçük hata kareler ortalamasına sahip olduğu gözlenmiştir.

Simülasyon çalışmalarının ikinci aşamasında yansıma/eşik parametreleri β_1 ve β_2 biliniyor (eşit olduğu varsayımı olmadan) olarak ele alınmıştır. Bayes tahminlerini elde etmek için Bölüm 5.1.2.2.' de verilen Gibbs örnekleme algoritması kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileriyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yüksek güvenilirlik değeri vermesi amacıyla, parametrelerin $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ değerleri sırasıyla $(2.8, 3, 0.8, 0.55)$, $(3, 3, 0.8, 0.4)$, $(2.4, 4, 0.8, 0.15)$ ve $(4, 3.8, 0.85, 0.2)$ olarak belirlenmiş ve bu değerler sırasıyla Durum I, Durum II, Durum III ve Durum IV olarak adlandırılmıştır. Şekil parametreleriyle ilgili herhangi önsel bir bilgi olmadığından dolayı Congdon (2001) tarafından önerilen $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0.0001$ negatif olmayan hiper-parametreler kullanılmıştır. Bu hiper-parametreler Kundu ve Gupta (2005) tarafından genelleştirilmiş üstel dağılım için benzer amaçla kullanılmıştır. Böylece, 10 000 örneklem üretilerek elde edilen sonuçlar Çizelge 6.6.' te verilmiştir.

Çizelge 6.6. incelendiğinde en çok olabilirlik tahmin edicilerinin küçük örneklemlerde bile daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Örneklem hacmi büyüdükçe her iki tahmin edicinin verdiği değerler de gerçek R değerine yakınsamakta ve hata kareler ortalamaları da azalmaktadır. Ayrıca, en çok olabilirlik tahminleri ilk iki durumda aşırı tahmine neden olurken Bayes tahminleri ise düşük

tahmine neden olmuştur. Güvenilirlik düzeyi yükseldikçe (son iki durum) her iki tahmin edicinin de düşük tahmin verdiği gözlenmiştir.

Güvenilirlik çalışmalarında yüksek güvenilirlik düzeyinin daha fazla önem arz ettiği düşünülerek gerçek R değerleri $0.7, 0.8, 0.9$ ve 0.95 civarında olacak şekilde simülasyonlar yapılmıştır. Bir sonraki aşamada da yüksek R değerleri baz alınarak, tüm parametrelerin bilinmediği durum için tahminler hesaplanmıştır. Parametrelerin değerleri ise bir önceki bölümde verilen değerler ile aynı olmak üzere simülasyonlar yapılmıştır. Her bir örneklem hacmi için 2000 tekrar yapılarak en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri hata kareler ortalamaları ile birlikte hesaplanmıştır. Bayes tahmini için Bölüm 5.1.2.3' te verilen Gibbs algoritması kullanılarak 3500 tekrarlı MCMC örneklemi elde edilmiştir. İlk 500 değer yakma periyodu olarak değerlendirilerek atılmış ve her üçüncü değer incelme sürecinde bağımsız ve özdeş gözlem olarak alınmıştır. Böylece aralarında otokorelasyon bulunmayan 1000 birimlik bir örneklem elde edilerek sonsal tahminler elde edilmiştir. Ardından bu süreç 2000 tekrar edilerek Bayes tahminleri ve en yüksek sonsal yoğunluk güven aralıkları elde edilmiştir. Ayrıca, en çok olabilirlik tahmin edicilere ait parametrik ve parametrik olmayan bootstrap güven aralıkları, her tekrar için 200 bootstrap aralığı kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.7., Çizelge 6.8., Çizelge 6.9. ve Çizelge 6.10.' da verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, tüm tahminlerin örneklem hacmi büyüdükçe gerçek değere yakınsadığı gözlenmiştir. En çok olabilirlik yöntemi ile aşırı tahmin, Bayes yöntemi ile ise düşük tahmin elde edilmiştir. Yüksek güvenilirlik düzeylerinde (Durum III ve Durum IV) en çok olabilirlik tahminlerinin tüm örneklem hacimlerinde daha düşük hata kareler ortalamalarına sahip olduğu gözlenirken, güvenilirlik düzeyi düştükçe (Durum I ve Durum II) küçük örneklemlerde Bayes, büyük örneklemlerde ise en çok olabilirlik tahminlerinin daha düşük hata kareler ortalamasına sahip olduğu gözlenmiştir. Tablolar yaklaşık güven aralıklarının uzunluklarına göre incelendiğinde, ilk iki durumda küçük ve orta boyutlu örneklemde parametrik olmayan boot-p yönteminin,

büyük boyutlu örneklemde ise parametrik boot-p yönteminin daha kısa güven aralığına sahip olduğu gözlenmiştir. Son iki durumda ise, parametrik boot-p yönteminin küçük ve orta boyutlu örneklemlerde daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bayes yöntemine bağlı elde edilen en yüksek sonsal güven aralıkları ise büyük ve orta boyutlu örneklemlerde iyi sonuçlar verirken, genel itibariyle parametrik bootstrap ile elde edilen sonuçlara yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Hata kareler ortalamasında olduğu gibi tüm güven aralıkları uzunluklarının da örneklem hacmi büyüdükçe azalmaktadır.

Ayrıca, tahmin edicilerin performanslarının ve kullanışlılığının değerlendirilmesinde yakınsama önemli bir kriterdir. Bu amaçla, Durum I göz önüne alınarak eşit örneklem boyutları için $(n = m = 5{,}10, \cdots, 160)$ hata kareler ortalamaları hesaplanmış ve Çizelge 6.11.' de verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, hata kareler ortalamalarında, eşit örneklem boyutlarının etkisiyle bir azalma olduğu gözlenmiştir. Benzer sonuçlar Çizelge 6.7., Çizelge 6.8., Çizelge 6.9. ve Çizelge 6.10.' da büyük örneklem hacimlerinde de gözlenmiştir.

6.3. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliğinin Simülasyon Çalışmaları

Bu alt bölümde, en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri ve bunlara ait bootstrap ve HPD yaklaşık güven aralıkları kullanılarak çok bileşenli bir sistemin stokastik gerilim-mukavamet güvenilirliği $R_{s,k}$ için tahmin yöntemlerinin performansları karşılaştırılmıştır. Çok bileşenli sistem kombinasyonları $(s,k) = (1{,}3)$ ve $(s,k) = (2{,}4)$ olarak düşünülmüştür. Gerilim ve mukavemet rasgele örneklemleri sırasıyla $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (3, 2, 0.7, 0.4)$ ve $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (2, 2, 0.85, 0.15)$ parametre değerlerine göre üretilmiştir. Karşılık gelen örneklem boyutları (n, m) ise küçük örneklem olarak (5,10), orta örneklem olarak (10,20) ve

(20,30), büyük örneklem olarak ise (50,50) ve (100,100) olarak belirlenmiştir. Her bir örneklem hacmi için 2000 tekrar yapılarak en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri hata kareler ortalamaları ile birlikte hesaplanmıştır. Bayes tahmini için Bölüm 4.2.2.' te verilen Gibbs algoritması kullanılarak 3500 tekrarlı MCMC örneklemi elde edilmiştir. İlk 500 değer yakma periyodu olarak değerlendirilerek atılmış ve her üçüncü değer incelme sürecinde bağımsız ve özdeş gözlem olarak alınmıştır. Böylece aralarında otokorelasyon bulunmayan 1000 birimlik bir örneklem elde edilerek sonsan tahminler elde edilmiştir. Ardından bu süreç 2000 tekrar edilerek Bayes tahminleri ve en yüksek sonsal yoğunluk güven aralıkları elde edilmiştir. Ayrıca, en çok olabilirlik tahmin edicilere ait parametrik ve parametrik olmayan bootstrap güven aralıkları, her tekrar için 200 bootstrap aralığı kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.12. ve Çizelge 6.13.' de verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, beklendiği gibi her iki tahmin yöntemine ait sonuçların örneklem boyutu arttıkça gerçek $R_{s,k}$ değerine yaklaştığı ve HKO değerlerinin azaldığı gözlenmiştir. En çok olabilirlik tahmin yöntemleri aşırı tahmine neden olurken Bayes tahminlerinin ise düşük tahmine yol açtığı gözlenmiştir. $R_{s,k}$' nın büyük gerçek değerleri için en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örneklemlerde daha düşük KHO değerlerine sahip olduğu, diğer yandan küçük ve orta boyutlu örneklemlerde ise Bayes tahminlerinin düşük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. $R_{s,k}$' nın gerçek değeri düştükçe, tüm örneklem boyutlarında Bayes tahminlerinin en küçük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. Güven aralıkları incelendiğinde ise HPD güven aralıklarının büyük örneklemlerde daha kısa aralıklara sahip olduğu, küçük ve orta boyutlu örneklemlerde ise parametrik olmayan boot-p güven aralıklarının en kısa aralığa sahip olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır.

7. UYGULAMA

Bu bölüm kapsamında, gerçek veri kümeleri kullanılarak, daha önceki bölümlerde yer alan tüm tahmin çalışmaları örneklendirilmiştir. Bu amaçla, öncelikle güvenilirlik ve tehlike oranlarına dair çalışmalar, ardından da stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğine dayalı çalışmalar, gerçek veri kümeleri kullanılarak örneklendirilmiştir.

7.1. Güvenilirlik ve Tehlike Oranı Tahmin Çalışmaları Dayalı Uygulamalar

Bu alt bölümde, daha önce Crowder (2000) tarafından kullanılan 1mm uzunluklu karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi kullanılarak güvenilirlik ve tehlike oranı tahmin çalışmaları örneklendirilmiştir. Öncelikle, bu veri setinin STSP dağılımı ile modellenebilmesini sağlamak amacıyla, verideki tüm değerlerden 2 sayısı çıkarıldıktan sonra 5 sayısına bölünmesinin ardından, $(0,1)$ aralığında bir veri olacak şekilde ölçeklendirilme işlemi uygulanmıştır. Ölçeklendirme sonucu elde edilen veri Çizelge 7.1.' de verilmiştir.

Çizelge 7.1. Ölçeklendirilmiş karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi

0.0494	0.3570	0.5356	0.3362	0.5110	0.2656	0.2710	0.4222	0.6718	0.3824	0.5664
0.3456	0.3566	0.4914	0.1816	0.4432	0.7368	0.4126	0.4164	0.5272	0.3162	0.5084
0.2490	0.4652	0.4804	0.6268	0.3792	0.5476	0.3454	0.5264	0.5268	0.1684	0.4282
0.7142	0.4100	0.6086	0.6198	0.3144	0.5038	0.2252	0.4524	0.7996	0.8120	0,3572
0.5396	0.3452	0.5228	0.8120	0.1280	0.4236	0.6946	0.3928	0.5848	0.2766	0.4932
0.2198	0.4502	0.7442								

Ölçeklendirilmiş veri, STSP dağılımıyla modellenerek, parametrelerin en çok olabilirlik ve Bayes parametre tahminleri elde edilmiş ve Çizelge 7.2.' de verilmiştir. Ardından, uyumun iyiliğini test edebilmek için Kolmogorov-Smirnov testi, R (Team R.C., 2017) programı yardımıyla uygulanmış ve test istatistikleri

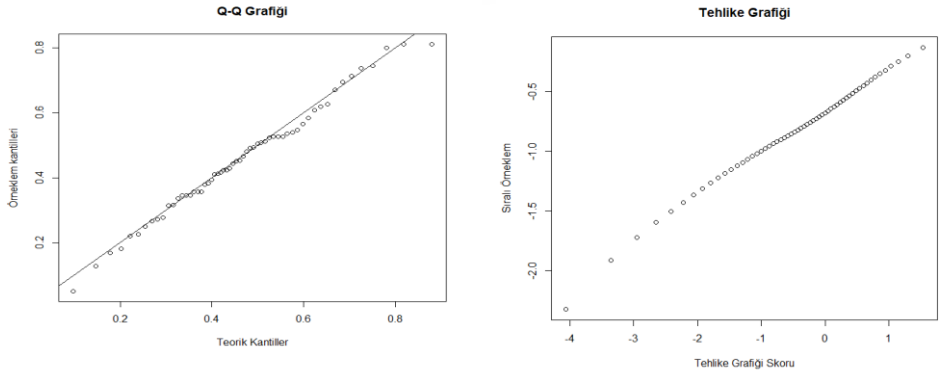
Çizelge 7.3.' de verilmiştir.

