ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Leyla BUGAY

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI ve RANKLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2015

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI ve RANKLARI

Leyla BUGAY

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez …/…/…. tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....	.....	.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Prof. Dr. Gonca AYIK	Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

.....	.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL	Yrd. Doç. Dr. Osman KELEKCİ
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma TÜBİTAK-BİDEB Tarafından Desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI ve RANKLARI

Leyla BUGAY

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2015, Sayfa: 89
Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
: Yrd. Doç. Dr. Osman KELEKCİ

P_n , T_n , PO_n , O_n ve $SPO_n = PO_n \setminus O_n$ sırasıyla $X_n = \{1,2,...,n\}$ kümesi üzerindeki kısmi dönüşümler, (tam) dönüşümler, kısmi sıra-koruyan dönüşümler, sıra-koruyan dönüşümler ve kesin kısmi sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu olsun. Bu çalışmada, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K(n,r) &= \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ PK(n,r) &= \{\alpha \in P_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ O(n,r) &= \{\alpha \in O_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ PO(n,r) &= \{\alpha \in PO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \text{ ve} \\ SPO(n,r) &= \{\alpha \in SPO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \end{aligned}$$

alt yarıgruplarını ayrı ayrı inceleyip her birinin herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları araştırdık. Bulduğumuz sonuçlar doğrultusunda da bu alt yarıgrupların tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirledik.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, doğuray kümesi, rank

ABSTRACT

PhD THESIS

GENERATORS and RANKS of SOME TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Leyla BUGAY

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2015, Pages: 89
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL
: Asst. Prof. Dr. Osman KELEKCİ

Let P_n, T_n, PO_n, O_n and $SPO_n = PO_n \setminus O_n$ be the partial transformations, the (full) transformations, partial order-preserving transformations, order-preserving transformations and strictly partial order-preserving transformations semigroups on the set $X_n = \{1, 2, ..., n\}$, respectively. In this study we investigate the subsemigroups

$$\begin{aligned} K(n,r) &= \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ PK(n,r) &= \{\alpha \in P_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ O(n,r) &= \{\alpha \in O_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\ PO(n,r) &= \{\alpha \in PO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \text{ and} \\ SPO(n,r) &= \{\alpha \in SPO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \end{aligned}$$

for $2 \leq r \leq n-1$ one by one and searched the necessary and sufficient conditions for any subset to be a (minimal) generating set of each subsemigroups. By the results, which we found, we stated the structure of all minimal generating sets of these subsemigroups.

Key Words: Transformation semigroups, generating set, rank

TEŞEKKÜR

Ç. Ü. Matematik bölümünde (lisans öğrencisi olarak) öğrenime başladığım ilk günden bu yana bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, bilgisi ve kişiliği ile örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Gonca AYIK, Sayın Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Osman KELEKCİ'ye destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, sonsuz sevgisi ve güveniyle beni bu günlere getiren sevgili babam Esat TANGÜLER ve annem Sabiha TANGÜLER'e, sevgili eşim Mehmet Can BUGAY'a, Ç. Ü. Matematik bölümünün saygıdeğer öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma yardım, destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak doktora yaptığım süre içerisinde aldığım burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ŞEKİLLER DİZİNİ V
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
2.1. Yarıgruplar 3
2.2. Doğuray Kümeleri 8
2.3. Bağıntı ve Denklik 10
2.4. Green Denklik Bağıntıları 14
2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları 19
2.6. P_n ve T_n nin Bazı Alt Yarıgrupları 28
2.7. Yönlü Grafikler 38
3. $K(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ 43
4. $PK(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ 55
5. $O(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ 65
6. $PO(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ 73
7. $SPO(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ 79
KAYNAKLAR 87
ÖZGEÇMİŞ 89

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı.....16
Şekil 2.2. Bir D-Green denklik sınıfı örneği 18
Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları 26
Şekil 2.4. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı.....28
Şekil 2.5. Bir yönlü grafik örneği.....40

1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi cebirin en temel dallarından biridir. “Yarıgrup” terimi ilk olarak 1904’te Monsieur l’Abbé J. A. Séguier’in “Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits” adlı kitabında yer almış, 1926 ve 1928 yıllarında A. K. Sushkevich’in bir sonlu yarıgrubun minimal idealinin yapısını belirlemesiyle gelişim sürecine başlamıştır. Bu dönemden itibaren çalışmalar hızla artmış ve nihayet 1950’li yılların sonunda yarıgrup teorisinin kendisi modern cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir. Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra, grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ve bilgisayar bilimleri ile olan bağlantısı da yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Bu yöntemlerden biri (varsa sonlu) doğuray kümesi bulma yöntemidir ve bir yarıgrubun (varsa sonlu) doğuray kümesini bulma problemi yarıgrup teorisinde çok uzun zamandır çalışılan bir konudur.

Sonlu yarıgrupların sonlu doğuraylı olduğu açıktır. Ayrıca, Cayley teoreminin bir benzeri olarak, her sonlu yarıgrup sonlu bir küme üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubunun bir alt yarıgrubuna izomorf olup T_n nin ve alt yarıgruplarının sonlu doğuray kümelerini bulma problemi yarıgrup teorisinde başlı başına bir araştırma konusu olmuştur. Ayrıca kısmi dönüşümler yarıgrubu P_n ve alt yarıgruplarının da sonlu doğuray kümelerini bulma problemi önemli bir araştırma konusudur.

Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu, (tam) dönüşümler yarıgrubu ve permütasyonlar yarıgrubu (simetrik grup) sırasıyla P_X, T_X ve S_X ile gösterilir. Eğer $X = X_n = \{1,2,\dots,n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise P_X, T_X ve S_X yerine kısaca P_n, T_n ve S_n yazılır. Ayrıca T_n nin bir alt yarıgrubu olan tekil dönüşümler yarıgrubu da $Sing_n = T_n \setminus S_n$ ile gösterilir. Ayık, Ayık, Bugay ve Kelekci (2013) $Sing_n$ tekil dönüşümler yarıgrubunu incelemiş ve noksanlığı 1 olan herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları belirlemişlerdir. Biz de bu çalışmamızda

$$
\begin{aligned}
O_n &= \{\alpha \in Sing_n : x \leq y \Longrightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in X_n)\}, \\
PO_n &= O_n \cup \{\alpha \in P_n \backslash T_n : x \leq y \Longrightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in \mathrm{dom}(\alpha))\} \text{ ve} \\
SPO_n &= PO_n \backslash O_n
\end{aligned}
$$

sırasıyla $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ kümesi üzerindeki sıra-koruyan dönüşümler, kısmi sıra-koruyan dönüşümler ve kesin kısmi sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu olmak üzere $2 \leq r \leq n-1$ için

$$
\begin{aligned}
K(n,r) &= \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\
PK(n,r) &= \{\alpha \in P_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\
O(n,r) &= \{\alpha \in O_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}, \\
PO(n,r) &= \{\alpha \in PO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \text{ ve} \\
SPO(n,r) &= \{\alpha \in SPO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}
\end{aligned}
$$

alt yarıgruplarını ayrı ayrı inceleyip her birinin herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları araştırdık. Bulduğumuz sonuçlar doğrultusunda da bu alt yarıgrupların tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirledik.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. S boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\mathbf{o} : S \times S \to S$$

şeklinde tanımlı bir "$\mathbf{o}$" fonksiyonuna S üzerinde bir (kapalı) **ikili işlem** denir. Her $x, y \in S$ için x ve y elemanlarına uygulanan bu ikili işlem $x \mathbf{o} y$ şeklinde gösterilir. Eğer "$\mathbf{o}$" S üzerinde bir ikili işlem ise $(S, \mathbf{o})$ ikilisine bir **grupoid** denir.

$(S, \mathbf{o})$ bir grupoid olsun. Eğer "$\mathbf{o}$" ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$x \mathbf{o} (y \mathbf{o} z) = (x \mathbf{o} y) \mathbf{o} z$$

oluyorsa $(S, \mathbf{o})$ grupoidine bir **yarıgrup** denir.

Eğer ikili işlemin ne olduğu içerikten belli ise kolaylık sağlamak için $(S, \mathbf{o})$ yerine S ve $x \mathbf{o} y$ yerine de xy yazacağız.

Tanım 2.1.2. Bir S yarıgrubu, üzerindeki ikili işleme göre değişme özelliğine sahip, yani $\forall x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

ise bu S yarıgrubuna bir **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = e$ oluyor ise e ye S nin bir **sol sıfır elemanı** ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = e$ oluyor ise e ye S nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise e ye S nin bir **sıfır elemanı** denir.

Bir yarıgrubun birden fazla sağ sıfır ve/veya sol sıfır elemanı olabilir. Fakat bir yarıgrubun sıfır elemanı varsa (aşağıdaki önermeden dolayı) tektir ve genellikle "0" ile gösterilir.

Önerme 2.1.4. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= 00' && (0, \text{ sıfır eleman olduğundan}) \\ &= 0' && (0', \text{ sıfır eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

olur. ■

Tanım 2.1.5. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir **sol birim elemanı** ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa $e \in S$ ye S nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin bir **birim elemanı** denir.

Bir yarıgrubun birden fazla sağ birim ve/veya sol birim elemanı olabilir. Fakat bir yarıgrubun birim elemanı varsa (aşağıdaki önermeden dolayı) tektir ve genellikle 1_S veya kısaca 1 ile gösterilir.

Önerme 2.1.6. Bir S yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir.

İspat: 1 ve $1'$, S nin iki birim elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 1 &= 11' && (1', \text{ birim eleman olduğundan}) \\ &= 1' && (1, \text{ birim eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

olur. ■

Tanım 2.1.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir. S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin, üzerinde tanımlanan

$$\forall x, y \in S^1 \text{ için } xy = \begin{cases} xy, & x \neq 1,\ y \neq 1 \text{ ise} \\ x, & y = 1 \text{ ise} \\ y, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ikili işlemi ile bir monoid olduğu açıktır ve bu monoide S **ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = ee = e$$

oluyor ise e ye S nin bir **idempotenti** denir. S yarıgrubundaki idempotentlerin kümesi $E(S)$ ve daha genel olarak S nin boş olmayan bir A alt kümesindeki idempotentlerin kümesi $E(A)$ ile gösterilir.

Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları birer idempotent, yani $E(S) = S$ ise S ye bir **band** denir. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise S ye bir **yarılatis** denir.

Örnek 2.1.9. Tam sayılar kümesi ¢, rasyonel sayılar kümesi ¤, reel sayılar kümesi ¡ ve karmaşık sayılar kümesi £, üzerlerinde tanımlanan bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birer monoiddir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, bilinen toplama işlemi ile bir yarıgrup ve bilinen çarpma işlemi ile birim elemanı 1 olan bir monoiddir.

$\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesi bilinen toplama işlemi ile birim elemanı 0 olan bir monoiddir.

Tanım 2.1.10. S bir yarıgrup olsun. Eğer

$$\forall x \in S \text{ için } Sx = S \text{ ve } xS = S$$

oluyorsa S ye bir **grup** denir. Bu tanıma denk olan başka bir tanım ise şu şekilde ifade edilmektedir. S bir yarıgrup olmak üzere

$$\left.\begin{array}{ll} (\exists e \in S), (\forall s \in S) & es = s \\ (\forall s \in S), (\exists s^{-1} \in S) & s^{-1}s = e \end{array}\right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir.

Aslında bu iki tanım da çok kullanılan tanımlar değildir. Genellikle bu tanımlara denk olan ve daha çok grup teorisinde kullanılan şu tanım kullanılmaktadır. S bir yarıgrup olmak üzere

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{bir } e \in S), (\forall s \in S) & es = se = s \\ (\forall s \in S), (\text{bir } s^{-1} \in S) & s^{-1}s = ss^{-1} = e \end{array}\right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı** ve $s^{-1} \in S$ ye de s elemanının **tersi** denir.

Sadece birim elemandan oluşan $\{e\}$ kümesi bir grup olup bu gruba **aşikâr grup** denir.

Tanım 2.1.11. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T, S deki ikili işleme göre kapalı, yani $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$ $(T^2 \subseteq T)$ oluyor ise T ye S nin bir **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Örneğin; $S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ olur. S yarıgrubunda bir sıfır eleman 0 var ise $\{0\} \leq S$ ve S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ olur. Bu alt yarıgruplara **aşikâr alt yarıgruplar** ve bunların dışındaki alt yarıgruplara da **öz alt yarıgruplar** denir.

S bir yarıgrup ve T, S nin bir alt yarıgrubu olsun. Eğer T, S deki ikili işlemle bir monoid oluyorsa T ye S nin bir **alt monoidi** ve eğer bir grup oluyorsa T ye S nin bir **alt grubu** denir. Benzer şekilde bir monoidin alt monoidi, bir monoidin alt grubu ve bir grubun alt grubu kavramları tanımlanabilir.

Tanım 2.1.12. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $sa \in I$, yani $SI \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir **sol ideali** ve eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$, yani $IS \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir **sağ ideali** denir. Eğer I, S nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya S nin bir **ideali** denir ve $I \leq S$ ile gösterilir.

Örneğin; $SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ olur. S de bir sıfır eleman 0 varsa $\{0\}S = \{0\} \subseteq \{0\}$ ve $S\{0\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ olup $\{0\} \leq S$ olur. Bu ideallere **aşikâr idealler** denir. S yarıgrubunun $I \neq S$ ve $I \neq \{0\}$ olacak şekilde bir ideali varsa bu ideale de **öz ideal** denir.

Tanımları gereği her idealin bir alt yarıgrup olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 2.1.13. S ve T iki yarıgrup ve φ de S den T ye $(\varphi: S \to T)$ bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$$

oluyor ise φ ye bir **yarıgrup homomorfizmi** (kısaca homomorfizm) denir.

Tanım 2.1.14. S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \to T$ bir homomorfizm olsun.

i) Eğer φ bire-bir ise φ ye bir **monomorfizm** denir.

ii) Eğer φ örten ise φ ye bir **epimorfizm** denir.

iii) Eğer φ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise φ ye bir **izomorfizm** denir. Başka bir ifade ile, $1_S: S \to S$ ve $1_T: T \to T$ birim dönüşümler olmak

üzere eğer $\varphi\varphi^{-1} = 1_S$ ve $\varphi^{-1}\varphi = 1_T$ olacak şekilde bir $\varphi^{-1}: T \to S$ homomorfizmi varsa φ ye bir **izomorfizm** ve φ^{-1} e de φ nin **tersi** denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde yazılır.

iv) Eğer φ, S den S ye bir homomorfizm ise φ ye bir **endomorfizm** denir.

v) Eğer φ, S den S ye bir izomorfizm ise φ ye bir **otomorfizm** denir.

2.2. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.2.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X **tarafından doğurulan alt yarıgrubu** denir ve ${}_S\langle X\rangle$ ile gösterilir. Başka bir ifade ile,

$$ {}_S\langle X\rangle = \cap \{T: X \subseteq T,\ T \leq S\} $$

olur. Dikkat edilirse ${}_S\langle X\rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur. Ayrıca, ${}_S\langle X\rangle$ alt yarıgrubunun X kümesi üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesi, yani

$$ {}_S\langle X\rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in Z^+;\ x_1, x_2, \dots, x_n \in X\} $$

olduğu da kolayca gösterilebilir. Tanımdan da kolayca görülebileceği gibi, S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq S$ ise $\langle X\rangle \subseteq \langle Y\rangle$ olur.

Benzer şekilde X **tarafından doğurulan alt monoid** ve X **tarafından doğurulan alt grup** da tanımlanabilir. Bunlar da sırasıyla

$$ {}_M\langle X\rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in Z^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\} \cup \{1\} \text{ ve} $$

$$ {}_G\langle X\rangle = \left\{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} : n \in Z^+; x_i \in X, \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\ (i = 1,2,\dots,n)\right\} $$

şeklindedir. Ayrıca, $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ olarak tanımlanır ise

$$_G\langle X\rangle = {}_S\langle X \cup X^{-1}\rangle$$

olduğu kolayca görülür. Eğer X kümesinin bir yarıgrup, monoid veya grup doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa X tarafından doğurulan alt yarıgrup, alt monoid veya alt grup kısaca $\langle X\rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X\rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa bu X kümesine S nin bir **(yarıgrup) doğuray kümesi**, X in elemanlarına $\boldsymbol{S}$ **nin (yarıgrup) doğurayları** ve S ye de $\boldsymbol{X}$ **tarafından doğurulan yarıgrup** denir.

Eğer $S = \langle X\rangle$ olacak şekilde sonlu bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır. Ayrıca, $S = \langle\{x\}\rangle$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir ve $S = \langle x\rangle$ şeklinde de yazılabilir. Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

Eğer $S = {}_S\langle X\rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq E(S)$ kümesi varsa bu X kümesine S nin bir **idempotent doğuray kümesi**, X in elemanlarına $\boldsymbol{S}$ **nin idempotent doğurayları** ve S ye de **idempotent doğuraylı yarıgrup** denir. Eğer X sonlu ise S ye **sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup** denir.

Tanım 2.2.3. S, sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X| : S = {}_S\langle X\rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin **(yarıgrup) rankı** denir ve $\operatorname{rank}_S(\boldsymbol{S})$ ile gösterilir. Ayrıca, S nin $\operatorname{rank}_S(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine de **minimal doğuray kümesi** denir. Benzer şekilde **monoid rankı** $\operatorname{rank}_M(\boldsymbol{S})$ ve **grup rankı** $\operatorname{rank}_G(\boldsymbol{S})$ de tanımlanabilir.

S, sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X|: S = {}_S\langle X\rangle,\ X \subseteq E(S) \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin **(yarıgrup) idempotent rankı** denir ve $\text{idrank}_S(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. S bir yarıgup ve $a \in S$ olsun. $\langle a\rangle$ monojenik yarıgrubunun eleman sayısına (kardinalitesine) $\boldsymbol{a}$ **elemanının derecesi** denir. Bir yarıgrubun her elemanı sonlu dereceli ise bu yarıgruba **periyodik** yarıgrup denir. Tanımı gereği, her sonlu yarıgrubun aynı zamanda periyodik olduğu kolayca görülmektedir.

2.3. Bağıntı ve Denklik

Tanım 2.3.1. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y nin **kartezyen çarpımı** denir.

Tanım 2.3.2. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ in her bir ρ alt kümesine $\boldsymbol{X}$ **ten** $\boldsymbol{Y}$ **ye bir bağıntı** denir. $X \times X$ in her bir ρ alt kümesine ise $\boldsymbol{X}$ **üzerinde bir bağıntı denir** ve X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $B_X = \{\rho: \rho \subseteq X \times X\}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\rho \in B_X$ olmak üzere $(a, b) \in \rho$ elemanı kısaca $a\rho b$ şeklinde de gösterilebilir.

$\emptyset$, $\Delta_X = 1_X = \{(x, x): x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi de X üzerinde birer bağıntı olup bu bağıntılara sırasıyla **boş bağıntı**, **birim bağıntı** ve **evrensel bağıntı** denir. Ayrıca, $\rho \in B_X$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: (y, x) \in \rho\}$$

bağıntısına ρ nun **ters bağıntısı (tersi)** ve

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\rho) &= \{x \in X: \exists y \in X \text{ için } (x,y) \in \rho\}, \\ x\rho &= \{y \in X: (x,y) \in \rho\}, \\ \mathrm{im}(\rho) = X\rho &= \{y \in X: \exists x \in X \text{ için } (x,y) \in \rho\} \text{ ve} \\ y\rho^{-1} &= \{x \in X: (x,y) \in \rho\} \end{aligned}$$

kümelerine de sırasıyla ρ bağıntısının **tanım kümesi**, $x \in X$ in $\boldsymbol{\rho}$ **altındaki görüntü kümesi**, ρ bağıntısının **görüntü kümesi** ve $y \in X$ in $\boldsymbol{\rho}$ **altındaki ters-görüntü kümesi** denir. Tanımlar dikkatle incelenirse $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

i) $\alpha \subseteq \beta \Longrightarrow \mathrm{dom}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$ ve $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$,
ii) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ ve
iii) $\alpha \subseteq \beta \Longrightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.3.3. X boş olmayan bir küme olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \mathbf{o} \beta = \{(x,y) \in X \times X: \exists z \in X \text{ için } (x,z) \in \alpha \text{ ve } (z,y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem (bileşke işlemi) ile B_X bir yarıgruptur (hatta birim elemanı Δ_X olan bir monoiddir) ve bu yarıgruba **bağıntılar yarıgrubu** denir. Ayrıca $\forall \alpha, \beta, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in B_X$ için

i) $\alpha \subseteq \beta \Longrightarrow \alpha \mathbf{o} \delta \subseteq \beta \mathbf{o} \delta$ ve $\delta \mathbf{o} \alpha \subseteq \delta \mathbf{o} \beta$ ve
ii) $(\alpha_1 \mathbf{o} \alpha_2 \mathbf{o} \cdots \mathbf{o} \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \mathbf{o} \cdots \mathbf{o} \alpha_2^{-1} \mathbf{o} \alpha_1^{-1}$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.3.4. X boş olmayan bir küme ve $\rho \in B_X$ olsun.

i) $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımalı bağıntı** denir.
ii) $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya **simetrik bağıntı** denir.

iii) $\rho \circ \rho = \rho$ ise ρ ya **geçişmeli bağıntı** denir.

iv) $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_X$ ise ρ ya **ters-simetrik bağıntı** denir.

Eğer ρ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. Ayrıca $\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi olmak üzere $\bigcap_{i \in I} \rho_i$ kümesinin de X üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir.

ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine ***x* in denklik sınıfı** ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine de X in ρ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

Önerme 2.3.5. ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $x\rho, y\rho \in X/\rho$ için ya $x\rho \cap y\rho = \emptyset$ ya da $x\rho = y\rho$ olur.

İspat: Karakaş (2008), Ders 1, Teorem 1'e bakınız.■

Tanım 2.3.6. X boş olmayan bir küme ve R, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. $R \subseteq X \times X$ olup X üzerinde R yi içeren en az bir denklik bağıntısı var olduğundan X üzerinde R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. X üzerinde R yi içeren denklik bağıntılarının arakesiti de R yi içeren bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına R **tarafından doğrulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir, yani

$$R^e = \cap \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

olur. Ayrıca

i) $R = \emptyset \Longrightarrow R^e = \Delta_X$,
ii) R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
iii) $R^e = (R^{-1})^e$

olduğu da kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.3.7. X boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde yansımalı bir bağıntı $(\Delta_X \subseteq R)$ olsun. O halde

$$R = \Delta_X \mathbf{o}\ R \subseteq R \mathbf{o} R \quad \Longrightarrow R \subseteq R^2;$$
$$R^2 = \Delta_X \mathbf{o}\ R^2 \subseteq R \mathbf{o}\ R^2 \Longrightarrow R^2 \subseteq R^3;$$

olup bu şekilde devam edilirse

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots \subseteq R^n \subseteq \cdots$$

olur. Bu durumda X üzerinde R^∞ bağıntısı

$$R^\infty = \bigcup_{n \in Z^+} R^n$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.8. X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki herhangi bir R yansımalı bağıntısı için tanımlanan R^∞, X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4.8'e bakınız.■

Önerme 2.3.9. X boş olmayan bir küme ve R, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.9'a bakınız.■

2.4. Green Denklik Bağıntıları

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri sırasıyla

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bunların yardımı ile S üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} L &= \{(a,b) \in S \times S : S^1a = S^1b\}, \\ R &= \{(a,b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\} \text{ ve} \\ J &= \{(a,b) \in S \times S : S^1aS^1 = S^1bS^1\} \end{aligned}$$

bağıntılarına sırasıyla **sol-Green bağıntısı (L-Green)**, **sağ-Green bağıntısı (R-Green)** ve **Green bağıntısı (J-Green)** denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.4.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

i) $a \, L \, b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

ii) $a \, R \, b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

iii) $a \, J \, b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1'e bakınız. ■

Önerme 2.4.3. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki sol-Green bağıntısı L ve sağ-Green bağıntısı R bileşke işlemine göre değişmelidir, yani $L \circ R = R \circ L$ şeklindedir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

Tanım 2.4.4. S bir yarıgrup olsun. L ve R sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki L–Green ve R–Green denklik bağıntıları olmak üzere

$$H=L \cap R$$

olarak tanımlanan denklik bağıntısına H-**Green bağıntısı** ve S yarıgrubu üzerinde L ve R bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da D-**Green bağıntısı** denir.
O halde

$$D = (L \cup R)^e$$

olur. L ve R bağıntıları simetrik ve yansımalı iki bağıntı olduğundan $(L \cup R)=(L \cup R)^{-1}$ ve $\Delta_S \subseteq L \cup R$ olup $(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup \Delta_S = L \cup R$ olur. Ayrıca $L \subseteq L \circ R$, $R \subseteq L \circ L$ ve $L \circ R = R \circ L$ olduğundan

$$\begin{aligned}(L \cup R) \circ (L \cup R) &= (L \circ L) \cup (L \circ R) \cup (R \circ L) \cup (R \circ R) \\ &= L \cup (L \circ R) \cup (L \circ R) \cup R \\ &= L \circ R\end{aligned}$$

ve

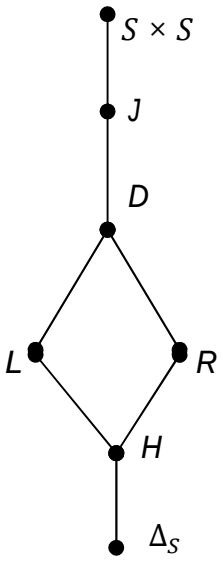
$$(L \cup R) \cup (L \circ R) = L \cup [R \cup (L \circ R)] = L \circ R$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\forall n \geq 2$ için $(L \cup R)^n = L \circ R$ olur. O halde

$$\begin{aligned} D &= (L \cup R)^e \\ &= [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^\infty \\ &= \bigcup_{n \in Z^+} [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cup R)^n = (L \cup R) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (L \cup R)^n \\ &= (L \cup R) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} L \circ R \right) = (L \cup R) \cup L \circ R \\ &= L \circ R \end{aligned}$$

olur.

Bir S yarıgrubu üzerindeki L, R, J, H ve D-Green denklik bağıntıları için $\Delta_X \subseteq H \subseteq L,\ R \subseteq D \subseteq J \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama **Hasse diyagramı** denir.



Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Önerme 2.4.5. G bir grup ise $L = R = J = H = D = G \times G$ olur.

İspat: $\forall a, b \in G$ için

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$
$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

olup $x = ab^{-1} \in G$ ve $y = ba^{-1} \in G$ alınırsa $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in G$ bulunmuş olur. O halde $\forall a, b \in G$ için aLb olup $L = G \times G$ olur. Benzer şekilde $R = G \times G$ olup $L = R = J = H = D = G \times G$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.4.6. S değişmeli bir yarıgrup ise $L = R = H = D$ olur.

İspat: aLb olsun. O halde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli olduğundan aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ay$ olup aRb olur. Böylece $L \subseteq R$ olduğu görülür. Benzer şekilde $R \subseteq L$ olup $L = R = H = D$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.4.7. S bir periyodik yarıgrup ise $D = J$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.4'e bakınız. ■

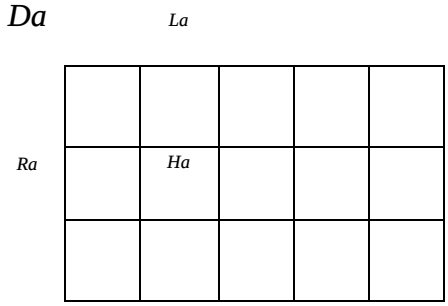
Tanım 2.4.8. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki J, D, L, R ve H-Green denklik bağıntılarına göre elde edilen denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla S/J, S/D, S/L, S/R, S/H ve $a \in S$ için a elemanını içeren J, D, L, R ve H-Green denklik sınıfları sırasıyla J_a, D_a, L_a, R_a ve H_a ile gösterilir. Ayrıca

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a, \quad H_a \subseteq R_a \subseteq D_a \text{ ve } H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve D-Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$aDb \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. O halde bir D-Green denklik sınıfı D, ayrık L-Green denklik ve R -Green denklik sınıflarının birleşimidir. Bu yüzden bir D-sınıfı, her satırı bir R-sınıfını, her sütunu bir L-sınıfını ve her hücresi de bir H-sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu olarak düşünülmektedir.



Şekil 2.2. Bir D-Green denklik sınıfı örneği

Teorem 2.4.9. (Green Teoremi) S bir yarıgrup, $R \in S/R$, $L \in S/L$ ve $a, b \in S$ olsun.

i) Eğer $(a, b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$\rho_s : L_a \to L_b, \quad x \to xs \quad \text{ve} \quad \rho_t : L_b \to L_a, \quad y \to yt$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca ρ_s, L_a daki her bir H-sınıfını L_b de bu H-sınıfının bulunduğu R-sınıfındaki H-sınıfına eşler. Benzer şekilde, ρ_t de L_b deki her bir H-sınıfını L_a da bu H-sınıfının bulunduğu R-sınıfındaki H-sınıfına eşler.

ii) Eğer $(a, b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$\lambda_s : R_a \to R_b, \quad x \to sx \quad \text{ve} \quad \lambda_t : R_b \to R_a, \quad y \to ty$$

şeklinde tanımlanan λ_s ve λ_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca λ_s, R_a daki her bir H-sınıfını R_b de bu H-sınıfının bulunduğu L-sınıfındaki H-sınıfına eşler. Benzer şekilde, λ_t de R_b deki her bir H-sınıfını R_a da bu H-sınıfının bulunduğu L-sınıfındaki H-sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'ye bakınız. ■

Sonuç 2.4.10. H_a ve H_b aynı D-sınıfında iki H-sınıfı ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

Sonuç 2.4.11. S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir H-sınıfı ise $H^2 \cap H = \emptyset$ veya $H^2 = H$ olur. Ayrıca $H^2 = H$ olduğunda H, S nin bir alt grubudur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.2.5'e bakınız. ■

Sonuç 2.4.12. S bir yarıgrup ve H, S de bir H-sınıfı olsun. Eğer H bir idempotent içeriyor ise S nin bir alt grubudur. ■

Sonuç 2.4.13. Bir H-sınıfı en fazla 1 tane idempotent içerir. ■

2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.5.1. X boş olmayan bir küme ve $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** ve eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1$$

ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** veya **fonksiyon** denir. B_X yarıgrubundaki kısmi dönüşümlerin oluşturduğu kümeyi P_X ile ve (tam) dönüşümlerin oluşturduğu kümeyi T_X ile gösterelim. P_X ve T_X, bağıntıların bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** ve **(tam) dönüşümler yarıgrubu** denir.

Dikkat edilirse $\alpha \in P_X$ iken $\emptyset \subseteq \mathrm{dom}(\alpha) \subseteq X$ olur. Ayrıca, eğer $\alpha \in P_X$ ve $\mathrm{dom}(\alpha) = X$ ise $\alpha \in T_X$ olur.

Eğer $\alpha \in P_X$ ve $\mathrm{dom}(\alpha) = \emptyset$ ise α ya **boş dönüşüm** denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Ayrıca $\alpha \in P_X$, $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = \{y\}$ ise genel olarak $(x)\alpha = y$ veya $x\alpha = y$ şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \mathrm{im}(\alpha) = X\alpha &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

X üzerindeki bire-bir örten dönüşümlerin (permütasyonların) kümesini S_X ile gösterelim. S_X, bağıntıların bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba X üzerindeki **simetrik dönüşümler grubu (simetrik grup)** veya **permütasyonlar grubu** denir. Tanımları gereği

$$S_X \leq T_X \leq P_X \leq B_X$$

olduğu açıktır.

Biz çalışmamız boyunca sonlu $X = X_n = \{1, \ldots, n\}$ kümesini ele alacağız ve B_X, P_X, T_X ve S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, T_n ve S_n yazacağız. Ayrıca, $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \mathrm{dom}(\alpha) & x \epsilon X_n \setminus \mathrm{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

matris formunda ve özel olarak $\alpha \in T_n$ dönüşümünü de

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

matris formunda düşünebiliriz. Buradan $|P_n| = (n+1)^n$, $|T_n| = n^n$ ve $|S_n| = n!$ olduğu kolayca görülmektedir.

Önerme 2.5.2. $\alpha, \beta \in P_n$ olsun. O halde

i) $\mathrm{dom}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha)$

ii) $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$

olur.

İspat: i) $x \in \mathrm{dom}(\alpha\beta)$ olsun. O halde $x(\alpha\beta) = y$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $x(\alpha\beta) = y = (x\alpha)\beta$ olup $x\alpha \in \mathrm{dom}(\beta) \subseteq X_n$ ve dolayısıyla $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ olur. Böylece $\mathrm{dom}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha)$ olduğu elde edilir.

ii) $x \in \mathrm{im}(\alpha\beta)$ olsun. O halde $y(\alpha\beta) = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $y(\alpha\beta) = x = (y\alpha)\beta$ olup $x \in \mathrm{im}(\beta)$ olur. Böylece $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.5.3. $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ olmak üzere α nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in \mathrm{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ bir idempotent olsun. Kabul edelim ki bir $x \in \mathrm{im}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olsun. O halde bir $x \neq y \in X_n$ için $y\alpha = x$ olup

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha \neq x = y\alpha$$

olur. Bu durum α nın bir idempotent olması ile çelişir. O halde $\forall x \in \mathrm{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmak zorundadır.

($\Leftarrow$) $\emptyset \neq \alpha \in P_n$ ve $\forall x \in \mathrm{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olsun. O halde $\forall x \in \mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha)$ için

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

ve $\forall y \in \mathrm{dom}(\alpha)\backslash\mathrm{im}(\alpha)$ için $y\alpha = x$ olacak şekilde bir $x \in \mathrm{im}(\alpha)$ var olup

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha = x = y\alpha$$

olduğundan α bir idempotenttir. ■

Tanım 2.5.4. $\alpha \in P_n$ olmak üzere

$$\mathrm{h}(\alpha) = |\mathrm{im}(\alpha)| \in Z^+ \cup \{0\}$$

sayısına ***α* nın yüksekliği** denir.

