ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Hamiyet MERKEPÇİ

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK TÜREVLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2016

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK TÜREVLERİ

Hamiyet MERKEPÇİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2016 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……	……	……
Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN	Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT	Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

……..	……
Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN	Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK TÜREVLERİ

Hamiyet MERKEPÇİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN
II. Danışman : Doç. Dr. Necati OLGUN
Yıl : 2016, Sayfa: 111
Jüri :Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN
: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
: Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN
: Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL

$\mathbf{k}$ karakteristiği sıfır olan bir cisim, R bir $\mathbf{k}$- cebir, $\Omega_n(R)$; R nin n- inci dereceden evrensel türev modülü (Kähler modülü), $d_n : R \to \Omega_n(R)$ kanonik dönüşümü R nin n- inci dereceden $\mathbf{k}$- türevi, $J_n(\Omega_n(R))$; R nin $\Omega_n(R)$ üzerinde derecesi n e eşit veya daha küçük olan evrensel diferansiyel modülü, $\Lambda^2(\Omega_n(R))$; R nin $\Omega_n(R)$ üzerinde tanımlı ikinci dereceden exterior kuvvet modülü, $\dot{U}^2(\Omega_n(R))$; R nin $\Omega_n(R)$ üzerinde tanımlı ikinci dereceden simetrik kuvvet modülü olsun.

Bu çalışmanın amacı, $\Omega_1(R)$ üzerinde tanımlanan simetrik türevin yüksek mertebeden evrensel türev modülleri üzerinde genelleştirilmiş tanımını da kullanarak $\Omega_2(R)$ üzerinde hangi homolojik özellikleri gösterdiğini belirlemektir. Bu anlamda bu çalışmada, evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden simetrik kuvvet modülleri ile ilgili yeni tam diziler geliştirdik ve ispatladık. Ayrıca, $\varphi : J_2(\Omega_2(R)) \to \Omega_2(R)$ kanonik dönüşümü ile oluşturduğumuz tam dizinin çekirdeğinin denk olduğu bağıntıyı belirledik. Daha sonra, tanımladığımız bir izomorfizmi de kullanarak hiperyüzeylerde evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden simetrik kuvvet modülünün projektif boyutunu hesapladık ve örnekler üzerinde gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Kähler modülü, simetrik türev, projektif boyut, hiperyüzey.

ABSTRACT

PhD THESIS

SYMMETRİC DERIVATIONS OF UNIVERSAL MODULES

Hamiyet MERKEPÇİ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATIC

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Ela AYDIN
II. Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Necati OLGUN
Year : 2016, Pages: 111
Jury : Asst. Prof. Dr. Ela AYDIN
: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
: Asst. Prof. Dr. Basri ÇALIŞKAN
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

Let $\mathbf{k}$ be an algebraically closed field with characteristic zero, R be a $\mathbf{k}$- algebra, $\Omega_n(R)$ be the module of n- th order Kähler differentials of R over $\mathbf{k}$, $d_n : R \to \Omega_n(R)$ be the canonical map n- th order $\mathbf{k}$- derivations of R, $J_n(\Omega_n(R))$ be n- th order universal module of differential operators of order less than or equal to n on $\Omega_n(R)$, $\Lambda^2(\Omega_n(R))$ be second exterior power of universal module of derivations on $\Omega_n(R)$, $\dot{U}^2(\Omega_n(R))$ be second symmetric power of universal module of derivations on $\Omega_n(R)$.

The aim of this study is to determine homological properties on second order Kähler modules of R using generalized symmetric derivations of higher order universal modules related to first order Kähler modules. That is, in this study, we identified new exact sequences related to second order symmetric derivations of Kähler modules and proved them. Then, we assigned that $\ker\varphi$ is isomorphic to what? where φ is a canonical map from $J_2(\Omega_2(R))$ to $\Omega_2(R)$. Then, we calculated projective dimensions of second order symmetric derivations of universal modules on hypersurfaces using a new isomorphism proved by us and gave some examples about them.

Key Words: Kähler module, symmetric derivation, projective dimension, hypersurface.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada zaman ayırarak bana yol gösteren, yapıcı öneri ve eleştirileriyle çalışmama katkı sağlayan değerli danışman hocam Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN'a içtenlikle teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, sonuca ulaştırılmasında ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç.Dr. Necati OLGUN'a saygı ve şükranlarımı sunarım.

Derslerde verdikleri değerli bilgileri kılavuzum olan Ç.Ü.Matematik Anabilim dalının kıymetli öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Ayrıca benden hiçbir zaman desteklerini ve sevgilerini esirgemeyen anneme, babama, sevgili eşim Arş. Gör. Mehmet MERKEPÇİ'ye, bu süreçte beni anlamaya çalışan ve hiç üzmeyen biricik oğlum Arda ve kızım Beren'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
SİMGELER VE KISALTMALAR VI
1. GİRİŞ 1
1.1. Evrensel Modüllere Temel Bakış 1
2. EVRENSEL MODÜLLER 7
2.1. Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Diferansiyel Modüller 7
2.2. Bölüm Halkaları ve Lokal Halkaların Evrensel Modülleri 27
2.3. Regüler Cebirlerin Evrensel Türev Modülleri 32
2.4. Yüksek Mertebeden Evrensel Türev Modülleri 36
2.5. Evrensel Türev Modülleri Arasındaki Bağıntılar 42
3. SİMETRİK CEBİRLER 49
3.1. Temel Tanım ve Teoremler 49
3.2. Kähler Modüllerinin Tensör, Exterior ve Simetrik Cebirleri 53
4. SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİ 61
4.1. Temel Tanım ve Teoremler 61
4.2. Kähler Modüllerinin Simetrik Türevleri 63
4.3. Kähler Modüllerinin Simetrik Türevleri Üzerine Elde Edilen Sonuçlar 73
5. SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİNİN PROJEKTİF BOYUTLARI 89
5.1. Evrensel Türev Modüllerinin Projektif Boyutları 89
5.2. Hiperyüzeylerde Evrensel Türev Modüllerinin Projektif Boyutları 91
5.3. Hiperyüzeylerde Evrensel Türev Modüllerinin İkinci Dereceden Simetrik Kuvvet Modüllerinin Projektif Boyutları 99
KAYNAKLAR 109
ÖZGEÇMİŞ 111

SİMGELER VE KISALTMALAR

$D_R^n(A,B)$: n - inci dereceden diferansiyel operatörlerin kümesi

$Der_R^n(A,B)$: n - inci dereceden türev operatörlerin kümesi

$J_n(R)$: n - inci dereceden evrensel diferansiyel modülü

$W_n(R)$: n - inci dereceden evrensel türev modülü

Ù : Wedge çarpımı

Ú : Simetrik cebir çarpımı

D_n : n - inci dereceden evrensel diferansiyel operatör

d_n : n - inci dereceden evrensel türev operatörü

$L^2(W_n(R))$: Evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden exterior kuvveti

$Ú^2(W_n(R))$: Evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden simetrik kuvveti

$pd(W_n(R))$: Evrensel türev modüllerinin projektif boyutu

$[f,r]$: $fr - rf$

$\dim R$: R nin Krull boyutu

$m(A)$: A modülünün minimal üreteç sayısı

¤(R) : R nin kesir cismi

1. GİRİŞ

1.1. Evrensel Modüllere Temel Bakış

Diferansiyel operatörler, cebirsel kümeler ve onların koordinat halkaları hakkında bilgi sahibi olmak ve cebirsel kümelerle ilgili problemleri modül teoriye taşımak amacıyla çalışılmıştır. Diferansiyel operatörlerin evrensel modülleri ise indirgenemez sonlu üretilmiş cebire karşılık gelen bir koordinat halkasının regüler olup olmadığını anlamaya yardımcı mevcut kriterlere alternatif olan çözüm getirmiştir. Evrensel modüller bu anlamda sıklıkla çalışılan bir konu olmuştur.Evrensel modüllerin özellikleri, exterior kuvvetleri, simetrik kuvvetleri ve projektif boyutları çalışılarak bilime katkı sağlanmıştır. Ayrıca uygulama alanı olan da bir konudur. Matematiksel Fizik, Control Sistemleri, Dinamik gibi bazı bilim dallarında örneklerine rastlanmıştır.

Evrensel modüller ilk defa 1960 yılında Nakai tarafından tanımlanmıştır. Nakai, evrensel modüllerle ilgili bir takım sonuçlar elde etmiştir. Bunlardan biri şudur ki; R indirgenemez sonlu üretilmiş cebire karşılık gelen bir koordinat halkası olmak üzere R nin regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $W_1(R)$ nin projektif modül olmasıdır. Bu, bir halkanın regüler olup olmadığını anlamak için bir kriter olmuştur. R nin regüler halka olması ile ilgili başka çalışmalar da vardır. Örneğin; Berger, çalışmasında bir boyutlu complete intersection afin halkalarda $W_1(R)$ nin torsiyon serbest modül olmasıyla halkanın regüler olmasının birbirine denk olduğunu göstermiştir.

Bir cebirin yüksek mertebeden diferansiyel operatörlerinin evrensel modülleri ilk defa 1967 yılında Osborn tarafından tanımlanmıştır. Benzer tanımlar 1969 yılında Heyneman ve Sweedler tarafından ve daha kapsamlı bir çalışma 1970 yılında Nakai tarafından yapılmıştır. Nakai bu çalışmasında yüksek mertebeden diferansiyel operatörlerin evrensel modüllerinin bazı homolojik özelliklerini incelemiştir.

Örneğin; R bir $\mathbf{k}$- cebir ve I da R nin bir ideali olsun. $d_n : R \to \Omega_n(R)$ n- inci dereceden diferansiyel operatör olmak üzere

$$0 \to \frac{d_n(I)+I\Omega_n(R)}{I\Omega_n(R)} \to \frac{\Omega_n(R)}{I\Omega_n(R)} \to \Omega_n\left(R/I\right) \to 0$$

dizisinin R/I- modül homomorfizmalarının tam dizisi olduğunu göstermiştir.

Sweedler ise 1975 yılında yapmış olduğu çalışmasında R regüler halka ise $\Omega_n(R)$ nin projektif modül olduğunu göstermiştir. $\Omega_1(R)$ nin projektif boyutu ile ilgili en önemli çalışmaları Vasconcelos 1968 yılında yapmıştır. Ona göre, R afin tamlık bölgesi ve $pd\left(\Omega_1(R)\right) < \infty$ olduğunda R nin normal halka olması ile $pd\left(\Omega_1(R)\right) \le 1$ olması denktir. $\Omega_1(R)$ nin projektif boyutunun bazı koşullar altında sonsuz olduğunu ise 1977 yılında Matsuoka göstermiştir. Daha sonra Vasconcelos 1978 yılında $\Omega_1(R)$ nin projektif boyutunun sıfır, bir veya sonsuz olduğunu göstermiştir.

Daha sonraki yıllarda yüksek mertebeden diferansiyel operatörlerin evrensel modüllerini Erdoğan 1993 yılında çalışmıştır. Bu çalışmasında evrensel modüllerin projektif boyutları ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Örneğin, $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}, x_s]$ ve I da $f \in R$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali ise $pd\left(\Omega_n\left(R/I\right)\right) \le 1$ olduğunu göstermiştir.

Evrensel türev modüllerinin exterior ve simetrik kuvvetleri de çalışılan konular arasındadır. Bu konularda çalışan yazarlarımızın başlıcaları; Osborn, Hart, Erdoğan, Olgun ve Bourbaki'dir. Erdoğan evrensel türev modüllerinin ikinci

exterior kuvvetlerinden bahsetmiş, Hart ise R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere R- modüllerin

$$0 \to \Omega_2(R) \to J_1(\Omega_1(R)) \to L^2(\Omega_1(R)) \to 0$$

bir split tam dizisinin olduğunu kanıtlamıştır. Bu tezde Hart'ın bu sonucundan esinlenilmiştir. Osborn 1968 yılında birinci dereceden simetrik türevleri ve özelliklerini tanımlamış ve daha sonra genelleştirilmiş simetrik türev tanımını ve bazı özelliklerini Olgun vermiştir. Ayrıca Bourbaki de simetrik kuvvet modülünün tanımını ve evrensellik özelliğini vermiştir.

Bu tezde, evrensel türev modüllerinin simetrik kuvvetleri ile ilgili birinci dereceden yapılmış olan bu çalışmalar, genelleştirilmiş tanımı da göz önüne alarak ve yeni bir takım tam diziler ve izomorfizmler tanımlanarak ikinci dereceye taşınmıştır.

Teze ilk olarak evrensel modüllere temel bakış bölümü ile giriş yapılmıştır. İkinci bölümde, Osborn, Heyneman-Sweedler, Nakai ve Erdoğan gibi yazarlarımızın çalışmalarından elde edilen diferansiyel operatörler ve evrensel türev modüllerinin belli başlı özellikleri ve bazı sonuçları örneklerle birlikte verilmiştir. Üçüncü bölümde, evrensel türev modüllerinin tensör, exterior ve simetrik cebirleri ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve bu cebirlerin özellikleri tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, Hart, Olgun, Osborn, Erdoğan ve Bourbaki'nin çalışmalarından faydalanarak evrensel türev modüllerinin simetrik kuvvetlerinin özellikleri geniş bir çerçeveden ele alınmış ve daha sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Sonuç I: R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere

$$J_1(\Omega_1(R)) \cong \Omega_1(R) \otimes \Omega^2(\Omega_1(R)) \otimes L^2(\Omega_1(R))$$

izomorfizmi vardır.

Sonuç II: $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_s]$ değişmeli bir $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere R- modüllerin

$$0 \to \ker\varphi \to J_2(W_2(R)) \to W_2(R) \to 0$$

bir kısa tam dizisi vardır ve $\ker\varphi \cong L^2(W_2(R)) \oplus Ú^2(W_2(R))$ dir.

Sonuç III: $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_s]$ bir afin $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere R- modüllerin

$$W_2(R) \to J_2(W_2(R)) \to L^2(W_2(R)) \to 0$$

bir tam dizisi vardır.

Sonuç IV: $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_s]$ bir afin $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere R- modüllerin

$$W_2(R) \to J_2(W_2(R)) \to Ú^2(W_2(R)) \to 0$$

bir tam dizisi vardır.

Beşinci bölümde, Erdoğan ve Olgun'un yapmış olduğu çalışmalar ışığında evrensel türev modüllerinin projektif boyutları anlatılmış ve özel belirlenen örnekler üzerinde hesaplamalar yapılmıştır. Daha sonra bu bilgileri kullanarak evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden simetrik kuvvet modüllerinin projektif boyutları çalışılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Sonuç I: M bir R- modül, N, M nin bir alt modülü, L_N, $\text{Ú}^2 M$ nin $\{x \text{Ú} y : x \text{Î } M, y \text{Î } N\}$ kümesi tarafından üretilen bir alt modülü olmak üzere

$$\text{Ú}^2 M \big/ L_N \text{@Ú}^2 \left(M \big/ N \right)$$

izomorfizmi vardır.