Çizelge 7.2. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi için parametrelerin en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri

			LLF			GELF		
	MLE	**SELF**	$p=-0.5$	$p=0.5$	$p=1$	$c=-0.5$	$c=0.5$	$c=1$
α	2.6704	2.6734	2.7060	2.6417	2.6111	2.6614	2.6373	2.6253
β	0.4164	0.4092	0.4097	0.4087	0.4083	0.4080	0.4056	0.4044

Çizelge 7.3. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisi için Kolmogorov-Smirnov test istatistikleri. (Kolmogorov-Smirnov kritik test değeri $D_{58,0.05} = 0.1783$)

		LLF			GELF		
MLE	**SELF**	$p=-0.5$	$p=0.5$	$p=1$	$c=-0.5$	$c=0.5$	$c=1$
0.1207	0.0862	0.1552	0.1034	0.0690	0.1379	0.1207	0.1379



Şekil 7.1. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisine ait kantil-kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri

Örneklem boyutu 58 ve 0.05 anlam düzeyinde Kolmogorov-Smirnov kritik test değeri $D_{58,0.05} = 0.1783$ olduğundan dolayı bu verinin STSP dağılımından

alınmış bir kitleden geldiği hipotezi red edilemez. Ayrıca, sırasıyla Şekil 7.1.' de yer alan kantil-kantil ve tehlike grafiklerinde ortaya çıkan 45^0' lik eğimin, verinin STSP dağılımına uygunluğu sonucunu güçlendirmektedir.

Böylece, STSP dağılımına uyum sağladığı gösterilen bu veri seti üzerinde farklı sabit $t = 0.2,0.4,0.6,0.8$ zaman noktalarında güvenilirlik $R(t)$ ve tehlike oranı $\lambda(t)$ tahminleri elde edilmiş ve sonuçlar Çizelge 7.4 ve Çizelge 7.5.' te verilmiştir. Bayes tahminleri için 100 000 iterasyon kullanılmış ve başlangıç değerleri olarak en çok olabilirlik tahminleri kullanıldığından dolayı yakma periyodu uygulanmamıştır. Fakat, Markov zincirleri doğası gereği birbiri ile otokorelasyonlu değerler ürettiğinden (Zhang, 2014) ve bu durumun kötü yakınsamaya sebep olmasından (Hoff, 2009) dolayı, inceltme işlemi uygulanmıştır. Bu amaçla, inceltme değeri olarak 10 belirlenmiş ve algoritma ile üretilen her onuncu değerin alınmasıyla 10000 birimlik bir Markov zinciri, bilgi kaybı yaşanmadan elde edilmiştir. Böylece sonsal tahminler bu 10000 birimlik örneklem kullanılarak elde edilmiştir. Tüm hesaplamalarda R(3.4.2) programı kullanılmıştır.

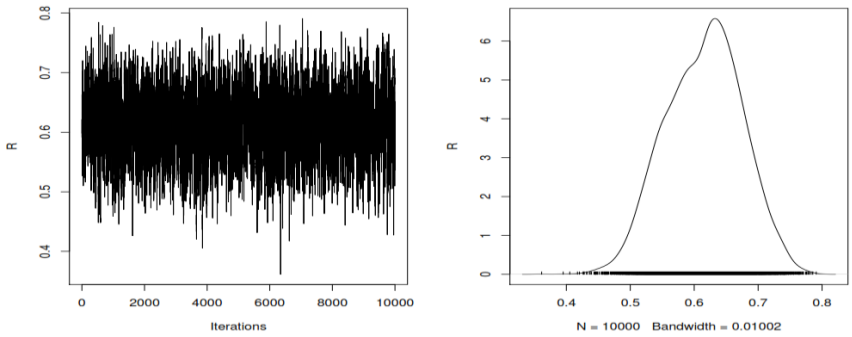
Çizelge 7.4. Farklı sabit zaman noktalarında güvenilirlik $R(t)$ tahminleri

			$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B2}}$			$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B3}}$		
$\boldsymbol{t}$	$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ML}}$	$\widehat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B1}}$	$\boldsymbol{p=-0.5}$	$\boldsymbol{p=0.5}$	$\boldsymbol{p=1}$	$\boldsymbol{c=-0.5}$	$\boldsymbol{c=0.5}$	$\boldsymbol{c=1}$
0.2	0.9412	0.9363	0.9364	0.9362	0.9361	0.9362	0.9360	0.9359
0.4	0.6260	0.6137	0.6146	0.6129	0.6120	0.6123	0.6093	0.6078
0.6	0.2128	0.2142	0.2146	0.2139	0.2135	0.2126	0.2091	0.2074
0.8	0.0334	0.0354	0.0355	0.0354	0.0353	0.0341	0.0314	0.0300

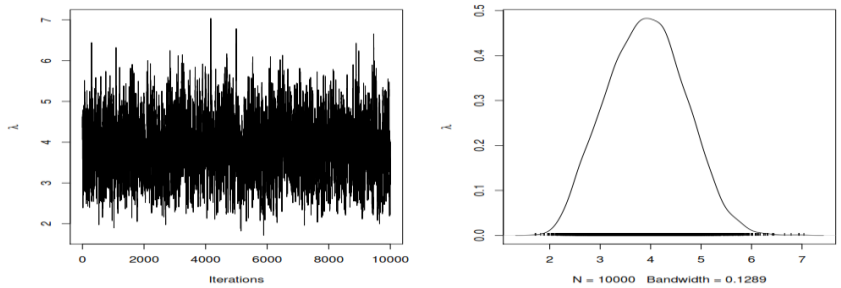
Çizelge 7. 5. Farklı sabit zaman noktalarında tehlike oranı $\lambda(t)$ tahminleri

			$\hat{\lambda}_{B2}$			$\hat{\lambda}_{B3}$		
t	$\hat{\lambda}_{ML}$	$\hat{\lambda}_{B1}$	$p=-0.5$	$p=0.5$	$p=1$	$c=-0.5$	$c=0.5$	$c=1$
0.2	0.8335	0.8852	0.8964	0.8745	0.8644	0.8732	0.8493	0.8374
0.4	3.9891	3.9164	4.0665	3.7713	3.6333	3.8779	3.7989	3.7584
0.6	6.6760	6.6874	6.8823	6.5091	6.3442	6.6597	6.6044	6.5768
0.8	13.3521	13.3790	14.2481	12.6505	12.0244	13.3201	13.2023	13.1433

Ayrıca, üretilen Markov zincirinin yakınsaklığını değerlendirebilmek amacıyla grafiksel yöntemler kullanılmıştır. Bunlardan birincisi olan iz grafikleri, her bir t iterasyona karşılık gelen $R_B^{(t)}$ ve $\lambda_B^{(t)}$ değerlerinin grafiğidir ve belirli sayıda iterasyona ulaşıldığında durağanlaşması beklenir. İz grafikleriyle birlikte sonsal dağılımların yoğunluk grafikleri de yakınsaklığı değerlendirmede önemli bir araçtır. Bu grafikler Şekil 7.2. ve Şekil 7.3.' de görüldüğü üzere, her iki durumda da tahminlerin iz grafiklerinin iterasyon arttıkça durağanlaştığı, ayrıca sonsal dağılımlarının da simetrik ve tek modlu bir dağılıma sahip olduğu gözlenmiştir. R programında *mcmcplots* paketi (Curtis, 2018) yardımıyla kolaylıkla çizilebilir.

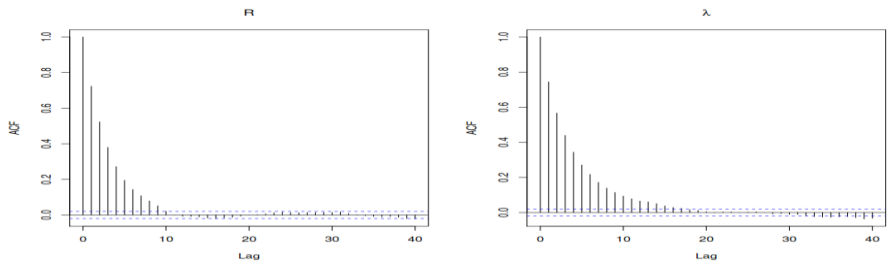


Şekil 7.2. Karbon fiberlerinin kırılma gücü verisine ait kantil-kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri



Şekil 7.3. Tehlike oranı tahminlerinin iz grafiği (solda) ve sonsal dağılımın yoğunluk grafiği (sağda)

Son olarak, Markov zincirinde ne kadar otokorelasyon olduğunun ölçümü için örneklem otokorelasyon fonksiyonu ele alınmıştır. Bu amaçla, R programında *coda* paketi (Plummer ve ark., 2006) bünyesinde yer alan *autocorr* fonksiyonu yardımıyla t-gecikmeli otokorelasyon fonksiyonunun tahminleri elde edilmiştir. Güvenilirlik tahminleri için elde edilen 10 000 adet *R* değerinden oluşan dizinin 10 gecikmeli otokorelasyon değeri 0.021651 ve 50 gecikmeli otokorelasyon değeri -0.0168 olarak elde edilmiştir. Tehlike oranı için elde edilen dizinin ise 10 gecikmeli otokorelasyon değeri 0.093674 ve 50 gecikmeli otokorelasyon değeri -0.02822 olarak elde edilmiştir. Ayrıca, Şekil 7.4.' te verilen otokorelasyon fonksiyonu grafiği de incelme işleminin başarılı olarak sonuçlandığını ve Markov zinciri ile elde edilen örneklemlerde otokorelasyon problemi olmadığını göstermektedir.



Şekil 7.4. Güvenilirlik (solda) ve tehlike oranı (sağda) tahminleri için otokorelasyon (ACF) grafiği.

7.2. Basit Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği Tahmin Çalışmalarına Dayalı Uygulamalar

Basit bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği tahmin çalışmalarına bir örnek olarak, ilk defa Badar ve Priest (1982) tarafından kullanılan, karbon fiberler için GPa (giga-Pascals) biriminden dayanıklılık ölçülerini içeren veri kümesi kullanılmıştır. Bu veri kümesi, 20 mm ölçü uzunluğunda gerilme altında test edilen fiberler ile 10 mm ölçü uzunluğunda gerilme altında test edilen fiberler olarak iki ayrı ölçüm olarak verilmiştir. Bu veri kümesinde yer alan ilk veri (20mm) X mukavemet ve ikinci veri (10mm) Y gerilim rastgele değişkenleri olarak düşünüldüğünde $R = P(Y < X)$ böyle bir sistemin stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliğini ifade eder. Diğer bir deyişle, 20 mm ölçü uzunluğunda gerilme altında test edilen fiberlerin dayanıklılığının 10 mm ölçü uzunluğunda gerilme altında test edilen fiberlerin dayanıklılığını aşması olasılığını verir.

Sırasıyla $n = 69$ ve $m = 63$ birimden oluşan bu veri kümeleri, üzerlerinde bazı dönüşümler yapılarak birçok çalışmada incelenmiştir. Örneğin; Kundu ve Gupta (2006) her iki veri kümesinde değerlerden 0.75 çıkartarak bu verileri Weibull dağılımına uydurmuştur. Bu dönüşüm sonucunda, veri seti 1 için üst sınır 3 ve veri seti 2 için üst sınır 5 olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada ise 0.75 çıkarılmış haldeki veri kümeleri sırasıyla $1/3$ ve $1/5$ ile çarpılarak yeniden ölçeklendirildiğinde (Çizelge 7.6. ve Çizelge 7.7.) STSP dağılımına uygun olarak modellenebildiği gözlemlenmiştir

Veri kümelerine ait en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\alpha}_1 = 2.760$, $\hat{\beta}_1 = 0.612$, $\hat{\alpha}_2 = 4.165$, $\hat{\beta}_2 = 0.436$ olarak elde edilmiştir. Birer sıra istatistiği olan $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ eşik parametreleri sırasıyla 43. ve 28. sıra istatistiğine karşılık olarak ortaya çıkmıştır. Verilerin STSP dağılımına uygunluğunu test etmek için Kolmogorov-Smirnov uyumun iyiliği testi uygulanmıştır ve X rastgele değişkeni için elde edilen test istatistiği 0.086957 ve p değeri 0.9566 olarak, Y rastgele değişkeni için elde

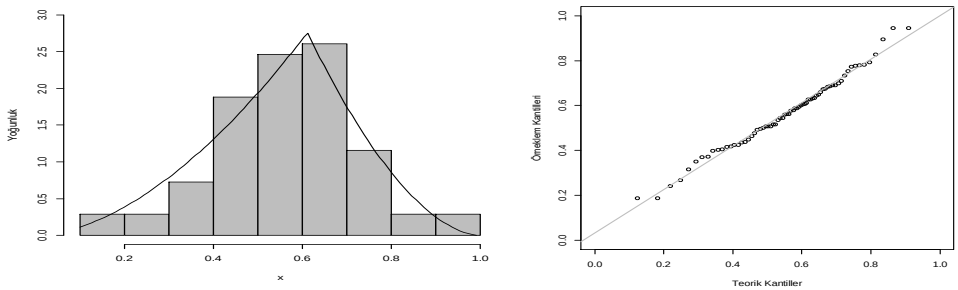
edilen test istatistiği ise 0.14286 ve p değeri 0.5412 olarak elde edilmiştir. Böylece, dağılımın STSP dağılımına ait bir kitleden geldiği hipotezi reddedilemediği sonucuna varılmıştır. Ayrıca uyumun iyiliğini göstermek için grafiksel yöntemlerle de elde edilen sonuçlar desteklenmiştir ve Şekil 7.5. ve Şekil 7.6.' de verilmiştir.