Tanım 2.5.5. $\alpha \in P_n$ olsun. Eğer bir $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ oluyorsa x e α nın bir **sabit noktası**, aksi halde x e α nın bir **sabit olmayan noktası** denir. α nın sabit noktalarının kümesi $\mathrm{Fix}(\alpha)$ ve sabit olmayan noktalarının kümesi $\mathrm{Shift}(\alpha)$ ile gösterilir. Başka bir ifade ile

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(\alpha) &= \{x \in \mathrm{dom}(\alpha) : x\alpha = x\} \\ \mathrm{Shift}(\alpha) &= \{x \in \mathrm{dom}(\alpha) : x\alpha \neq x\} \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.5.6. $\alpha \in P_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \ker(\alpha) = \{&(x,y) \in X_n \times X_n : (x,y \in \mathrm{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \text{ veya} \\ &(x,y \in X_n \backslash \mathrm{dom}(\alpha))\} \end{aligned}$$

kümesine ***α* nın çekirdek kümesi** denir. Özel olarak; $\alpha \in T_n$ iken

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

şeklindedir. $\ker(\alpha)$ nın X_n üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu ve denklik sınıflarının da α nın görüntü kümesi $\mathrm{im}(\alpha)$ daki elemanların tüm farklı ters-görüntü kümeleri ile $X_n \setminus \mathrm{dom}(\alpha)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\mathrm{im}(\alpha)$ daki elemanların ters-görüntü kümelerinin kümesini $\mathrm{kp}(\alpha)$ ile gösterirsek, yani

$$\mathrm{kp}(\alpha) = \{y\alpha^{-1} : y \in \mathrm{im}(\alpha)\}$$

olarak tanımlarsak, $\mathrm{kp}(\alpha)$ kümesinin $\mathrm{dom}(\alpha)$ nın bir parçalanışı olduğu açıktır. Bu nedenle $\mathrm{kp}(\alpha)$ ya ***α* nın çekirdek parçalanışı** ve $\mathrm{ks}(\alpha) = (\mathrm{kp}(\alpha), X_n \setminus \mathrm{dom}(\alpha))$ sıralı ikilisine de ***α* nın çekirdek yapısı** diyeceğiz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\beta) &\Leftrightarrow \mathrm{kp}(\alpha) = \mathrm{kp}(\beta) \\ &\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta) \text{ ve } \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanımı gereği yüksekliği k $(1 \leq k \leq n)$ olan bir $\alpha \in T_n$ dönüşümünün k tane çekirdek sınıfının var olduğu açıktır. Bu durumda $\mathrm{kp}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_1\alpha & A_2\alpha & \cdots & A_k\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan kolayca görülebilir ki, α nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq k \leq n$ için $A_i\alpha \in A_i$ olmasıdır. Yüksekliği k $(1 \leq k \leq n)$ olan bir $\alpha \in P_n \setminus T_n$ kısmi dönüşümünün de $k + 1$ tane çekirdek sınıfının var olduğu açıktır. Bu durumda $\mathrm{kp}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_k\}$ ve $A_{k+1} = X_n \setminus \mathrm{dom}(\alpha)$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} \\ A_1\alpha & A_2\alpha & \cdots & A_k\alpha & - \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ A_1\alpha & A_2\alpha & \cdots & A_k\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, kolayca görülüyor ki α nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq k \leq n$ için $A_i\alpha \in A_i$ olmasıdır.

Örneğin;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & - & 3 & 4 & 3 & 6 & - \end{pmatrix} \in P_8$$

için $3\alpha^{-1} = \{4,6\}$, $4\alpha^{-1} = \{1,2,5\}$, $6\alpha^{-1} = \{7\}$ olup $\text{kp}(\alpha) = \{\{1,2,5\},\{4,6\},\{7\}\}$ ve $\text{ks}(\alpha) = (\{\{1,2,5\},\{4,6\},\{7\}\},\{3,8\})$ şeklindedir. Ayrıca bu dönüşüm

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{4,6\} & \{1,2,5\} & \{7\} & \{3,8\} \\ 3 & 4 & 6 & - \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} \{4,6\} & \{1,2,5\} & \{7\} \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in P_8$$

şeklinde de gösterilebilir.

Önerme 2.5.7. $\alpha, \beta \in P_n$ olmak üzere $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olur.

İspat: $(x,y) \in \ker(\alpha)$ olsun. O halde $(x,y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha)$ veya $(x,y \in X_n \backslash \text{dom}(\alpha))$ olur. 1. durumda; $x,y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha$ ise $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$, yani $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olur. Eğer $x\alpha, y\alpha \in \text{dom}(\beta)$ ise $x,y \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $(x,y) \in \ker(\alpha\beta)$ olur. Eğer $x\alpha, y\alpha \notin \text{dom}(\beta)$ ise $x,y \in X_n \backslash \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $(x,y) \in \ker(\alpha\beta)$ olur. 2. durumda; $x,y \in X_n \backslash \text{dom}(\alpha)$ ise $x,y \in X_n \backslash \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $(x,y) \in \ker(\alpha\beta)$ olur. Her iki durumda da $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.8. $\alpha \in P_n$ olmak üzere $X_n \backslash \text{im}(\alpha)$ kümesine ***α* nın noksanlık kümesi** denir ve $\text{Def}(\alpha)$ ile gösterilir. Ayrıca, $|X_n \backslash \text{im}(\alpha)| \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tamsayısına da ***α* nın noksanlığı** denir ve $\text{def}(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.9. (Cayley Teoremi) Her sonlu yarıgrup S, $|S| = n$ olmak üzere, T_n veya T_{n+1} in bir alt yarıgrubuna izomorftur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.4.3'e bakınız. ■

Teorem 2.5.10. $\alpha, \beta \in P_n$ olmak üzere

i) $\alpha \; L \; \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,

ii) $\alpha \; R \; \beta \Leftrightarrow \text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$,

iii) $\alpha \; D \; \beta \Leftrightarrow \text{h}(\alpha) = \text{h}(\beta)$,

iv) $\alpha \; H \; \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Teorem 2.5.11. $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere

i) $\alpha \; L \; \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,

ii) $\alpha \; R \; \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$,

iii) $\alpha \; D \; \beta \Leftrightarrow \text{h}(\alpha) = \text{h}(\beta)$,

iv) $\alpha \; H \; \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Sonuç 2.5.12. P_n yarıgrubunun $n + 1$ tane D–Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$D_k = \{\alpha \in P_n : \text{h}(\alpha) = k\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, T_n yarıgrubunun n tane D–Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$D_k = \{\alpha \in T_n : \text{h}(\alpha) = k\}$$

şeklindedir. ■

Tanım 2.5.13. " $1 \leq n$ kişiyi her grupta en az bir kişi olacak şekilde $1 \leq k \leq n$ tane gruba kaç farklı sayıda ayırabiliriz ? " sorusunun cevabı olan sayılara **2. Tip Stirling sayıları** denir ve $S(n,k)$ ile gösterilir. Her bir grup bir alt küme olduğundan bu soruyu "n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısı nedir? " şeklinde de düşünebiliriz.

Kolayca görüleceği gibi, n elemanlı bir kümeyi istenen şekilde 1 tane alt kümeye, 1 şekilde ve n tane alt kümeye, yine 1 şekilde parçalayabiliriz. Dolayısıyla $S(n, 1)= S(n,n)=1$ olur. Şimdi $1 \leq k \leq n$ için $S(n, k)$ sayısını hesaplayalım. Tanımı gereği $\{1,2,\dots,n\}$ kümesinin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısı $S(n,k)$ olup alt kümelerden biri $\{n\}$ olacak şekildeki parçalanışların sayısı $S(n-1,k-1)$ ve "n" elemanının tek olarak bir alt küme oluşturmadığı parçalanışların sayısı $kS(n-1,k)$ olduğundan

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$S(1,k)$	1				
$S(2,k)$	1	1			
$S(3,k)$	1	3	1		
$S(4,k)$	1	7	6	1	
$S(5,k)$	1	15	25	10	1

Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları

Önerme 2.5.14. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere P_n yarıgrubundaki D_k sınıfı $\binom{n}{k}$ tane L–Green denklik sınıfı, $\mathrm{S}(n+1, k+1)$ tane R–Green denklik sınıfı ve $\binom{n}{k}\mathrm{S}(n+1, k+1)$ tane H–Green denklik sınıfı içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4'e bakınız. ■

Önerme 2.5.15. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere T_n yarıgrubundaki D_k sınıfı $\binom{n}{k}$ tane L–Green denklik sınıfı, $\mathrm{S}(n, k)$ tane R–Green denklik sınıfı ve $\binom{n}{k}\mathrm{S}(n, k)$ tane H–Green denklik sınıfı içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4'e bakınız. ■

Önerme 2.5.16. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere P_n yarıgrubundaki D_k sınıfının her bir H–Green denklik sınıfı $k!$ tane eleman içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.6.6'ya bakınız. ■

Önerme 2.5.17. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere T_n yarıgrubundaki D_k sınıfının her bir H–Green denklik sınıfı $k!$ tane eleman içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.6.6'ya bakınız. ■

Örnek 2.5.18. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı aşağıdaki gibidir.

D_3	$L_{1,2,3}$
$R_{1,2,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

D_2	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$
$R_{1,23}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$
$R_{13,2}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$
$R_{12,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$

D_1	L_1	L_2	L_3
R_{123}	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

Şekil 2.4. T_3 ün Green denklik sınıflarının yapısı

Örneğin; $L_{1,2}$ burada görüntü kümesi $\{1,2\}$ olan elemanların oluşturduğu L –Green denklik sınıfını, $R_{1,23}$ ise çekirdek parçalanışı $\{\{1\},\{2,3\}\}$ olan elemanların oluşturduğu R –Green denklik sınıfını göstermektedir.

2.6. P_n ve T_n nin Bazı Alt Yarıgrupları

Tanım 2.6.1. P_n, T_n ve S_n sırasıyla $X_n = \{1,\dots,n\}$ kümesi üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu, (tam) dönüşümler yarıgrubu ve permütasyonlar grubu olsun. $T_n \setminus S_n$ kümesinin T_n nin bir alt yarıgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. Bu alt

yarıgruba **tekil dönüşümler yarıgrubu** denir ve $Sing_n = T_n \backslash S_n$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$O_n = \{\alpha \in Sing_n : x \leq y \Longrightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in X_n)\},$$
$$PO_n = O_n \cup \{\alpha \in P_n \backslash T_n : x \leq y \Longrightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in \mathrm{dom}(\alpha))\} \text{ ve}$$
$$SPO_n = PO_n \backslash O_n$$

kümeleri de $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ kümesi üzerinde birer alt yarıgrup olup bu alt yarıgruplara sırasıyla X_n kümesi üzerindeki **sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu**, **kısmi sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu** ve **kesin kısmi sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu** denir.

Tanım 2.6.2. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, X kümesinin herhangi bir parçalanışı olsun. Her bir A_i $(1 \leq i \leq k)$ kümesinden bir ve yalnız bir tek eleman içeren, başka bir ifade ile, her $1 \leq i \leq k$ için $|\{a_1, \dots, a_k\} \cap A_i| = 1$ şeklindeki $\{a_1, \dots, a_k\}$ kümesine $\mathcal{A}$ nın bir **transversali** veya **temsil kümesi** diyeceğiz. Eğer

$$\forall x \in A_i \text{ ve } \forall x \in A_{i+1} \ (1 \leq i \leq k-1) \text{ için } x < y$$

oluyorsa $A_i < A_{i+1}$ şeklinde göstereceğiz. Bu durumda $\mathcal{A}$ ya bir **sıralı parçalanış** diyeceğiz ve $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ şeklinde yazacağız. Ayrıca, $\emptyset \neq C \subseteq X_n$ için eğer

$$x, y \in C \text{ ve } x \leq z \leq y \Rightarrow z \in C$$

oluyorsa C ye de bir **konveks küme** diyeceğiz.

Şimdi bu tanımlar yardımıyla O_n ve PO_n deki elemanların çekirdek sınıflarının bazı özelliklerini verelim.

Tanımı gereği yüksekliği k $(1 \leq k \leq n-1)$ olan bir $\alpha \in O_n$ sıra-koruyan dönüşümünün çekirdek sınıflarının k tane konveks küme olduğu kolayca görülebilir. Böylece, $\alpha \in O_n$ dönüşümünün çekirdek sınıfları

$$A_1 = \{1, \dots, x_1\},\ A_2 = \{x_1 + 1, \dots, x_2\},\ \dots,\ A_k = \{x_{k-1} + 1, \dots, n\}$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_{k-1} \in X_n$ vardır ve $A_1\alpha < \cdots < A_k\alpha$ şeklindedir. Başka bir ifade ile $(A_1, \dots, A_k)$, X_n nin konveks kümelerden oluşan bir sıralı parçalanışıdır. Yine tanımı gereği yüksekliği k $(1 \leq k \leq n-1)$ olan bir $\alpha \in PO_n$ kısmi sıra-koruyan dönüşümünün çekirdek sınıflarının $k + 1$ tane olduğu fakat bu kümelerin konveks küme olmak zorunda olmadığı açıktır. Ancak, yine $\alpha \in PO_n$ kısmi dönüşümünün çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha)$ daki çekirdek sınıfları $A_1, \dots, A_k$ üzerinde yukarıda tanımlandığı gibi bir sıralama mevcuttur. Yani $A_1\alpha < \cdots < A_k\alpha$ olmak üzere $(A_1, \dots, A_k)$, $\mathrm{dom}(\alpha)$ nın bir sıralı parçalanışıdır.

Tanım 2.6.3. $2 \leq r \leq n-1$ için

$$\begin{aligned}
K(n,r) &= \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\},\\
PK(n,r) &= \{\alpha \in P_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\},\\
O(n,r) &= \{\alpha \in O_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\},\\
PO(n,r) &= \{\alpha \in PO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\} \text{ ve}\\
SPO(n,r) &= \{\alpha \in SPO_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r\}
\end{aligned}$$

kümelerini ele alalım. Herhangi iki $\alpha, \beta \in P_n$ için $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$, $T_n \leq P_n$, $O_n \leq T_n$, $PO_n \leq P_n$ ve $SPO_n \leq P_n$ olduğundan $K(n,r)$, $PK(n,r)$, $O(n,r)$, $PO(n,r)$ ve $SPO(n,r)$ birer alt yarıgruptur. Dikkat edilirse $K(n,n-1) = Sing_n$, $O(n,n-1) = O_n$, $PO(n,n-1) = PO_n$ ve $SPO(n,n-1) = SPO_n$ olur.

Teorem 2.6.4. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ olmak üzere

i) $\alpha\ L\ \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$,

ii) $\alpha\ R\ \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$,

iii) $\alpha\ D\ \beta \Leftrightarrow \mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{h}(\beta)$,

iv) $\alpha\ H\ \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$

şeklindedir.

İspat: i) ($\Rightarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\alpha \, L \, \beta$ olsun. O halde $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in K(n,r)^1$ vardır. $\alpha, \beta \in T_n$ olup $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\lambda\beta) \subseteq \text{im}(\beta) = \text{im}(\gamma\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$ ve dolayısıyla $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $\text{kp}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_k\}$ ve $\text{kp}(\beta) = \{B_1, \ldots, B_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ c_1 & \cdots & c_k \end{pmatrix} \text{ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ c_1 & \cdots & c_k \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $1 \leq i \leq k$ için $b_i \in B_i$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere $\lambda, \gamma \in K(n,r)$ dönüşümleri

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix} \text{ve } \gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olup $\alpha \, L \, \beta$ olduğu elde edilir.

ii) ($\Rightarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\alpha \, R \, \beta$ olsun. O halde $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in K(n,r)^1$ vardır. $\alpha, \beta \in T_n$ olup $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\gamma) = \ker(\beta) \subseteq \ker(\beta\lambda) = \ker(\alpha)$ ve dolayısıyla $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\text{kp}(\alpha) = \text{kp}(\beta) = \{C_1, \ldots, C_k\}$, $\text{im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ve $\text{im}(\beta) = \{b_1, \ldots, b_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \text{ve } \beta = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\lambda, \gamma \in K(n,r)$ dönüşümleri

$$x\lambda = \begin{cases} a_i & x = b_i,\ \ i = 1,\dots,k-1 \\ a_k & x \in X_n \backslash \{b_1,\dots,b_{k-1}\} \end{cases},$$
$$x\gamma = \begin{cases} b_i & x = a_i,\ \ i = 1,\dots,k-1 \\ b_k & x \in X_n \backslash \{a_1,\dots,a_{k-1}\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{k-1} & X_n \backslash \{b_1,\dots,b_{k-1}\} \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & X_n \backslash \{a_1,\dots,a_{k-1}\} \\ b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olup $\alpha\ R\ \beta$ olduğu elde edilir.

iii) ($\Rightarrow$) $2 \le r \le n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\alpha\ D\ \beta$ olsun. O halde $(\alpha,\beta) \in L \circ R$ olup $\alpha\ L\ \gamma$ ve $\gamma\ R\ \beta$ olacak şekilde $\gamma \in K(n,r)$[1] vardır. i) ve ii) den dolayı $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\gamma)$ ve $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ olup $\mathrm{h}(\alpha) = |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\gamma)| = |\mathrm{kp}(\gamma)| = |\mathrm{kp}(\beta)| = |\mathrm{im}(\beta)| = \mathrm{h}(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \le r \le n-1$ ve $\alpha, \beta \in K(n,r)$ için $\mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{h}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \le k \le r$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \in K(n,r)$$

için $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\gamma)$ ve $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ olup i) ve ii) den dolayı $\alpha L\ \gamma$ ve $\gamma R\ \beta$ olur. Dolayısıyla $(\alpha,\beta) \in L \circ R$ olup $\alpha\ D\ \beta$ olduğu elde edilir.

iv) $H = L \cap R$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Teorem 2.6.5. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ olmak üzere

i) $\alpha \, L \, \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,

ii) $\alpha \, R \, \beta \Leftrightarrow \text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$,

iii) $\alpha \, D \, \beta \Leftrightarrow \text{h}(\alpha) = \text{h}(\beta)$ ve

iv) $\alpha \, H \, \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$

şeklindedir.