Sonuç II: $R = \mathbf{k}\left[x_1, \mathbf{K}\, x_s\right]$ bir polinom cebiri ve $g \text{Î } R$ bir ideali olmak üzere $S = \mathbf{k}\left[x_1, \mathbf{K}\, x_s\right] \big/ (g)$ bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $\text{Ú}^2\left(\text{W}_1(S)\right)$ nin projektif boyutu 1'e eşit veya küçüktür.

2. EVRENSEL MODÜLLER

2.1. Diferansiyel Operatörler ve Evrensel Diferansiyel Modüller

İlk olarak diferansiyel operatörler ve evrensel diferansiyel modüllerin tanımı yapılarak özellikleri ve ilgili bazı örnekleri verilecektir.

Aksi belirtilmedikçe, R birim elemanlı ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.1.1 $\mathbf{k}$ bir cisim, R bir $\mathbf{k}$- cebir, A ve B de R- modüller olsunlar. $Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$; A dan B ye tanımlı $\mathbf{k}$- lineer dönüşümlerin kümesi olsun. Bu durumda $\varphi_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$, $a \in A$ ve $r \in R$ için

$$\varphi_1 : A \to B$$
$$r\varphi_1 : a \to r\varphi_1(a)$$
$$\varphi_1 r : a \to \varphi_1 r(a) = \varphi_1(ra)$$

olarak tanımlanırsa $Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ üzerinde ikili R- modül yapısı aşağıdaki gibi kurulur:

$[\varphi_1, r](a) = \varphi_1(ra) - r\varphi_1(a)$ olarak tanımlansın.

Bu durumda $[\varphi_1, r] \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ dir.

$a \in \mathbf{k}$ için $[\varphi_1, r](aa) = \varphi_1(raa) - r\varphi_1(aa)$

$$= a\varphi_1(ra) - ra\varphi_1(a)$$
$$= a\left(\varphi_1(ra) - r\varphi_1(a)\right)$$
$$= a[\varphi_1, r](a) \text{ dır.}$$

Bundan hareketle,

$Hom_R(A,B) = D_R^0(A,B) = \{J_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B) : [J_1, r] = 0, \forall\, r \in R\}$

olarak tanımlansın. $D_R^{n-1}(A,B)$ tanımlanmış olsun. Bu durumda

$D_R^n(A,B) = \{J_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B) : [J_1, r] \in D_R^{n-1}(A,B), \forall\, r \in R\}$ kümesine

n- inci dereceden diferansiyel operatör modülü denir.

Önerme 2.1.2 $D_R^n(A,B)$ modülü $Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ nin bir R- alt modülüdür.

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapalım:

$n = 0$ için $D_R^n(A,B) = D_R^0(A,B) = Hom_R(A,B)$ olup R- modüldür.

n- 1 için önermeyi doğru kabul edelim. $J_1, J_2 \in D_R^n(A,B)$ alalım.

$$\begin{aligned}[J_1 + J_2, r] &= (J_1 + J_2)r - r(J_1 + J_2) \\ &= J_1(r) + J_2(r) - rJ_1 - rJ_2 \\ &= J_1(r) - rJ_1 + J_2(r) - rJ_2 \\ &= [J_1, r] + [J_2, r]\end{aligned}$$

$[J_1, r], [J_2, r] \in D_R^{n-1}(A,B)$ olup hipotezden dolayı

$[J_1, r] + [J_2, r] \in D_R^{n-1}(A,B)$ dir. Dolayısıyla tanımdan $J_1 + J_2 \in D_R^n(A,B)$ dir.

$r_1 \in R$ ve $J_1 \in D_R^n(A,B)$ için $[r_1 J_1, r] = (r_1 J_1) r - r(r_1 J_1)$

$= r_1 J_1(r) - r r_1 J_1$

$= r_1 J_1(r) - r_1 r J_1$

$= r_1 (J_1(r) - r J_1)$

$= r_1 [J_1, r]$

$[J_1, r] \in D_R^{n-1}(A,B)$ olup hipotezden dolayı $r_1[J_1, r] \in D_R^{n-1}(A,B)$ ve tanımdan $r_1 J_1 \in D_R^n(A,B)$ olur. Dolayısıyla $D_R^n(A,B)$ bir R- alt modüldür.

NOT: A ve B R- modüller olmak üzere, $\forall n < 0$ için $D_R^n(A,B) = 0$ olarak alınır. Tanımdan dolayı,

$D_R^0(A,A) = D_R^0(A) = End_R(A)$

$D_R^0(R,A) = Hom_R(R,A) \cong A$

$D_R^0(R,R) \cong R$

olduğu görülür.

Önerme 2.1.3 $\forall n \in Z$ için $D_R^n(A,B) \subseteq D_R^{n+1}(A,B)$ dir.

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapalım:

$n < 0$ için yukarıda belirtildiği üzere ispat aşikardır.

$n = 0$ için $J_1 \in D_R^0(A,B) = Hom_R(A,B)$ olsun.

Tanımdan, $[J_1, r] = 0 \in Hom_R(A,B)$ dir. Dolayısıyla $J_1 \in D_R^1(A,B)$ olur.

$n-1$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim.

$\delta_1 \in D_R^n(A,B)$ olmak üzere $D_R^{n-1}(A,B) \subset D_R^n(A,B)$ olsun. Tanımdan,

$[\delta_1, r] \in D_R^{n-1}(A,B)$ olup hipotezden $[\delta_1, r] \in D_R^n(A,B)$ ve tanımdan

$\delta_1 \in D_R^{n+1}(A,B)$ dir. ☐

Diferansiyel operatör modülün tanımı gereğince,

$\delta_1 \in D_R^0(A,B) = Hom_R(A,B)$ ise $\forall\, r_0 \in R$ ve her $a \in A$ için

$[\delta_1, r_0](a) = \delta_1(r_0 a) - r_0\delta_1(a) = r_0\delta_1(a) - r_0\delta_1(a) = 0$ dır. Böylece

$\delta_1 \in D_R^0(A,B) \Rightarrow [\delta_1, r_0] = 0 \;,\; \forall\, r_0 \in R$

$\delta_1 \in D_R^1(A,B) \Rightarrow [\delta_1, r_0] \in D_R^0(A,B) \Rightarrow \left([\delta_1, r_0], r_1\right) = 0 \;,\; \forall\, r_1 \in R$

$\vdots$

$\delta_1 \in D_R^n(A,B) \Rightarrow \left([[\mathbf{K}[[\delta_1, r_0], r_1], r_2], \mathbf{K}], r_n\right) = 0 \;,\; \forall\, r_0, r_1, r_2, \mathbf{K}, r_n \in R.$

NOT: $[[\mathbf{K}[[\delta_1, r_0], r_1], r_2], \mathbf{K}], r_n]$ yerine $[\delta_1, r_0, r_1, r_2, \mathbf{K}, r_n]$ yazılabilir.

Örnek 2.1.4 $R = \mathbf{k}[x_1, x_2]$ alalım. $\delta_1 \in D_R^1(R)$ ye bakalım.

Eğer $\delta_1 \in D_R^1(R)$ ise $\left([\delta_1, r_0], r_1\right) = 0$ idi. Dolayısıyla

$[\delta_1, x_1, x_2] = 0 \Rightarrow \left([\delta_1, x_1], x_2\right)(1) = [\delta_1, x_1]x_2(1) - x_2[\delta_1, x_1](1)$

$$0 = \delta_1 x_1 x_2 - x_1\delta_1 x_2 - x_2\delta_1(x_1) + x_1 x_2\delta_1(1)$$

$$\delta_1(x_1 x_2) = x_1\delta_1(x_2) + x_2\delta_1(x_1) - x_1 x_2\delta_1(1) \quad \text{olur.}$$

Tanım 2.1.5 $D_R(A,B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_R^n(A,B)$

kümesine A dan B ye tanımlı tüm $\mathbf{k}$- lineer diferansiyel operatörler uzayı denir.

Aşağıda diferansiyel operatör modülleri ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1.6 $R=\mathbf{k}[x_1]$ alalım. Bu durumda,

$$D_R^0(R)=\mathbf{k}[x_1]$$

$$D_R^1(R)=\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}$$

$$D_R^2(R)=\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}\right\}$$

$$\vdots$$

$$D_R^n(R)=\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}},\ldots,\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\,n}}\right\} \text{ dir.}$$

Örnek 2.1.7 $R=\mathbf{k}[x_1,x_2]$ alalım.

$$D_R^1(R)=\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$$

$$D_R^2(R)=\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}},\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right\}$$

$$\vdots$$

$$D_R^n=\left\{1,\frac{\partial^t}{\partial x_1^i\partial x_2^j}:1\le t=i+j\le n\right\}$$

Örnek 2.1.8 $R=\mathbf{k}[x_1]$ olsun. $D_R^1(R)$, bazı $\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}$ kümesi olan bir serbest R- modüldür. Bunu görelim:

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 I(1) = 0 \Rightarrow f_2 = 0$$

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + f_2 I(x_1) = 0$$

$$f_1 + f_2 x_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$$

Dolayısıyla $D_R^1(R)$ serbest R- modüldür.

Bunu daha genel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}, x_t]$ polinomlar cebiri olsun. $D_R^1(R)$, bazı $\left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \mathbf{K}, \frac{\partial}{\partial x_t}\right\}$ kümesi olan bir serbest R- modüldür. Bunu gösterelim:

Her $i = 1, \mathbf{K}, t$ olmak üzere $D \in D_R^1(R)$ ve $\mathrm{R} = \left\{1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \mathbf{K}, \frac{\partial}{\partial x_t}\right\}$ için

$D(x_i^n) = n \cdot x_i^{n-1} D(x_i)$ dir. Bu durumda

$\left(D - \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(x_1^{i_1} \mathbf{K}\, x_k^{i_k}\right) = 0$ ve dolayısıyla $D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ olduğu görülür. Böylece $D \in \mathrm{ÁR\tilde{n}}$ dir. Bu küme aynı zamanda lineer bağımsız olup $D_R^1(R)$ nin baz kümesi R dir.

Önerme 2.1.9 A , B ve K R- modüller olmak üzere

$\mathrm{J}_1 \in D_R^n(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ ve $\mathrm{J}_2 \in D_R^s(\mathrm{B}, \mathrm{K})$ ise $\mathrm{J}_2 \mathrm{J}_1 \in D_R^{n+s}(\mathrm{A}, \mathrm{K})$ dır.

İspat: İspatı $n+s$ üzerinden tümevarım yöntemiyle verelim.

$n+s=0$ için $\mathrm{J}_1 \in D_R^0(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = Hom_R(\mathrm{A}, \mathrm{B})$

$\mathsf{J}_2 \in D_R^0(\mathsf{B},\mathsf{K}) = Hom_R(\mathsf{B},\mathsf{K})$ dır.

Buradan $\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1 \in Hom_R(\mathsf{A},\mathsf{K})$ olur.

$n+s-1$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim.

$\mathsf{J}_1 \in D_R^n(\mathsf{A},\mathsf{B})$ ve $\mathsf{J}_2 \in D_R^s(\mathsf{B},\mathsf{K})$ için

$$\begin{aligned}[\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1, r] &= (\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1)r - r(\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1) \\ &= (\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1)r - r(\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1) + \mathsf{J}_2(r\mathsf{J}_1) - \mathsf{J}_2(r\mathsf{J}_1) \\ &= \mathsf{J}_2(\mathsf{J}_1(r)) - \mathsf{J}_2(r\mathsf{J}_1) + \mathsf{J}_2(r\mathsf{J}_1) - r\mathsf{J}_2(\mathsf{J}_1) \\ &= \mathsf{J}_2(\mathsf{J}_1(r) - r\mathsf{J}_1) + (\mathsf{J}_2 r - r\mathsf{J}_2)\mathsf{J}_1 \\ &= \mathsf{J}_2[\mathsf{J}_1, r] + [\mathsf{J}_2, r]\mathsf{J}_1\end{aligned}$$

$\mathsf{J}_2 \in D_R^s(\mathsf{B},\mathsf{K})$ ve $[\mathsf{J}_1, r] \in D_R^{n-1}(\mathsf{A},\mathsf{B})$ olup hipotezden

$\mathsf{J}_2[\mathsf{J}_1, r] \in D_R^{n+s-1}(\mathsf{A},\mathsf{K})$ dır.

Benzer şekilde, $[\mathsf{J}_2, r] \in D_R^{s-1}(\mathsf{B},\mathsf{K})$ ve $\mathsf{J}_1 \in D_R^n(\mathsf{A},\mathsf{B})$ olup hipotezden

$[\mathsf{J}_2, r]\mathsf{J}_1 \in D_R^{n+s-1}(\mathsf{A},\mathsf{K})$ dır. O halde

$\mathsf{J}_2[\mathsf{J}_1, r] + [\mathsf{J}_2, r]\mathsf{J}_1 \in D_R^{n+s-1}(\mathsf{A},\mathsf{K})$ olup $\mathsf{J}_2\mathsf{J}_1 \in D_R^{n+s}(\mathsf{A},\mathsf{K})$ dır.

Özel olarak, $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \mathsf{K}$ alınırsa Önerme 2.1.9 un bir sonucu olarak $D_R(\mathsf{A},\mathsf{A})$, $End_{\mathbf{k}}(A)$ nın bir $\mathbf{k}$- altcebiridir. $D_R(\mathsf{A},\mathsf{A})$ ya A üzerinde diferansiyel operatörler halkası denir ve $D_R(A)$ ile gösterilir.

R bir $\mathbf{k}$- cebir ve $R \otimes_{\mathbf{k}} R$ de R halkasının kendisiyle olan tensör çarpımı olsun. $x_i, x_j, y_i, y_j \in R$ olmak üzere

$$\left(\sum_i x_i \Delta_k y_i\right) \times \left(\sum_j x_j \Delta_k y_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j \Delta_k y_i y_j$$

çarpımıyla $R \Delta_{\mathbf{k}} R$ birim elemanlı ve değişmeli bir halkadır.

Her $x, y \in R$, $J_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ ve $a \in A$ için

$(x \Delta_{\mathbf{k}} y) J_1 : a \mapsto x J_1(ya)$ olarak tanımlanırsa $Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ üzerinde $R \Delta_{\mathbf{k}} R$- modül yapısı kurulabilir.