Çizelge 7.6. Dönüştürülmüş veri seti 1 (20 mm ölçü uzunluğunda)

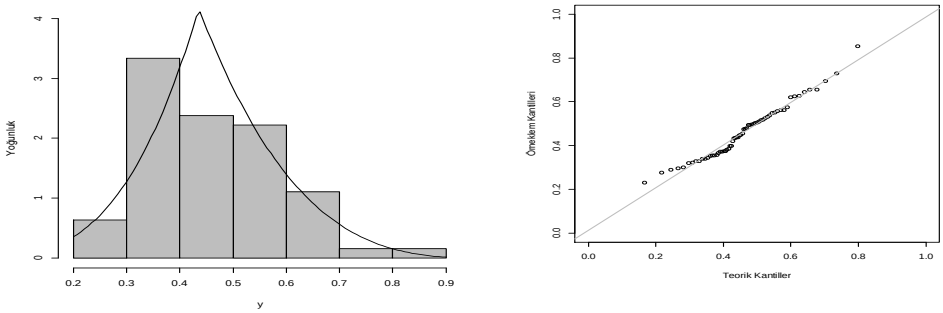
0.1873	0.4053	0.4913	0.5440	0.6053	0.6733	0.7723	0.1880	0.4157	0.4967
0.5587	0.6067	0.6743	0.7780	0.2430	0.4187	0.5010	0.5613	0.6120	0.6833
0.7800	0.2673	0.4237	0.5067	0.5617	0.6263	0.6863	0.7820	0.3167	0.4257
0.5073	0.5760	0.6277	0.6893	0.7927	0.3510	0.4350	0.5080	0.5800	0.6307
0.6903	0.8277	0.3703	0.4377	0.5170	0.5870	0.6327	0.6993	0.8943	0.3717
0.4493	0.5170	0.5880	0.6447	0.7100	0.9450	0.3980	0.4633	0.5363	0.5950
0.6490	0.7347	0.9450	0.4027	0.4763	0.5440	0.6013	0.6587	0.7540	

Çizelge 7.7. Dönüştürülmüş veri seti 2 (10 mm ölçü uzunluğunda)

0.2302	0.3408	0.3748	0.4454	0.5028	0.5574	0.6950	0.2764	0.3448	0.3818
0.4492	0.5044	0.5608	0.7290	0.2906	0.3536	0.3850	0.4560	0.5088	0.5624
0.8540	0.2956	0.3544	0.3976	0.4750	0.5164	0.5756	0.3014	0.3550	0.3980
0.4778	0.5192	0.6204	0.3200	0.3564	0.4212	0.4790	0.5254	0.6242	0.3222
0.3650	0.4334	0.4940	0.5316	0.6272	0.3292	0.3728	0.4356	0.4946	0.5370
0.6442	0.3294	0.3732	0.4374	0.4970	0.5486	0.6548	0.3390	0.3736	0.4374
0.4986	0.5502	0.6554							



Şekil 7. 5. Dönüştürülmüş veri seti 1' in STSP$(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)$ dağılımına uyumu.



Şekil 7.6. Dönüştürülmüş veri seti 2' nin $STSP(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)$ dağılımına uyumu.

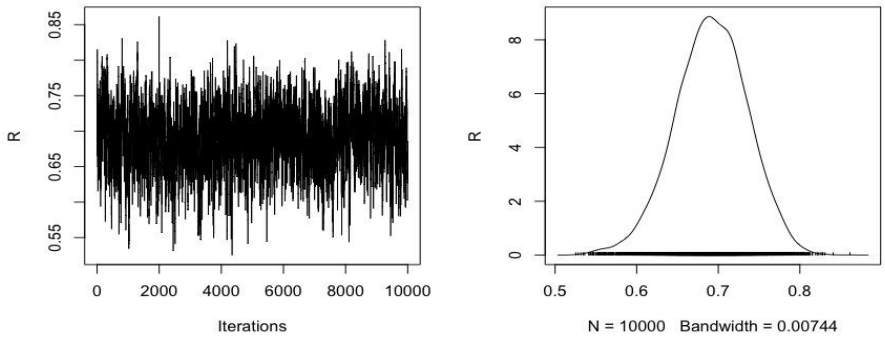
Veri kümeleri için elde edilen en çok olabilirlik parametre tahminleri (4.4) eşitliğinde yerlerine yazıldığında $\hat{R} = 0.6803$ olarak elde edilir. Ayrıca, R için %95' lik bootstrap güven aralığı her bir tekrarda 500 bootstrap örneklemi kullanılarak 5000 tekrar ile elde edilmiştir. Parametrik olmayan boot-p ortalama güven aralığı 0.2028 uzunlukta ve $(0.5901, 0.7929)$ olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde, parametrik boot-p ortalama güven aralığı da 0.1673 uzunlukta ve $(0.5937, 0.7610)$ olarak elde edilmiştir. Parametrik güven aralığının daha kısa bir ortalama güven aralığı verdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Bayes tahminlerini elde etmek amacıyla, tüm parametrelerin bilinmediği durumlar için Bölüm 5.1.2.3' te verilen algoritma kullanılmıştır. Sonuçlar $N = 100000$ iterasyon yapılarak elde edilmiştir. Başlangıç değeri olarak en çok olabilirlik tahminleri kullanılmış ve bu değerlerin iyi birer başlangıç değeri olmasından dolayı yakma periyodu kullanmaya gerek duyulmamıştır. Otokorelasyon problemini ortadan kaldırmak amacıyla, inceltme değeri olarak 10 belirlenmiş ve algoritma ile üretilen her onuncu değerin alınmasıyla 10000 birimlik bir Markov zinciri, bilgi kaybı yaşanmadan elde edilmiştir. Böylece sonsal tahminler bu 10000 örneklem kullanılarak elde edilmiştir. Markov zincirinde ne kadar otokorelasyon olduğunun ölçümü için örneklem otokorelasyon fonksiyonu ele alınmıştır. Bu amaçla, R programında *coda* paketi bünyesinde yer alan *autocorr* fonksiyonu

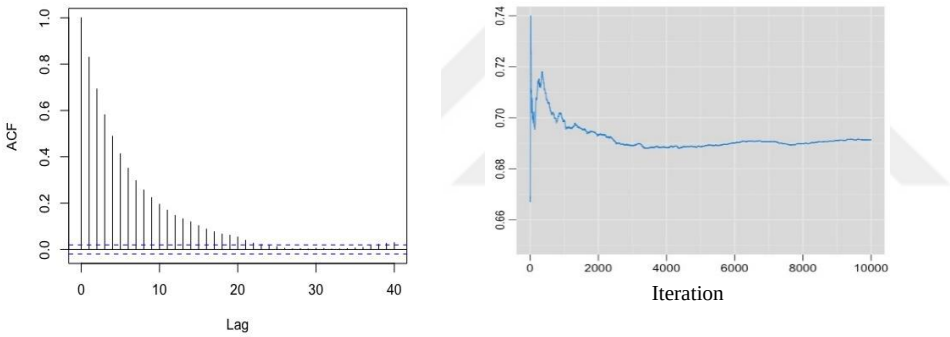
yardımıyla t-gecikmeli otokorelasyon fonksiyonunun tahmini elde edilmiştir. Elde edilen 10000 adet R değerinden oluşan dizinin otokorelasyon grafiği Şekil 7.8. (solda)' de verilmiştir ve bu dizinin 10 gecikmeli otokorelasyon değeri 0,1722 ve 50 gecikmeli otokorelasyon değeri 0.0076 olarak elde edilmiştir.

Elde edilen Markov zincirinin yakınsamasını değerlendirmek için grafiksel yöntemler oldukça bilgilendirici sonuçlar vermektedir. Örneğin, Şekil 7.7. (solda), iz grafiği her bir iterasyon t ye karşılık gelen R_B^t değerinin grafiğini ifade etmektedir. Ayrıca, Şekil 7.7. (sağda), R nin sonsal dağılımının yoğunluk grafiğini ifade etmektedir. İz grafiği incelendiğinde, Markov zincirinin ortalama etrafında benzer varyasyonlar göstererek yayılım gösterdiği gözlenmektedir. Bu sonuç, üretilen Markov zincirinin tutarlı tahminler ürettiğini ifade eder. Ayrıca yoğunluk grafiği ise tek modlu ve simetrik bir şekilde ortaya çıkmıştır. Burada dağılımın üst noktası sonsal dağılımın modunu ifade etmekte ve tahminlerde en çok ortaya çıkan değeri ifade eder. Elde edilen serinin medyanı 0,6952 olarak elde edilmiştir. Burada yer alan bant genişliği ise tahminlerin ortalama ne kadar aralıkta yayıldığının bir ölçüsü olmakla birlikte 0.0074 gibi çok küçük bir değer olarak hesaplanmıştır. Bu durum tahminlerin tutarlılığını desteklemektedir.

Bir diğer değerlendirme aracı olarak ise sürekli ortalama grafiği, diğer bir deyişle ergodik ortalama, her bir t. iterasyona karşılık gelen ortalamaların ve zincirdeki otokorelasyonlar üzerinde ergodik ortalamanın hassasiyetini ifade eder. Şekil 6.8. (sağ) incelendiğinde ortalamanın giderek durağanlaştığı ve iterasyon sayısı yeterince arttıkça sabitleşmeye başladığı gözlenmektedir. R programında *mcmcplots* paketi yardımıyla sürekli ortalama grafikleri kolaylıkla çizdirilebilir.



Şekil 7.7. R' nin iz grafiği (solda) ve sonsal yoğunluk grafiği (sağda).



Şekil 7.8. R için otokorelasyon grafiği (solda) ve sürekli (ergodik) ortalama grafiği (sağda).

Grafiksel yöntemlere ek olarak, Markov zincirinin yakınsaklık ve asimptotik olarak standart normal dağılıma sahip olduğunun tespiti için Geweke istatistikleri kullanılabilir (Zhang, 2014). Geweke (1992), üretilen bir Markov zincirinin ilk ve son bölümünün (örneğin; ilk %10 ve son %50) ortalamalarının eşitliğinin tespiti için bir yakınsama testi önermiştir. Eğer, bu iki bölümden alınan örnekler, eşit ve durağan bir Markov zincirinden alınmış ise Geweke istatistiği asimptotik olarak standart normal dağılıma sahiptir. R(3.4.2) programında yer alan *geweke.diag* komutu

yardımıyla bu değer hesaplanmış ve 0.2694 olarak elde edilmiştir. Böylece, üretilen Markov zincirinden alınan iki örneklemin ortalamalarının aynı olduğu hipotezi reddedilemez ve Markov zincirinin yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylece tüm değerlendirmelere göre Markov zincirinin yakınsaklık gösterdiği sonucuna varılmıştır. Ele alınan gerçek veri seti için, $\hat{R}_B = 0.6948$ ve standart hatası 0.0438 olarak elde edilmiştir. En yüksek sonsal güven aralığı ise $(0.6085,\ 0.7766)$ olarak 0.1681 uzunluğunda elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar da Şekil 7.7.' de verilen R' nin yoğunluk grafiğiyle uyuşmaktadır. Bayes güven aralığı parametrik boot-p güven aralığına yakın bir değer olarak parametrik olmayan boot-p güven aralığından daha iyi sonuç vermiştir.