İspat: i) ($\Rightarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\alpha \, L \, \beta$ olsun. O halde $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in PK(n,r)^1$ vardır. $\alpha, \beta \in P_n$ olup $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\lambda\beta) \subseteq \text{im}(\beta) = \text{im}(\gamma\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$ ve dolayısıyla $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $\text{kp}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_k\}$ ve $\text{kp}(\beta) = \{B_1, \ldots, B_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ c_1 & \cdots & c_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ c_1 & \cdots & c_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $1 \leq i \leq k$ için $b_i \in B_i$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere $\lambda, \gamma \in PK(n,r)$ dönüşümleri

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olup $\alpha \, L \, \beta$ olduğu elde edilir.

ii) ($\Rightarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\alpha \, R \, \beta$ olsun. O halde $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in PK(n,r)^1$ vardır. $\alpha, \beta \in P_n$ olup $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\gamma) = \ker(\beta) \subseteq \ker(\beta\lambda) = \ker(\alpha)$ ve dolayısıyla $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur. Ayrıca, $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta\lambda) \subseteq \text{dom}(\beta) = \text{dom}(\alpha\gamma) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ olup $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$ ve dolayısıyla $\text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \le r \le n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \le k \le r$ için $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathrm{kp}(\beta) = \{C_1, \dots, C_k\}$, $\mathrm{im}(\alpha) = \{a_1, \dots, a_k\}$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \{b_1, \dots, b_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k & X_n \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k & X_n \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\lambda, \gamma \in PK(n,r)$ dönüşümleri

$$x\lambda = \begin{cases} a_i & x = b_i,\ i = 1, \dots, k-1 \\ a_k & x \in X_n \backslash \{b_1, \dots, b_{k-1}\} \end{cases},$$
$$x\gamma = \begin{cases} b_i & x = a_i,\ i = 1, \dots, k-1 \\ b_k & x \in X_n \backslash \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{k-1} & X_n \backslash \{b_1, \dots, b_{k-1}\} \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & X_n \backslash \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \\ b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa, $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olup $\alpha \ R \ \beta$ olduğu elde edilir.

iii) ($\Rightarrow$) $2 \le r \le n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\alpha \ D \ \beta$ olsun. O halde $(\alpha, \beta) \in L \circ R$ olup $\alpha L \gamma$ ve $\gamma R \beta$ olacak şekilde $\gamma \in PK(n,r)$[1] vardır. i) ve ii) den dolayı $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\gamma)$ ve $\mathrm{ks}(\gamma) = \mathrm{ks}(\beta)$ olup $\mathrm{h}(\alpha) = |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\gamma)| = |\mathrm{kp}(\gamma)| = |\mathrm{kp}(\beta)| = |\mathrm{im}(\beta)| = \mathrm{h}(\beta)$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$) $2 \le r \le n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK(n,r)$ için $\mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{h}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \le k \le r$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \in PK(n,r)$$

için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma)$ ve $\text{ks}(\gamma) = \text{ks}(\beta)$ olup i) ve ii) den dolayı $\alpha \, L \, \gamma$ ve $\gamma \, R \, \beta$ olur. Dolayısıyla $(\alpha, \beta) \in L \circ R$ olup $\alpha \, D \, \beta$ olduğu elde edilir.

iv) $H = L \cap R$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Teorem 2.6.6. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in O(n,r)$ ($PO(n,r)$ veya $\text{SP}O(n,r)$) için

i) $\alpha \, L \, \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,

ii) $\alpha \, R \, \beta \Leftrightarrow \text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta)$,

iii) $\alpha \, D \, \beta \Leftrightarrow \text{h}(\alpha) = \text{h}(\beta)$ ve

iv) $\alpha \, H \, \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

şeklindedir.

İspat: i) ($\Rightarrow$) $O(n,r)$ için Teorem 2.6.4 i) ve $PO(n,r)$ veya $\text{SP}O(n,r)$ için Teorem 2.6.5 i) ile aynı şekilde gösterilebilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PO(n,r)$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) = \{c_1, \ldots, c_k\}$, $\text{kp}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_k\}$ ve $\text{kp}(\beta) = \{B_1, \ldots, B_k\}$ (genelliği bozmaksızın $c_1 < \cdots < c_k$, $A_1 < \cdots < A_k$ ve $B_1 < \cdots < B_k$) olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ c_1 & \cdots & c_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ c_1 & \cdots & c_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $1 \leq i \leq k$ için $b_i \in B_i$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere $\lambda, \gamma \in PO(n,r)$ dönüşümleri

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olup $\alpha \; L \; \beta$ olduğu elde edilir.

$O(n,r)$ için yukarıdaki ispatta $X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \emptyset$ ve $X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) = \emptyset$ alınarak kolayca gösterilebilir.

$SPO(n,r)$ için yukarıdaki ispatta $X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \neq \emptyset$ ve $X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \neq \emptyset$ alınarak kolayca gösterilebilir.

ii) ($\Rightarrow$) $O(n,r)$ için Teorem 2.6.4 ii) ve $PO(n,r)$ veya SP$O(n,r)$ için Teorem 2.6.5 ii) ile aynı şekilde gösterilebilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in O(n,r)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathrm{kp}(\beta) = \{C_1, \ldots, C_k\}$, $\mathrm{im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \{b_1, \ldots, b_k\}$ (genelliği bozmaksızın $C_1 < \cdots < C_k$, yani $(C_1, \ldots, C_k)$ X_n nin bir konveks sıralı parçalanışı, $a_1 < \cdots < a_k$ ve $b_1 < \cdots < b_k$) olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\lambda, \gamma \in O(n,r)$ dönüşümleri $B_1 = \{1, \ldots, b_1\}$, $B_i = \{b_{i-1} + 1, \ldots, b_i\}$ $(2 \leq i \leq k-1)$, $B_k = \{b_{k-1} + 1, \ldots, n\}$, $A_1 = \{1, \ldots, a_1\}$, $A_i = \{a_{i-1} + 1, \ldots, a_i\}$ $(2 \leq i \leq k-1)$ ve $A_k = \{a_{k-1} + 1, \ldots, n\}$ olmak üzere

$$\lambda = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olup $\alpha \; R \; \beta$ olduğu elde edilir.

$2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PO(n,r)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathrm{kp}(\beta) = \{C_1, \ldots, C_k\}$, $\mathrm{im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \{b_1, \ldots, b_k\}$ (genelliği bozmaksızın $C_1 < \cdots < C_k$, yani $(C_1, \ldots, C_k)$ $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ nın bir sıralı parçalanışı, $a_1 < \cdots < a_k$ ve $b_1 < \cdots < b_k$) olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k & X_n \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_k & X_n \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\lambda, \gamma \in PO(n,r)$ dönüşümleri

$$x\lambda = \begin{cases} a_i & x = b_i,\ i = 1,\dots,k \\ - & x \in X_n \backslash \{b_1,\dots,b_k\} \end{cases},$$
$$x\gamma = \begin{cases} b_i & x = a_i,\ i = 1,\dots,k \\ - & x \in X_n \backslash \{a_1,\dots,a_k\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k & X_n \backslash \{b_1,\dots,b_k\} \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k & X_n \backslash \{a_1,\dots,a_k\} \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa, $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olup $\alpha \ R \ \beta$ olduğu elde edilir.

$SPO(n,r)$ için yukarıda $PO(n,r)$ için yapılan ispatta $X_n \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_k) \neq \emptyset$ alınarak kolayca gösterilebilir.

iii) ($\Rightarrow$) $O(n,r)$ için Teorem 2.6.4 iii) ve $PO(n,r)$ veya $\mathrm{SP}O(n,r)$ için Teorem 2.6.5 iii) ile aynı şekilde gösterilebilir.

($\Leftarrow$) $2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PO(n,r)$ için $\mathrm{h}(\alpha) = \mathrm{h}(\beta)$ olsun. O halde bir $2 \leq k \leq r$ için (genelliği bozmaksızın $a_1 < \cdots < a_k$, $b_1 < \cdots < b_k$ $A_1 < \cdots < A_k$ ve $B_1 < \cdots < B_k$)

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & X_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & X_n \backslash (B_1,\dots,B_k) \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \in PO(n,r)$$

için $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\gamma)$ ve $\mathrm{ks}(\gamma) = \mathrm{ks}(\beta)$ olup i) ve ii) den dolayı $\alpha \ L \ \gamma$ ve $\gamma \ R \ \beta$ olur. Dolayısıyla $(\alpha, \beta) \in L \circ R$ olup $\alpha \ D \ \beta$ olduğu elde edilir.

$O(n,r)$ için yukarıdaki ispatta $X_n\setminus(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \emptyset$ ve $X_n\setminus(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = \emptyset$ alınarak kolayca gösterilebilir.

$SPO(n,r)$ için yukarıdaki ispatta $X_n\setminus(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \neq \emptyset$ ve $X_n\setminus(B_1 \cup \cdots \cup B_k) \neq \emptyset$ alınarak kolayca gösterilebilir.

(iv) $H=L \cap R$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Sonuç 2.6.7. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $K(n,r)$ ve $O(n,r)$ yarıgruplarının her birinin r tane D–Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $1 \leq k \leq r$ olmak üzere, sırasıyla

$$D_k = \{\alpha \in K(n,r) : \mathrm{h}(\alpha) = k\} \text{ ve}$$
$$D_k = \{\alpha \in O(n,r) : \mathrm{h}(\alpha) = k\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $PK(n,r)$, $PO(n,r)$ ve $\mathrm{SP}O(n,r)$ yarıgruplarının her birinin $r+1$ tane D–Green denklik sınıfı vardır. Bunlar, $0 \leq k \leq r$ olmak üzere, sırasıyla

$$D_k = \{\alpha \in PK(n,r) : \mathrm{h}(\alpha) = k\},$$
$$D_k = \{\alpha \in PO(n,r) : \mathrm{h}(\alpha) = k\} \text{ ve}$$
$$D_k = \{\alpha \in SPO(n,r) : \mathrm{h}(\alpha) = k\}$$

şeklindedir. ■

2.7. Yönlü Grafikler

Tanım 2.7.1. Köşeler kümesi olarak adlandırdığımız boş olmayan sonlu bir kümeden ve **kenarlar listesi** olarak adlandırdığımız köşeler kümesinin sırasız ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya bir **grafik** denir.

Genellikle bir G grafiğinin köşeleri $a, b, u, v, x, y, z, \ldots, 1,2,3, \ldots$ gibi sembollerle ve köşeler kümesi $V(G)$ ile gösterilir. Ayrıca $u, v \in V(G)$ olmak üzere, eğer G grafiğinde u ile v köşesini birleştiren bir kenar varsa bu kenar $\{u, v\}$ ile ve

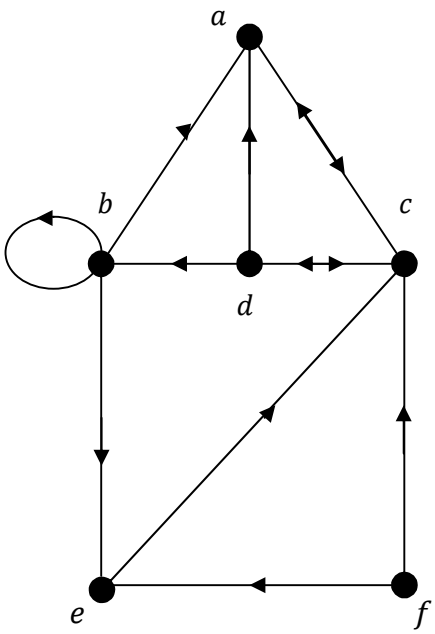
kenarlar listesi $E(G)$ ile gösterilir. Eğer G grafiğinde u ile v köşelerini birleştiren 1 den çok kenar varsa bu kenarların hepsine birden **katlı kenar** ve eğer $\{u,u\} \in E(G)$ ise $\{u,u\}$ kenarına da bir **halka** denir.

Ayrıca, eğer G grafiği tek parça ise G ye bir **bağlantılı grafik**, aksi halde **bağlantısız grafik** denir.

Tanım 2.7.2. Köşeler kümesi olarak adlandırdığımız boş olmayan sonlu bir kümeden ve **yönlü kenarlar listesi** veya **oklar listesi** olarak adlandırdığımız, köşeler kümesinin sıralı ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya **yönlü grafik** (**diyagram**) denir.

Genellikle bir D yönlü grafiğinin köşeleri $a,b,u,v,x,y,z,\ldots$,1,2,3,... gibi sembollerle ve köşeler kümesi $V(D)$ ile gösterilir. Ayrıca $u,v \in V(D)$ olmak üzere, eğer D yönlü grafiğinde u dan v ye bir yönlü kenar varsa bu yönlü kenar (u,v) ile ve yönlü kenarlar listesi $\vec{E}(D)$ ile gösterilir. Eğer u dan v ye 1 den çok yönlü kenar varsa bu yönlü kenarların hepsine birden $\boldsymbol{u}$ **dan** $\boldsymbol{v}$ **ye katlı kenar** denir. Eğer u dan u ya bir yönlü kenar varsa bu yönlü kenara da **halka** denir.

Örnek 2.7.3. $V(D) = \{a,b,c,d,e,f\}$ ve $\vec{E}(D) = \{(a,c),(b,a),(b,b),(b,e),(c,a),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(e,c),(f,c),(f,e)\}$ olmak üzere D yönlü grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 2.5. Bir yönlü grafik örneği

Tanım 2.7.4. D bir yönlü grafik olsun.

$$V(G) = V(D)$$
$$E(G) = \{\{u,v\}: (u,v) \in \vec{E}(D) \text{ veya } (v,u) \in \vec{E}(D)\}$$

olarak tanımlanan, yani D yönlü grafiğinin yönleri silinerek elde edilen, G grafiğine D yönlü grafiğinin **öz grafiği** denir.

Tanım 2.7.5. D bir yönlü grafik ve $u, v, v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V(D)$ olsun.

i) Eğer $i = 1, \dots, n$ için $(v_i, v_{i+1}) \in \vec{E}(D)$ ise $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ dizisine D yönlü grafiğinde uzunluğu n olan bir **yol** ve bu yolda $v_{n+1} = v_1$ ise bu yola bir **kapalı yol** denir.

ii) Eğer $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ yolunda $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n+1$ için $v_i \neq v_j$ ise, yani bu yoldaki tüm köşeler farklı ise bu yola bir **yönlü patika** denir.

iii) Eğer $v_1v_2 \dots v_nv_1$ kapalı yolunda $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n$ için $v_i \neq v_j$ ise bu kapalı yola bir **devir** denir.

iv) Eğer D yönlü grafiğinin öz grafiği G, bağlantılı grafik ise D ye **bağlantılı yönlü grafik**, aksi halde **bağlantısız yönlü grafik** denir.

v) Eğer D yönlü grafiğinde u köşesinden v köşesine bir yönlü patika bulunabiliyor ise u köşesi v köşesine **bağlı** denir.

vi) Eğer D yönlü grafiğinde $\forall u, v \in V(D)$ için u köşesinden v köşesine bir yönlü patika bulunabiliyor ise, yani u köşesi v köşesine bağlı ise D yönlü grafiğine **sıkı bağlantılı** yönlü grafik denir. Kolayca görüleceği gibi D yönlü grafiğinde tüm köşeleri içeren bir devir varsa D sıkı bağlantılıdır.

vii) D bağlantılı bir yönlü grafik olsun. Eğer D yönlü grafiğinin tüm köşelerini içeren bir devir varsa bu devire **Hamiltonian devri** ve bu durumda D yönlü grafiğine de **Hamiltonian yönlü grafiği** denir. Hamiltonian yönlü grafiklerinin sıkı bağlantılı olduğu açıktır.

Grafiklerle ilgili daha fazla bilgi için Wilson ve Watkins (1990)'a bakınız.

Tanım 2.7.6. X, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $K(n,r)$ (benzer şekilde $PK(n,r)$, $O(n,r)$, $PO(n,r)$ veya $SPO(n,r)$) yarıgrubunun D_r denklik sınıfının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğini

$$V = V(\mathbb{\Gamma}_X) = X$$
$$\vec{E} = \vec{E}(\mathbb{\Gamma}_X) = \{(\alpha, \beta) \in V \times V : \alpha\beta \in D_r\}$$

olarak tanımlayalım.

Tezin geri kalan kısmında, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, yukarıda tanımladığımız $K(n,r)$, $PK(n,r)$, $O(n,r)$, $PO(n,r)$ ve $SPO(n,r)$ alt yarıgruplarını ayrı ayrı inceleyip tanımladığımız grafikten de yararlanarak her birinin herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan

koşulları vereceğiz. Verdiğimiz sonuçlar doğrultusunda da bu alt yarıgrupların tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirleyeceğiz.

3. $K(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ

Evseen ve Podran (1972), $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere T_n deki D-Green denklik sınıfı D_r nin, içerisindeki idempotentler tarafından doğurulduğunu göstermişti. Daha sonra Howie ve McFadden (1990), Lemma 4 ile $2 \leq r \leq n-1$ için $K(n,r) = \langle E(D_r) \rangle$ olduğunu ve $K(n,r)$ yarıgrubunun rankının 2. Tip Stirling sayısı $S(n,r)$ olduğunu gösterdiler. Biz de bu bölümde, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $K(n,r)$ yarıgrubunun herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmaya çalışacağız.

$K(n,r)$ de herhangi bir $\alpha \in D_k$ $(1 \leq k \leq r)$ dönüşümü yüksekliği k sayısından küçük olan dönüşümlerin bir çarpımı şeklinde yazılamayacağından ve $K(n,r)$ alt yarıgrubu yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğurulduğundan $K(n,r)$ nin bir doğuray kümesini araştırırken sadece $K(n,r)$ deki D-Green denklik sınıfı D_r nin alt kümelerini düşünmek yeterlidir. Ayrıca, D_r nin bir A alt kümesinin $K(n,r)$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır.