$\mu : R \Delta_{\mathbf{k}} R \mapsto R$ cebirsel çarpım dönüşümü

$\sum_i x_i \Delta y_i \mapsto \sum_i x_i y_i$ olarak tanımlansın. Bu dönüşüm hem halka hem de R- modül homomorfizmidir. Bunu görelim:

$w_1 = \sum_i x_i \Delta y_i$, $w_2 = \sum_j x_j \Delta y_j$ olarak alınsın.

$$\mu(w_1 w_2) = \mu\left(\sum_{i,j} x_i x_j \Delta y_i y_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j y_i y_j$$

$$= \sum_i x_i y_i \times \sum_j x_j y_j$$

$$= \mu(w_1) \times \mu(w_2)$$

$\forall x \in R$ için $\mu(x w_1) = \mu\left(x \sum_i x_i \Delta y_i\right) = \sum_i x \mu(x_i \Delta y_i)$

$$= x \sum_i x_i y_i$$

$$= x \mu(w_1)$$

O halde $\ker\mu$, $R \Delta_{\mathbf{k}} R$ nin hem ideali hem de R- altmodülüdür.

μ örtendir. $I = \ker\mu$ olmak üzere R- modül homomorfizmlerin

$$0 \to I \to R \xrightarrow{k} R \to 0$$

bir kısa tam dizisi yazılabilir.

Lemma 2.1.10 I ideali için baz kümesi $\{1 - x : x \in R\}$ dir.

İspat: $\sum_i x_i - y_i \in I$ alalım. Bu durumda $j\left(\sum_i x_i - y_i\right) = \sum_i x_i y_i = 0$ dir.

Bu yüzden $\forall x_i, y_i \in R$ için

$$\begin{aligned}\sum_i x_i - y_i &= \sum_i x_i - y_i - \sum_i x_i y_i - 1 \\ &= \sum_i \left(x_i - y_i - x_i y_i - 1\right) \\ &= \sum_i \left(x_i - 1\right)\left(1 - y_i - y_i - 1\right) \\ &= \sum_i x_i \left(1 - y_i - y_i - 1\right)\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

Not: A ve B R- modüller, $J_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ ve her $a \in A$ için

$$\begin{aligned}[J_1, x](a) &= (J_1 x)(a) - (xJ_1)(a) \\ &= J_1 x(a) - xJ_1(a) \\ &= (1 - x)J_1(a) - (x - 1)J_1(a) \\ &= (1 - x - x - 1)J_1(a)\end{aligned}$$

olup buradan $[J_1, x] = (1 - x - x - 1)J_1$ eşitliği elde edilir.

I ideali RÄ$_{\mathbf{k}}$ R nin bir ideali ise herhangi bir n ³ 1 için I^{n+1} de RÄ$_{\mathbf{k}}$ R nin bir ideali olup üreteç kümesi $\left\{ \bigotimes_{i=0}^{n} (1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) : x_i \in R \right\}$ dir.

Önerme 2.1.11 $\bigotimes_{i=0}^{n} (1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\ldots,n\}} \left(-1^{|T|} x_T \otimes x_{T'} \right)$ dir.

Burada T' : T nin tümleyeni

$|T|$: T nin eleman sayısı

$x_T : \bigotimes_k x_k$

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 0$ için $\sum_{T \subseteq \{0\}} (-1)^{|T|} x_T \otimes x_{T'} = \underset{T=\emptyset}{(-1)^0} x_\emptyset \otimes x_0 + \underset{T=\{0\}}{(-1)^1} x_0 \otimes x_\emptyset$, $x_\emptyset = 1$

$= 1 \otimes x_0 - x_0 \otimes 1$

$n = 1$ için $\sum_{T \subseteq \{0,1\}} (-1)^{|T|} x_T \otimes x_{T'} = \underset{T=\emptyset}{(-1)^0} x_\emptyset \otimes x_0 x_1 + \underset{T=\{0\}}{(-1)^1} x_0 \otimes x_1 + \underset{T=\{1\}}{(-1)^1} x_1 \otimes x_0 + \underset{T=\{0,1\}}{(-1)^2} x_0 x_1 \otimes x_\emptyset$

$= 1 \otimes x_0 x_1 - x_0 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_0 + x_0 x_1 \otimes 1$

$n - 1$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|T|} x_T \otimes x_{T'} = \bigotimes_{i=0}^{n-1} (1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)$

n için $\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|T|} x_T \otimes x_{T'} \right) \times (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|T|} \left(x_T \otimes x_{T'} x_n - x_T x_n \otimes x_{T'} \right)$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ K \subseteq \{0,1,\ldots,n\}}}^{n} (-1)^K x_K \otimes x_{K'}$$

elde edilir.

Önerme 2.1.12 A ve B R- modüller ve $J_1 \in Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ olsun. J_1 in n-inci dereceden diferansiyel operatör olması için gerek ve yeter koşul $I^{n+1}J_1 = 0$ olmasıdır.

İspat: $[[J_1, x_0], x_1] = (1 \cdot x_1 - x_1 \cdot 1)[J_1, x_0]$

$$= (1 \cdot x_1 - x_1 \cdot 1)(1 \cdot x_0 - x_0 \cdot 1)J_1$$

Benzer şekilde devam edilirse

$$[J_1, x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n] = \prod_{i=0}^{n} (1 \cdot x_i - x_i \cdot 1)J_1 = 0$$

olur ve dolayısıyla $I^{n+1}J_1 = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.1.13 $J_1 \in D_R^n(A,B)$ olsun.

$J_1(x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n a) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\mathbf{K},n\} ve\ |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} x_T J_1(x_{T'}, a)$ dır.

İspat: Bir önceki önermeden yararlanarak $I^{n+1}J_1 = 0$ olduğu söylenebilir.

$$I^{n+1}J_1 = 0 \Rightarrow \prod_{i=0}^{n} (1 \cdot x_i - x_i \cdot 1)J_1 = \left(\sum_{T \subseteq \{0,1,\mathbf{K},n\}} (-1)^{|T|} x_T \cdot x_{T'} \right) J_1 = 0$$

$$I^{n+1}J_1(a) = (-1)^0 (x_\emptyset \cdot x_0 x_1 \mathbf{K} x_n)J_1(a) + \sum_{T \subseteq \{0,1,\mathbf{K},n\}} (-1)^{|T|} (x_T \cdot x_{T'})J_1(a)$$

$$J_1(x_0 x_1 \mathbf{K} x_n a) = \sum_{T \subseteq \{0,1,\mathbf{K},n\} \text{ ve } |T| \geq 1} (-1)^{|T|-1} x_T J_1(x_{T'} a)$$

bulunur.

A bir R- modül, $x \cdot y \in R \cdot_{\mathbf{k}} R$, $x' \cdot a \in R \cdot_{\mathbf{k}} A$ için $(x \cdot y)(x' \cdot a) = xx' \cdot ya$ çarpımı ile $R \cdot_{\mathbf{k}} A$ üzerinde bir $R \cdot_{\mathbf{k}} R$-

modül yapısı kurulabilir. Bu yüzden herhangi bir $n \geq 1$ için $\frac{R}{I^{n+1}(R)}$ faktör modülü tanımlanabilir. Burada I^{n+1} , R nin tanımlandığı gibi bir idealidir.

$$h : R \to R$$

$$h(a) = 1 \cdot a$$

dönüşümü ve

$$z : R \to \frac{R}{I^{n+1}(R)}$$

$$z(x \cdot a) = \overline{x \cdot a}$$

doğal dönüşümü tanımlansın.

Bu durumda $zh : R \to \frac{R}{I^{n+1}(R)}$ dönüşümü $zh(a) = \overline{1 \cdot a}$ olacak biçimde tanımlı bileşke bir k- lineer dönüşümdür.

Önerme 2.1.14 zh bileşke dönüşümü n- inci dereceden diferansiyel operatördür.

İspat: $I^{n+1} zh = 0$ olup Önerme 2.1.12 den zh homomorfizması n- inci dereceden diferansiyel operatördür.

Tanım 2.1.15 A , B ve K birer R- modül ve $D_n : A \to B$ n- inci dereceden bir diferansiyel operatörü olmak üzere herhangi bir n- inci dereceden $a : A \to K$ diferansiyel operatörü için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $bD_n = a$ olacak şekilde bir tek $b : B \to K$ R- modül homomorfizması varsa $D_n : A \to B$ diferansiyel operatörüne n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatör denir.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & K \\ {\scriptstyle D_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_K} \\ B & \xrightarrow{b} & K \end{array}$$

Teorem 2.1.16 R bir k- cebir ve A , B R- modüller olsunlar. Bu durumda

$$Hom_{\mathbf{k}}(A,B) \cong Hom_R(R \otimes_{\mathbf{k}} A, B)$$

izomorfizmi vardır.

İspat: $Hom_{\mathbf{k}}(A,B)$ ve $Hom_R(R \otimes_{\mathbf{k}} A, B)$ üzerinde $R \otimes_{\mathbf{k}} R$- modül yapısı vardır.

$Hom_{\mathbf{k}}(A,B) \cong Hom_R(R \otimes_{\mathbf{k}} A, B)$ $R \otimes R$- modül izomorfizmi vardır.

$$F : Hom_{\mathbf{k}}(A,B) \to Hom_R(R \otimes_{\mathbf{k}} A, B)$$

$$\varphi \to F(\varphi)(x \otimes a) = x\varphi(a), \quad x \otimes a \in R \otimes_{\mathbf{k}} A$$

olarak tanımlansın.

i. F bir R- modül homomorfizmidir. $\forall x' \in R$ için

$$F(\varphi)(x' \cdot x \otimes a) = F(\varphi)(x'x \otimes a) = x'x\varphi(a)$$

ii. F birebirdir.

$$F(q)=0 \Rightarrow q(a)=F(q)(1\otimes a)=0 \text{ , } \forall a \text{ için}$$

$$\Rightarrow q=0$$

iii. $Y \in Hom_R(R\otimes_k A,B)$ ve $q: A\to B$ dönüşümü $q(a)=Y(1\otimes a)$ olsun. Bu durumda $F(q)(x\otimes a)=xq(a)=xY(1\otimes a)=Y(x\otimes a)$ olup böylece $F(q)=Y$ olduğundan F örtendir.

iv. F , $R\otimes_k R$- modül homomorfizmidir.

$$F(x'\otimes x''q)(x\otimes a)=x(x'\otimes x''q)(a)=xx'q(x''a)$$

$$((x'\otimes x'')F(q))(x\otimes a)=F(a)(x'x\otimes x''a)=x'xq(x''a)$$

NOT: Eğer $r_a: A\to R\otimes_k A$

$$r_a(a)=1\otimes a$$

ise bu durumda F nin tersi $F^{-1}(Y)=Yr_a$ dır, $Y \in Hom_R(R\otimes_k A,B)$.

Herhangi bir A R- modülü üzerinde n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatör vardır ve tektir. Aşağıdaki teoremlerde bunlar verilecektir.

Teorem 2.1.17 (Varlık) $\delta h: A\to \frac{R\otimes_k A}{I^{n+1}(R\otimes_k A)}$

$$\delta h(a)=\overline{1\otimes a}$$

olarak tanımlanan dönüşüm n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür.

İspat: B bir R- modül ve $J_1 : A \to B$ n- inci dereceden diferansiyel operatör olsun. $R\ddot{A}_k A$ nın evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $gh = J_1$ olacak şekilde bir tek $g : R\ddot{A}_k A \to B$ R- modül homomorfizmi vardır ve $g(x\ddot{A}a) = xJ_1(a)$ olarak tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ h \downarrow & & \downarrow 1_B \\ R\ddot{A}_k A & \to & B \end{array}$$

J_1 , n- inci dereceden diferansiyel operatör olduğundan $I^{n+1}J_1 = 0$ dır.Buna göre

$g(I^{n+1}R\ddot{A}_k A) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ h \downarrow & & \downarrow 1_B \\ R\ddot{A}_k A & \to & B \\ z \downarrow & & \downarrow 1_B \\ \dfrac{R\ddot{A}_k A}{I^{n+1}(R\ddot{A}_k A)} & \to & B \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\bar{g}z = g$ olacak şekilde bir tek

$\bar{g} : {R\ddot{A}_k A}\big/{I^{n+1}(R\ddot{A}_k A)} \to B$ R- modül homomorfizmi vardır ve

$\bar{g}(\overline{x\ddot{A}a}) = \overline{xJ_1(a)}$ olarak tanımlıdır. Her $x_i, y_i, x_j, y_j \in R$, $x_i \ddot{A} y_i \in I^{n+1}$,

$I^{n+1}J_1 = 0$ olmak üzere $g(I^{n+1}R\ddot{A}_k A) = 0$

$$g\left(\sum_i x_i \ddot{A} y_i \ddot{O} \sum_j x_j \ddot{A} y_j\right) = g\left(\sum_{i,j} x_i x_j \ddot{A} y_i y_j\right)$$

$$= x_i x_j J_1(y_i y_j)$$

$$= x_j (x_i \ddot{A} y_i) J_1(y_j)$$

$$= 0$$

olduğundan $\overline{g}$ iyi tanımlıdır.

Tanım 2.1.18 $\frac{R \ddot{A}_k A}{I^{n+1}(R \ddot{A}_k A)}$ modülüne A üzerinde tanımlı n- inci dereceden evrensel diferansiyel modül denir ve $J_n(A)$ ile gösterilir. Burada R- modül A yerine R nin kendisi alınırsa $J_n(R) = \frac{R \ddot{A}_k R}{I^{n+1}}$ elde edilir.

Teorem 2.1.19 (Teklik) A R- modül olsun. $J_n'(A)$, A R- modülün başka bir evrensel diferansiyel modülü olmak üzere $J_n'(A) \cong J_n(A)$ dır.

İspat: $D_n : A \to J_n(A)$ ve $D_n' : A \to J_n'(A)$ n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatörler olsun. D_n nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D_n'} & J_n'(A) \\ & \searrow^{D_n} \quad \swarrow & \\ & J_n(A) & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\gamma D_n = D_n'$ olacak şekilde bir tek $\gamma : J_n(A) \to J_n'(A)$ R- modül homomorfizmi vardır. Benzer biçimde D_n' nün evrensellik özelliğinden

$$\begin{array}{ccc} A & \to & J_n(A) \\ D_n' & & \exists \downarrow s \\ & & J_n'(A) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\sigma D_n' = D_n$ olacak şekilde bir tek $\sigma : J_n'(A) \to J_n(A)$ R- modül homomorfizması vardır.

$$\gamma D_n = D_n'$$

$$\sigma\gamma D_n = \sigma D_n' = D_n$$

$$\sigma\gamma D_n(a) = D_n(a)$$

olup buradan

$$\sigma\gamma = 1_{J_n(A)}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sigma D_n' = D_n$$

$$\gamma\sigma D_n' = \gamma D_n = D_n'$$

$$\gamma\sigma D_n'(a) = D_n'(a)$$

buradan

$$\gamma\sigma = 1_{J_n'(A)}$$

bulunur. O halde $J_n'(A) = J_n(A)$ elde edilir.