7.3. Çok Bileşenli Sistemin Stokastik Gerilim-Mukavemet Güvenilirliği Tahmin Çalışmalarına Dayalı Uygulamalar

Bu alt bölümde Maindonald ve ark. (2019) tarafından kullanılan dondurulmuş gevrek verisi kullanılmıştır. Bu veri seti, iki farklı ölçme yöntemi sonucu 25 gramlık tahıl örneklerinde bulunan şeker konsantrasyonu değerlerini vermektedir. Bunlardan birincisi, yüksek performanslı sıvı kromatografi yöntemi ile yapılan ölçümler (veri kümesi I) ve diğeri ise kızıl ötesi analizör 400 kullanılarak yapılan hızlı ölçümlerdir (veri kümesi II). Yüksek performanslı sıvı kromatografi yavaş fakat güvenilir bir ölçüm yöntemi olarak kullanılmasına rağmen kızıl ötesi analizör 400 ile yapılan ölçümler ise zaman tasarrufu kazandırmaktadır. Böyle bir durumda, laborantlar s adet kızıl ötesi analizör 400 ölçümden en az k tanesinin sıvı kromatografi ölçümlerinden yüksek değer bulunması problemi ile ilgilenebilir. Böyle bir güvenilirlik problemi, kullanılan hızlı yöntemin yavaş yöntem kadar iyi ölçüm yapabilme olasılığını ifade edecektir. Bu amaçla veri kümesi $II,\ X$ gerilim ve veri kümesi $I,\ Y$ mukavemet rasgele değişkeni olarak düşünülerek çok bileşenli stokastik gerilim-mukavemet güvenilirliği uygulaması yapılmıştır. Her iki veri

kümesinde örneklem hacimleri $n = m = 100$ olarak gözlenmiştir. Ayrıca, bu veriyi $(0,1)$ tanım aralığına indirgemek amacıyla min-max ölçeklemesi, a ve b sırasıyla veri aralığının alt ve üst tam sayı değerleri olmak üzere $(x - a)/(b - a)$ olarak yapılmıştır. Veri seti I için $a = 31, b = 44$ ve veri seti II için $a = 30, b = 46$ olmak üzere ölçeklendirilmiş veri kümeleri Çizelge 7.8. ve Çizelge 7.9.' de verilmiştir.

Çizelge 7. 8. Dönüştürüştürülmüş sıvı kromatografi ölçüm verileri

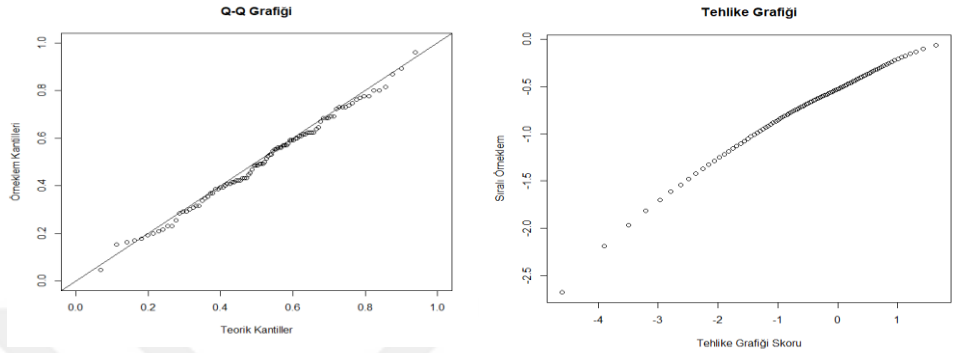
0.4077	0.1692	0.6154	0.4846	0.7462	0.5692	0.3692	0.3846	0.5308	0.8923
0.6923	0.9615	0.4308	0.2077	0.7308	0.5923	0.4000	0.8154	0.5231	0.7308
0.6077	0.3846	0.7769	0.6923	0.3462	0.2538	0.1538	0.4538	0.4077	0.5769
0.3154	0.5923	0.2308	0.8692	0.8000	0.5538	0.5615	0.4923	0.5000	0.4231
0.2923	0.5462	0.7692	0.3385	0.3077	0.5308	0.6231	0.1769	0.7231	0.3000
0.1923	0.3692	0.4308	0.5615	0.1615	0.4923	0.6846	0.5692	0.3923	0.2000
0.3154	0.4923	0.5538	0.6154	0.0462	0.3923	0.4308	0.4154	0.6846	0.6000
0.6231	0.2846	0.4846	0.6231	0.6000	0.5923	0.4231	0.4846	0.6846	0.2308
0.6462	0.4154	0.2923	0.7769	0.2154	0.8000	0.6231	0.5615	0.5154	0.5692
0.7615	0.4231	0.7308	0.6692	0.7385	0.6077	0.6385	0.4692	0.3538	0.4462

Çizelge 7. 9. Dönüştürüştürülmüş ise kızıl ötesi analizör 400 ölçüm verileri

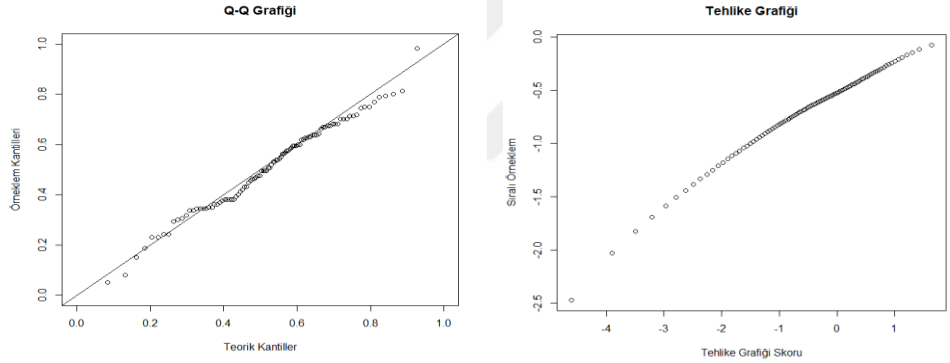
0.3188	0.3687	0.6313	0.3438	0.4937	0.5938	0.5312	0.4937	0.7000	0.9813
0.5187	0.7687	0.5625	0.0500	0.4562	0.5938	0.6437	0.7500	0.4312	0.7000
0.5812	0.3500	0.6812	0.4750	0.3438	0.3438	0.1500	0.3813	0.3813	0.5625
0.5312	0.6250	0.3375	0.6812	0.5875	0.5375	0.6000	0.5750	0.4000	0.3813
0.5063	0.6000	0.6750	0.4625	0.4750	0.3750	0.4500	0.1875	0.7437	0.4937
0.5063	0.4625	0.6313	0.6688	0.3375	0.7125	0.6375	0.5688	0.2938	0.2437
0.4188	0.3937	0.5500	0.8125	0.2437	0.3500	0.3000	0.3625	0.7125	0.5750
0.4312	0.2313	0.3813	0.6375	0.6187	0.4125	0.3625	0.5375	0.4688	0.2313
0.6187	0.3438	0.3062	0.6688	0.0813	0.5938	0.4937	0.5438	0.3813	0.8000
0.7938	0.6812	0.6250	0.7000	0.7188	0.7500	0.7875	0.6750	0.6375	0.6625

Veri kümelerine ait, parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\alpha}_1 = 2.493$, $\hat{\beta}_1 = 0.563$, $\hat{\alpha}_2 = 2.257$, $\hat{\beta}_2 = 0.554$ olarak elde edilmiştir. Kolmogorov-Smirnov test istatistikleri ve karşılık gelen p değerleri X için 0.1 ve 0.6994, Y için ise 0.08 ve 0.9062 olarak elde edildiğinden her iki veri setinin de STSP dağılımına uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca grafiksel yöntemlerle de elde edilen bu sonuç desteklenmiş ve uyumun iyiliğini gösteren grafikler Şekil 7.9. ve Şekil 7.10.'

da verilmiştir.



Şekil 7.9. Dönüştürüştürülmüş sıvı kromatografi ölçüm verisine ait kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri.



Şekil 7.10. Dönüştürüştürülmüş ise kızıl ötesi analizör 400 ölçüm verisine ait kantil (solda) ve tehlike (sağda) grafikleri.

Böylece, STSP dağılımına uygunluğu tespit edilen bu veri kümelerine Bölüm 4.2. içerisinde elde edilen hesaplama yöntemleri uygulanmış ve $(s,k) = (1,3)$ ve $(s,k) = (2,4)$ senaryoları altında tahminler elde edilmiştir. Tahminler elde edilirken bir önceki bölümde uygulanan tekrar sayıları kullanılmıştır. Ayrıca, algoritma sonucu elde edilen Markov zincirinin yakınsama tespitleri önceki iki

uygulama içerisinde detaylı olarak ele alındığından bu uygulamada ayrıca verilmemiştir.

Sonuçlar incelendiğinde $\hat{R}_{1,3} = 0.747901$ ve $\hat{R}_{1,3}^{B} = 0.753345$ olarak elde edilirken parametrik boot-p güven aralığı $(0.667421, 0.816491)$ olarak 0.149070 uzunluğunda, parametrik olmayan boot-p güven aralığı $(0.657196, 0.835423)$ olarak 0.178227 uzunluğunda ve Bayes HPD güven aralığı $(0.671665, 0.827000)$ olarak 0.155335 uzunluğunda elde edilmiştir. Diğer yandan, $\hat{R}_{2,4} = 0.605892$ ve $\hat{R}_{2,4}^{B} = 0.613226$ olarak elde edilirken parametrik boot-p güven aralığı $(0.506669, 0.699124)$ olarak 0.192455 uzunluğunda, parametrik olmayan boot-p güven aralığı $(0.489451, 0.730182)$ olarak 0.240731 uzunluğunda ve Bayes HPD güven aralığı $(0.511690, 0.711954)$ olarak 0.200264 uzunluğunda elde edilmiştir. Sonuçlar parametrik bootstrap metodunun en kısa güven aralığına sahip olduğunu, parametrik olmayan bootstrap metodunun ise en uzun güven aralığına sahip olduğunu göstermektedir.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde ilk olarak, Mance ve ark. (2017) tarafından ele alınan, TSP dağılımına sahip bileşenlerin güvenilirlik analizi, istatistiksel güvenilirlik analizi çalışmalarının sadece temel birkaç noktasını barındırmakta olup, bu çalışma ile birlikte, dağılım çok daha kapsamlı bir biçimde incelenmiştir. TSP dağılımının standart formu olan STSP dağılımı kullanılarak, $[0,1]$ aralığında tanımlı ve bir eşik noktasına sahip bir sağ kalım verisinin güvenilirlik analizi çalışmaları yapılmıştır.

İlk olarak, dağılımın genel güvenilirlik göstergeleri incelendiğinde STSP dağılımının parametrelerinin durumlarına göre hem iç bükey hemde dış bükey güvenilirlik eğrilerine sahip olduğu gözlenirken; $\alpha < 1$ durumunda banyo küveti eğrisi şeklinde, $\alpha > 1$ durumda ise artan tehlike oranlarına sahip olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, STSP dağılımının parametrelerinin hiçbir durumunda sabit tehlikeye sahip olmadığı gözlenmiştir. Tehlike oranlarındaki değişimlerden yola çıkarak STSP dağılımının $\alpha > 1$ durumunda daima artan tehlike oranı-IFR sınıfı bir dağılım olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca birikimli tehlike fonksiyonu yardımıyla STSP dağılımı için bir tehlike grafiği oluşturularak, herhangi bir verinin bu dağılıma uygun olup olmadığının tespiti için alternatif bir yaklaşım önerilmiştir.

Güvenilirlik ve tehlike oranlarının herhangi bir sabit t zamanındaki tahminini elde edebilmek için, en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmıştır. En çok olabilirlik tahmin çalışmalarında, bu tahmin edicilerin değişmezlik özelliği yardımıyla van Dorp ve Kotz (2002) tarafından elde edilen parametre tahminleri kullanılırken, STSP dağılımın sınırlarının eşik/yansıma parametresine bağlı olmasından dolayı bilinen Bayes yöntemleri ile sonuca ulaşılamamıştır. Bu durumun üstesinden gelebilmek amacıyla STSP dağılımı bir yardımcı değişken yardımıyla yeniden parametrize edilerek parametrelerin koşullu dağılımları elde edilmiş ve bu koşullu dağılımlar Gibbs algoritması MCMC yönteminde kullanılarak Bayes tahminleri elde edilmiştir. Güvenilirlik ve tehlike

oranlarının Bayes tahminlerinde simetrik ve asimetrik kayıp fonksiyonları ayrı ayrı ele alınmış ve aşırı tahmin ya da düşük tahmine sadece kayıp fonksiyonunun parametrelerinin değil, sabit zaman noktasının yansıma parametresinden düşük ya da yüksek olmasına da bağlı olduğu gözlenmiştir. Genel olarak, en çok olabilirlik tahminlerinin aşırı tahmine Bayes tahmininin ise düşük tahmine neden olduğu sonucuna varılmıştır. Beklenildiği üzere tüm tahminlerde, örneklem hacmi büyüdükçe gerçek değerine yakınsama sağlamıştır. Tahminlerin yaklaşık güven aralıklarını elde edebilmek için en çok olabilirlik tahminlerine ait bootstrap ve Bayes tahminlerine ait HPD güven aralıkları elde edilmiştir. Bu güven aralıkları örneklem hacmi ve gerçek güvenilirlik düzeyi göz önüne alınarak karşılaştırılmış ve sonuçlar raporlanmıştır.