$1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $\{A_1, \ldots, A_r\}$, X_n nin bir parçalanışı ve $\{a_1, \ldots, a_r\}$, X_n nin r elemanlı bir alt kümesi olsun. T_n de çekirdek parçalanışı $\{A_1, \ldots, A_r\}$ ve görüntü kümesi $\{a_1, \ldots, a_r\}$ olan dönüşümlerin oluşturduğu H–Green denklik sınıfını

$$\mathbf{H}=H_{\{a_1,\ldots,a_r\}}^{\{A_1,\ldots,A_r\}}$$

ile gösterelim. $\alpha \in \mathbf{H}$ dönüşümünün bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in A_{k_i}$ ve $(A_{k_i})\alpha = \{a_i\}$ olacak şekilde bir tek $1 \leq k_i \leq r$ sayısının var olmasıdır. O halde, **H** nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul $\{a_1, \ldots, a_r\}$ kümesinin $\{A_1, \ldots, A_r\}$ parçalanışının bir temsil kümesi olmasıdır.

Önerme 3.1. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n$ ve $K(n,r)$ de $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$ olmasıdır. Başka bir ifade ile,

$\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $y \neq z$ olacak şekildeki $\forall y, z \in \text{im}(\alpha)$ için $y\beta \neq z\beta$ olması, yani $\text{im}(\alpha)$ nın, β nın çekirdek parçalanışı $\text{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha, \beta, \alpha\beta \in D_r$ olsun. $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ ve $|\text{im}(\alpha\beta)| = r = |\text{im}(\beta)|$ olup $\text{im}(\alpha\beta) = \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir. (Bu ise $y \neq z$ olacak şekildeki $\forall y, z \in \text{im}(\alpha)$ için $y\beta \neq z\beta$ olması, yani $\text{im}(\alpha)$ nın, β nın çekirdek parçalanışı $\text{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olması ile mümkündür. Aksi halde $|\text{im}(\alpha\beta)| < r$ olurdu ve bu durum $\alpha\beta \in D_r$ olması ile çelişirdi.)

($\Leftarrow$) $\alpha, \beta \in D_r$ için $\text{im}(\alpha\beta) = \text{im}(\beta)$ olsun. (Bu durum $y \neq z$ olacak şekildeki $\forall y, z \in \text{im}(\alpha)$ için $y\beta \neq z\beta$ olması, yani $\text{im}(\alpha)$ nın, β nın çekirdek parçalanışı $\text{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olması ile mümkündür. Aksi halde $|\text{im}(\alpha\beta)| < r$ olurdu ve bu durum $\text{im}(\alpha\beta) = \text{im}(\beta)$ olması ile çelişirdi.) O halde $|\text{im}(\alpha\beta)| = |\text{im}(\beta)| = r$ olup $\alpha\beta \in D_r$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 3.2. $n, k \geq 2$, $1 \leq r \leq n$ ve $K(n,r)$ de $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olsun. O halde $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olmak zorundadır. Aksi halde $|\,\text{im}\,(\alpha_1 \cdots \alpha_k)| < r$ olurdu ve bu durum $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması ile çelişirdi.

($\Leftarrow$) $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in D_r$ olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olsun. İspatı k üzerinden tümevarım ile yapalım.

$k = 2$ için sonuç açık olup $k - 1 \geq 2$ için de iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $\text{im}(\alpha_{k-1}) = \{y_1, \dots, y_r\}$ olmak üzere $\text{im}(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}) \subseteq \text{im}(\alpha_{k-1})$ ve $\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \in D_r$ olduğundan $\text{im}(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}) = \{y_1, \dots, y_r\}$ olur. $\alpha_{k-1}\alpha_k \in D_r$ olup Önerme 3.1'den

$$\text{im}(\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}\alpha_k) = \{y_1\alpha_k, \dots, y_r\alpha_k\} = \text{im}(\alpha_{k-1}\alpha_k) = \text{im}(\alpha_k)$$

ve dolayısıyla da $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 3.3. $1 \leq r \leq n-1$ için $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$, X_n nin bir parçalanışı ve $R(\mathcal{A})$ da $\mathcal{A}$ nın bir temsil kümesi olmak üzere $H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ grubunun idempotenti ξ ile gösterilsin ve $\alpha \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \xi\lambda$ ve $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonunun var olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olsun. $\lambda: X_n \to X_n$ dönüşümünü

$$x\lambda = \begin{cases} x\alpha, & x \in R(\mathcal{A}) \text{ ise} \\ x, & x \notin R(\mathcal{A}) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $\lambda \in S_n$ ve $\alpha = \xi\lambda$ olur. Ayrıca, $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\xi) = R(\mathcal{A})$ olduğundan $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olduğu da açıktır.

($\Leftarrow$) $\alpha \in D_r$ için $\alpha = \xi\lambda$ ve $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonu var olsun. O halde $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathrm{kp}(\xi\lambda) = \{A_1, \ldots, A_r\} = \mathrm{kp}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\xi\lambda) = \mathrm{im}(\xi)$ olup $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.4. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $K(n,r)$ de $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $K(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için (veya buna denk olarak, X_n nin her $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ parçalanışı ve $\mathcal{A}$ nın her $R(\mathcal{A})$ temsil kümesi için)

i) $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$ (veya buna denk olarak, $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathcal{A}$),

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ (veya buna denk olarak, $\mathrm{im}(\beta) = R(\mathcal{A})$) ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $K(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olsun. Ayrıca, $\xi \in D_r$ bir idempotent ve H_ξ, ξ idempotentini içeren ve dolayısıyla da bir grup olan H-Green denklik sınıfı olsun. X, $K(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğundan

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k = \xi$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X$ vardır. $k = 1$ iken sonuç açık olup $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\xi) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\xi) = r$ olduğundan $\ker(\alpha_1) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_k)$ olur. Ayrıca $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olup Önerme 3.2'den $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Dolayısıyla $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar var olup α_1, α_k ya bağlıdır. $\alpha = \alpha_1$ ve $\beta = \alpha_k$ alınırsa 3 koşul da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $K(n,r)$ yarıgrubunun her elemanı D_r deki idempotentlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğundan $E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\xi \in E(D_r)$ olsun. Yukarıda verilen koşullardan dolayı $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri vardır. O halde, $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_k = \beta$$

yönlü patikası vardır. Benzer şekilde burada da $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olup Önerme 3.2'den $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \in D_r$ olur. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\gamma)$, $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\gamma) = r$ olduğundan $\ker(\gamma) = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\gamma) = \mathrm{im}(\alpha_k) = \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğu elde edilir. O halde $(\gamma, \xi) \in H$ olur. ξ idempotentini içeren H-Green denklik sınıfı H_ξ sonlu bir grup, bu grubun birim elemanı ξ ve $\gamma \in H_\xi$ olduğundan $\gamma^m = \xi$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $\xi \in \langle X \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Yukarıda verilen ispatta $\gamma \in H_\xi$ olup Önerme 3.3'den dolayı $\gamma = \xi\lambda$ ve $\left(X_n \backslash \text{im}\,(\xi)\right) \subseteq \text{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonu vardır. λ permütasyonunun derecesi m olsun. $\xi\lambda\xi = \xi\lambda$ olduğu açıktır. Bu ifadeyi kullanarak $\forall k \geq 1$ için $(\xi\lambda)^k = \xi\lambda^k$ olduğunu k üzerinden tümevarım ile gösterelim.

$k = 1$ için $(\xi\lambda)^1 = \xi\lambda = \xi\lambda^1$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki iddia $k \geq 1$ için doğru, yani $(\xi\lambda)^k = \xi\lambda^k$ olsun. O halde

$$(\xi\lambda)^{k+1} = (\xi\lambda)(\xi\lambda)^k = (\xi\lambda)(\xi\lambda^k) = (\xi\lambda\xi)\lambda^k = (\xi\lambda)\lambda^k = \xi\lambda^{k+1}$$

olup $\forall k \geq 1$ için $(\xi\lambda)^k = \xi\lambda^k$ olduğu elde edilir. Böylece

$$\gamma^m = (\xi\lambda)^m = \xi\lambda^m = \xi$$

olur. O halde yukarıdaki ispatta bahsedilen $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısı λ permütasyonunun derecesi olarak alınabilir.

$2 \leq r \leq n-1$ için $K(n,r)$ yarıgrubunun rankının 2. Tip Stirling sayısı $\text{S}(n,r)$ olduğunu biliyoruz. Buradan aşağıdaki sonucu kolayca görebiliriz.

Sonuç 3.5. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $K(n,r)$ de tam olarak 2. Tip Stirling sayısı $\text{S}(n,r)$ tane eleman içeren $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$,

ii) $\text{im}(\beta) = \text{im}(\xi)$ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Şimdi vereceğimiz sonuç Teorem 3.4 ve Sonuç 3.5'in özel bir durumu olup $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olup olmadığını belirlemede kolay bir yöntem vermektedir.

Sonuç 3.6. $2 \leq r \leq n-1$, $q = \mathrm{S}(n,r)$ ve $K(n,r)$ de $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} \subseteq D_r$ olmak üzere $\forall \xi \in E(D_r)$ için $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri var olsun. Her $1 \leq i \leq q$ için $\mathrm{im}(\alpha_{j_i})$, $\alpha_{j_{i+1}}$ in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{j_{i+1}})$ in bir temsil kümesi $(\alpha_{j_{q+1}} = \alpha_{j_1})$ olacak şekilde bir q-devir $(j_1, \dots, j_q) \in S_q$ (simetrik grup) varsa X, $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

İspat: Sonuç 3.5'in son koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir.

Her $1 \leq i \leq q$ için $\mathrm{im}(\alpha_{j_i})$, $\alpha_{j_{i+1}}$ in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{j_{i+1}})$ in bir temsil kümesi $(\alpha_{j_{q+1}} = \alpha_{j_1})$ olacak şekilde bir q-devir $(j_1, \dots, j_q) \in S_q$ var olsun. Önerme 3.1'den her $1 \leq i \leq q$ için $\alpha_{j_i}\alpha_{j_{i+1}} \in D_r$ olup $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı her $1 \leq i \leq q$ için α_{j_i} den $\alpha_{j_{i+1}}$ e bir yönlü kenar var olur. Böylece $\mathbb{\Gamma}_X$ bir Hamiltonian yönlü grafiği ve dolayısıyla sıkı bağlantılı olup Sonuç 3.5'in son koşulu da sağlanır. ■

Örnek 3.7. $K(4,2)$ yarıgrubunu ve

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_7\} \subseteq D_2$ kümesini düşünelim (dikkat edilirse $\mathrm{S}(4,2) = 7$). Her $\xi \in E(D_2)$ için $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olduğu açıktır. Ayrıca her $1 \leq i \leq 7$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, α_{i+1} in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi $(\alpha_8 = \alpha_1)$ olacak şekilde bir 7-

devir $(1,\dots,7) \in S_7$ var olup Sonuç 3.6'dan X, $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

Not 3.8. $2 \leq r \leq n-1$ için $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi ise D_r deki idempotentleri X in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazarken yukarıda tanımladığımız $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğindeki yönlü patikaları kullanabiliriz. Örneğin; yukarıda verdiğimiz örnekte

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in E(D_2)$$

idempotentini düşünelim. $\ker(\xi) = \ker(\alpha_3)$, $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_5)$ ve

$$\alpha_3 \to \alpha_4 \to \alpha_5$$

$\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde bir yönlü patika olup $\ker(\alpha_3\alpha_4\alpha_5) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha_3\alpha_4\alpha_5) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğundan $\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \in H_\xi$ ve $(\alpha_3\alpha_4\alpha_5)^2 = \xi$ olur. Ayrıca,

$$\alpha_3 \to \alpha_2 \to \alpha_6 \to \alpha_5$$

$\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde başka bir yönlü patika olup $\ker(\alpha_3\alpha_2\alpha_6\alpha_5) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha_3\alpha_2\alpha_6\alpha_5) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğundan $\alpha_3\alpha_2\alpha_6\alpha_5 \in H_\xi$ ve $(\alpha_3\alpha_2\alpha_6\alpha_5)^2 = \xi$ olur. Böylece sözü geçen yazılışın tek türlü olmayabileceği kolayca görülmektedir.

Howie ve McFadden (1990), 164. sayfada verdikleri önerme ile $K(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal idempotent doğuray kümelerinin yapısını belirlemişlerdi. Biz de $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $K(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirlemek için kullanacağımız aşağıdaki iki önermeyi verelim.

Önerme 3.9. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_n nin r tane kümeye olan m tane farklı $P_1, \dots, P_m$ parçalanışı vardır.

İspat: Verilen iddiayı **P(n,r)** ile gösterelim. Howie ve McFadden'in (1990) kullandığı Pascal'ın Üçlü Gerektirme yöntemini n ve r üzerinden çifte indirgeme ile kullanarak, yani

P(n-1,r-1) ve **P(n-1,r)** $\Rightarrow$ **P(n,r)**

ile bu iddianın doğruluğunu ispatlayalım.

İddia (1): $n \geq 3$ için P(n,n-1) sağlanır.

$I_1, \dots, I_n$ X_n nin $n-1$ elemanlı tüm alt kümeleri ve $\forall 1 \leq i \leq n$ için $X_n \setminus I_i = \{x_i\}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \dots, \{x_n\}\}, \\ P_2 &= \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_n\}\}, \\ &\vdots \\ P_{n-1} &= \{\{x_1\}, \dots, \{x_{n-2}\}, \{x_{n-1}, x_n\}\}, \\ P_n &= \{\{x_2\}, \dots, \{x_{n-1}\}, \{x_n, x_1\}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan X_n nin $n-1$ tane kümeye olan n tane farklı $P_1, \dots, P_n$ parçalanışı isteneni sağlar.

İddia (2): $n \geq 3$ için P(n,2) sağlanır.

Bu iddiayı n üzerinden tümevarım ile gösterelim. İddia (1)'den dolayı P(3,2) sağlanır. $n \geq 4$ için P(n-1,2) in sağlanıyor olduğunu kabul edelim. O halde $\binom{n-1}{2} = t$ ve $I_1, \dots, I_t$ X_{n-1} in 2 elemanlı tüm alt kümeleri olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq t$ için I_i, U_i nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_{n-1} in 2 tane kümeye olan t tane farklı $U_1, \dots, U_t$ parçalanışı vardır. Bu durumda X_n in 2 elemanlı tüm alt kümeleri $I_1, \dots, I_t$, $I_{t+1} = \{1, n\}, I_{t+2} = \{2, n\}, \dots, I_{t+(n-1)} = \{n-1, n\}$ olur (gerçekten de $t + (n-1) = \binom{n-1}{2} + (n-1) = \binom{n}{2}$ olur). $\forall 1 \leq i \leq t$ için $U_i = \{A_{i_1}, A_{i_2}\}$ olmak üzere genelliği bozmaksızın $1 \in A_{i_1}$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$P_i = \begin{cases} \{A_{i_1} \cup \{n\}, A_{i_2}\}, & 1 \leq i \leq t \text{ için} \\ \{\{1, i-t\}, X_n \backslash \{1, i-t\}\}, & t+1 \leq i \leq t+n-1 \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan X_n nin 2 tane kümeye olan $t + (n-1)$ tane farklı $P_1, \dots, P_{t+(n-1)}$ parçalanışı isteneni sağlar.

İddia (3): $n \geq 5$ ve $3 \leq r \leq n-2$ için P(n-1,r-1) ve P(n-1,r) $\Rightarrow$ P(n,r) sağlanır.

$n \geq 5$ ve $3 \leq r \leq n-2$ için P(n-1,r-1) ve P(n-1,r) önermelerinin sağlandığını kabul edelim. P(n-1,r) sağlanıyor olduğundan $\binom{n-1}{r} = t$ ve $I_1, \dots, I_t$ X_{n-1} in r elemanlı tüm alt kümeleri olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq t$ için I_i, $U_i = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_{n-1} in r tane kümeye olan t tane farklı $U_1, \dots, U_t$ parçalanışı vardır. P(n-1,r-1) sağlanıyor olduğundan $\binom{n-1}{r-1} = k$ ve $J_1, \dots, J_k$ X_{n-1} in $r-1$ elemanlı tüm alt kümeleri olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq k$ için J_i, V_i nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_{n-1} in $r-1$ tane kümeye olan k tane farklı $V_1, \dots, V_k$ parçalanışı vardır. Her $1 \leq i \leq k$ için $I_{t+i} = J_i \cup \{n\}$ şeklinde tanımlansın. Böylece X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri $I_1, \dots, I_t, I_{t+1}, \dots, I_{t+k}$ olur (gerçekten de $t + k = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$ olur). Böylece

$$P_i = \begin{cases} \{A_{i_1} \cup \{n\}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}\}, & 1 \leq i \leq t \text{ için} \\ V_{i-t} \cup \{\{n\}\}, & t+1 \leq i \leq t+k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan X_n nin r tane kümeye olan $t + k$ tane farklı $P_1, \dots, P_{t+k}$ parçalanışı isteneni sağlar. ■

Ö**nerme 3.10**. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\text{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\ker(\alpha_i) \neq \ker(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\text{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\text{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır.

İspat: $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. Önerme 3.9'dan $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, $P_i = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_n nin r tane kümeye olan m tane farklı $P_1, \dots, P_m$ parçalanışı vardır. $I_1 = \{a_{m_1}, \dots, a_{m_r}\}$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için $I_{i+1} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ olmak üzere

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_{m_1} & \dots & A_{m_r} \\ a_{m_1} & \dots & a_{m_r} \end{pmatrix}$$

ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i_1} & \dots & A_{i_r} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_r} \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ olur ve verilen koşullar sağlanır. ■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 3.9 ve 3.10, Howie ve McFadden (1990) tarafından sayfa 164'te verilen önermeye çok benzemesine rağmen bazı önemli farklar içeriyor olup bu önermeyi daha da genelleştirmektedir. Gerçekten de, Önerme 3.10'da tanımlanan $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri idempotent olmak ve hatta grup olan H-Green denklik sınıflarından olmak zorunda değillerdir. Ayrıca, Önerme 3.10'da verilen X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri $I_1, \dots, I_m$ herhangi bir sırada olabilir ve $1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, $\mathrm{kp}(\alpha_i)$ nin bir temsil kümesi olmak zorunda da değildir. Böylece, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $K(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını Önerme 3.9 ve 3.10'u kullanarak kolayca belirleyebiliriz.