Teorem 2.1.20 A ve B R- modüller olsunlar. Bu durumda

$$Hom_R\left(J_n(A), B\right) \cong D_R^n(A, B)$$

R- modül izomorfizması vardır.

İspat: $Hom_R\left(J_n(A), B\right) \cong D_R^n(A, B)$

w ¾ ® wD$_n$

D$_n$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan ve " J$_1$ Î $D_R^n(A, B)$ için F(w) = wD$_n$ = J$_1$ olacak şekilde bir tek w Î $Hom_R\left(J_n(A), B\right)$ vardır. Dolayısıyla F örtendir.

F(w) = 0 olsun. " a Î A için wD$_n$(a) = 0 Þ w(J_n(A)) = 0 Þ w = 0

dolayısıyla F birebirdir.O halde F R- modül izomorfizmasıdır.

A ¾wD¾® B

D$_n$] Z $!w

$J_n(A)$

Sonuç 2.1.21 A ve B R- modülleri yerine R alınırsa

$$Hom_R\left(J_n(R), R\right) \cong D_R^n(R) \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.1.22 A bir R- modül olsun. Bu durumda

$$J_n(A) \cong A \otimes_R J_n(R)$$

dir.

İspat: $A \cong R \otimes_R A$ doğal izomorfizmi vardır. Buna göre, $J_n(A) \cong J_n(R \otimes_R A)$ yazılabilir. Tanımdan dolayı, $J_n(R \otimes_R A) = R \otimes_{\mathbf{k}} (R \otimes_R A) \big/ I^{n+1} R \otimes_{\mathbf{k}} (R \otimes_R A)$ dır.

$I^{n+1}(R \otimes_{\mathbf{k}} (R \otimes_R A)) = I^{n+1} \otimes A$ olduğundan $J_n(R \otimes_R A) = (R \otimes_{\mathbf{k}} R) \otimes_R A \big/ I^{n+1} \otimes_R A$ yazılabilir. Buradan $J_n(A) = A \otimes_R J_n(R)$ elde edilmiş olur. W

Teorem 2.1.23 $i \in I$ için A_i ler ve B R- modüller olsunlar. Bu durumda

i. $J_n\left(\bigoplus_i A_i\right) \cong \bigoplus_i J_n(A_i)$

ii. $D_R^n\left(\bigoplus_i A_i, B\right) \cong \bigoplus_i D_R^n(A_i, B)$

izomorfizmaları vardır.

İspat:

i.Teorem 2.1.22 den $J_n\left(\bigoplus A_i\right) \cong \left(\bigoplus A_i\right) \otimes_R J_n(R)$ dir. Buradan

$$\left(\bigoplus_i A_i\right) \otimes_R J_n(R) \cong \bigoplus_i \left(A_i \otimes_R J_n(R)\right)$$

$$\cong \bigoplus_i J_n(A_i)$$

bulunur.

ii. Teorem 2.1.20 den $D_R^n\left(\underset{i}{\oplus} A_i, B\right) \cong Hom_R\left(J_n\left(\underset{i}{\oplus} A_i\right), B\right)$ yazılır.O halde (i) den dolayı

$$Hom_R\left(J_n\left(\underset{i}{\oplus} A_i\right), B\right) \cong Hom_R\left(\underset{i}{\oplus} J_n(A_i), B\right)$$

$$\cong \underset{i}{\oplus} Hom_R\left(J_n(A_i), B\right)$$

$$\cong \underset{i}{\oplus} D_R^n(A_i, B)$$

elde edilir.

Şimdi diferansiyel operatörler ve evrensel modülleri ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 2.1.24 $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_t]$ bir polinom cebiri, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, t sabit bir doğal sayı ve $d_i = \frac{d}{dx_i} : R \to R$ olarak tanımlansın. $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t) \in \mathbb{N}^t$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_t) \in \mathbb{N}^t$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_t$ ve her $i, j = 1, \ldots, t$ için $d_i(x_j) = \delta_{ij}$

(δ_{ij} kronecker delta) olsun. $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_t^{\gamma_t} \in R$ olmak üzere $|\beta|$' inci dereceden $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_t^{\beta_t}$ kısmi türevi

$$\partial^\beta(x^\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\gamma!}{(\gamma - \beta)!} x^{\gamma - \beta} & ; \quad \gamma \geq \beta \\ 0 & ; \quad diğer \end{cases}$$

R nin $|\beta|$- inci dereceden diferansiyel operatörüdür.

Örnek 2.1.25 $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_l]$ polinom cebiri ve $d_n : R \to J_n(R)$ n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere $J_n(R)$,

$\left\{d_n\left(x^{\beta}\right): x^{\beta}=x_1^{\beta_1}\mathbf{K}\,x_l^{\beta_l}, |\beta| \le n\right\}$ üreteç kümesi ile bir serbest R- modüldür.

Örnek 2.1.26 $L=\mathbf{k}(x_1,\mathbf{K}\,x_l)$, $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K}\,x_l]$ nin kesir cismi olsun. $d_n : L \to J_n(L)$ n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere $J_n(L)$, $\left\{d_n\left(x^{\alpha}\right): x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\mathbf{K}\,x_l^{\alpha_l}, |\alpha| \le n\right\}$ üreteç kümesi ile bir L- vektör uzayıdır.

2.2.Bölüm Halkaları ve Lokal Halkaların Evrensel Modülleri

R ve R' k- cebirler ve $\varepsilon : R \to R'$ bir cebir homomorfizması olsun. $J_n(R)$ ve $J_n(R')$ nün n- inci dereceden evrensel diferansiyel modüller olduğunu varsayalım öyle ki $D_n : R \to J_n(R)$ ve $D_n' : R' \to J_n(R')$ sırasıyla R ve R' nün n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatörleri olsun. $J_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan ve $\varepsilon' D_n = D_n' \varepsilon$ olacak biçimde bir tek $\varepsilon' : J_n(R) \to J_n(R')$ R- modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & R' \\ {\scriptstyle D_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D_n'} \\ J_n(R) & \xrightarrow{\ \varepsilon'\ } & J_n(R') \end{array}$$

Bu tanımlardan faydalanarak $y_i \in R'$ ve $x_i \in R$ olmak üzere

$$j : R' \otimes_R J_n(R) \to J_n(R')$$

$$j\left(\sum_i y_i \otimes D_n(x_i)\right) = \sum_i y_i \left(D_n' e(x_i)\right)$$

olacak biçimde bir R'- modül homomorfizmi tanımlanabilir. I , R nin bir ideali olmak üzere $R' = R/I$ olarak alınsın.

$R/I \otimes_R J_n(R) \cong \dfrac{J_n(R)}{IJ_n(R)}$ olduğundan her $y_i \in R'$ ve $x_i \in R$ için j R'- modül olarak $j\left(\sum_i \overline{y_i D_n(x_i)}\right) = \sum_i y_i D_n'\left(\overline{x_i}\right)$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.2.1 R bir k- cebir, I R nin bir ideali ve $R' = R/I$ olsun. N , $D_n(x)$, $x \in I$ tarafından üretilen $J_n(R)$ nin bir alt modülü olsun.

Bu durumda R'- modüllerin

$$0 \to N + IJ_n(R)/IJ_n(R) \to J_n(R)/IJ_n(R) \to J_n(R/I) \to 0$$

bir tam dizisi yazılabilir.

İspat: Dizinin tam olduğunu ispatlamak için $N + IJ_n(R)/IJ_n(R) = \ker b$ olduğunu göstermek yeterlidir.Tanımdan b örtendir ve $N + IJ_n(R)/IJ_n(R) \subseteq \ker b$ dır.

Bu durumda

$$\overline{\beta}: \frac{J_n(R)}{IJ_n(R)} \Big/ \frac{N+IJ_n(R)}{IJ_n(R)} \to J_n\left(\frac{R}{I}\right)$$

bir indirgenmiş dönüşümü vardır öyle ki $\ker\overline{\beta} = \dfrac{\ker\beta}{N+IJ_n(R)} \Big/ IJ_n(R)$ dir.

Şimdi,

$$R \to \frac{R}{N+IJ_n(R)} \to J_n(R) \to \frac{J_n(R)}{IJ_n(R)} \to \frac{J_n(R)}{IJ_n(R)} \Big/ \frac{N+IJ_n(R)}{IJ_n(R)}$$

bileşke dönüşümünü alalım. Burada ι ve ι' doğal dönüşümlerdir.

$\iota'\iota D_n$, R nin n- inci dereceden bir diferansiyel operatörüdür öyle ki $\iota'\iota D_n(I) = 0$ dır. Bu nedenle, R' nün n- inci dereceden bir diferansiyel operatörü vardır. $J_n(R')$ nün evrensellik özelliğinden dolayı $\gamma : J_n(R') \to \dfrac{J_n(R)}{IJ_n(R)} \Big/ \dfrac{N+IJ_n(R)}{IJ_n(R)}$ dönüşümü tanımlanabilir öyle ki $\gamma\overline{\beta} = 1$ dir. Bu ise $\ker\beta \subseteq N+IJ_n(R)/IJ_n(R)$ olduğunu verir.

Önerme 2.2.2 (Lokal Genişleme Lemması) R $\mathbf{k}$- cebir, S R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve A R_S- modül olsun. $D: R \to A$ n- inci dereceden bir diferansiyel operatörü $g: R_S \to A$ diferansiyel operatörüne $g\iota = D$ olacak

biçimde tek şekilde genişler. Burada $\tau : R \to R_S$ dönüşümü $\tau(x) = x/1$ olacak biçimde bir kanonik homomorfizmdir.

İspat: Sweedler, M.E., 1975, Lemma 13.2'ye bakınız.

Lemma 2.2.3 R bir $\mathbf{k}$- cebir, S , R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve A bir R_S - modül olsun. Her $x \in R$ için $\mu : R_S \to A$ dönüşümünün $\mu(x/1) = 0$ olacak biçimde n- inci dereceden bir diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mu = 0$ dır.

İspat: $n = 0$ için μ bir R_S - modül homomorfizmidir. Bu durumda $x/s \in R_S$ için $\mu(x/s) = x/s\,\mu(1/1) = 0$ dır.

$n > 0$ olduğunu ve sonucun n ve n den küçük dereceli tüm diferansiyel operatörler için doğru olduğunu varsayalım. $x/1$, $s/1 \in R_S$ olsun. Bu durumda $[\mu, x/1](s/1) = \mu(xs/1) - x/1\,\mu(s/1) = 0$ yazılır. $[\mu, x/1] \in D_S^{n-1}(R_S, A)$ olduğundan tümevarım gereğince her $x/1 \in R_S$ için $[\mu, x/1] = 0$ dır. Bu yüzden birimi gözönünde bulundurarak $[\mu, x/s] = [\mu, x/1]\,1/s - x/s\,[\mu, s/1]\,1/s$ eşitliğinden $[\mu, x/s] = 0$ elde ederiz. Buradan $\mu = 0$ dır.

Teorem 2.2.4 R **k**- cebir ve S, R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $J_n(R_S)$, R_S nin n- inci dereceden evrensel diferansiyel modülü olduğunu varsayalım. Bu durumda $J_n(R_S) \cong R_S \otimes_R J_n(R)$ izomorfizmi vardır.

İspat: İzomorfizmi ispat etmek için $J_n(R_S)$ nin $J_n(R)_S$ ye izomorf olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $J_n(R)_S \cong R_S \otimes_R J_n(R)$ dir. $D: R \to J_n(R)$ R nin n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatörü olsun. $\alpha: J_n(R) \to J_n(R)_S$ kanonik dönüşümü $\forall d \in J_n(R)$ olmak üzere $\alpha(d) = d/1$ olarak tanımlansın. $J_n(R)_S$ nin R_S nin n- inci dereceden evrensel diferansiyel modülü olduğunu kanıtlayacağız. Önerme 2.1.9 dan, $R \to J_n(R) \to J_n(R)_S$ bileşke dönüşümü R nin n- inci dereceden bir diferansiyel operatörüdür. Lokal genişleme lemmasından her $x \in R$ için $\sigma: R_S \to J_n(R)_S$

$\sigma(x/1) = \alpha D(x)$ olacak biçimde n- inci dereceden bir diferansiyel operatör vardır. B bir R_S - modül ve $D \in D^n_{R_S}(R_S, B)$ olduğunu varsayalım. $\mathring{d} \in D^n_R(R, B)$ olmak üzere $\mathring{d}: R \to B$ dönüşümünü $\mathring{d}(x) = D(x/1)$ olacak biçimde tanımlayalım. $J_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden $g\circ D = \mathring{d}$ olacak biçimde bir $g: J_n(R) \to B$ R- modül dönüşümü vardır. Bu durumda $\bar{g}: J_n(R)_S \to B$

$\bar{g}\left(\frac{a}{1}\right)=g(a)$, $a\in J_n(R)$ olacak biçimde R_S - modül homomorfizmi yazabiliriz. Herhangi bir $x\in R$ için $D\left(\frac{x}{1}\right)-\bar{g}s\left(\frac{x}{1}\right)=0$. Lemma 2.2.3 den $D-\bar{g}s=0$, dolayısıyla $D=\bar{g}s$ elde edilir.

Sonuç 2.2.5 A bir R- modül ve S de R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $J_n(A_S)\cong J_n(A)_S$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned} J_n(A_S) &\cong A_S \otimes_{R_S} J_n(R_S) \\ &\cong A_S \otimes_{R_S} \left(R_S \otimes_R J_n(R)\right) \\ &\cong A_S \otimes_R J_n(R) \\ &\cong (R_S \otimes_R A)\otimes_R J_n(R) \\ &\cong R_S \otimes_R \left(A \otimes_R J_n(R)\right) \\ &\cong R_S \otimes_R J_n(A) \cong J_n(A)_S \end{aligned}$$

2.3. Regüler Cebirlerin Evrensel Türev Modülleri

R Noteryan lokal bir $\mathbf{k}$- cebir, m R nin $R/m\cong\mathbf{k}$ olacak biçimde maksimal ideali olsun. Bu durumda herhangi bir $j\geq 0$ için her m^j/m^{j+1} sonlu boyutlu bir $\mathbf{k}$- vektör uzayıdır. Burada $m^0=R$ dir. Şimdi, $\mathbf{k}$- vektör uzaylarının her $j\geq 0$ için

$0\to m^j/m^{j+1}\to R/m^{j+1}\to 0$ tam dizisini alalım. Bu durumda

$\dim_{\mathbf{k}} R/m^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \dim_{\mathbf{k}} m^{j}/m^{j+1}$ eşitliği elde edilir.