Güvenilirlik simülasyon çalışmalarından elde edilen sonuçlar incelendiğinde, SELF altında Bayes tahmini ve LLF altında Bayes tahmini $t \leq \beta$ durumunda düşük tahmin ve $t > \beta$ durumunda ise aşırı tahmin değerleri verirken, GELF altında Bayes tahmini $t \leq \beta$ durumunda düşük tahmin fakat $t > \beta$ durumunda $c > 0$ değerleri için düşük tahmin $c < 0$ değerleri için ise aşırı tahmin değerleri verdiği gözlenmiştir. Ayrıca, en çok olabilirlik tahminlerin SELF altında Bayes tahminlerine göre daha düşük, LLF ve GELF altında Bayes sonuçlarına göre daha yüksek beklenen riske sahip olduğu gözlenmiştir. Özellikle, en düşük beklenen riskin $p = 0.5$ ve $c = 0.5$ kayıp parametre değerlerinde elde edildiği ve bu değerler pozitif yönde artıkça riskin de arttığı sonuçlarına varılmıştır. Tehlike oranlarının Bayes tahminlerinde Linex kayıp fonksiyonu, $\lambda(t)$ fonksiyonunun $t > \beta$ durumunun sadece şekil parametresi α' ya bağlı olması ve α' da oluşan küçücük bir değişimde bile paydada yer alan $(1 - t)$ değerinin etkisiyle çok büyük sapmalara ve dolayısıyla tutarsız beklenen risk değerlerine sahip olmasından ötürü kullanılamamaktadır. Tehlike oranlarının tahmin çalışmaları sonucunda ise GELF altında Bayes tahminlerin daha düşük beklenen riske sahip olduğu ve tehlike oranının gerçek değerlerinin $\lambda > 1$ olduğu durumlar için $c = 0.5$ kayıp parametresi

altında en düşük riske sahip tahminlerin elde edildiği gözlenmiştir. Diğer yandan, en çok olabilirlik tahminleri ise tehlike fonksiyonunun gerçek değerlerinin $\lambda \to 0$ durumunda en düşük riske sahip tahminler verdiği gözlendiğinden, bu durumda $(\lambda \to 0)$ en çok olabilirlik tahminleri beklenen risk açısından Bayes tahminlerine göre daha avantajlı olduğu söylenebilir.

Basit sistemin gerilim-mukavemet güvenilirliğinin tahmin çalışmaları incelendiğinde ise, yüksek güvenilirlik düzeylerinde en çok olabilirlik tahminlerinin tüm örneklem hacimlerinde daha düşük hata kareler ortalamalarına sahip olduğu gözlenirken, güvenilirlik düzeyi düştükçe küçük örneklemlerde Bayes, büyük örneklemlerde ise en çok olabilirlik tahminlerinin daha düşük hata kareler ortalamasına sahip olduğu gözlenmiştir. Yaklaşık güven aralıklarının uzunlukları bakımından, yüksek güvenilirlik düzeylerinde küçük ve orta boyutlu örneklemde parametrik olmayan boot-p yönteminin, büyük boyutlu örneklemde ise parametrik boot-p yönteminin daha kısa güven aralığına sahip olduğu gözlenmiştir. Düşük güvenilirlik düzeylerinde ise, parametrik boot-p yönteminin küçük ve orta boyutlu örneklemlerde daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bayes yöntemine bağlı elde edilen en yüksek sonsal güven aralıkları ise büyük ve orta boyutlu örneklemlerde iyi sonuçlar verirken, genel itibariyle parametrik bootstrap ile elde edilen sonuçlara yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çok bileşenli sistemin gerilim-mukavemet güvenilirliği tahmin çalışmaları sonunda ise $R_{s,k}$' nın büyük gerçek değerleri için en çok olabilirlik tahminlerinin büyük örneklemlerde daha düşük KHO değerlerine sahip olduğu, diğer yandan küçük ve orta boyutlu örneklemlerde ise Bayes tahminlerinin düşük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. $R_{s,k}$' nın gerçek değeri düştükçe, tüm örneklem boyutlarında Bayes tahminlerinin en küçük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. Güven aralıkları incelendiğinde ise HPD güven aralıklarının büyük örneklemlerde daha kısa aralıklara sahip olduğu, küçük ve orta boyutlu örneklemlerde ise parametrik olmayan boot-p güven aralıklarının en kısa aralığa

sahip olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır.

Yapılan tüm simülasyon çalışmaları gerçek veri kümeleri üzerinde örneklendirilerek, uygulanabilirliliği gösterilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen tüm hesaplamalar, tüm verilerin gözlemlenebildiği durumlar için geçerlidir. Fakat bilinmektedir ki, her zaman tam veriye ulaşmak mümkün olmayabilir ve sansürlü/kesilmiş verilerle de karşılaşılabilir. Bu durumlarda yapılacak hesaplamaların, sansürlü durumlara göre elde edilmesi gerekir. Fakat, STSP dağılımın yoğunluk fonksiyonun eşik/yansıma parametresine bağlı olması, sansürlü durumlarda olabilirlik fonksiyonunun elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Böyle bir problemin varlığı, sansürlü durumlarda STSP dağılımın güvenilirlik tahminlerini açık problem olarak bırakmaktadır. Ayrıca alt rekor değerler ve üst rekor değerler gibi aşırı durumlarda yapılacak hesaplamalarda da benzer problem söz konusudur.

Böylece; STSP dağılımına sahip, tüm verilerin gözlemlenebildiği bir ömür verisine sahip bileşenin güvenilirlik analizleri, bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar kullanılarak yapılabililir.

KAYNAKLAR

Al-Mutairi, D.K., Ghitany, M.E., Kundu, D., 2013. Inference on stress-strength reliability from Lindley distributions. Communication in Statistics: Theory and Methods, 42, 1443-1463.

Ali, M.M., Woo, J., 2005a. Inference on reliability $P(Y < X)$ in the Levy distribution. Mathematical and Computer Modelling, 41, 965-971.

Ali, M.M., Woo, J., 2005b. Inference on reliability $P(Y < X)$ in the p-dimensional Rayleigh distribution. Mathematical and Computer Modelling, 42, 367-373.

Awad, A.M., Gharraf, M.K., 1986. Estimation of $P(Y < X)$ in the Burr case: A comparative study. Communication in Statistics: Simulation and Computation, 15(2), 389-403.

Badar, M.G., Priest, A.M., 1982. Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites, im: T. Hayashi, K. Kawata, E.S. Umewaka (Eds.). Progress in Science and Engineering Composites: Proceedings of the fourth international conference on composite metarials, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1129-1136, ICCM-IV, Tokyo, Japan.

Barlow, R. E., Proschan, F., 1975. Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Florida State Univ Tallahassee.

Bashir, S., Ahmed K., Ahmad, M., 2014. A note on record values from a two-sided power distribution. Pakistan J. Statist. 30, no. 2, 245–252.

Beg, M., Singh, N., 1979. Estimation of $P(Y < X)$ for the Pareto distribution. IEEE Transactions on Reliability, 28 (5), 411-414.

Berger, J.O., 1985. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer Series in Statistics.

Bhattacharya D., Roycchowdhury, S., 2013. Reliability of a coherent system in a multicomponent stress-strength model. Am. J. Math. Manage. Sci. 32(1), 40-52.

Bhattacharyya, G.K., Johnson, R.A., 1974. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model. JASA. 69,966-970.

Birnbaum, Z.W., 1956. On a use of the Mann-Whitney statistic. Proceedings of the Third Berkeley Symposium Math, Statistics Probability, 1, 13-17, Berkeley and LOB Angeles: University of California Press.

Brick, J. M., Michael, J. R., Morganstein, D., 1989. Using statistical thinking to solve maintenance problems. Quality Progress, 22(5), 55-60.

Calabria, R., Pulcini, G., 1996. Point estimation under asymmetric loss functions for lefttruncated exponential samples. Communication in Statistics-Theory Methods 25:585-600.

Chen, M.H., Shao, Q.M., 1999. Monte carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals, J. Comput. Graph. Stat., 8, 69-92.

Church, J.D., Harris, B., 1970. The estimation of reliability from stress-strength relationships. Technometrics, Vol. 12, 49-54.

Congdon, P., 2001. Bayesian Statistical Modelling, Wiley, New York.

Crowder, M. 2000. Tests for a family of survival models based on extremes. In Recent Advances in Reliability Theory, Birkhäuser, Boston, MA, 307-321.

Curtis, S.M., 2018. Mcmcplots: Create plots from MCMC output. R package version 0.4.3. https://cran.r-project.org/web/packages/mcmcplots/.

Çetinkaya, Ç., & Genç, A. İ., 2017. Partially moment relations for the product moments of order statistics from the standard two-sided power distribution. İstatistik, Türk İstatistik Derneği Dergisi, 10(1), 14-23.

Çetinkaya, Ç., Genç, A.İ., 2018. Moments of order statistics of the standard two-sided power distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 47(17), 4311-4328.

Dey, S., Mazucheli, J., Anis, M.Z., 2017. Estimation of reliability of multicomponent stress-strength for a Kumaraswamy distribution. Communication in Statistics-Theory and Methods, 46(4), 1560-1572.

Downtown, F., 1973. The estimation of $P(X > Y)$ in the normal case. Technometrics, 15, 551-558.

Ebrahimi, N., 1982. Estimation of reliability for a series stress-strength system. IEEE Trans. Reliab. 31(2), 202-205.

Efron, B., 1979. Bootsrap methods: another look at the jeckknife. Annals of Statistics, 7, 1-26.

Genç, A.İ., 2013. Estimation of $P(X > Y)$ with Topp-Leone distribution. The Journal of Computation and Simulation, 83(2), 326-339.

Geweke, J. 1992. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moments. In Bayesian Statistics 4(ed JM Bernado, JO Berger, AP Dawid and AFM Smith). Clarendon, Press, Oxford, UK.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 2007. Table of Integrals, Series and Products, 7th Ed. Academic Press, San Diego.

Gupta P.L., Gupta R.C., 2000. The Monotonicity of the Reliability Measures of the Beta Distribution. Applied Mathematics Letters, 13, 5-9.

Gündüz S., Genç A.İ., 2016. Distribution of the product of a pair of independent two-sided power variates. Communicatıons in statistics: theory and methods, 45(20); 6149-6164.

Hanagal, D., 2003. Estimation of system reliability in multicomponent series stress-strength models. J. Indian Stat. Assoc. 41(1), 1-7.

Hassan, A.S., Basheikh, H.M., 2012. Reliability estimation of stress-strength model with non-identical component strengths: the exponentiated Pareto case. Int. J. Eng. Res. Appl. 2(3), 2774-2781.

Herrerias-Velasco, J.M., Herrerias-Pleguezuel, R., Van Dorp, J.R., 2009. The generalized two sided-poer distribution. Journal of Applied Statistics, 36, 573-587.

Ho, C., Damien, P., Walker, S., 2017. Bayesian mode regression using mixtures of triangular densities. Journal of Econometrics, 197(2), 273-283.

Hoff, P.D., 2009. A First Course in Bayesian Statistical Methods, Springer, New York.

Johnson, R.A., 1988. Stress-Strength models for reliability. Handbook of Statistics. New York, Elsevier, 27-54.

Kotz, S., Lumelskii, Y., Pensky, M., 2003. The Stress-Strength Model and its Generalizations: Theory and Applications. Singapore: World Scientific Press.

Kotz, S., Seier E., 2008. Kurtosis orderings for two-sided power distributions. Braz. J. Probab. Stat. 22, no. 1, 61–68.

Kotz, S., Van Dorp, J.R., 2004. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications. World Scientific, Singapore, 2004b.

Kundu, D., Gupta, R.D., 2005. Estimation of $P(Y < X)$ for the generalized exponential distribution. Metrika, 61(3), 291-308.

Kundu, D., Gupta, R.D., 2006. Estimation of $P(Y < X)$ for the Weibull distribution. IEEE Transactions on Reliability, 55(2), 270-280.

Lai, C. D., Xie, M., & Murthy, D. N. P., 2003. A modified Weibull distribution. IEEE Transactions on reliability, 52(1), 33-37.

Lawless, J.F., 2003. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, 2nd Ed. Wiley Interscience, A John Wiley and Sons, Inc., Publications.

Maindonald, J.H., Braun, W.J., Braun, M.W.J., 2019. Package 'DAAG'. Data Analysis and Graphics Data and Functions.

Mance, C.M., Barker, K., Chimka, J.R., 2017. Modelling reliability with a two-sided power distribution. Quality Engineering, 29(4), 643-655.