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n}{r} = m$ ve $\mathrm{S}(n,r) = t$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri ve $R_1, \dots, R_t$; D_r deki tüm R–Green denklik sınıflarının

listesi olsun (Önerme 2.5.15'ten D_r de $\mathrm{S}(n,r)$ tane $\mathcal{R}$–Green denklik sınıfının var olduğunu biliyoruz). Önerme 3.10'dan

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\ker(\alpha_i) \neq \ker(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\mathrm{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i$ olduğunu kabul edelim ve $\forall 1 \leq j \leq t-m$ için R_{m+j} den rastgele bir α_{m+j} elemanı alalım. Sonuç 3.5'ten $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_t\}$ kümesinin $K(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu kolayca görülmektedir.

4. $\boldsymbol{PK(n,r)}$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ

$X_n \cup \{0\}$ kümesi üzerinde tanımlı (tam) dönüşümler yarıgrubu $T_{X_n \cup \{0\}}$ da yer alan $0\alpha = 0$ olacak şekildeki tüm α dönüşümlerinin kümesini P_n^* ile gösterelim. Vagner (1956), P_n^* kümesinin $T_{X_n \cup \{0\}}$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğunu ve P_n ile P_n^* arasında bir izomorfizm olduğunu göstermiştir. Gerçekten de herhangi bir $\alpha \in P_n$ için

$$\alpha^* : X_n \cup \{0\} \rightarrow X_n \cup \{0\}$$
$$x\alpha^* = \begin{cases} x\alpha, & x \in \mathrm{dom}(\alpha) \text{ ise} \\ 0, & x \notin \mathrm{dom}(\alpha) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan α^* dönüşümünü ele aldığımızda $\alpha^* \in P_n^*$ olduğu açıktır. Ayrıca $\forall \alpha \in P_n$ için $\alpha\gamma = \alpha^*$ şeklinde tanımlanan $\gamma : P_n \rightarrow P_n^*$ dönüşümünün de bir izomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir. Bu izomorfizm T_n yarıgrubundaki bazı sonuçları P_n yarıgrubunda sağlanan benzer sonuçlara çevirmek için oldukça yararlı bir araç olmaktadır. P_n ile P_n^* arasındaki bu izomorfizm P_n de yüksekliği r $(1 \leq r \leq n)$ olan bir elemanı P_n^* da yüksekliği $r + 1$ olan bir elemana eşler. Böylece

$$PK(n,r) \cong K^*(n+1, r+1) = \{\alpha \in P_n^* : |\mathrm{im}(\alpha)| \leq r+1\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

$2 \leq r \leq n-1$ ve $D_r^* = \{\alpha \in P_n^* : |\mathrm{im}(\alpha)| = r\}$ olmak üzere Garba (1990), Lemma 2.6 ve 2.7'nin bir sonucu olarak $K^*(n+1, r) = \langle E(D_r^*) \rangle$ olduğunu ve yukarıdaki izomorfizm sayesinde de $PK(n,r)$ yarıgrubunun rankının 2. Tip Stirling sayısı $S(n+1, r+1)$ olduğunu göstermişti. Biz de bu bölümde, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PK(n,r)$ yarıgrubunun herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmaya çalışacağız.

$K(n,r)$ de olduğu gibi $K^*(n+1, r+1)$ in bir doğuray kümesini araştırırken de sadece $K^*(n+1, r+1)$ deki $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfı D_{r+1}^* ın alt kümelerini düşünmek yeterlidir. Ayrıca, D_{r+1}^* ın bir A alt kümesinin $K^*(n+1, r+1)$ nin bir

doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_{r+1}^*) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır. P_n ile P_n^* arasındaki izomorfizm sayesinde, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesini araştırırken sadece $PK(n,r)$ deki D-Green denklik sınıfı D_r nin alt kümelerini düşünmenin yeterli olduğu ve D_r nin bir A alt kümesinin $PK(n,r)$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $E(D_r) \subseteq \langle A \rangle$ olması olduğu sonucu elde edilir.

$1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere A_{r+1}, X_n nin $|A_{r+1}| \leq n-r$ olacak şekildeki bir alt kümesi, $\{A_1, \ldots, A_r\}$, $X_n \setminus A_{r+1}$ in bir parçalanışı ve $\{a_1, \ldots, a_r\}$, X_n nin r elemanlı bir alt kümesi olsun. P_n de çekirdek parçalanışı $\{A_1, \ldots, A_r\}$ ve görüntü kümesi $\{a_1, \ldots, a_r\}$ olan kısmi dönüşümlerin oluşturduğu H –Green denklik sınıfını

$$\mathbf{H}=H_{\{a_1,\ldots,a_r\}}^{\{A_1,\ldots,A_r\}}$$

ile gösterelim. $\alpha \in \mathbf{H}$ dönüşümünün bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in A_{k_i}$ ve $(A_{k_i})\alpha = \{a_i\}$ olacak şekilde bir tek $1 \leq k_i \leq r$ sayısının var olmasıdır. O halde, **H** nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul $\{a_1, \ldots, a_r\}$ kümesinin, $X_n \setminus A_{r+1}$ in $\{A_1, \ldots, A_r\}$ parçalanışının bir temsil kümesi olmasıdır.

Önerme 4.1. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n$ ve $PK(n,r)$ de $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$ olmasıdır. Başka bir ifade ile, $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$ ve $y \neq z$ olacak şekildeki $\forall y, z \in \mathrm{im}(\alpha)$ için $y\beta \neq z\beta$ olması, yani $\mathrm{im}(\alpha)$ nın, β nın çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır.

İspat: Önerme 3.1'e benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 4.2. $n, k \geq 2$, $1 \leq r \leq n$ ve $PK(n,r)$ de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2'ye benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 4.3. $1 \leq r \leq n-1$ için A_{r+1}, X_n nin $|A_{r+1}| \leq n-r$ olacak şekildeki bir alt kümesi, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$, $X_n \backslash A_{r+1}$ in bir parçalanışı ve $R(\mathcal{A})$ da $\mathcal{A}$ nın bir temsil kümesi olmak üzere $H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ grubunun idempotenti ξ ile gösterilsin ve $\alpha \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \xi\lambda$ ve $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonunun var olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olsun. $\lambda: X_n \to X_n$ dönüşümünü

$$x\lambda = \begin{cases} x\alpha, & x \in R(\mathcal{A}) \text{ ise} \\ x, & x \notin R(\mathcal{A}) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $\lambda \in S_n$ ve $\alpha = \xi\lambda$ olur. Ayrıca, $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\xi) = R(\mathcal{A})$ olduğundan $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olduğu da açıktır.

($\Leftarrow$) $\alpha \in D_r$ için $\alpha = \xi\lambda$ ve $\big(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\big) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonu var olsun. O halde $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi\lambda) = (\{A_1, \dots, A_r\}, A_{r+1}) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\xi\lambda) = \mathrm{im}(\xi)$ olup $\alpha \in H_{R(\mathcal{A})}^{\mathcal{A}}$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.4. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $PK(n,r)$ de $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olsun. Ayrıca, $\xi \in D_r$ bir idempotent ve H_ξ, ξ idempotentini içeren ve dolayısıyla da bir grup olan

H-Green denklik sınıfı olsun. X, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğundan

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k = \xi$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X$ vardır. $k = 1$ iken sonuç açık olup $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\xi) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\xi) = r$ olduğundan $\ker(\alpha_1) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_k)$ olur. Ayrıca $\mathrm{dom}(\alpha_1 \cdots \alpha_k) = \mathrm{dom}(\xi) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha_1)$ olup $\mathrm{ks}(\alpha_1) = \mathrm{ks}(\xi)$ olur. $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olup Önerme 4.2'den $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Dolayısıyla $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar var olup α_1, α_k ya bağlıdır. $\alpha = \alpha_1$ ve $\beta = \alpha_k$ alınırsa 3 koşul da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $PK(n,r)$ yarıgrubunun her elemanı D_r deki idempotentlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğundan $E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\xi \in E(D_r)$ olsun. Yukarıda verilen koşullardan dolayı $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$, $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri vardır. O halde, $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_k = \beta$$

yönlü patikası vardır. Benzer şekilde burada da $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olup Önerme 4.2'den $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \in D_r$ olur. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\gamma)$, $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\gamma) = r$ olduğundan $\ker(\gamma) = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\gamma) = \mathrm{im}(\alpha_k) = \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{dom}(\alpha)$ olup $\mathrm{ks}(\gamma) = \mathrm{ks}(\alpha_1) = \mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$ olur. O halde $(\gamma, \xi) \in H$ olur. ξ idempotentini içeren H-Green denklik sınıfı H_ξ sonlu bir grup, bu grubun birim elemanı ξ ve $\gamma \in H_\xi$ olduğundan $\gamma^m = \xi$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $\xi \in \langle X \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Yukarıda verilen ispatta $\gamma \in H_\xi$ olup Önerme 4.3'den dolayı $\gamma = \xi\lambda$ ve $\left(X_n \backslash \mathrm{im}(\xi)\right) \subseteq \mathrm{Fix}(\lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in S_n$ permütasyonu vardır. λ permütasyonunun derecesi m olsun. $\xi\lambda\xi = \xi\lambda$ olduğu açıktır. Daha öncekine benzer şekilde $\forall k \geq 1$ için $(\xi\lambda)^k = \xi\lambda^k$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece

$$\gamma^m = (\xi\lambda)^m = \xi\lambda^m = \xi$$

olup yukarıdaki ispatta bahsedilen $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısı λ permütasyonunun derecesi olarak alınabilir.

$2 \leq r \leq n-1$ için $PK(n,r)$ yarıgrubunun rankının 2. Tip Stirling sayısı $\mathrm{S}(n+1, r+1)$ olduğunu biliyoruz. Buradan aşağıdaki sonucu kolayca görebiliriz.

Sonuç 4.5. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $PK(n,r)$ de tam olarak 2. Tip Stirling sayısı $\mathrm{S}(n+1, r+1)$ tane eleman içeren $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Şimdi vereceğimiz sonuç Teorem 4.4 ve Sonuç 4.5'in özel bir durumu olup $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olup olmadığını belirlemede kolay bir yöntem vermektedir.

Sonuç 4.6. $2 \leq r \leq n-1$, $q = S(n,r)$ ve $PK(n,r)$ de $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} \subseteq D_r$ olmak üzere $\forall \xi \in E(D_r)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri var olsun. Her $1 \leq i \leq q$ için $\mathrm{im}(\alpha_{j_i})$, $\alpha_{j_{i+1}}$ in çekirdek parçalanışı

$\mathrm{kp}(\alpha_{j_{i+1}})$ in bir temsil kümesi ($\alpha_{j_{q+1}} = \alpha_{j_1}$) olacak şekilde bir q-devir $(j_1, \dots, j_q) \in S_q$ varsa X, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

İspat: Sonuç 4.5'in son koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir.

Her $1 \le i \le q$ için $\mathrm{im}(\alpha_{j_i})$, $\alpha_{j_{i+1}}$ in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{j_{i+1}})$ in bir temsil kümesi ($\alpha_{j_{q+1}} = \alpha_{j_1}$) olacak şekilde bir q-devir $(j_1, \dots, j_q) \in S_q$ var olsun. Önerme 4.1'den her $1 \le i \le q$ için $\alpha_{j_i}\alpha_{j_{i+1}} \in D_r$ olup $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı her $1 \le i \le q$ için α_{j_i} den $\alpha_{j_{i+1}}$ e bir yönlü kenar var olur. Böylece $\mathbb{\Gamma}_X$ bir Hamiltonian yönlü grafiği ve dolayısıyla sıkı bağlantılı olup Sonuç 4.5'in son koşulu sağlanır. ■

Örnek 4.7. $PK(3,2)$ yarıgrubunu ve

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 1 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\} \subseteq D_2$ kümesini düşünelim (dikkat edilirse $\mathrm{S}(4,3) = 6$). Her $\xi \in E(D_2)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olduğu açıktır. Ayrıca her $1 \le i \le 6$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, α_{i+1} in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ($\alpha_7 = \alpha_1$) olacak şekilde bir 6-devir $(1, \dots, 6) \in S_6$ var olup Sonuç 4.6'dan X, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

Not 4.8. $2 \le r \le n-1$ için $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi ise D_r deki idempotentleri X in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazarken yukarıda tanımladığımız $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğindeki yönlü patikaları kullanabiliriz. Örneğin, yukarıda verdiğimiz örnekte

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix} \in E(D_2)$$

idempotentini düşünelim. $\mathrm{ks}(\xi) = \mathrm{ks}(\alpha_1)$, $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_3)$ ve

$$\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3$$

$\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde bir yönlü patika olup $\mathrm{ks}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğundan $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \in H_\xi$ ve $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 = \xi$ olur. Bu yazılışın tek türlü olmayabileceği de kolayca görülmektedir.

Garba (1990), Teorem 4.1'in ispatında verdiği önerme ile $PK(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal idempotent doğuray kümelerinin yapısını belirlemişti. Biz de, $2 \le r \le n-1$ olmak üzere, $PK(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirlemek için kullanacağımız aşağıdaki iki önermeyi verelim.

Önerme 4.9. $2 \le r \le n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde, $\forall 1 \le i \le m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi ve $1 \le i \ne j \le m$ için $P_i \ne P_j$ olacak şekilde X_n nin bir $A_{i_{r+1}}$ alt kümesi ve $X_n \setminus A_{i_{r+1}}$ in bir $P_i = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ parçalanışı vardır.

İspat : $2 \le r \le n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri ve $1 \le i \le m$ için $I_i = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ olsun. O halde $1 \le i \le m$ için tanımlanan

$$A_{i_{r+1}} = X_n \setminus I_i \text{ ve } P_i = \{\{a_{i_1}\}, \dots, \{a_{i_r}\}\}$$

kümeleri isteneni sağlar. ■

Önerme 4.10. $2 \le r \le n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\mathrm{ks}(\alpha_i) \neq \mathrm{ks}(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\mathrm{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır.

İspat: $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \ldots, I_m$; X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. Önerme 4.9'dan $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi ve $1 \leq i \neq j \leq m$ için $P_i \neq P_j$ olacak şekilde X_n nin bir $A_{i_{r+1}}$ alt kümesi ve $X_n \setminus A_{i_{r+1}}$ in bir $P_i = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ parçalanışı vardır. $I_1 = \{a_{m_1}, \ldots, a_{m_r}\}$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için $I_{i+1} = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$ olmak üzere

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_{m_1} & \ldots & A_{m_r} & A_{m_{r+1}} \\ a_{m_1} & \ldots & a_{m_r} & - \end{pmatrix}$$

ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i_1} & \ldots & A_{i_r} & A_{i_{r+1}} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_r} & - \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D_r$ olur ve verilen koşullar sağlanır. ■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 4.9 ve 4.10, Garba (1990) tarafından Teorem 4.1'in ispatında verilen önermeye çok benzemesine rağmen bazı önemli farklar içeriyor olup bu önermeyi daha da genelleştirmektedir. Gerçekten de, Önerme 4.10'da tanımlanan $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri idempotent olmak ve hatta grup olan H-Green denklik sınıflarından olmak zorunda değillerdir. Ayrıca, Önerme 4.10'da verilen X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri $I_1, \ldots, I_m$ herhangi bir sırada olabilir ve $1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, $\mathrm{kp}(\alpha_i)$ nin bir temsil kümesi olmak zorunda da değildir. Böylece, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PK(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal

doğuray kümelerinin yapısını Önerme 4.9 ve 4.10'u kullanarak kolayca belirleyebiliriz.

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n}{r} = m$ ve $\mathrm{S}(n+1, r+1) = t$ olmak üzere $I_1, \ldots, I_m$, X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri ve $R_1, \ldots, R_t$ de D_r deki tüm $\mathcal{R}$–Green denklik sınıflarının listesi olsun (Önerme 2.5.14'ten D_r de $\mathrm{S}(n+1, r+1)$ tane $\mathcal{R}$–Green denklik sınıfının var olduğunu biliyoruz). Önerme 4.10'dan

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\mathrm{ks}(\alpha_i) \neq \mathrm{ks}(\alpha_j)$, ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\mathrm{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i$ olduğunu kabul edelim ve $\forall 1 \leq j \leq t-m$ için R_{m+j} den rastgele bir α_{m+j} elemanı alalım. Sonuç 4.5'ten $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_t\}$ kümesinin $PK(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu kolayca görülmektedir.

5. $O(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ

Howie (1971), O_n yarıgrubunun yüksekliği $n-1$ olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu ve Gomes ile birlikte (Gomes ve Howie, 1992) rankının n olduğunu göstermişti. Daha sonra Garba (1994), $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere, $O(n,r)$ alt yarıgrubunun yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu ve rankının da $\binom{n}{r}$ olduğunu gösterdi. Dikkat edilirse $O(n,n-1) = O_n$ ve $\binom{n}{n-1} = n$ olup $2 \leq r \leq n-1$ için $O(n,r)$ alt yarıgrubunun rankı $\binom{n}{r}$ olur. Biz de bu bölümde, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $O(n,r)$ yarıgrubunun herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmaya çalışacağız.