Lemma 2.3.1 R bir regüler lokal halka, $x_1, \mathbf{K}, x_t$ bir regüler parametreler sistemi ise $\binom{n+s}{s} = \frac{(n+s)!}{n!s!}$ olmak üzere $\dim_{\mathbf{k}} R/m^{n+1} = \binom{n+s}{s}$ dir.

İspat: Litaka, S., 1982, Teorem 2.9' a bakınız.]

Lemma 2.3.2 R bir tamlık bölgesi, L R nin kesir cismi ve A sonlu üretilmiş bir R- modül olsun. Bu durumda A nın serbest R- modül olması için gerek ve yeter koşul $\dim_L (L \otimes_R A) = m(A)$ olmasıdır.

İspat: $m(A)$: A yı üreten en küçük eleman sayısıdır. $\dim_L (L \otimes_R A)$ ya A R- modülün rankı denir ve $rank A$ ile gösterilir.

Eğer A serbest R- modül ise ispat aşikardır.

Tersine, $m(A) = \mathbf{l}$ olsun. Bu durumda $0 \to \ker F \to R^{\mathbf{l}} \to A \to 0$ tam dizisi yazılabilir. $\{e_i : i = 1, \mathbf{K}, \mathbf{l}\}$, $R^{\mathbf{l}}$ nin bir serbest bazı ve $\{a_i : i = 1, \mathbf{K}, \mathbf{l}\}$, A nın minimal üreteç kümesi olmak üzere $F : R^{\mathbf{l}} \to A$ dönüşümü $F(e_i) = a_i$ olarak tanımlıdır. Bu dizi L ile tensörlendiğinde

$0 \to L \otimes_R \ker F \to L \otimes_R R^{\mathbf{l}} \to L \otimes_R A \to 0$ tam dizisi elde edilir. $\dim_L L \otimes_R A = \mathbf{l}$ olduğundan $L \otimes_R \ker F = 0$ dır. Dolayısıyla $\ker F$, $R^{\mathbf{l}}$ nin bir torsiyon alt modülüdür. $R^{\mathbf{l}}$ serbest olduğundan $\ker F = 0$ olmalıdır.

Sonuç olarak A bir serbest R- modüldür.

Önerme 2.3.3 R regüler lokal bir $\mathbf{k}$- cebir olsun. m, R nin maksimal ideali öyle ki $\mathbf{k} \cong R/m$ olsun. Bu durumda $J_n(R)$ bir serbest R- modüldür.

İspat: $x_1, \mathbf{K}, x_l$ R nin bir regüler parametreler sistemi olsun. Bu durumda $\{x^\beta + m^{n+1} : |\beta| \le n\}$ kümesi R/m^{n+1} in bir $\mathbf{k}$- baz kümesidir. Buna göre $J_n(R) \otimes_R R/m$ bir $\mathbf{k}$- vektör uzayıdır ve üreteç kümesi $\{D_n(x^\beta) \otimes 1 : |\beta| \le n\}$ kümesidir. Burada $D_n : R \to J_n(R)$ n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatördür. Nakayama lemmasından $\{D_n(x^\beta) : |\beta| \le n\}$ kümesi $J_n(R)$ için bir minimal üreteç kümesidir. Diğer yandan L, R nin kesir cismi ise

$$\rho : L \otimes_R J_n(R) \to J_n(L)$$
$$1 \otimes D_n(x^\beta) \to D_n(x^\beta)$$

izomorfizmi $rank J_n(R) = \mu(J_n(R))$ olmasını sağlar. Bu yüzden Lemma 2.3.2 den $J_n(R)$ serbesttir.

Lemma 2.3.4 R değişmeli bir halka olsun. N nin sonlu üretilmiş bir R- modül olduğunu varsayalım. Bu durumda N nin projektif modül olması için gerek ve yeter koşul N nin lokal projektif modül olmasıdır.

İspat: N nin projektif boyutu $pd(N)$ ile gösterilsin. Eğer $pd(N) = 0$ ise N projektiftir. m R nin maksimal ideali olmak üzere

$pd(N) = \sup_m \{ pd(N_m) : m \ R$ nin maksimal ideali$\}$ olduğundan dolayı istenen elde edilir.

Sonuç 2.3.5 R s boyutlu regüler lokal $\mathbf{k}$- cebir olsun. M bir serbest R- modül ise $J_n(\mathsf{M})$ de serbesttir.

İspat: $x_1, \mathbf{K}, x_l \ R$ nin bir regüler parametreler sistemi ve $\{m_i\}$ nin M nin bir bazı olduğu varsayalım. Bu durumda $\{\mathsf{D}_n(x^{\beta}) \ddot{A} m_i : |\beta| £ n\}$ kümesi $J_n(R) \ddot{A}_R \mathsf{M}$ nin bir baz kümesidir.

Bu yüzden $d_n : \mathsf{M} ¾ ® J_n(\mathsf{M})$, M nin evrensel diferansiyel operatörü olmak üzere $\jmath : J_n(R) \ddot{A}_R \mathsf{M} ¾ ® J_n(M)$ izomorfizmi $J_n(\mathsf{M})$ nin $\{d_n(x^{\beta} m_i) : |\beta| £ n\}$ üzerinde serbest olmasını sağlar.

Teorem 2.3.6 R bir regüler afin cebir olsun. Bu durumda $J_n(R)$ bir projektif R- modüldür.

İspat: $m \ R$ nin maksimal ideali olsun. Bu durumda R_m regüler lokal cebirdir. Dolayısıyla Önerme 2.3.3 den $J_n(R_m)$ serbesttir. $J_n(R_m) @ J_n(R) \ddot{A}_R R_m$ olduğundan ve Lemma 2.3.4 den $J_n(R)$ bir projektif R- modüldür.

Teorem 2.3.7 R bir regüler afin cebir olsun. A projektif R- modül ise $J_n(\mathsf{A})$ da projektif R- modüldür.

İspat: m R nin maksimal ideali olmak üzere Sonuç 2.2.5 den $J_n(\mathsf{A}_m) @ J_n(A) \ddot{\mathsf{A}}_R R_m$ dir. A_m bir serbest R_m - modül olduğundan sonuç 2.3.5 den $J_n(\mathsf{A}_m)$ nin de serbest olduğunu söyleyebiliriz. Bu yüzden $J_n(\mathsf{A})$ lokal projektiftir ve Lemma 2.3.4 den $J_n(\mathsf{A})$ projektiftir.

Teorem 2.3.8 R bir afin $\mathbf{k}$ - cebir olsun. Bu durumda R nin regüler olması için gerek ve yeter koşul $J_1(R)$ nin projektif R - modül olmasıdır.

İspat: Nakai, Y., 1970.

2.4. Yüksek Mertebeden Evrensel Türev Modülleri

Bu bölümde $\mathbf{k}$ bir cisim, R bir $\mathbf{k}$ - cebir olmak üzere R nin n - inci dereceden türevlerinin evrensel modülünün tanımı ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.4.1 A bir R - modül olmak üzere

$$Der_R^n(R,\mathsf{A}) = \{\mathsf{E} \hat{\mathsf{I}}\ D^n(R,\mathsf{A}) : \mathsf{E}(1) = 0\}$$

kümesine £ n - inci dereceden evrensel türev modülü denir.

Lemma 2.4.2 $J_n(R)$, n - inci dereceden evrensel diferansiyel modül olsun. Bu durumda $J_n(R)$, rankı 1 olan bir serbest direk toplama sahiptir.

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R \\ D_n \downarrow & & \downarrow 1_R \\ J_n(R) & \to & R \end{array}$$

diyagramı değişmelidir ve $J_n(R) \cong \ker t \oplus RD_n(1)$ dir.

İspat: $1_R : R \to R$ birim dönüşüm ve $D_n : R \to J_n(R)$ evrensel diferansiyel operatör olmak üzere $t : J_n(R) \to R$ bir dönüşüm vardır öyle ki

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R \\ D_n \downarrow & & \nearrow t \\ & J_n(R) & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. t nun örten olduğu açıktır ve $tD_n(1) = 1$ dir. Bu durumda bir $u : x \to xD_n(1)$ dönüşümü $R \to J_n(R)$ bir R- modül homomorfizmi tanımlar ve

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & u \swarrow & \downarrow 1_R \\ J_n(R) & \to & R \to 0 \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

$x' \in J_n(R)$ olsun. Bu durumda $x' = x' - ut(x') + ut(x')$

$$t(x') = t(x' - ut(x')) + tut(x')$$

$$t(x') = t(x' - ut(x')) + t(x')$$

$$t(x' - ut(x')) = 0$$

buradan $J_n(R) = \ker t + RD_n(1)$ elde edilir.

Eğer $x' = xD_n(1) \in \ker t \cap RD_n(1)$ ise $0 = t(x') = xtD_n(1)$ ve $x' = 0$ dır. Bu nedenle

$\ker t \cap RD_n(1) = 0$ dır. Bu yüzden $J_n(R) \cong \ker t \oplus RD_n(1)$ dir.

Önerme 2.4.3 A bir R- modül olsun. Eğer $c : J_n(R) \to \ker t$ doğal izdüşüm dönüşümü ise

i) cD_n n- inci dereceden bir diferansiyel operatördür ve $cD_n(1) = 0$ dır.

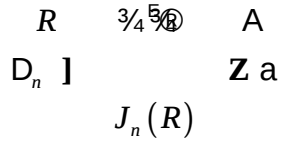
ii) $E \in Der^n(R, A)$ ise bu durumda $h : \ker t \to A$ tek bir R- modül homomorfizmi vardır öyle ki

$$\begin{array}{ccc} R & \to & A \\ cD_n \searrow & & \nearrow h \\ & \ker t & \end{array}$$

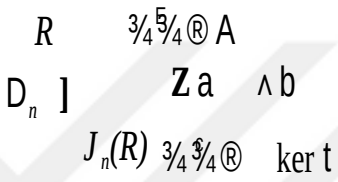
diyagramı değişmelidir.

İspat: **i)** $D_n \in D^n(R, J_n(R))$ ve $c \in D^0(J_n(R), \ker t)$ olduğundan $cD_n \in D^n(R, \ker t)$ dır. c in çekirdeği $RD_n(1)$ modülüdür. Dolayısıyla $cD_n(1) = 0$ dır.

ii) $E \in Der^n(R, A)$ olsun. Bu durumda $a : J_n(R) \to A$ bir R- modül homomorfizmi vardır öyle ki



diyagramı değişmelidir ve $a\left(D_n(1)\right)=0$ dır. Bu nedenle aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $b:\ker t \to A$ tek bir R- modül homomorfizmi vardır.



Tanım 2.4.4 $W_n(R)=\ker t$ modülüne R nin n- inci dereceden türevlerinin evrensel modülü denir. D_n n- inci dereceden evrensel türevdir ve d_n ile gösterilir. Teorem 2.4.2 den $J_n(R)/W_n(R)\cong R$ biçiminde yazılabilir.

Teorem 2.4.5 I, $R\to_k R$ R- modül homomorfizmin çekirdeği olmak üzere

$$W_q(R)\cong\frac{I}{I^{q+1}}$$

R- modül izomorfizması vardır.

İspat: $W_n(R)\cong J_n(R)\otimes_{R\otimes R} I$

$$=\frac{R\otimes R}{I^{n+1}}\otimes_{R\otimes R} I$$

$$\cong\frac{I}{I^{n+1}}$$

Teorem 2.4.6 $J_n(R)$ nin projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul $W_n(R)$ nin projektif R- modül olmasıdır.

İspat: $J_n(R)$ projektif ise $H \oplus J_n(R)$ serbest olacak biçimde bir H R- modül vardır. Dolayısıyla $J_n(R) \cong W_n(R) \oplus R$ olduğundan $W_n(R)$ bir serbest modülün direk toplamıdır. Tersine, G bir serbest modül ve T bir modül olmak üzere $T \oplus W_n(R) = G$ ise bu durumda $T \oplus W_n(R) \oplus R = G \oplus R$ dir. $G \oplus R$ serbest olduğundan $J_n(R)$ projektiftir.

Önerme 2.4.7 A bir R- modül olsun. Bu durumda

$$D^n(R,A) \cong Der^n(R,A) \oplus A \quad \text{dır.}$$

İspat: $D^n(R,A) \cong Hom_R(W_n(R) \otimes R, A)$ dır. Bu nedenle

$$D^n(R,A) \cong Hom_R(W_n(R), A) \oplus Hom_R(R,A)$$

yazılabilir. Önerme 2.4.3 ü uygulanırsa $Hom_R(R,A) \cong A$ olduğundan $D^n(R,A) \cong Der^n(R,A) \oplus A$ elde edilir.

Önerme 2.4.8 $J_s(W_n(R))$, D_s evrensel diferansiyel operatörüyle s- ninci dereceden evrensel diferansiyel modül olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak biçimde bir tek $e: W_{n+s}(R) \to J_s(W_n(R))$ R- modül homomorfizmi vardır öyle ki

$$\begin{array}{ccc} R & \to & \Omega_n(R) \\ d_{n+s} \downarrow & & \downarrow D_s \\ \Omega_{n+s}(R) & \to & J_s(\Omega_n(R)) \end{array}$$

İspat: $d_n \in D^n(R, \Omega_n(R))$ ve $D_s \in D^s(\Omega_n(R), J_s(\Omega_n(R)))$ ise $D_s d_n \in D^n(R, J_s(\Omega_n(R)))$ dir. Bu yüzden d_{n+s} nin evrensellik özelliğinden $e: \Omega_{n+s}(R) \to J_s(\Omega_n(R))$ yazılabilir öyle ki $e d_{n+s} = D_s d_n$ dir.

Önerme 2.4.9 $e: \Omega_{n+s}(R) \to J_s(\Omega_n(R))$ R- modül homomorfizmi olsun. Bu durumda $m: \Omega_{n+s}(R) \to \Omega_n(R)$ ve $l: J_s(\Omega_n(R)) \to \Omega_n(R)$ homomorfizmleri tek şekilde tanımlıdır öyle ki

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{n+s}(R) & \to & \Omega_n(R) \\ e \searrow & & \nearrow l \\ & J_s(\Omega_n(R)) & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

İspat: $d_n : R \to \Omega_n(R)$ dönüşümü $Der^{n+s}(R, \Omega_n(R))$ ye aittir. Yani, $d_n \in Der^{n+s}(R, \Omega_n(R))$ dir.Çünkü herhangi bir $s \geq 0$ için $Der^n(R, \Omega_n(R)) \subseteq Der^{n+s}(R, \Omega_n(R))$ dir. d_{n+s} nin evrensellik özelliğinden $m d_{n+s} = d_n$ olacak biçimde bir $m: \Omega_{n+s}(R) \to \Omega_n(R)$ dönüşümü vardır.