Mccool, J.I., 1991. Inference on $P(Y < X)$ in the Weibul case. Communication in Statistics-Simulation and Computation, 20(1), 129-148.

Mokhlis, N.A., 2005. Reliability of a stress-strength model with Burr Type III distribuitons. Communication in Statistics- Theory and Methods, 34(7), 1643-1657.

Nachlas, J.A., 2017. Reliability Engineering, 2nd Ed. CRC Press, Taylor and Francis Group.

Nadar, M., Kızılaslan, F., Papadopoulos, A., 2014. Classical and Bayesian estimation of $P(Y < X)$ for Kumaraswamy' s distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84 (7), 1505-1529.

Nadarajah, S., 2004. Reliability of Laplace distributions. Math Problems in Eng, 2, 169-183.

Nadarajah, S., 2005. On the two-sided power distribution. Metrika, 61, 309-321.

Nagaraja, H.N., 2013. Moments of order statistics and L-moments for the symmetrical triangular distribution. Statistics and Probability Letters, 83: 2357-2363.

Oruç, O.E., Bairamov, I., 2005. On the general class of two-sided power distribution. Communication in Statistics-Theory and Methods, 34, 1009-1017.

Owen, D.B., Craswell, K.J., Hanson, D.L., 1977. Non-parametric upper confidence bounds for $P(Y < X)$ and confidence limits for $P(Y < X)$ when X and Y are normal. Journal of the American Statistical Association, 59, 906-924.

Pandey, M., Uddin, M.B., 1985. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model following Burr distribution. Proceedings of the First Asian congress on Quality and Reliability, New Delhi, India, 307-312.

Paul, P.K., Uddin, M.B., 1997. Estimation of reliability of stress-strength model with non-identical component strengths. Microelectron. Reliab. 37(6), 923-927.

Perez, J.G., Rambaud, S.C., Garcıa, L.B.G., 2005. The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT, Statistical Methods and Applications, 14, 209-222.

Pham, H., 2006. Handbook of reliability engineering. Springer Science & Business Media.

Plummer, M., Best, N., Cowles, K., Vines, K., 2006. CODA: convergence diagnosis and output analysis for MCMC, R. News 6, 7-11.

Punathumparambath, B., 2011. Estimation $P(X > Y)$ for the Double Lomax distributions. ProbStat Forum, 4, 01-11.

Rao, G.S., 2012a. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on generalized exponential distribution. Revista Colombiana de Estadistica. 35, 67-76.

Rao, G.S., 2012b. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on generalized inverted exponential distribution. Int. J. Curr. Res. Rev. 4(21), 48-56.

Rao, G.S., 2012c. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on Rayleigh distribution. ProbStat Forum. 5, 150-161.

Rao, G.S., Kantam, R.R.L., 2010. Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model:log-logistik disribution. J. Appl. Stat. Sci. 3(2), 75-84.

Rausand, M., Høyland, A., 2004. System Reliability Theory, 2nd Ed. Wiley Interscience, A John Wiley and Sons, Inc., Publications.

Rezaei, A., Sharafi, M., Behboodian, J., Zamani, A., 2018. Inferences on stress–strength parameter based on GLD5 distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 47(5), 1251-1263.

Rizzo, M.L., 2008. Statistical Computing with R. Chapman & Hall/CRC, London.

Smith, P.J., 2002. Analysis of Faulire and Survival Data. Chappmann and Hall/CRC Texts in Statistical Sciences.

Soltani, A.R., Homei, H., 2009. A generalization fort he two-sided power distributions and adjusted method of moments. Statistics, 43, 611-620.

Srivastava, R., Li, P., Sengupta, D. 2012. Testing for Membership to the IFRA and the NBU Classes of Distributions. In Artificial Intelligence and Statistics. 1099-1107.

Surles, J.G., Padgett, W.J., 1998. Inference for $P(Y < X)$ in the Burr type-X model. Journal of Applied Statistical Sicence, 7(4), 225-238.

Surles, J.G., Padgett, W.J., 2001. Inference for relibality and stress-strength for a scaled Burr type-X distribution. Lifetime Data Analysis, 7, 187-200.

Team R.C., 2017. R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. https://www.r-project.org/.

Tong, H., 1974. A note on the estimation of $P(Y < X)$ in the exponential case. Technometrics, 16, 625-625.

Van Dorp, J. R., Kotz, S., 2002a. The standard two-sided power distribution and its properties: With applications in financial engineering. The American Statistician, 56: 90-99.

Van Dorp, J. R., Kotz, S., 2002b. A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation. The Statistician, 51: 63-79.

Van Dorp, J.R., Kotz, S., 2003. Generalizations of two-sided power distributions and their convolution. Communications in Statistics.

Varian, H.R., 1975. A bayesian approach to real estate assessment. Studies in Bayesian econometrics and statistics in honor of Leonard J Savage, 195-208.

Verma, A.K., Ajit S., Muruva, H.P., 2015. Risk Management of Non-Renewable Energy Systems. Springer Series in Reliability Engineering.

Wolstenholme, L.C., 1999. Reliability Modelling, A Statistical Approach. Chapman and Hall/CRC.

Woodward, W.A., Kelley, G.D., 1977. Minimum variace unbiased estimation of P(Y<X) in the normal case. Technometrics,19, 95-98.

Zhang, Z., 2014. WebBUGS: conducting Bayesian statistical analysis online, J. Stat. Softw., 61, 1-30.

Zimmer, W.J., Keats, J.B., Wang, F.K., 1998. The Burr XII distribution in reliability analysis. Journal of Quality Technology, 30(4), 386-394.

ÖZGEÇMİŞ

Çağatay ÇETİNKAYA, 1985 yılında Ceyhan'da doğdu. İlk ve orta öğretimi Mersin'de tamamladı. 2003 yılında başladığı Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. Lisans öğrenimi boyunca 2006-2007 yıllarında Anadolu Üniversitesi Öğrenci Konseyi Başkanlığı ve Türkiye Ulusal Öğrenci Konseyi Dış İlişkilerden Sorumlu Yönetim Kurulu Üyeliği, 2007-2008 yıllarında da Anadolu Üniversitesi Öğrenci Konseyi Denetleme Kurulu Başkanlığı görevlerinde bulunmuştur. 2009-2011 yılları arasında Türkiye İş Bankası A.Ş bünyesinde bankacılık mesleğini ifa etmiştir. 2010 yılında Mersin Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Anabilim Dalında tezsiz (e-MBA) yüksek lisansa başladı ve 2011 yılında tamamladı. 2012 yılında Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında Bingöl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atanıp, ardından 2547 sayılı Yükseköğretim Kanunu' nun 35. Maddesi gereği yüksek lisans eğitimine başladığı Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Ana Bilim Dalı' ndan 2016 yılında mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı ve halen burada araştırma görevlisi olarak doktora eğitimine devam etmektedir.

EKLER

EK 1

Çizelge 6.1. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10.20.30.50.100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2.0.5.0.9)$ göre $\alpha = 2.8$ ve $\beta = 0.8$ parametre değerleri için $R(0.2) = 0.98351.$ $R(0.5) = 0.78544$ ve $R(0.9) = 0.02872$ olmak üzere $R(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri.

t	n	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{B1}$	$\hat{R}_{B2}$			$\hat{R}_{B3}$		
				$p = -0..5$	$p = 0..5$	$p = 1$	$c = -0..5$	$c = 0..5$	$c = 1$
0.2	10	0.98351	0.97039	0.97056	0.97022	0.97005	0.97021	0.96985	0.96967
		(0.00036)	(0.00085)	(0.00011)	(0.00011)	(0.00042)	(0.00012)	(0.00012)	(0.00046)
	20	0.98311	0.97605	0.97613	0.97597	0.97588	0.97596	0.97578	0.97569
		(0.00021)	(0.00039)	(0.00005)	(0.00005)	(0.00019)	(0.00005)	(0.00005)	(0.00021)
	30	0.98310	0.97872	0.97877	0.97867	0.97862	0.97867	0.97856	0.97851
		(0.00014)	(0.00022)	(0.00003)	(0.00003)	(0.00011)	(0.00003)	(0.00003)	(0.00012)
	50	0.98339	0.98088	0.98091	0.98086	0.98083	0.98086	0.98080	0.98078
		(0.00008)	(0.00011)	(0.00001)	(0.00001)	(0.00006)	(0.00001)	(0.00001)	(0.00006)
	100	0.98354	0.98242	0.98243	0.98240	0.98239	0.98240	0.98238	0.98236
		(0.00004)	(0.00005)	(0.00001)	(0.00001)	(0.00003)	(0.00001)	(0.00001)	(0.00003)
0.5	10	0.80288	0.76718	0.77022	0.76410	0.76097	0.76299	0.75412	0.74942
		(0.01232)	(0.01257)	(0.00160)	(0.00155)	(0.00609)	(0.00320)	(0.00297)	(0.01148)
	20	0.79625	0.77969	0.78116	0.77821	0.77672	0.77775	0.77375	0.77168
		(0.00550)	(0.00592)	(0.00075)	(0.00073)	(0.00292)	(0.00133)	(0.00129)	(0.00507)
	30	0.79141	0.78099	0.78186	0.78012	0.77924	0.77986	0.77755	0.77638
		(0.00325)	(0.00350)	(0.00044)	(0.00044)	(0.00174)	(0.00076)	(0.00074)	(0.00294)
	50	0.78889	0.78346	0.78394	0.78298	0.78250	0.78284	0.78159	0.78096
		(0.00184)	(0.00193)	(0.00024)	(0.00024)	(0.00096)	(0.00040)	(0.00040)	(0.00159)
	100	0.78672	0.78430	0.78455	0.78405	0.78380	0.78398	0.78334	0.78301
		(0.00096)	(0.00100)	(0.00013)	(0.00013)	(0.00050)	(0.00021)	(0.00021)	(0.00082)
0.9	10	0.03838	0.03053	0.03068	0.03038	0.03023	0.02622	0.01631	0.00727
		(0.00246)	(0.00062)	(0.00008)	(0.00008)	(0.00031)	(0.18757)	(0.09476)	(0.34174)
	20	0.03390	0.03449	0.03460	0.03438	0.03427	0.03147)	0.02511	0.02167
		(0.00102)	(0.00048)	(0.00006)	(0.00006)	(0.00024)	(0.06326)	(0.05304)	(0.21329)
	30	0.03177	0.03435	0.03444	0.03427	0.03418	0.03206	0.02747	0.02514
		(0.00053)	(0.00037)	(0.00005)	(0.00005)	(0.00019)	(0.04046)	(0.03859)	(0.16024)
	50	0.03034	0.03312	0.03318	0.03306	0.03300	0.03147	0.02825	0.02667
		(0.00026)	(0.00026)	(0.00003)	(0.00003)	(0.00013)	(0.02754)	(0.02751)	(0.11473)
	100	0.02920	0.03060	0.03062	0.03057	0.03055	0.02985	0.02840	0.02768
		(0.00009)	(0.00010)	(0.00001)	(0.00001)	(0.00005)	(0.01262)	(0.01261)	(0.05143)

EK 2

Çizelge 6.2. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10.20.30.50.100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2.0.5.0.9)$ göre $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 0.5$ parametre değerleri için $R(0.2) = 0.87351.$ $R(0.5) = 0.5$ ve $R(0.9) = 0.04472$ olmak üzere $R(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri.