$2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $O(n,r)$ de herhangi bir $\alpha \in D_k$ $(1 \leq k \leq r)$ sıra-koruyan dönüşümü yüksekliği k sayısından küçük olan sıra-koruyan dönüşümlerin bir çarpımı şeklinde yazılamayacağından ve $O(n,r)$ alt yarıgrubu yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğurulduğundan $O(n,r)$ nin bir doğuray kümesini araştırırken sadece $O(n,r)$ deki $\mathcal{D}$-Green denklik sınıfı D_r nin alt kümelerini düşünmek yeterlidir. Ayrıca, D_r nin bir A alt kümesinin $O(n,r)$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır.

Önerme 5.1. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $O(n,r)$ de $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$ olmasıdır. Başka bir ifade ile, $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha)$ nın, β nın konveks sıralı çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır.

İspat: Önerme 3.1'e benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 5.2. $n, k \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $O(n,r)$ de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2'ye benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 5.3. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $O(n,r)$ de $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $O(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için (veya buna denk olarak, X_n nin her konveks sıralı $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_r)$ parçalanışı ve $\mathcal{A}$ nın her $R(\mathcal{A})$ temsil kümesi için)

i) $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$ (veya buna denk olarak, $\mathrm{kp}(\alpha) = \mathcal{A}$),

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ (veya buna denk olarak, $\mathrm{im}(\beta) = R(\mathcal{A})$) ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $O(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi ve $\xi \in D_r$ bir idempotent olsun. X, $O(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğundan

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k = \xi$$

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in X$ vardır. $k = 1$ iken sonuç açık olup $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\xi) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\xi) = r$ olduğundan $\ker(\alpha_1) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_k)$ olur. Ayrıca $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olup Önerme 4.2'den $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Dolayısıyla da $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar var olup α_1, α_k ya bağlıdır. $\alpha = \alpha_1$ ve $\beta = \alpha_k$ alınırsa 3 koşul da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $O(n,r)$ yarıgrubunun her elemanı D_r deki idempotentlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğundan $E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\xi \in E(D_r)$ olsun. Yukarıda verilen koşullardan dolayı $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri vardır. O halde, $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_k = \beta$$

yönlü patikası vardır. Benzer şekilde burada da $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olup Önerme 5.2'den $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k \in D_r$ olur. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\gamma)$, $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathrm{im}\,(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\gamma) = r$ olduğundan $\ker(\gamma) = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\gamma) = \mathrm{im}(\alpha_k) = \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğu elde edilir. O halde $(\gamma, \xi) \in H$ olup Önerme 2.6.6'dan $\xi = \gamma \in \langle X \rangle$ olduğu elde edilir. ■

$2 \leq r \leq n-1$ için $O(n,r)$ yarıgrubunun rankının $\binom{n}{r}$ olduğunu biliyoruz. Buradan aşağıdaki sonucu kolayca görebiliriz.

Sonuç 5.4. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $O(n,r)$ de tam olarak $\binom{n}{r}$ tane eleman içeren $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $O(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Örnek 5.5. $O(4,2)$ yarıgrubunu ve

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\} \subseteq D_2$ kümesini düşünelim (dikkat edilirse $\binom{4}{2} = 6$). Her $\xi \in E(D_2)$ için $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olduğu açıktır. Ayrıca her $1 \leq i \leq 6$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, α_{i+1} in

konveks sıralı çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi olup $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar vardır ($\alpha_7 = \alpha_1$). O halde $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiği bir Hamiltonian yönlü grafiği ve dolayısıyla sıkı bağlantılı olup Sonuç 5.4'ün son koşulu da sağlanır. Dolayısıyla X, $O(4,2)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

Not 5.6. $2 \leq r \leq n-1$ için $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $O(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi ise D_r deki idempotentleri X in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazarken yukarıda tanımladığımız $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğindeki yönlü patikaları kullanabiliriz. Örneğin, yukarıda verdiğimiz örnekte

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in E(D_2)$$

idempotentini düşünelim. $\ker(\xi) = \ker(\alpha_1)$, $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_3)$ ve

$$\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3$$

$\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde bir yönlü patika olup $\ker(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğundan $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \xi$ olur. Ayrıca, bu yazılışın tek türlü olmayabileceği de kolayca görülmektedir.

Garba (1994), 189. sayfada verdiği önerme ve Lemma 2.3 ile $2 \leq r \leq n-2$ için $O(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal idempotent doğuray kümelerinin yapısını belirlemişti. Biz de, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $O(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirlemek için kullanacağımız aşağıdaki iki önermeyi verelim.

Önerme 5.7. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n-1}{r-1} = m$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları olsun. O halde $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_n nin her biri r elemanlı olan m tane farklı $I_1, \dots, I_m$ alt kümesi vardır.

İspat: Verilen iddiayı P(n,r) ile gösterelim. Howie ile McFadden'in (1990) ve Garba'nın (1994) kullandığı Pascal'ın Üçlü Gerektirme yöntemini n ve r üzerinden çifte indirgeme ile kullanarak, yani

$$\text{P(n-1,r-1) ve P(n-1,r)} \Rightarrow \text{P(n,r)}$$

ile bu iddianın doğruluğunu ispatlayalım.

İddia (1): $n \geq 3$ için P(n,n-1) sağlanır.

X_n nin $n-1$ tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları

$$\begin{aligned} P_1 &= (\{1,2\},\{3\},\dots,\{n\}),\\ P_2 &= (\{1\},\{2,3\},\dots,\{n\}),\\ &\vdots\\ P_{n-1} &= (\{1\},\dots,\{n-2\},\{n-1,n\}) \end{aligned}$$

şeklinde olup $\forall 1 \leq i \leq n-1$ için $I_i = X_n \backslash \{i\}$ olarak tanımlanan X_n nin $I_1,\dots,I_{n-1}$ alt kümeleri isteneni sağlar.

İddia (2): $n \geq 3$ için P(n,2) sağlanır.

X_n nin 2 tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları

$$P_i = (\{1,\dots,i\},\{i+1,\dots,n\}) \quad 1 \leq i \leq n-1$$

şeklinde olup $\forall 1 \leq i \leq n-1$ için $I_i = \{i,n\}$ olarak tanımlanan X_n nin $I_1,\dots,I_{n-1}$ alt kümeleri isteneni sağlar.

İddia (3): $n \geq 5$ ve $3 \leq r \leq n-2$ için P(n-1,r-1) ve P(n-1,r) $\Rightarrow$ P(n,r) sağlanır.

$n \geq 5$ ve $3 \leq r \leq n-2$ için P(n-1,r-1) ve P(n-1,r) önermelerinin sağlandığını kabul edelim. P(n-1,r) sağlanıyor olduğundan $\binom{n-2}{r-1} = t$ ve $U_1,\dots,U_t$ X_{n-1} in r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq t$ için I_i, $U_i = \left(A_{i_1},\dots,A_{i_r}\right)$ nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_{n-1} in her biri r elemanlı olan t tane farklı $I_1,\dots,I_t$ alt kümesi vardır. P(n-1,r-1) sağlanıyor

olduğundan $\binom{n-2}{r-2} = k$ ve $V_1, \dots, V_k$ X_{n-1} in $r-1$ tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları olmak üzere $\forall 1 \leq j \leq k$ için J_j, $V_j = \left(B_{j_1}, \dots, B_{j_{r-1}}\right)$ nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_{n-1} in her biri $r-1$ elemanlı olan k tane farklı $J_1, \dots, J_k$ alt kümesi vardır. Her $1 \leq i \leq t$ için

$$P_i = \left(A_{i_1}, \dots, A_{i_r} \cup \{n\}\right),$$

ve her $1 \leq j \leq k$ için

$$P_{t+j} = \left(B_{j_1}, \dots, B_{j_{r-1}}, \{n\}\right)$$

olarak tanımlansın. Böylece X_n nin r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları $P_1, \dots, P_t, P_{t+1}, \dots, P_{t+k}$ olur (gerçekten de $t + k = \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} = \binom{n-1}{r-1}$ olur). Böylece

$$T_i = \begin{cases} I_i, & 1 \leq i \leq t \text{ için} \\ J_{i-t} \cup \{n\}, & t+1 \leq i \leq t+k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan X_n nin her biri r elemanlı olan $t + k$ tane farklı $T_1, \dots, T_{t+k}$ alt kümesi isteneni sağlar. ■

Önerme 5.8. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n-1}{r-1} = m$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları olsun. O halde

i) $\mathrm{kp}(\alpha_1) = P_m$ ve $\forall 1 < i \leq m$ için $\mathrm{kp}(\alpha_i) = P_{i-1}$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) \neq \mathrm{im}(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve $\mathrm{im}(\alpha_m)$, $\mathrm{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır.

İspat: $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n-1}{r-1} = m$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları olsun. Önerme 5.7'den $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, $P_i = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ nin bir temsil kümesi olacak şekilde X_n nin her biri r elemanlı olan m tane farklı $I_1, \dots, I_m$ alt kümesi vardır. $I_1 = \{a_{m_1}, \dots, a_{m_r}\}$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için $I_{i+1} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ olmak üzere

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_{m_1} & \dots & A_{m_r} \\ a_{m_1} & \dots & a_{m_r} \end{pmatrix}$$

ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i_1} & \dots & A_{i_r} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_r} \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ olur ve verilen koşullar sağlanır. ■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 5.7 ve 5.8, Garba (1994) tarafından 189. sayfada verilen önerme ve Lemma 2.3'e çok benzemesine rağmen bazı önemli farklar içeriyor olup bu önermeyi daha da genelleştirmektedir. Gerçekten de, Önerme 5.8'de tanımlanan $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri idempotent olmak zorunda değillerdir. Ayrıca, Önerme 5.8'de verilen X_n nin r tane kümeye olan $P_1, \dots, P_m$ konveks sıralı parçalanışları herhangi bir sırada olabilir ve $1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, $\mathrm{kp}(\alpha_i)$, nin bir temsil kümesi olmak zorunda da değildir. Böylece $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $O(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını Önerme 5.7 ve 5.8'i kullanarak kolayca belirleyebiliriz.

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n-1}{r-1} = m$ ve $\binom{n}{r} = t$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane kümeye olan tüm konveks sıralı parçalanışları ve $L_1, \dots, L_t$ de D_r deki tüm L-Green denklik sınıflarının listesi olsun. Önerme 5.8'den

i) $\text{kp}(\alpha_1) = P_m$ ve $\forall 1 < i \leq m$ için $\text{kp}(\alpha_i) = P_{i-1}$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\text{im}(\alpha_i) \neq \text{im}(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için $\text{im}(\alpha_i)$, $\text{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve $\text{im}(\alpha_m)$, $\text{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in L_i$ olduğunu kabul edelim ve $\forall 1 \leq j \leq t-m$ için L_{m+j} den rastgele bir α_{m+j} elemanı alalım. Sonuç 5.4'ten $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$ kümesinin $O(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu kolayca görülmektedir.

6. $PO(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ

Gomes ve Howie (1992), PO_n yarıgrubunun yüksekliği $n-1$ olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu ve rankının $2n-1$ olduğunu göstermişti. Daha sonra da Garba (1994), $2 \leq r \leq n-2$ için $PO(n,r)$ alt yarıgrubunun yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu ve rankının $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ olduğunu gösterdi. Dikkat edilirse $PO(n,n-1) = PO_n$ ve $\sum_{k=n-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{n-2} = 2n-1$ olup $2 \leq r \leq n-1$ için $PO(n,r)$ alt yarıgrubunun rankı $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ olur. Biz de bu bölümde, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PO(n,r)$ yarıgrubunun herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmaya çalışacağız.

$O(n,r)$ de olduğu gibi, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PO(n,r)$ nin bir doğuray kümesini araştırırken de sadece $PO(n,r)$ deki D-Green denklik sınıfı D_r nin alt kümelerini düşünmek yeterlidir ve D_r nin bir A alt kümesinin $PO(n,r)$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır.

Önerme 6.1. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $PO(n,r)$ de $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$ olmasıdır. Başka bir ifade ile, $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha)$ nın, β nın sıralı çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır.

İspat: Önerme 3.1'e benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 6.2. $n, k \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $PO(n,r)$ de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2'ye benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 6.3. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $PO(n,r)$ de $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $PO(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $PO(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi ve $\xi \in D_r$ bir idempotent olsun. X, $O(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğundan

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k = \xi$$

olacak şekilde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in X$ vardır. $k = 1$ iken sonuç açık olup $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\xi)$, $\mathrm{im}(\xi) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\xi) = r$ olduğundan $\ker(\alpha_1) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_k)$ olur. Ayrıca $\mathrm{dom}(\alpha_1 \cdots \alpha_k) = \mathrm{dom}(\xi) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha_1)$ olup $\mathrm{ks}(\alpha_1) = \mathrm{ks}(\xi)$ olur. $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olup Önerme 6.2'den $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Dolayısıyla da $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar var olup α_1, α_k ya bağlıdır. $\alpha = \alpha_1$ ve $\beta = \alpha_k$ alınırsa 3 koşul da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $O(n,r)$ yarıgrubunun her elemanı D_r deki idempotentlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğundan $E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\xi \in E(D_r)$ olsun. Yukarıda verilen koşullardan dolayı $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$, $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümleri vardır. O halde, $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_k = \beta$$

yönlü patikası vardır. Benzer şekilde burada da $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i\alpha_{i+1} \in D_r$ olup Önerme 6.2'den $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k \in D_r$ olur. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\gamma)$, $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_k)$ olup $\mathrm{h}(\alpha_1) = \mathrm{h}(\alpha_k) = \mathrm{h}(\gamma) = r$ olduğundan $\ker(\gamma) = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha) = \ker(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\gamma) = \mathrm{im}(\alpha_k) = \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğu elde edilir. O halde $(\gamma, \xi) \in H$ olup Önerme 2.6.6'dan $\xi = \gamma \in \langle X \rangle$ olduğu elde edilir. ■

$2 \leq r \leq n-1$ için $PO(n,r)$ yarıgrubunun rankının $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan aşağıdaki sonucu kolayca görebiliriz.

Sonuç 6.4. $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $PO(n,r)$ de tam olarak $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ tane eleman içeren $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $PO(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Örnek 6.5. $PO(3,2)$ yarıgrubunu ve

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\} \subseteq D_2$ kümesini düşünelim (dikkat edilirse $\sum_{k=2}^{3}\binom{3}{k}\binom{k-1}{1} = 5$). Her $\xi \in E(D_2)$ için $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olduğu açıktır. Ayrıca her $1 \leq i \leq 5$ için $\mathrm{im}(\alpha_i)$, α_{i+1} in çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi olup $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α_i den α_{i+1} e bir yönlü kenar vardır ($\alpha_6 = \alpha_1$). O halde $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiği

bir Hamiltonian yönlü grafiği ve dolayısıyla sıkı bağlantılı olup Sonuç 6.4'ün son koşulu da sağlanır. Dolayısıyla X, $PO(3,2)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesidir.

Not 6.6. $2 \leq r \leq n-1$ için $\emptyset \neq X \subseteq D_r$, $PO(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi ise D_r deki idempotentleri X in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazarken yukarıda tanımladığımız $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğindeki yönlü patikaları kullanabiliriz. Örneğin, yukarıda verdiğimiz örnekte

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in E(D_2)$$

idempotentini düşünelim. $\mathrm{ks}(\xi) = \mathrm{ks}(\alpha_2)$, $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{im}(\alpha_4)$ ve

$$\alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_4$$

$\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde bir yönlü patika olup $\mathrm{ks}(\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \mathrm{ks}(\xi)$ ve $\mathrm{im}(\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \mathrm{im}(\xi)$ olduğundan $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \xi$ olur. Bu yazılışın tek türlü olmayabileceği de kolayca görülmektedir.

Garba (1994), 195. sayfada verdikleri önerme ve Lemma 3.3 ile $PO(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal idempotent doğuray kümelerinin yapısını belirlemişlerdi. Biz de, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PO(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını belirlemek için kullanacağımız aşağıdaki iki önermeyi verelim.

Önerme 6.7. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \ldots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi ve $1 \leq i \neq j \leq m$ için $P_i \neq P_j$ olacak şekilde X_n nin bir $A_{i_{r+1}}$ alt kümesi ve $X_n \setminus A_{i_{r+1}}$ in bir $P_i = (A_{i_1}, \ldots, A_{i_r})$ sıralı parçalanışı vardır.

İspat: $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri ve $1 \leq i \leq m$ için genelliği bozmaksızın $a_{i_1} < \cdots < a_{i_r}$ olmak üzere $I_i = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ olsun. O halde $1 \leq i \leq m$ için tanımlanan

$$A_{i_{r+1}} = X_n \setminus I_i \text{ ve } P_i = (\{a_{i_1}\}, \dots, \{a_{i_r}\})$$

isteneni sağlar. ■

Önerme 6.8. $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. O halde

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\text{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\text{ks}(\alpha_i) \neq \text{ks}(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\text{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\text{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır.