Benzer düşünceyle, $l: J_s(\Omega_n(R)) \to \Omega_n(R)$ R- modül homomorfizmi vardır öyle ki $l D_s = 1_{\Omega_n(R)}$ dir. Bu nedenle e bir homomorfizmdir öyle ki

$\varepsilon d_{n+s} = \Delta_s d_n$ dir. Bu durumda $\lambda \varepsilon d_{n+s} = \lambda \Delta_s d_n = d_n = \mu d_{n+s}$ dir. Teklikten $\lambda = \mu$ dür.

2.5. Evrensel Türev Modülleri Arasındaki Bağıntılar

Bu bölümde, R bir $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere $\Omega_n(R)$ den $\Omega_1(R)$ ye tanımlanmış γ homomorfizmaların çekirdeğinin üreteçleri tanımlanacaktır.

Teorem 2.5.1 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}, x_\lambda]$ afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. $d_1 : R \to \Omega_1(R)$ birinci dereceden ve $d_n : R \to \Omega_n(R)$ n- inci dereceden evrensel türev operatörleri olsun. $x \in R$ için $\gamma(d_n(x)) = d_1(x)$ olmak üzere R- modül homomorfizmaların

$$0 \to \ker\gamma \to \Omega_n(R) \to \Omega_1(R) \to 0$$

bir tam dizisi vardır ve $\ker\gamma$ nın üreteç kümesi $\left\{ d_n(x_1^{i_1} \mathbf{K} x_\lambda^{i_\lambda}) - \sum \frac{\partial(x_1^{i_1} \mathbf{K} x_\lambda^{i_\lambda})}{\partial x_i} d_n(x_i) \right\}$ dir.

İspat: $\Omega_n(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} R & \to & \Omega_1(R) \\ d_n \downarrow & & \swarrow \gamma \\ \Omega_n(R) & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\gamma d_n = d_1$ olacak biçimde bir tek $\gamma : W_n(R) \to W_1(R)$ R- modül homomorfizmi vardır. γ örtendir. Bu yüzden

$$0 \to \ker\gamma \to W_n(R) \to W_1(R) \to 0$$

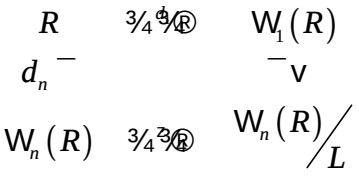
R- modül homomorfizmaların tam dizisi elde edilir.

$K = \left\langle d_n\left(x_1^{i_1} \mathbf{K} x_l^{i_l}\right) - \sum \frac{\partial\left(x_1^{i_1} \mathbf{K} x_l^{i_l}\right)}{\partial x_i} d_n(x_i) \right\rangle$ ve L de $W_n(R)$ nin K tarafından üretilen bir alt modülü olsun. $\ker\gamma = L$ olduğunu gösterelim. $L \subseteq \ker\gamma$ olduğu tanımdan anlaşılır. $\ker\gamma \subseteq L$ ye bakalım:

$R \to W_n(R) \to W_n(R)/L$ bileşke dönüşümünde δd_n birinci dereceden diferansiyel operatördür. Bunun için $[\delta d_n, x_i, x_j](1) = 0$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
[\delta d_n, x_i, x_j](1) &= ([\delta d_n, x_i]x_j - x_j[\delta d_n, x_i])(1) \\
&= \delta d_n(x_i x_j) - x_i \delta d_n(x_j) - x_j \delta d_n(x_i) + x_i x_j \delta d_n(1) \\
&= \delta\left(d_n(x_i x_j) - x_i d_n(x_j) - x_j d_n(x_i)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Burada tanımdan dolayı $d_n(1) = 0$ dır. $W_1(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı



diyagramını değişmeli yapan $z\, d_n = v\, d_1$ olacak biçimde bir tek $W_1(R) \to W_n(R)/L$ R- modül homomorfizmi vardır.

$m \in \ker g$ olsun. Bu durumda $g(m) = 0 \Rightarrow v\, g(m) = 0$

$\Rightarrow z(m) = 0$

$\Rightarrow m \in L$

olur.

Örnek 2.5.2 $R = \mathbf{k}[a,b,c]$ olsun. R- modüllerin

$$0 \to \ker g \to W_3(R) \to W_1(R) \to 0$$

tam dizisinde $W_1(R)$ ve $W_3(R)$ nin üreteç kümeleri sırasıyla,

$\{d_1(a), d_1(b), d_1(c)\}$ ve

$\{d_3(a), d_3(b), d_3(c), d_3(ab), d_3(ac), d_3(bc), d_3(a^2), d_3(b^2), d_3(c^2), d_3(ab^2), d_3(ac^2), d_3(bc^2),$
$d_3(a^3), d_3(b^3), d_3(c^3), d_3(a^2b), d_3(a^2c), d_3(cb^2), d_3(abc)\}$
dir.

$rank\, W_3(R) = 19$ ve $rank\, W_1(R) = 3$ olup $rank \ker g = 19 - 3 = 16$ dır ve $\ker g$ nın üreteçleri

$\{d_3(ab) - ad_3(b) - bd_3(a), d_3(ac) - ad_3(c) - cd_3(a), d_3(bc) - bd_3(c) - cd_3(b),$
$d_3(a^2) - 2ad_3(a), d_3(b^2) - 2bd_3(b), d_3(c^2) - 2cd_3(c), d_3(ab^2) - 2abd_3(b) - b^2d_3(a),$
$d_3(ac^2) - 2acd_3(c) - c^2d_3(a), d_3(bc^2) - 2bcd_3(c) - c^2d_3(b), d_3(a^3) - 3a^2d_3(a),$
$d_3(b^3) - 3b^2d_3(b), d_3(c^3) - 3c^2d_3(c), d_3(a^2b) - 2abd_3(a) - a^2d_3(b),$
$d_3(a^2c) - 2acd_3(a) - a^2d_3(c), d_3(cb^2) - 2bcd_3(b) - b^2d_3(c),$
$d_3(abc) - bcd_3(a) - acd_3(b) - abd_3(c)\}$
dir. Böylece Lemma 2.3.2 den $\ker g$ serbest modüldür.

Örnek 2.5.3 $R = \dfrac{k[a,b,c]}{b^2 - ac}$ afin halka olsun. R - modül homomorfizmaların

$$0 \to \ker g \to W_3(R) \to W_1(R) \to 0$$

tam dizisinde $W_1(R)$ ve $W_3(R)$ sırasıyla $\{d_3(a), d_3(b), d_3(c)\}$ ve

$\{d_3(a), d_3(b), d_3(c), d_3(ab), d_3(ac), d_3(bc), d_3(a^2), d_3(c^2), d_3(ac^2), d_3(ba^2), d_3(bc^2),$
$d_3(ca^2), d_3(a^3), d_3(c^3), d_3(abc)\}$ kümeleri tarafından üretilir. $\ker g$ ise

$\{d_3(ab) - ad_3(b) - bd_3(a), d_3(ac) - ad_3(c) - cd_3(a), d_3(bc) - bd_3(c) - cd_3(b),$
$d_3(a^2) - 2ad_3(a), d_3(c^2) - 2cd_3(c), d_3(ac^2) - 2acd_3(c) - c^2d_3(a),$
$d_3(ba^2) - 2abd_3(a) - a^2d_3(b), d_3(bc^2) - 2bcd_3(c) - c^2d_3(b),$
$d_3(ca^2) - 2acd_3(a) - a^2d_3(c), d_3(a^3) - 3a^2d_3(a), d_3(c^3) - 3c^2d_3(c),$
$d_3(abc) - bcd_3(a) - acd_3(b) - abd_3(c)\}$

kümesi tarafından üretilir.

$rank W_3(R) = 15$ ve $rank W_1(R) = 3$ olup $rank \ker g = 15 - 3 = 12$ dir.

Önerme 2.5.6 $0 \to \ker g \to W_n(R) \to W_1(R) \to 0$

R- modül homomorfizmaların tam dizisi split olsun. Bu durumda $W_n(R)$ nin projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul R nin regüler olmasıdır.

İspat: R regüler halka olsun. Bu durumda Teorem 2.3.6 dan ve Teorem 2.4.6 dan $W_n(R)$ projektif R- modüldür. Tersine, $W_n(R)$ projektif R- modül olsun. Dizinin split oluşundan $W_n(R) \cong W_1(R) \oplus \ker g$ dır. Bu izomorfizmadan $W_1(R)$ projektif R- modül ve Teorem 2.3.8 ve Teorem 2.4.6 dan R regülerdir.

Önerme 2.5.7 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}, x_\mathbf{l}]$ afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. $d_n : R \to W_n(R)$ n- inci dereceden ve $d_{n+1} : R \to W_{n+1}(R)$ $n+1$- inci dereceden evrensel türev operatörleri ve $x \in R$ için $j(d_{n+1}(x)) = d_n(x)$ olmak üzere

$$0 \to \ker g \to W_{n+1}(R) \xrightarrow{j} W_n(R) \to 0$$

R- modül homomorfizmlerin tam dizisi vardır ve $\ker j$, $\{[d_{n+1}, x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n] : x_i \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat: $W_{n+1}(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı $j(d_{n+1}) = d_n$ olacak biçimde bir tek $j : W_{n+1}(R) \to W_n(R)$ R- modül homomorfizmi vardır öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d_n} & W_n(R) \\ d_{n+1} \searrow & & \uparrow j \\ & W_{n+1}(R) & \end{array}$$

j örten olduğundan

$$0 \to \ker \mathrm{j} \to W_{n+1}(R) \xrightarrow{\mathrm{j}} W_n(R) \to 0$$

R - modül homomorfizmlerin tam dizisidir.

İspatın diğer kısmı Teorem 2.5.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 2.5.8 $R = \dfrac{\mathbf{k}[a,b]}{\left(b^2 - a^3\right)}$ afin halka olsun.

Bu durumda $\mathrm{j} : W_3(R) \to W_2(R)$ modül homomorfizmin çekirdeğinin üreteç kümesi $\left\{[d_3,a,a,a](1),[d_3,a,a,b](1),[d_3,a,b,b](1),[d_3,b,b,b](1)\right\}$ dir.

3. SİMETRİK CEBİRLER

Bu bölümde, simetrik cebirler hakkında genel bilgiler verilecek ve Kähler modüllerinin tensör, simetrik ve exterior cebirleri ve özellikleri anlatılacaktır.

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbf{k}$ bir cisim, R bir $\mathbf{k}$- cebir, $\Omega_n(R)$; R nin $\mathbf{k}$ üzerinde n- inci dereceden Kähler diferansiyel modülü olsun. I, $R \otimes_{\mathbf{k}} R \to R$ kanonik dönüşümün çekirdeği olarak tanımlansın. $d_n : R \to \Omega_n(R)$; R nin n- inci dereceden $\mathbf{k}$- türevidir.

$\Omega_n(R) \cong \frac{I}{I^{n+1}}$ dir. $\Omega_n(R)$, $\{d_n(x) : x \in R\}$ kümesi tarafından üretilir. Eğer R sonlu üretilmiş bir $\mathbf{k}$- cebir ise $\Omega_n(R)$ sonlu üretilmiş R- modül olacaktır.

Tanım 3.1.1 A bir R- modül olsun.

i. $\otimes^n A$ modülü A nın n- inci dereceden tensör kuvvetidir ve $A^n \to \otimes^n A$ evrensel R- bilineer dönüşümü $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ olarak tanımlıdır.

ii. $\wedge^n A$ modülü A nın n- inci dereceden exterior kuvvet modülüdür ve $A^n \to \wedge^n A$ evrensel alterne bilineer dönüşümü $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ olarak tanımlıdır.

iii. $\vee^n A$ modülü A nın n- inci dereceden simetrik kuvvet modülüdür ve $A^n \to \vee^n A$ evrensel simetrik R- bilineer dönüşümü $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \ldots x_n$

olarak tanımlıdır.

Bu modüllerin her birinin üreteçleri ve bağıntıları vardır.

$\ddot{A}^n A = A \ddot{A}_R \left(A \ddot{A}_R \left(\mathbf{K} \right) \right)$ (n tane) yazılabilir.

$L^n A$ ve $\acute{U}^n A$, $\ddot{A}^n A$ nın faktör modülleri olarak sırasıyla.

$$x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} y \ddot{A} y \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_n$$

ve

$$x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} y \ddot{A} z \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_n - x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} z \ddot{A} y \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_n$$

formundaki elemanlar tarafından üretilirler.

$$\ddot{A}^1 A = A, \; L^1 A = A, \; \acute{U}^1 A = A$$
$$\ddot{A}^0 A = R, \; L^0 A = R, \; \acute{U}^0 A = R$$

dir. Bu üç yapıdaki evrensel özellikler aşağıdaki biçimde yeniden belirlenebilir.

Bir R- modül homomorfizmi $\ddot{A}^n A$ ile $x_1, \mathbf{K}, x_n \hat{I} A$ olmak üzere $x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_n$ elemanları üzerinde tek şekilde belirlidir.

Bir R- modül homomorfizmi $L^n A$ ile $x_1, \mathbf{K}, x_n \hat{I} A$ olmak üzere $x_1 \grave{U} \mathbf{K} \grave{U} x_n$ elemanları üzerinde tek şekilde belirlidir.

Bir R- modül homomorfizmi $\acute{U}^n A$ ile $x_1, \mathbf{K}, x_n \hat{I} A$ olmak üzere $x_1 \mathbf{K} x_n$ elemanları üzerinde tek şekilde belirlidir.

Lemma 3.1.2 A bir R- modül ve a, b negatif olmayan tamsayılar olsun.

Bu durumda

$$\ddot{A}^a A \acute{} \ddot{A}^b A \text{¾} \text{®} \ddot{A}^{a+b} A$$
$$(x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_a, x_{a+1} \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_{a+b}) \text{¾} \text{®} x_1 \ddot{A} \mathbf{K} \ddot{A} x_{a+b}$$

olacak biçimde tek bir R- bilineer dönüşümü vardır.

$$L^a \times L^b \to L^{a+b}$$
$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_a, x_{a+1} \otimes \cdots \otimes x_{a+b}) \to x_1 \otimes \cdots \otimes x_{a+b}$$

olacak biçimde tek bir R- bilineer dönüşümü vardır.

$$\acute{U}^a \times \acute{U}^b \to \acute{U}^{a+b}$$
$$(x_1 \cdot \cdots \cdot x_a, x_{a+1} \cdot \cdots \cdot x_{a+b}) \to x_1 \cdot \cdots \cdot x_{a+b}$$

olacak biçimde tek bir R- bilineer dönüşümü vardır.