t	n	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{B1}$	$\hat{R}_{B2}$			$\hat{R}_{B3}$		
				$p = -0..5$	$p = 0..5$	$p = 1$	$c = -0..5$	$c = 0..5$	$c = 1$
0.2	10	0.87671	0.88224	0.88296	0.88152	0.88078	0.88140	0.87968	0.87879
		(0.00790)	(0.00297)	(0.00037)	(0.00037)	(0.00149)	(0.00050)	(0.00049)	(0.00197)
	20	0.87320	0.87167	0.87212	0.87123	0.87079	0.87116	0.87014	0.86962
		(0.00401)	(0.00177)	(0.00022)	(0.00022)	(0.00088)	(0.00030)	(0.00029)	(0.00118)
	30	0.87417	0.86914	0.86946	0.86881	0.86848	0.86876	0.86800	0.86762
		(0.00250)	(0.00133)	(0.00017)	(0.00017)	(0.00066)	(0.00022)	(0.00022)	(0.00088)
	50	0.87342	0.86753	0.86779	0.86727	0.86702	0.86723	0.86664	0.86634
		(0.00151)	(0.00106)	(0.00013)	(0.00013)	(0.00053)	(0.00018)	(0.00018)	(0.00071)
	100	0.87425	0.87017	0.87031	0.87002	0.86988	0.87000	0.86967	0.86951
		(0.00064)	(0.00058)	(0.00007)	(0.00007)	(0.00029)	(0.00010)	(0.00010)	(0.00038)
0.5	10	0.50257	0.50135	0.50442	0.49829	0.49522	0.49482	0.48004	0.47124
		(0.02468)	(0.01227)	(0.00153)	(0.00154)	(0.00617)	(0.00822)	(0.00717)	(0.02744)
	20	0.49889	0.49814	0.49964	0.49664	0.49514	0.49504	0.48856	0.48516
		(0.01167)	(0.00602)	(0.00075)	(0.00075)	(0.00301)	(0.00342)	(0.00324)	(0.01271)
	30	0.49918	0.49928	0.50034	0.49821	0.49715	0.49710	0.49263	0.49033
		(0.00790)	(0.00426)	(0.00053)	(0.00053)	(0.00213)	(0.00231)	(0.00224)	(0.00883)
	50	0.50221	0.50156	0.50228	0.50084	0.50012	0.50011	0.49716	0.49566
		(0.00470)	(0.00287)	(0.00036)	(0.00036)	(0.00144)	(0.00149)	(0.00147)	(0.00583)
	100	0.50221	0.50156	0.50228	0.50084	0.50012	0.50011	0.49716	0.49566
		(0.00470)	(0.00287)	(0.00036)	(0.00036)	(0.00144)	(0.00149)	(0.00147)	(0.00583)
0.9	10	0.04187	0.03961	0.03973	0.03949	0.03937	0.03618	0.02632	0.01864
		(0.00170)	(0.00051)	(0.00006)	(0.00006)	(0.00025)	(0.13544)	(0.06745)	(0.22162)
	20	0.04357	0.04514	0.04524	0.04504	0.04493	0.04256	0.03607	0.03187
		(0.00106)	(0.00041)	(0.00005)	(0.00005)	(0.00020)	(0.05253)	(0.03657)	(0.13129)
	30	0.04487	0.04757	0.04765	0.04748	0.04740	0.04559	0.04102	0.03839
		(0.00072)	(0.00035)	(0.00004)	(0.00004)	(0.00018)	(0.02933)	(0.02451)	(0.09336)
	50	0.04375	0.04749	0.04756	0.04742	0.04735	0.04592	0.04245	0.04054
		(0.00040)	(0.00029)	(0.00004)	(0.00004)	(0.00014)	(0.02103)	(0.01869)	(0.07263)
	100	0.04370	0.04659	0.04663	0.04655	0.04651	0.04570	0.04388	0.04295
		(0.00017)	(0.00017)	(0.00002)	(0.00002)	(0.00008)	(0.01040)	(0.01004)	(0.04006)

EK 3

Çizelge 6.3. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10.20.30.50.100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2.0.5.0.9)$ göre $\alpha = 2.8$ ve $\beta = 0.8$ parametre değerleri için $\lambda(0.2) = 0.23479.$ $\lambda(0.5) = 1.52978$ ve $\lambda(0.9) = 28$ olmak üzere $\lambda(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri.

	n	$\widehat{\lambda}_{ML}$	$\widehat{\lambda}_{B1}$	$\widehat{\lambda}_{B2}$		
				$c = -0..5$	$c = 0..5$	$c = 1$
0.2	10	0.21526	0.31622	0.27008	0.14501	0.06697
		(0.04128)	(0.06130)	(0.22879)	(0.11618)	(0.43413)
	20	0.22363	0.27477	0.25047	0.19432	0.15882
		(0.02107)	(0.02798)	(0.07582)	(0.05622)	(0.21703)
	30	0.22482	0.25729	0.24024	0.20244	0.18095
		(0.01500)	(0.01777)	(0.04909)	(0.03939)	(0.15154)
	50	0.23143	0.24979	0.23970	0.21830	0.20680
		(0.00919)	(0.01021)	(0.02510)	(0.02238)	(0.08783)
	100	0.23262	0.24181	0.23614	0.22439	0.21827
		(0.00491)	(0.00549)	(0.01334)	(0.01244)	(0.04902)
0.5	10	1.54331	1.77816	1.68384	1.48247	1.35819
		(0.82564)	(0.82962)	(0.03434)	(0.03064)	(0.12535)
	20	1.53795	1.63134	1.59693	1.52993	1.49647
		(0.24060)	(0.25454)	(0.01078)	(0.01088)	(0.04473)
	30	1.53341	1.57942	1.56024	1.52178	1.50235
		(0.12498)	(0.12558)	(0.00630)	(0.00624)	(0.02511)
	50	1.52018	1.54204	1.53302	1.51496	1.50588
		(0.05449)	(0.05641)	(0.00299)	(0.00295)	(0.01180)
	100	1.52799	1.53648	1.53243	1.52430	1.52021
		(0.02418)	(0.02495)	(0.00134)	(0.00133)	(0.00530)
0.9	10	33.63707	35.13358	34.03950	32.06885	31.18351
		(210.27494)	(227.72613)	(0.01686)	(0.02014)	(0.08988)
	20	30.50274	30.84197	30.35234	29.42269	28.98181
		(72.33144)	(72.66654)	(0.00801)	(0.00868)	(0.03654)
	30	29.83446	29.84204	29.54798	28.97118	28.68786
		(38.08906)	(39.60525)	(0.00507)	(0.00530)	(0.02185)
	50	29.07495	29.09890	28.94183	28.62977	28.47474
		(18.82796)	(19.71327)	(0.00277)	(0.00285)	(0.01158)
	100	28.55545	28.60211	28.51971	28.35678	28.27621
		(9.05993)	(9.92940)	(0.00145)	(0.00148)	(0.00598)

EK 4

Çizelge 6.4. Farklı örneklem hacimleri $(n = 10.20.30.50.100)$ ve sabit zaman noktalarına $(t = 0.2.0.5.0.9)$ göre $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 0.5$ parametre değerleri için $\lambda(0.2) = 1.08610.$ $\lambda(0.5) = 3$ ve $\lambda(0.9) = 15$ olmak üzere $\lambda(t)$ tahminlerinin ortalama değerleri ve beklenen riskleri.

t	n	$\hat{\lambda}_{ML}$	$\hat{\lambda}_{B1}$	$\hat{\lambda}_{B2}$		
				$c = -0..5$	$c = 0..5$	$c = 1$
0.2	10	1.14140	1.11985	1.06821	0.95528	0.88881
		(0.50702)	(0.24354)	(0.03200)	(0.02600)	(0.09963)
	20	1.13107	1.13568	1.10971	1.05572	1.02687
		(0.24080)	(0.12323)	(0.01295)	(0.01215)	(0.04833)
	30	1.13411	1.14360	1.12537	1.08794	1.06845
		(0.15933)	(0.08730)	(0.00862)	(0.00845)	(0.03400)
	50	1.11854	1.13846	1.12671	1.10310	1.09120
		(0.08987)	(0.05685)	(0.00536)	(0.00542)	(0.02201)
	100	1.10410	1.12469	1.11812	1.10515	1.09873
		(0.03750)	(0.03166)	(0.00295)	(0.00302)	(0.01231)
0.5	10	3.16523	3.27558	3.17417	3.00018	2.92369
		(2.20192)	(1.71485)	(0.01362)	(0.01497)	(0.06456)
	20	2.96238	2.95507	2.91302	2.83547	2.79972
		(0.80297)	(0.54826)	(0.00701)	(0.00699)	(0.02821)
	30	2.88027	2.85135	2.82269	2.76804	2.74204
		(0.52247)	(0.36708)	(0.00565)	(0.00540)	(0.02126)
	50	2.84561	2.77713	2.75869	2.72304	2.70583
		(0.32028)	(0.26281)	(0.00442)	(0.00415)	(0.01613)
	100	2.84762	2.78647	2.77461	2.75111	2.73948
		(0.18718)	(0.17935)	(0.00308)	(0.00288)	(0.01118)
0.9	10	19.63987	20.56314	20.07562	19.24225	18.88479
		(75.60610)	(79.58863)	(0.01760)	(0.02219)	(0.10149)
	20	16.92183	17.11325	16.93606	16.60788	16.45612
		(19.31712)	(17.69353)	(0.00606)	(0.00687)	(0.02948)
	30	16.43359	16.43174	16.30625	16.06710	15.95344
		(11.94935)	(10.75046)	(0.00423)	(0.00462)	(0.01943)
	50	15.89205	15.78346	15.70019	15.53800	15.45908
		(6.30356)	(6.03747)	(0.00273)	(0.00287)	(0.01183)
	100	15.47553	15.35988	15.31726	15.23292	15.19118
		(2.56228)	(2.78299)	(0.00141)	(0.00144)	(0.00583)

EK 5

Çizelge 6.5. Bilinen ve ortak yansıma parametresi durumunda R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerinin ortalamaları ve karşılık gelen hata kareler ortalamaları.

$\beta_0 = 0.2$						
n	m	R	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
5	10	0.750959	0.726100	0.738554	0.001098	0.000889
10	20	0.750149	0.739793	0.742475	0.000389	0.001594
20	30	0.750405	0.745648	0.747657	0.000189	0.000196
50	50	0.750349	0.748985	0.748086	0.000086	0.000438
100	100	0.750849	0.750157	0.750128	0.000041	0.000040
$\beta_0 = 0.4$						
n	m	R	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
5	10	0.583641	0.575410	0.579597	0.000115	0.000102
10	20	0.583141	0.580141	0.579266	0.000040	0.000869
20	30	0.583386	0.581932	0.582822	0.000021	0.000069
50	50	0.583410	0.582908	0.582461	0.000009	0.000074
100	100	0.583547	0.583301	0.583281	0.000005	0.000005
$\beta_0 = 0.6$						
n	m	R	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
5	10	0.580070	0.578905	0.575455	0.000122	0.000113
10	20	0.580045	0.579545	0.577813	0.000053	0.000052
20	30	0.580212	0.579691	0.579028	0.000028	0.000031
50	50	0.580296	0.579833	0.577317	0.000013	0.000385
100	100	0.580042	0.579840	0.579288	0.000007	0.000070
$\beta_0 = 0.8$						
n	m	R	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
5	10	0.761590	0.752751	0.751237	0.000531	0.000488
10	20	0.761828	0.756139	0.756821	0.000215	0.000214
20	30	0.761509	0.756422	0.758754	0.000104	0.000119
50	50	0.761856	0.757960	0.760560	0.000040	0.000055
100	100	0.761968	0.759644	0.761358	0.000020	0.000027

EK 6

Çizelge 6.6. Bilinen fakat eşit olmayan yansıma parametresi durumunda R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerinin ortalamaları ve karşılık gelen hata kareler ortalamaları.

		R=0.700681				R=0.803333			
n	m	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
5	10	0.716581	0.688029	0.008287	0.007501	0.811284	0.775013	0.007193	0.006230
10	20	0.710063	0.695169	0.004667	0.004478	0.806617	0.787296	0.003989	0.003672
20	30	0.704331	0.696445	0.002366	0.002283	0.804206	0.793540	0.002208	0.002089
50	50	0.701871	0.698397	0.000978	0.000964	0.804667	0.799599	0.000944	0.000935
100	100	0.701549	0.699814	0.000486	0.000486	0.803509	0.800973	0.000497	0.000491

		R=0.904304				R=0.950840			
		$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$	$\hat{R}$	$\hat{R}_B$	$HKO(\hat{R})$	$HKO(\hat{R}_B)$
		0.901344	0.863034	0.004377	0.003434	0.944901	0.911898	0.002044	0.001498
		0.902290	0.882086	0.002456	0.002236	0.947264	0.930640	0.001091	0.000992
		0.903092	0.891727	0.001330	0.001265	0.948779	0.939650	0.000593	0.000566
		0.903794	0.893397	0.000636	0.000625	0.949970	0.945628	0.000275	0.000272
		0.904269	0.901509	0.000319	0.000319	0.950396	0.948208	0.000144	0.000144