İspat: $2 \leq r \leq n-1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri olsun. Önerme 6.7'den $\forall 1 \leq i \leq m$ için I_i, P_i nin bir temsil kümesi ve $1 \leq i \neq j \leq m$ için $P_i \neq P_j$ olacak şekilde X_n nin bir $A_{i_{r+1}}$ alt kümesi ve $X_n \setminus A_{i_{r+1}}$ in bir $P_i = (A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$ sıralı parçalanışı vardır. $I_1 = \{a_{m_1}, \dots, a_{m_r}\}$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için $I_{i+1} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ olmak üzere

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_{m_1} & \dots & A_{m_r} & A_{m_{r+1}} \\ a_{m_1} & \dots & a_{m_r} & - \end{pmatrix}$$

ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i_1} & \dots & A_{i_r} & A_{i_{r+1}} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_r} & - \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ olur ve verilen koşullar sağlanır. ■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 6.7 ve 6.8, Garba (1994) tarafından sayfa 195'te verilen önerme ve Lemma 3.3'e çok benzemesine rağmen $O(n,r)$ de verdiğimiz sebeplere benzer sebeplerden dolayı daha da genel şekliyle yeniden verilmiştir. Böylece, $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, $PO(n,r)$ yarıgrubunun tüm minimal doğuray kümelerinin yapısını Önerme 6.7 ve 6.8'i kullanarak kolayca belirleyebiliriz.

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n}{r} = m$ ve $\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1} = t$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm alt kümeleri ve $R_1, \dots, R_t$ de D_r deki tüm R-Green denklik sınıflarının listesi olsun. Önerme 6.8'den

i) $\forall 1 \leq i \leq m$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) = I_i$,

ii) $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$ için $\mathrm{ks}(\alpha_i) \neq \mathrm{ks}(\alpha_j)$ ve

iii) $\forall 1 \leq i \leq m-1$ için I_i, $\mathrm{kp}(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesi ve I_m, $\mathrm{kp}(\alpha_1)$ in bir temsil kümesi

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ dönüşümleri vardır. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i$ olduğunu kabul edelim ve $\forall 1 \leq j \leq t-m$ için R_{m+j} den rastgele bir α_{m+j} elemanı alalım. Sonuç 6.4'ten $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$ kümesinin $PO(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğu kolayca görülmektedir.

7. $SPO(n,r)$ YARIGRUBUNUN DOĞURAY KÜMELERİ

$0 \leq s \leq r \leq n$ için Gomes ve Howie (1992) tarafından 276. sayfada tanımlanan

$$[r,s] = \{\alpha \in PO_n : |\mathrm{dom}(\alpha)| = r \text{ ve } |\mathrm{im}(\alpha)| = s\}$$

kümesini hatırlayalım. Gomes ve Howie (1992), SPO_n deki en üst D-Green denklik sınıfı olan $D_{n-1} = [n-1, n-1]$ in SPO_n yarıgrubunu doğurmadığını ve SPO_n yarıgrubunun idempotent doğuraylı olmadığını gösterdiler.

$\emptyset \neq A \subseteq SPO_n$, SPO_n yarıgrubunun herhangi bir (minimal) doğuray kümesi olsun. D_{n-1} de n tane L–Green ve n tane R –Green denklik sınıfı var olup A kümesi D_{n-1} den en az n tane eleman içermek zorundadır. Ayrıca, herhangi bir $\alpha \in [n-1, n-2] \subseteq D_{n-2}$ elemanı $a_1 < \cdots < a_{n-1}$, $b_1 \leq \cdots \leq b_{n-1}$ ve bir tek $1 \leq i \leq n-2$ için $b_i = b_{i+1}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & \dots & b_{n-1} & - \end{pmatrix}$$

formundadır. Bu durumda **α nın çekirdek tipi i** dir denir ve $\boldsymbol{K(\alpha) = i}$ olarak yazılır. $K(\alpha)$ nın değerlerinin sadece $1,2,\dots,n-2$ olabileceği açıktır. Gomes ve Howie (1992) bu bilgileri kullanarak 280. sayfada $A \cap [n-1, n-2]$ arakesitinin her $1 \leq i \leq n-2$ için $[n-1, n-2]$ deki i çekirdek tipli elemanlardan en az 1 tane içermek zorunda olduğunu gösterdiler. Ayrıca, $\alpha_1 : X_n \setminus \{1\} \to X_n \setminus \{n\}$ tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm ve benzer şekilde $i = 2, \dots, n$ için

$$\alpha_i : X_n \setminus \{i\} \to X_n \setminus \{i-1\}$$

tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm olsun. $i = 1, \dots, n-2$ için

$$\beta_i : X_n \setminus \{n\} \to X_n$$

sıra-koruyan dönüşümü de

$$j\beta_i = \begin{cases} i+1, & j = i \text{ ise} \\ j, & j \neq i \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq [n-1, n-1] = D_{n-1}$ ve $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\} \subseteq [n-1, n-2]$ olduğu açıktır. Gomes ve Howie (1992) bu bilgileri kullanarak

$$X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$$

kümesinin SPO_n yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olduğunu ve dolayısıyla da SPO_n yarıgrubunun rankının $2n-2$ olduğunu gösterdiler. Garba (1994), $2 \leq r \leq n-2$ için $SPO(n,r)$ alt yarıgrubunun yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğurulduğunu ve rankının $\sum_{k=r}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1}$ olduğunu gösterdi. Biz de bu bölümde, SPO_n yarıgrubunu ve $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere, $SPO(n,r)$ yarıgrubunu ayrı ayrı inceleyip her birinin herhangi bir alt kümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmaya çalışacağız.

Önerme 7.1. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $SPO(n,r)$ de $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$ olmasıdır. Başka bir ifade ile, $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{im}(\alpha)$ nın, β nın sıralı çekirdek parçalanışı $\mathrm{kp}(\beta)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır.

İspat: Önerme 3.1'e benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 7.2. $n, k \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $SPO(n,r)$ de $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in D_r$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2'ye benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 7.3. $B = A \cap [n-1, n-1]$ ve $C = A \cap [n-1, n-2]$ olmak üzere $\emptyset \neq A \subseteq SPO_n$ alt kümesinin SPO_n yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

i) $i = 1, \dots, n$ için $\mathrm{dom}(\lambda_i) = X_n \backslash \{i\}$ olacak şekilde bir $\lambda_i \in B$ var,

ii) $\mathrm{im}(\gamma_1) = X_n \backslash \{n\}$ olacak şekilde bir $\gamma_1 \in B$ ve $i = 2, \dots, n$ için $\mathrm{im}(\gamma_i) = X_n \backslash \{i-1\}$ olacak şekilde bir $\gamma_i \in B$ var,

iii) $i = 1, \dots, n$ için $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde λ_i, γ_i ye bağlı, ve

iv) C kümesi, her $i = 1, \dots, n-2$ için $[n-1, n-2]$ deki i çekirdek tipli elemanlardan en az 1 tane içeriyor

olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_B$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: ($\Rightarrow$) $\emptyset \neq A \subseteq SPO_n$ alt kümesi, SPO_n yarıgrubunun bir doğuray kümesi ve yukarıda tanımladığımız gibi, $\alpha_1 : X_n \backslash \{1\} \to X_n \backslash \{n\}$ tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm ve benzer şekilde $i = 2, \dots, n$ için

$$\alpha_i : X_n \backslash \{i\} \to X_n \backslash \{i-1\}$$

tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm olsun. A bir doğuray kümesi olup $i = 1, \dots, n$ için

$$\alpha_i = \lambda_{(i,1)} \cdots \lambda_{(i,k)}$$

olacak şekilde $\lambda_{(i,1)}, \dots, \lambda_{(i,k)} \in A$ vardır. $k = 1$ iken sonuç açık olup $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $i = 1, \dots, n$ için $\ker(\lambda_{(i,1)}) \subseteq \ker(\alpha_i)$, $\mathrm{dom}(\alpha_i) \subseteq \mathrm{dom}(\lambda_{(i,1)})$ ve $\mathrm{im}(\alpha_i) \subseteq \mathrm{im}(\lambda_{(i,k)})$ olup $\alpha_i \in [n-1, n-1]$ olduğundan $i = 1, \dots, n$ için $\mathrm{dom}(\alpha_i) = X_n \backslash \{i\} = \mathrm{dom}(\lambda_{(i,1)})$, $\mathrm{im}(\alpha_1) = X_n \backslash \{n\} = \mathrm{im}(\lambda_{(1,k)})$ ve $i = 2, \dots, n$ için $\mathrm{im}(\alpha_i) = X_n \backslash \{i-1\} = \mathrm{im}(\lambda_{(i,k)})$ olur. $\lambda_{(i,1)}, \dots, \lambda_{(i,k)} \in B$ olduğu açıktır. $i = 1, \dots, n$ için $\lambda_i = \lambda_{(i,1)}$ ve $\gamma_i = \lambda_{(i,k)}$ olarak alınırsa teoremin ilk iki koşulu sağlanmış olur.

Önerme 7.2'den $\forall 1 \leq j \leq k-1$ için $\lambda_{(i,j)}\lambda_{(i,j+1)} \in [n-1, n-1]$ olup $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde $\lambda_{(i,j)}$ den $\lambda_{(i,j+1)}$ e bir yönlü kenar vardır. O halde $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde $\lambda_{(i,1)}$, $\lambda_{(i,k)}$ ya bağlıdır. Böylece 3. koşul da sağlanmış olur.

Ayrıca Gomes ve Howie (1992), 280. sayfada $A \cap [n-1, n-2]$ arakesitinin her $1 \leq i \leq n-2$ için $[n-1, n-2]$ deki i çekirdek tipli elemanlardan en az 1 tane içermek zorunda olduğunu göstermişlerdi. Böylece teoremde verilen son koşul da sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $\emptyset \neq A \subseteq SPO_n$ alt kümesinin SPO_n yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğunu göstermek için yukarıda tanımladığımız $X=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ kümesinin $\langle A \rangle$ nın bir alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir.

Yukarıda tanımladığımız gibi, $\alpha_1 : X_n \backslash \{1\} \to X_n \backslash \{n\}$ tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm ve benzer şekilde $i = 2, \dots, n$ için

$$\alpha_i : X_n \backslash \{i\} \to X_n \backslash \{i-1\}$$

tanımlı bir tek sıra-koruyan, 1-1 ve örten dönüşüm olsun. Teoremde verilen koşullardan dolayı $\mathrm{dom}(\lambda_i) = \mathrm{dom}(\alpha_i)$, $\mathrm{im}(\gamma_i) = \mathrm{im}(\alpha_i)$ ve $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde λ_i, γ_i ye bağlı olacak şekilde $\lambda_i, \gamma_i \in B$ dönüşümleri vardır. O halde $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde λ_i den γ_i ye bir

$$\lambda_i = \sigma_1 \to \sigma_2 \to \cdots \to \sigma_k = \gamma_i$$

yönlü patikası vardır ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in B$). Benzer şekilde burada da $k \geq 2$ olması durumunu inceleyelim. $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinin tanımından dolayı $\forall 1 \leq i \leq k-1$ için $\sigma_i\sigma_{i+1} \in [n-1, n-1]$ olup Önerme 7.2'den $\sigma_1 \cdots \sigma_k \in [n-1, n-1]$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde $\mathrm{im}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = \mathrm{im}(\gamma_i) = \mathrm{im}(\alpha_i)$ ve $\mathrm{dom}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = \mathrm{dom}(\lambda_i) = \mathrm{dom}(\alpha_i)$ olup $\alpha_i = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in \langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$ olduğu elde edilir.

$i = 1, \dots, n-2$ için $\beta_i : X_n \backslash \{n\} \to X_n$ sıra-koruyan dönüşümü de yukarıda tanımladığımız gibi

$$\beta_i = \begin{cases} i+1, & j = i \text{ ise} \\ j, & j \neq i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $i = 1, \dots, n-2$ için C kümesinden i çekirdek tipli elemanlardan bir tane seçelim ve bu elemanı θ_i ile gösterelim. O halde $a_1 < \cdots < a_{n-1}$ ve $b_1 < \cdots < b_{n-2}$ olmak üzere

$$\theta_i = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & a_{i+2} & \dots & a_{n-1} \\ b_1 & \dots & b_{i-1} & b_i & b_i & b_{i+1} & \dots & b_{n-2} \end{pmatrix} \in C$$

şeklindedir. Şimdi $i = 1, \dots, n-2$ için

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & - \end{pmatrix} \in [n-1, n-1]$$

$$\psi_i = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{i-1} & b_i & \dots & b_{n-2} \\ 1 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \in [n-2, n-2]$$

kesin kısmi sıra-koruyan dönüşümlerini ele alalım. $r = 1, \dots, n-1$ için $[r,r] \subseteq \langle B \rangle$ olup $\varphi_i, \psi_i \in \langle B \rangle$ olur. Ayrıca, $i = 1, \dots, n-2$ için

$$\beta_i = \varphi_i \theta_i \psi_i$$

olup $\beta_i \in \langle A \rangle$ olduğundan $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\} \subseteq \langle A \rangle$ olduğu elde edilir. ■

SPO_n yarıgrubunun bir doğuray kümesi $[n-1, n-1]$ den en az n tane eleman ve $[n-1, n-2]$ den en az $n-2$ tane eleman içermek zorunda olup Teorem 7.3'ten aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 7.4. $B, [n-1, n-1]$ in n elemanlı bir alt kümesi ve $C, [n-1, n-2]$ nin $n-2$ elemanlı bir alt kümesi olmak üzere $B \cup C$ alt kümesinin SPO_n yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

i) $i = 1, \dots, n$ için $\mathrm{dom}(\lambda_i) = X_n \backslash \{i\}$ olacak şekilde bir tek $\lambda_i \in B$ var,

ii) $\text{im}(\gamma_1) = X_n \backslash \{n\}$ olacak şekilde bir tek $\gamma_1 \in B$ ve $i = 2, \dots, n$ için $\text{im}(\gamma_i) = X_n \backslash \{i-1\}$ olacak şekilde bir tek $\gamma_i \in B$ var,

iii) $i = 1, \dots, n$ için $\mathbb{\Gamma}_B$ yönlü grafiğinde λ_i, γ_i ye bağlı, ve

iv) C kümesi, $i = 1, \dots, n-2$ için $[n-1, n-2]$ deki i çekirdek tipli elemanlardan sadece 1 tane içeriyor

olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_B$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Son olarak, $n \geq 2$ ve $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere, $SPO(n,r)$ kesin kısmi sıra-koruyan dönüşüm yarıgruplarını inceleyeceğiz. $O(n,r)$ de olduğu gibi, $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere, $SPO(n,r)$ nin bir doğuray kümesini araştırırken de sadece $SPO(n,r)$ deki D-Green denklik sınıfı D_r nin alt kümelerini düşünmek yeterlidir ve D_r nin bir A alt kümesinin $SPO(n,r)$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır.

Teorem 7.5. $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere $SPO(n,r)$ de $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $SPO(n,r)$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\xi)$,

ii) $\text{im}(\beta) = \text{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir.

İspat: Teorem 6.3'e benzer şekilde gösterilebilir. ■

$2 \leq r \leq n-2$için $SPO(n,r)$ yarıgrubunun rankının $\sum_{k=r}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan aşağıdaki sonucu kolayca görebiliriz.

Sonuç 7.6. $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere $SPO(n,r)$ de tam olarak $\sum_{k=r}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ tane eleman içeren $\emptyset \neq X \subseteq D_r$ alt kümesinin $SPO(n,r)$ yarıgrubunun bir minimal doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul D_r deki her ξ idempotenti için

i) $\mathrm{ks}(\alpha) = \mathrm{ks}(\xi)$,

ii) $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\xi)$ ve

iii) $\mathbb{\Gamma}_X$ yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ dönüşümlerinin var olmasıdır. Burada $\mathbb{\Gamma}_X$, Tanım 2.7.6.'da tanımlanan yönlü grafiktir. ■

Önerme 6.8'de tanımlanan $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r \subseteq PO(n,r)$ dönüşümlerinde $1 \leq i \leq m$ için $A_{i_{r+1}} \neq \emptyset$ olup aynı zamanda $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r \subseteq SPO(n,r)$ olur. Dolayısıyla Önerme 6.7 ve 6.8, $2 \leq r \leq n-2$ olmak üzere, $SPO(n,r)$ için de geçerli olup $SPO(n,r)$ nin tüm minimal doğuray kümelerinin yapısı da $t = \sum_{k=r}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$ alınarak $PO(n,r)$ ye benzer şekilde belirlenebilir.

KAYNAKLAR

AYIK, G., AYIK, H., BUGAY L., and KELEKCİ O., 2013. Generating Sets of Finite Singular Transformation Semigroups. Semigroup Forum, 86 (no:1):59--66.

EVSEEN, A. E., and PODRAN, N. E., 1972. Semigroups of Transformations Generated by Idempotents of Given Defect. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math., 117:44--50.

GANYUSHKIN, O., and MAZORCHUK, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.

GARBA, G. U., 1990. Idempotents in Partial Transformation Semigroups. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 116A:359--366.

_____, 1994. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. Portugal. Math., 51: 185--204.

GOMES, G. M. S., and HOWIE, J. M., 1992. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. Semigroup Forum, 45: 272--282.

HOWIE, J. M., 1970/71. Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 17: 223--236.

_____, 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 s.

HOWIE, J. M., and MCFADDEN, R., B., 1990. Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 114A:161--167.

KARAKAŞ, H. İ., 2008. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402 s.

VAGNER, V. V., 1956. Representations of Ordered Semigroups. Mat. Sb. (N.S.), 38:203--240. Translated in (1964) Amer. Math. Soc. Transl., 36:295--336.

WILSON, R. J. and WATKINS J. J., 1990. Graphs: An Introductory Approach. Wiley, 340 s.

ÖZGEÇMİŞ

12.06.1984 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra 2002 yılında Ç. Ü. Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2006 yılında fakülte ve bölüm 2. si olarak mezun oldu. Aynı yıl Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul edildi. YADEM'de İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra 2007 yılında yüksek lisans öğrenimine ve aynı yıl Ç. Ü. Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2010 yılında yüksek lisansını bitirip yine aynı yıl Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora çalışmasına başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.