İspat: George M. Bergman, 1997, Lemma 3'e bakınız. ∎

Teorem 3.1.3 $X = \{x_1, \cdots, x_d\}$ sonlu bir küme olmak üzere A bu X bazıyla serbest R- modül olsun. Eğer A, $x_1, \cdots, x_d$ tarafından sonlu üretilmiş ise $A^{\otimes k}$ da R- modül olarak $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}$ tarafından sonlu üretilmiştir. Burada $1 \le i_1, \cdots, i_k \le d$ dir. $A^{\otimes k}$ nın basit tensörler olan $a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$ tarafından üretildiği biliniyor fakat her a_i, $x_1, \cdots, x_d$ nin R- lineer kombinasyonu olarak yazılır ve tensörlerin multilineerliği kullanılarak $A^{\otimes k}$ daki her basit tensör $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}$ tensörlerinin R- lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. A serbest R- modül ve $x_1, \cdots, x_d$ bir bazı ise $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}$ da $A^{\otimes k}$ nın bir bazıdır. $\dim_R \left(\otimes^k A\right) = d^k$ dır.

$\Lambda^k A$, $A^{\otimes k}$ nın bölüm modülü olduğundan $\Lambda^k A$, $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$ basit wedge çarpımları tarafından R- modül olarak üretilir. Burada $1 \le i_1, \ldots, i_k \le d$ dir. $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \wedge x_1 = 0$ ve $x_1 \wedge x_2 + x_2 \wedge x_1 = 0$ bağıntılarını sağlar. $0 < A$, $x_1, \ldots, x_d$ bazıyla sonlu serbest ise $1 \le k \le d$ için $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$, $\Lambda^k A$ nın bir bazıdır ve $\dim_R\left(\Lambda^k A\right) = \binom{d}{k}$ dır.

ΛA, X üreteç kümesi tarafından ifade edilebilir. $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 x_2 = x_2 x_1$ bağıntısını sağlar. ΛA, R- modül olarak $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ çarpımı tarafından üretilir. $x_1 \le \otimes \le x_n \in X$ dir. X sonlu bir $\{x_1, \ldots, x_r\}$ kümesi ise bu bazlar $x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_r^{i_r}$, $i_1, \ldots, i_r \ge 0$ biçiminde yazılabilir. $\dim_R\left(\Lambda^n A\right) = \binom{r+n-1}{r-1}$ dir.

İspat : George M. Bergman, 1997, Teorem 5'e bakınız. ∎

Önerme 3.1.4 T bir R- cebir ve A bir R- modül olmak üzere

$$\Lambda^n(A) \otimes_R T \cong \Lambda^n(A \otimes_R T)$$

izomorfizmi vardır.

İspat: Eisenbud, D., 1995.

Önerme 3.1.5 A ve B R- modüller olsun. Bu durumda

$$\Lambda^p(A \oplus B) \cong \bigoplus_{a+b=p} \left(\Lambda^a A\right) \otimes \left(\Lambda^b B\right)$$

izomorfizmi vardır ve

$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_a) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_b) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_a, y_1 \otimes \cdots \otimes y_b$ dönüşümü ile tanımlıdır. Benzer şekilde

$$\Gamma^p(A \oplus B) \cong \bigoplus_{a+b=p} (\Gamma^a A) \otimes (\Gamma^b B)$$

izomorfizmi vardır ve $(x_1 \cdot x_a) \otimes (y_1 \cdot y_b) \mapsto x_1 \cdot x_a, y_1 \cdot y_b$ dönüşümü ile tanımlıdır.

İspat: George M. Bergman, 1997, Teorem 7'ye bakınız. ∎

3.2. Kähler Modüllerinin Tensör, Exterior ve Simetrik Cebirleri

Önerme 3.2.1 R, boyutu $s \geq 1$ olan bir afin $\mathbf{k}$- cebir ve $\Omega_n(R)$, $\mathbf{k}$ üzerinde R nin n- inci dereceden Kähler diferansiyel modülü olsun. Bu durumda $\Omega_n(R)$, $\left\{ d_n\left(x_1^{i_1} \cdot x_s^{i_s}\right) : i_1 + \cdots + i_s \leq n \right\}$ bazıyla rankı $\binom{n+s}{s} - 1$ olan bir serbest R- modüldür.

İspat: Nakai, Y., 1970, Proposition 2'ye bakınız. ∎

Önerme 3.2.2 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. R bir regüler halka ise $J_n(R)$ bir projektif R- modüldür.

İspat: Sweedler, M.E., 1975, Proposition 18.3'e bakınız. ∎

Teorem 3.2.3 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. R bir regüler halka ise $W_n(R)$ bir projektif R- modüldür.

İspat: $J_n(R) \subseteq W_n(R) \subseteq R$ den ve Önerme 3.2.2 den istenen elde edilir.

Aşağıdaki teorem regüler halkalar hakkında bilgi verir.

Teorem 3.2.4 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R nin regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $W_1(R)$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

İspat: Mc.Connell, J.C and Rabson , J.C ., 1987, sayfa 538' e bakınız.

Örnek 3.2.5 $R = \mathbf{k}[a,b]$ bir polinom cebiri olsun. Bu durumda

i. $\Lambda^2(W_1(R))$,
$\{d_1(a) \wedge d_1(a), d_1(a) \wedge d_1(b), d_1(b) \wedge d_1(a), d_1(b) \wedge d_1(b)\}$ bazıyla rankı 4 olan bir serbest R- modüldür.

ii. $L^2(W_1(R))$, $\{d_1(a) \wedge d_1(b)\}$ bazıyla rankı 1 olan bir serbest R- modüldür.

iii. $\Omega^2(W_1(R))$, $\{d_1(a) \wedge d_1(a), d_1(a) \wedge d_1(b), d_1(b) \wedge d_1(b)\}$ bazıyla rankı 3 olan bir serbest R- modüldür.

Önerme 3.2.6 $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_s]$ boyutu 1 olan bir lokal $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R nin bir regüler halka olması için gerek ve yeter koşul her $n \geq 2$ için $L^n(W_1(R))$ nin sıfır olmasıdır.

İspat: R nin 1 boyutlu bir lokal $\mathbf{k}$- cebir olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 3.2.4 den $W_1(R)$ rankı 1 olan bir serbest R- modüldür. Bu ise Teorem 3.1.3 den her $n \geq 2$ için $L^n(W_1(R))$ nin sıfır olduğunu gösterir.

Tersine, her $n \geq 2$ için $L^n(W_1(R))$ nin sıfır olduğunu varsayalım. m, R nin maksimal ideali olsun. Bu durumda Önerme 3.1.4 den

$L^n(W_1(R)) \otimes_R R/m \cong L^n(W_1(R) \otimes R/m) \cong L^n\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right) = 0$ dır.

$L^n\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right)$ bir R/m- vektör uzayı olduğundan ya $L^n\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right) = 0$ dır ya da $\dim_{R/m} L^n\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right) = 1$ dir. Eğer $L^n\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right) = 0$ ise $W_1(R) = mW_1(R)$ dir ve dolayısıyla Nakayama Lemmasından $W_1(R) = 0$ dır. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $W_1(R)$ nin rankı minimal üreteçlerinin sayısına eşittir. Yani $W_1(R)$, rankı 1 olan bir serbest R- modüldür. Teorem 3.2.4 den R bir regüler halkadır. ∎

Önerme 3.2.6, $W_1(R)$ nin n- inci dereceden tensör kuvvetleri ve simetrik kuvvetleri için doğru değildir. Örneğin; $R = \mathbf{k}[x]$, 1 boyutlu bir polinom cebiri ise $\Lambda^2(W_1(R))$ ve $\acute{U}^2(W_1(R))$ hiç bir zaman sıfır olmaz. $\Lambda^2(W_1(R))$ ve $\acute{U}^2(W_1(R))$ rankları 1 olan serbest R- modüller olurlar.

Teorem 3.1.3 ve Önerme 3.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.7 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}\, x_\mathbf{l}]$ boyutu $\mathbf{l}$ olan bir polinom cebiri olsun. Bu durumda

$t = \binom{n+\mathbf{l}}{\mathbf{l}} - 1$ olmak üzere

i. $Ä^2(W_n(R))$, rankı t^2 olan bir serbest R- modüldür.

ii. $L^2(W_n(R))$, rankı $\binom{t}{2}$ olan bir serbest R- modüldür.

iii. $Ú^2(W_n(R))$, rankı $\binom{t+1}{t-1}$ olan bir serbest R- modüldür.

Buradan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.8 R, boyutu $\mathbf{l}$ olan bir regüler lokal halka ise

$t = \binom{q+\mathbf{l}}{\mathbf{l}} - 1$ olmak üzere

i. $Ä^n(W_q(R))$, rankı t^n olan bir serbest R- modüldür.

ii. $L^n(W_q(R))$, rankı $\binom{t}{n}$ olan bir serbest R- modüldür.

iii. $Ú^n(W_q(R))$, rankı $\binom{t+n-1}{t-1}$ olan bir serbest R- modüldür.

İspat: Teorem 3.2.3, Teorem 3.1.3 ve Önerme 3.2.1 den görülür.

Sonuç 3.2.9 R bir regüler halka olsun. Bu durumda

i. $Ä^n(W_q(R))$ bir projektif R- modüldür.

ii. $L^n(W_q(R))$ bir projektif R- modüldür.

iii. $Ú^n(W_q(R))$ bir projektif R- modüldür.

İspat: m, R nin maksimal ideali olsun. Bu durumda R_m bir regüler lokal cebir olur. Teorem 3.2.3 den $W_q(R_m)$ serbest olur. $W_q(R_m) @ W_q(R) Ä R_m$ izomorfizminden $W_q(R)$ bir projektif R- modüldür. Teorem 3.1.4 den $Ä^n(W_q(R))$ bir projektif R- modüldür.

Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.2.10 R, boyutu s olan bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda,

i. $W_q(R)$ nin bir serbest R- modül olması için gerek ve yeter koşul $Ä^n(W_q(R))$ nin bir serbest R- modül olmasıdır.

ii. $W_q(R)$ nin bir serbest R- modül olması için gerek ve yeter koşul $L^n(W_q(R))$ nin bir serbest R- modül olmasıdır.

iii. $W_q(R)$ nin bir serbest R- modül olması için gerek ve yeter koşul $Ú^n(W_q(R))$ nin bir serbest R- modül olmasıdır.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin R nin boyutu s olan bir tamlık bölgesi olduğu varsayabiliriz. $W_q(R)$ bir serbest R- modül olsun. Teorem 3.1.3 den $Ú^n(W_q(R))$ bir serbest R- modüldür.

Tersine, $Ú^n\left(W_q(R)\right)$ nin bir serbest R- modül olduğunu varsayalım. $\dim R = s$ ise $rank\left(W_q(R)\right) = \binom{q+s}{s} - 1$ dir.

$\binom{q+s}{s} - 1 = t$ olmak üzere $rank\, Ú^n\left(W_q(R)\right) = \binom{t+n-1}{t-1}$ dir. m, R nin maksimal ideali olsun. Bu durumda $Ú^n\left(W_q(R)\right) Ä_R R/m$, boyutu $\binom{t+n-1}{t-1}$ olan bir

R/m -vektör uzayıdır. $Ú^n\left(W_q(R)\right) Ä_R R/m @ Ú^n\left(\frac{W_q(R)}{mW_q(R)}\right)$ dir.

$Ú^n\left(\frac{W_q(R)}{mW_q(R)}\right)$ nin boyutu $\binom{t+n-1}{t-1}$ olan bir R/m - vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{W_q(R)}{mW_q(R)}$ nin boyutu t olan bir R/m - vektör uzayı olmasıdır. Buradan $\frac{W_q(R)}{mW_q(R)}$ nin boyutu t olan bir R/m - vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul $W_q(R)$ nin minimal üreteçlerinin sayısının t olmasıdır. $rank\left(W_q(R)\right) = t$ idi. Bu yüzden istenildiği gibi $W_q(R)$ bir serbest R- modüldür.

Diğerleri de benzer biçimde ispatlanır.

Sonuç 3.2.11 R, s boyutlu bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda

i. $W_q(R)$ nin bir projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul $Ä^n(W_q(R))$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

ii. $W_q(R)$ nin bir projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul $L^n(W_q(R))$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

iii. $W_q(R)$ nin bir projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul $Ú^n(W_q(R))$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

İspat: $W_q(R)$ bir projektif R- modül olsun. m, R nin maksimal ideali olduğunu varsayalım. Bu durumda $W_q(R_m)$, serbest R_m- modüldür. Teorem 3.1.3 den $Ä^n(W_q(R_m))$ bir serbest R_m- modül ve $W_q(R_m) @ W_q(R) Ä R_m$ izomorfizminden $Ä^n(W_q(R))$ bir projektif R- modüldür.

Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.2.12 R bir afin lokal tamlık bölgesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i. R bir regüler lokal halkadır.

ii. $Ä^n(W_1(R))$ bir serbest R- modüldür.

iii. $L^n(W_1(R))$ bir serbest R- modüldür.

iv. $Ú^n(W_1(R))$ bir serbest R- modüldür.

İspat: Teorem 3.2.4 ve Teorem3.2.10 dan görülür.

Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.13 R bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i. R bir regüler halkadır.

ii. $\ddot{A}^n\left(W_1(R)\right)$ bir projektif R- modüldür.

iii. $L^n\left(W_1(R)\right)$ bir projektif R- modüldür.

iv. **iv)** $\acute{U}^n\left(W_1(R)\right)$ bir projektif R- modüldür.

Not: Olgun N., and Şahin M., 2016, Corollary 3.14'e bakınız.

4. SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİ

Bu bölümde simetrik kuvvet modüllerinin tanımı yapılarak Kähler modüllerinin simetrik türevleri ve özellikleri incelenecek ve elde edilen sonuçlar verilecektir.

4.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 4.1.1 R, karakteristiği sıfır olan bir $\mathbf{k}$ cismi üzerinde değişmeli bir cebir olmak üzere, A bir R- modül, $A \otimes_R A$ ise A nın kendisiyle olan tensör çarpımı, K da $a,b \in A$ için $a \otimes b - b \otimes a$ elemanları tarafından üretilen $A \otimes_R A$ nın bir alt modülü olsun. Bu durumda $\Omega^2 A = {A \otimes_R A}/{K}$ modülüne A nın ikinci dereceden simetrik kuvvet modülü denir.

$$\otimes : A \times A \to A \otimes A$$
$$\otimes (a,b) = a \otimes b$$

olacak biçimde kanonik dengeli dönüşümü ve

$$g : A \otimes A \to \Omega^2 A$$

doğal örten dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\otimes$ ve g nın bileşke dönüşümü bilineer bir dönüşümdür ve $g \otimes = \Omega$ olarak tanımlanır.