EK 7

Çizelge 6.7. Durum 1: $(\alpha_1 = 2.8,\ \beta_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 3,\ \beta_2 = 0.55)$ ve $R = 0{,}700681$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

	n	m	$\widehat{R}$	$Yanlılık$	HKO	$Parametrik\ boot-p$	$Parametrik\ Olm.\ boot-p$
En çok Olabilirlik	5	10	0.756368	0.055687	0.005183	(0.6696639 0.9713726)	(0.7076061 0.9775272)
			(0.045627)			0.301709	0.269921
	10	20	0.710059	0.009377	0.012374	(0.554666 0.902622)	(0.5928982 0.9061127)
			(0.110848)			0.347956	0.313215
	20	30	0.704812	0.004131	0.006116	(0.5571193 0.8479344)	(0.5618765 0.8470007)
			(0.078094)			0.290815	0.285124
	50	50	0.702296	0.001615	0.002252	(0.6022551 0.7969551)	(0.6085845 0.7914589)
			(0.047423)			0.194700	0.182874
	100	100	0.701600	0.000919	0.001134	(0.637951 0.7667761)	(0.6350518 0.7663472)
			(0.033668)			0.129374	0.131295
Bayes	n	m	$\widehat{R}_B$	$Yanlılık$	HKO	$HPD-En\ yüksek\ Sonsal\ G.A$	
	5	10	0.711499	0.010818	0.010073	(0.4233329 0.8205357)	
			(0.099780)			0.392028	
	10	20	0.694552	-0.006129	0.006672	(0.6725535 0.9363433)	
			(0.081449)			0.263790	
	20	30	0.694599	-0.006082	0.004529	(0.4787849 0.719844)	
			(0.067019)			0.241059	
	50	50	0.698325	-0.002357	0.002374	(0.5914724 0.7987099)	
			(0.048666)			0.207238	
	100	100	0.699436	-0.001245	0.001162	(0.6052775 0.7481338)	
			(0.034068)			0.142856	

EK 8

Çizelge 6.8. Durum II: ($\alpha_1 = 3.\ \beta_1 = 0.8.\ \alpha_2 = 3.\ \beta_2 = 0.4$) ve $R = 0.803333$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri. tahminlerin standart sapmaları. yanlılık değerleri. hata kareler ortalamaları (HKO). ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

	n	m	$\widehat{R}$	$Yanlılık$	HKO	$Parametrik\ boot-p$	$Parametrik\ Olm.\ boot-p$
En çok Olabilirlik	5	10	0.824311	0.020977	0.017590	(0.710229 0.986200)	(0.730885 0.986602)
			(0.130960)			0.275971	0.255717
	10	20	0.814443	0.011109	0.007405	(0.657043 0.949490)	(0.652726 0.943992)
			(0.085333)			0.292447	0.291266
	20	30	0.808778	0.005444	0.003857	(0.685188 0.916150)	(0.685696 0.916380)
			(0.061864)			0.230962	0.230684
	50	50	0.806634	0.003301	0.001598	(0.721127 0.880762)	(0.723522 0.883122)
			(0.039833)			0.159635	0.159601
	100	100	0.804675	0.001341	0.000788	(0.752081 0.857966)	(0.748054 0.860273)
			(0.028032)			0.105885	0.112220
Bayes	n	m	$\widehat{R}_B$	$Yanlılık$	HKO	$HPD-En\ yüksek\ Sonsal\ G.A$	
	5	10	0.786975	-0.016359	0.009668	(0.469679 0.796933)	
			(0.096954)			0.327254	
	10	20	0.783900	-0.019433	0.006706	(0.523550 0.830629)	
			(0.079554)			0.307078	
	20	30	0.793826	-0.009508	0.003777	(0.714600 0.935736)	
			(0.060720)			0.221136	
	50	50	0.799684	-0.003649	0.001599	(0.771406 0.903393)	
			(0.039821)			0.131987	
	100	100	0.802163	-0.001170	0.000776	(0.793720 0.876452)	
			(0.027831)			0.082732	

EK 9

Çizelge 6.9. Durum III: $(\alpha_1 = 2.5,\ \beta_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 0.15)$ ve $R = 0.904304$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

	n	m	$\widehat{R}$	$Yanlılık$	HKO	$Parametrik\ boot-p$	$Parametrik\ Olm.\ boot-p$
En çok Olabilirlik	5	10	0,915024	0,010720	0,006384	(0,769303 0,997218)	(0,769313 0,997169)
			(0,079177)			0,227915	0,227856
	10	20	0,912199	0,007895	0,002904	(0,788818 0,985465)	(0,782693 0,987262)
			(0,053310)			0,196647	0,204569
	20	30	0,908501	0,004197	0,001711	(0,826379 0,975327)	(0,826222 0,971233)
			(0,041152)			0,148948	0,145011
	50	50	0,906422	0,002118	0,000783	(0,853672 0,954649)	(0,851739 0,953101)
			(0,027903)			0,100976	0,101362
	100	100	0,904712	0,000407	0,000372	(0,863573 0,941099)	(0,866871 0,941429)
			(0,019278)			0,077526	0,074557
	n	m	$\widehat{R}_B$	$Yanlılık$	HKO	$HPD-En\ yüksek\ Sonsal\ G.A$	
Bayes	5	10	0,876844	-0,027460	0,006360	(0,803259 0,997324)	
			(0,074874)			0,194066	
	10	20	0,883243	-0,021061	0,003970	(0,594633 0,914114)	
			(0,059382)			0,319482	
	20	30	0,891191	-0,013113	0,002244	(0,798740 0,965388)	
			(0,045519)			0,166648	
	50	50	0,900414	-0,003890	0,000888	(0,847770 0,961188)	
			(0,029543)			0,113418	
	100	100	0,902296	-0,002008	0,000410	(0,843493 0,928458)	
			(0,020152)			0,008497	

EK 10

Çizelge 6.10. Durum IV: $(\alpha_1 = 4,\ \beta_1 = 0.85,\ \alpha_2 = 3.8,\ \beta_2 = 0.2)$ ve $R = 0.950840$ için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin standart sapmaları, yanlılık değerleri, hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

	n	m	$\widehat{R}$	$Yanlılık$	HKO	$Parametrik\ boot-p$	$Parametrik\ Olm.\ boot-p$
En çok Olabilirlik	5	10	0,958339	0,007499	0,002286	(0,853933 0,998830)	(0,830626 0,998950)
			(0,047215)			0,144898	0,168324
	10	20	0,953400	0,002560	0,001111	(0,879580 0,993790)	(0,869420 0,994402)
			(0,033236)			0,114210	0,124982
	20	30	0,952632	0,001792	0,000622	(0,898683 0,988516)	(0,895443 0,988913)
			(0,024866)			0,089834	0,093470
	50	50	0,951146	0,000306	0,000299	(0,913771 0,980328)	(0,915263 0,979496)
			(0,017293)			0,066557	0,064233
	100	100	0,951201	0,000361	0,000154	(0,924454 0,972168)	(0,925439 0,972741)
			(0,012418)			0,047714	0,047302
	n	m	$\widehat{R}_B$	$Yanlılık$	HKO	$HPD-En\ yüksek\ Sonsal\ G.A$	
Bayes	5	10	0,918068	-0,032772	0,004869	(0,676353 0,992781)	
			(0,061602)			0,316428	
	10	20	0,933831	-0,017009	0,001929	(0,915603 0,997904)	
			(0,040493)			0,082301	
	20	30	0,943287	-0,007553	0,000838	(0,920674 0,989427)	
			(0,027951)			0,068753	
	50	50	0,947343	-0,003497	0,000344	(0,928592 0,982825)	
			(0,018204)			0,054233	
	100	100	0,948875	-0,001965	0,000168	(0,944965 0,978610)	
			(0,012826)			0,033645	

Çizelge 6. 11. Durum I baz alınarak elde edilen eşit örneklem boyutları için tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları.

$n = m$	5	10	20	40	80	160
$HKO(\widehat{R})$	0,026018	0,015351	0,006480	0,003150	0,001363	0,000689
$HKO(\widehat{R}_B)$	0,011188	0,007571	0,004659	0,002719	0,001511	0,000749

EK 11

Çizelge 6.12. Farklı (s,k) ve (n,m) değerlerine göre $(\alpha_1 = 3,\ \beta_1 = 0.7,\ \alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 0.4)$ olmak üzere gerçek $R_{1,3} = 0.86554$ ve $R_{2,4} = 0.79382$ değerleri için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

(s,k)	(n,m)	$\widehat{R}_{s,k}$	$\widehat{R}^{B}_{s,k}$	$boot-p$		Bayes HPD
				Parametrik	Parametrik Olm.	
(1.3)	5,10	0.88276	0.84991	(0.73731, 0.98215)	(0.75922, 0.98205)	(0.64839, 0.91227)
		(0.00596)	(0.00435)	0.24484	0.22283	0.26388
	10,20	0.87119	0.85409	(0.76186, 0.96321)	(0.77747, 0.95552)	(0.59623, 0.85864)
		(0.00364)	(0.00265)	0.20135	0.17805	0.26241
	20,30	0.86617	0.85560	(0.78236, 0.95026)	(0.79625, 0.94598)	(0.76519, 0.94165)
		(0.00243)	(0.00180)	0.16789	0.14973	0.17646
	50,50	0.86569	0.86002	(0.79503, 0.92791)	(0.80308, 0.92630)	(0.77843, 0.93670)
		(0.00140)	(0.00123)	0.13288	0.12322	0.15827
	100,100	0.86514	0.86242	(0.81218, 0.90865)	(0.81468, 0.90922)	(0.83675, 0.91355)
		(0.00060)	(0.00063)	0.09647	0.09453	0.07680
(2.4)	5,10	0.83107	0.78660	(0.65951, 0.97368)	(0.69607, 0.96853)	(0.62582, 0.92071)
		(0.01108)	(0.00589)	0.31417	0.27245	0.29489
	10,20	0.80780	0.78367	(0.68322, 0.93673)	(0.69820, 0.92772)	(0.55716, 0.80015)
		(0.00659)	(0.00431)	0.25351	0.22951	0.24300
	20,30	0.79998	0.78355	(0.68584, 0.91008)	(0.70514, 0.90116)	(0.63123, 0.90189)
		(0.00422)	(0.00327)	0.22425	0.19602	0.27066
	50,50	0.79358	0.78831	(0.70723, 0.87702)	(0.71317, 0.87903)	(0.71503, 0.90862)
		(0.00230)	(0.00207)	0.16978	0.16586	0.19359
	100,100	0.79318	0.78979	(0.72836, 0.85555)	(0.72678, 0.85073)	(0.74381, 0.85931)
		(0.00114)	(0.00107)	0.12719	0.12395	0.11550

EK 12

Çizelge 6.13. Farklı (s,k) ve (n,m) değerlerine göre $(\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 0.85,\ \alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 0.15)$ olmak üzere gerçek $R_{1,3} = 0.93395$ ve $R_{2,4} = 0.87648$ değerleri için en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri, tahminlerin hata kareler ortalamaları (HKO), ve %95' lik yaklaşık güven aralıkları (bootstrap ve HPD).

(s,k)	(n,m)	$\widehat{R}_{s,k}$	$\widehat{R}^{B}_{s,k}$	$boot-p$		Bayes HPD
				Parametrik	**Parametrik Olm.**	
(1.3)	5,10	0.92986	0.89105	(0.76638, 0.99632)	(0.78301, 0.99363)	(0.75203, 0,99061)
		(0.00398)	(0.00547)	0.22994	0.21062	0,23858
	10,20	0.93095	0.90090	(0.82005, 0.98878)	(0.82981, 0.98664)	(0.78681, 0,97304)
		(0.00232)	(0.00327)	0.16873	0.15683	0,18623
	20,30	0.93558	0.91318	(0.85179, 0.98083)	(0.85657, 0.98009)	(0.85443, 0,97715)
		(0.00117)	(0.00178)	0.12904	0.15683	0,12272
	50,50	0.93432	0.92415	(0.87863, 0.97239)	(0.88267, 0.97061)	(0.90800, 0,97993)
		(0.00059)	(0.00081)	0.09376	0.08794	0,07193
	100,100	0.93349	0.93029	(0.89876, 0.96315)	(0.89759, 0.96286)	(0.91710, 0,97351)
		(0.00030)	(0.00034)	0.06439	0.06527	0,05641
(2.4)	5,10	0.88683	0.82781	(0.68131, 0.99217)	(0.69390, 0.99057)	(0.61256, 0,94535)
		(0.00902)	(0.00940)	0.31086	0.29667	0,33279
	10,20	0.88092	0.83665	(0.73575, 0.97812)	(0.73559, 0.97525)	(0.73684, 0,96721)
		(0.00516)	(0.00630)	0.24238	0.23966	0,23037
	20,30	0.87905	0.84716	(0.76436, 0.95896)	(0.76737, 0.96032)	(0.68395, 0,91668)
		(0.00308)	(0.00412)	0.19461	0.19295	0,23272
	50,50	0.87784	0.86419	(0.79807, 0.94214)	(0.80250, 0.94407)	(0.78553, 0,93617)
		(0.00150)	(0.00177)	0.14407	0.14157	0,15064
	100,100	0.87750	0.87130	(0.82512, 0.92485)	(0.82520, 0.92487)	(0.80155, 0,89726)
		(0.00068)	(0.00080)	0.09973	0.09967	0,09572