Lemma 4.1.2 A ve B R- modüller ve $z : A \times A \to B$ bilineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $f \circ \Phi = z$ olacak biçimde bir tek $f : \Phi^2 A \to B$ R- modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \to & B \\ \Phi \searrow & & \nearrow f \\ & \Phi^2 A & \end{array}$$

İspat: Bourbaki, N., 1974.

Önerme 4.1.3 T bir R- cebir ve A bir R- modül olmak üzere

$$\Phi^2 A \otimes_R T \cong \Phi^2 (A \otimes_R T)$$

izomorfizması vardır.

İspat: Bourbaki, N., 1974.

Önerme 4.1.4 A rankı r olan bir serbest R- modül ise $\Phi^2 A$, rankı $\binom{r+2-1}{r-1}$ olan bir serbest R- modüldür.

İspat: Bourbaki, N., 1974.

Önerme 4.1.5 A ve B R- modüller olsunlar. Bu durumda

$$\Phi^2 (A \oplus B) \cong \Phi^2 A \otimes_R \Phi^2 B$$

izomorfizmi vardır.

İspat: Bourbaki, N., 1974.

Herhangi bir A R- modülü için n- inci dereceden simetrik kuvvet modülü benzer şekilde tanımlanabilir.

4.2. Kähler Modüllerinin Simetrik Türevleri

R bir $\mathbf{k}$- cebir, $J_n(R)$; R- nin $\mathbf{k}$ üzerinde n- inci dereceden evrensel diferansiyel modülü, $\Omega_n(R)$; R- nin $\mathbf{k}$ üzerinde n- inci dereceden Kähler diferansiyel modülü, $d_n : R \to \Omega_n(R)$ kanonik dönüşümü R- nin n- inci dereceden $\mathbf{k}$- türevidir. $\{\Omega_n(R), d_n\}$ çifti evrensellik özelliğine sahiptir.

$$R \times_{\mathbf{k}} R \to R$$

$$x \times y \to xy$$

kanonik dönüşümün çekirdeği I_R olmak üzere $\Omega_n(R) \cong \frac{I_R}{I_R^{n+1}}$ dir.

$\Omega_n(R)$; $\{d_n(r) : r \in R\}$ kümesi tarafından üretilir. Eğer R sonlu üretilmiş $\mathbf{k}$- cebir ise $\Omega_n(R)$ de sonlu üretilmiş R- modül olacaktır.

Tanım 4.2.1 R birimli ve değişmeli bir k- cebir, $R \to \Omega_1(R)$; R nin birinci dereceden Kähler türevi ve $\Sigma(\Omega_1(R))$; R üzerinde $\Omega_1(R)$ tarafından üretilen simetrik cebir ve $\Sigma(\Omega_1(R)) = \bigoplus_{p \geq 0} \Sigma^p(\Omega_1(R))$ olsun.

$D : \Sigma(\Omega_1(R)) \to \Sigma(\Omega_1(R))$ lineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa simetrik türevdir.

i. $D\left(\Omega^{p}\left(W_1(R)\right)\right) \subseteq \Omega^{p+1}\left(W_1(R)\right)$

ii. D, k üzerinde birinci dereceden türevdir.

iii. D nin $R \cong \Omega^{0}\left(W_1(R)\right)$ ye kısıtlanışı $d_1 : R \to W_1(R)$ Kähler türevidir.

Teorem 4.2.2 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olmak üzere R- modüllerin

$$0 \to \ker j \to W_2(R) \xrightarrow{j} W_1(R) \to 0$$

bir kısa tam dizisi vardır. Her $g \in R$ için $j\left(d_2(g)\right) = d_1(g)$ dir. Her $x, y \in R$ olmak üzere $\ker j$, $\left\{d_2(xy) - xd_2(y) - yd_2(x)\right\}$ kümesi tarafından üretilir.

Önerme 4.2.3 $\Omega^{2}\left(W_1(R)\right) \cong \ker j$

İspat: $x, y \in R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_1(x) \times d_1(y) &= (1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1) \\ &= 1 \otimes xy - y \otimes x - x \otimes y + xy \otimes 1 \\ &= (1 \otimes xy - xy \otimes 1) - x(1 \otimes y - y \otimes 1) - y(1 \otimes x - x \otimes 1) \\ &= d_2(xy) - xd_2(y) - yd_2(x) \end{aligned}$$

buradan $\Omega^{2}\left(W_1(R)\right) \cong \ker j$ elde edilir. ∎

Teorem 4.2.4 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R bir regüler halka ise $W_n(R)$ bir projektif R- modüldür.

İspat: Sweedler, M.E., 1975.

Teorem 4.2.5 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R nin regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $\Omega_1(R)$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

İspat: McConnell, J.C. and Rabson, J.C., 1987.

Tanım 4.2.6 R birimli ve değişmeli bir k- cebir, $R \to \Omega_n(R)$; R nin n- inci dereceden Kähler türevi ve $\Omega(\Omega_n(R))$: R üzerinde $\Omega_n(R)$ tarafından üretilen simetrik cebir ve $\Omega(\Omega_n(R)) = \bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p(\Omega_n(R))$ olsun.

$D: \Omega(\Omega_n(R)) \to \Omega(\Omega_n(R))$ k- lineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa genelleştirilmiş simetrik türev denir.

i. $D(\Omega^p(\Omega_n(R))) \subseteq \Omega^{p+1}(\Omega_n(R))$

ii. D, k üzerinde n- inci dereceden türevdir.

iii. D nin $R = \Omega^0(\Omega_n(R))$ ye kısıtlanışı $d_n: R \to \Omega_n(R)$ Kähler türevidir.

Örnek 4.2.7 $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_l]$ l boyutlu bir polinom cebiri olsun. Bu durumda $\Omega_n(R)$, $\{d_n(x_1^{i_1} \cdots x_l^{i_l}) : i_1 + \cdots + i_l \leq n\}$ bazıyla rankı $\binom{n+l}{l} - 1$ olan bir serbest R- modüldür. $t = \binom{n+l}{l} - 1$ olmak üzere $\Omega^2(\Omega_n(R))$, rankı $\binom{t+1}{t-1}$ ve üreteç kümesi $\{d_n(x_1^{i_1} \cdots x_l^{i_l})\} \cup \{d_n(x_1^{i_1} \cdots x_l^{i_l}) : i_1 + \cdots + i_l \leq n\}$ olan bir serbest R- modüldür.

Teorem 4.2.8 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için R- modüllerin

$$0 \to \ker a \to \Omega_{2n}(R) \to J_n(\Omega_n(R)) \to \operatorname{co}\ker a \to 0$$

bir uzun tam dizisi vardır.

İspat: R bir $\mathbf{k}$- cebir, $\Omega_n(R)$; R nin n- inci dereceden Kähler türevi olsun. $J_n(\Omega_n(R))$; n- inci dereceden evrensel diferansiyel modül ($\Omega_n(R)$ nin derecesi n e eşit veya daha küçük) ve $D_n : \Omega_n(R) \to J_n(\Omega_n(R))$ evrensel diferansiyel operatör olsun. $\Omega_{2n}(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan ve $a\, d_{2n} = D_n d_n$ olacak biçimde bir tek $a : \Omega_{2n}(R) \to J_n(\Omega_n(R))$ R- modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d} & \Omega_n(R) \\ {\scriptstyle d_{2n}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle D_n} \\ \Omega_{2n}(R) & \xrightarrow{a} & J_n(\Omega_n(R)) \end{array}$$

Homolojik özelliklerden, istenildiği gibi dizi elde edilir.

Sonuç 4.2.9 R boyutu $\mathbf{l}$ olan regüler $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda a injektiftir.

İspat: $a\left(d_{2n}\left(x^{\gamma}\right)\right) = D_n\left(x^{\beta} d_n\left(x^{\alpha}\right)\right)$ olarak tanımlanır. Burada

$$x^{\gamma} = x_1^{i_1} \mathbf{K}\, x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}} : i_1 + \mathbf{K} + i_{\mathbf{l}} \leq 2n$$
$$x^{\beta} = x_1^{i_1} \mathbf{K}\, x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}} : i_1 + \mathbf{K} + i_{\mathbf{l}} \leq n$$
$$x^{\alpha} = x_1^{i_1} \mathbf{K}\, x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}} : i_1 + \mathbf{K} + i_{\mathbf{l}} \leq n$$

dir. W

Sonuç 4.2.10 R, boyutu 1 olan regüler $\mathbf{k}$- cebir ve $q=1$ ise

$$W_{2q}(R) \cong J_1(W_1(R))$$

izomorfizmi vardır.

İspat: x, R nin bir parametreler sistemi olsun. Bu durumda $W_2(R)$ ve $J_1(W_1(R))$ sırasıyla $M=\{d_2(x^i): i=1,2\}$ ve $N=\{D_1(x^j d_1(x)): j=0,1\}$ üreteç kümeleriyle serbest R- modüllerdir. $\alpha(d_2(x^i))=iD_1(x^{i-1}d_1(x))$ olsun. Bu durumda α nın M ve N bazlarına bağlı matrisi $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ biçimindedir. A tersinirdir, dolayısıyla α homomorfizmi de tersinirdir. Bu yüzden α bir R- modül izomofizmidir. Bu durum $n \neq 2$ için doğru değildir. W

Örnek 4.2.11 $R=\mathbf{k}[a,b]$ bir polinom cebiri olsun. Bu durumda

$W_1(R)$, $\{d_1(a), d_1(b)\}$ bazı ile rankı 2 olan bir serbest R- modüldür.

$W_2(R)$, $\{d_2(a), d_2(b), d_2(ab), d_2(a^2), d_2(b^2)\}$ bazı ile rankı 5 olan bir serbest R- modüldür. $J_1(W_1(R))$,

$\{D_1(d_1(a)), D_1(d_1(b)), D_1(ad_1(a)), D_1(ad_1(b)), D_1(bd_1(a)), D_1(bd_1(b))\}$

bazı ile rankı 6 olan bir serbest R- modüldür. $J_2(W_2(R))$;

$\{D_2(d_2(a)), D_2(d_2(b)), D_2(d_2(ab)), D_2(d_2(a^2)), D_2(d_2(b^2)), D_2(ad_2(a)), D_2(ad_2(b)),$
$D_2(ad_2(ab)), D_2(ad_2(a^2)), D_2(ad_2(b^2)), D_2(bd_2(a)), D_2(bd_2(b)), D_2(ab_2(ab)),$
$D_2(bd_2(a^2)), D_2(bd_2(b^2)), D_2(abd_2(a)), D_2(abd_2(b)), D_2(abd_2(ab)), D_2(abd_2(a^2)),$
$D_2(abd_2(b^2)), D_2(a^2d_2(a)), D_2(a^2d_2(b)), D_2(a^2d_2(ab)), D_2(a^2d_2(a^2)), D_2(a^2d_2(b^2)),$
$D_2(b^2d_2(a)), D_2(b^2d_2(b)), D_2(b^2d_2(ab)), D_2(b^2d_2(a^2)), D_2(b^2d_2(b^2))\}$
bazı ile rankı 30 olan bir serbest R- modüldür.

$Ú^2(W_1(R))$; $\{d_1(a) Ä d_1(a), d_1(a) Ä d_1(b), d_1(b) Ä d_1(b)\}$ bazı ile rankı 3 olan bir serbest R- modüldür.

Teorem 4.2.12 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda her $n³0$ için $0¾®$ $\ker c ¾®$ $J_n(W_n(R))¾®$ $Ú^2(W_n(R))¾®$ $co\ker c ¾®$ 0 R- modüllerin bir uzun tam dizisi vardır.

İspat: $D_n : W_n(R)¾®Ú^2(W_n(R))$ herhangi bir genelleştirilmiş simetrik türev, $J_n(W_n(R))$; $W_n(R)$ üzerinde derecesi $£n$ olan diferansiyel operatörlerin n- inci dereceden evrensel modülü ve $D_n : W_n(R)¾®J_n(W_n(R))$ evrensel diferansiyel operatör olsun. $J_n(W_n(R))$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan tek bir $c : J_n(W_n(R))¾®Ú^2(W_n(R))$ R- modül homomorfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc} W_n(R) & ¾¾® & Ú^2(W_n(R)) \\ D_n \;] & & \mathbf{Z}\; c \\ & J_n(W_n(R)) & \end{array}$$

Homolojik özelliklerden istenen dizi elde edilir.

Lemma 4.2.13 $Ú(W_1(R))$ nin simetrik türevlerinin varlığı ile $0 ¾® Ú^2(W_1(R)) ¾® W_2(R) ¾i® W_1(R)$ tam dizisinin split oluşu birbirine denktir.

İspat: $Ú(W_1(R))$ üzerinde simetrik türev tanımlanmış olsun. $d_1 : R ¾® W_1(R)$ ve $D_1 : W_1(R) ¾® Ú^2(W_1(R))$ birinci dereceden türev operatörü olup bileşkesini aldığımızda $D_1 d_1 : R ¾® Ú^2(W_1(R))$ ikinci dereceden türev operatörü olur. $W_2(R)$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan ve $t\, d_2 = D_1 d_1$ olacak şekilde bir tek $t : W_2(R) ¾® Ú^2(W_1(R))$ R- modül homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{d_2}{¾®} & Ú^2(W_1(R)) \\ & \searrow^{D_1 d_1} & \downarrow 1_{Ú^2(W_1(R))} \\ W_2(R) & ¾t® & Ú^2(W_1(R)) \end{array}$$

$$\begin{aligned} t\left(d_2(xy) - xd_2(y) - yd_2(x)\right) &= t\, d_2(xy) - x t\, d_2(y) - y t\, d_2(x) \\ &= D_1 d_1(xy) - xD_1 d_1(y) - yD_1 d_1(x) \\ &= D_1\left(xd_1(y) + yd_1(x)\right) - xD_1 d_1(y) - yD_1 d_1(x) \\ &= xD_1 d_1(y) + d_1(x) \times d_1(y) + yD_1 d_1(x) + d_1(y) \times d_1(x) \\ &\quad - xD_1 d_1(y) - yD_1 d_1(x) \\ &= 2d_1(x) \times d_1(y) \end{aligned}$$

t yerine $\frac{1}{2}t$ alınırsa istenen split özellik sağlanır.

Diğer taraftan, $t : W_2(R) \to U^2(W_2(R))$ split özelliği sağlasın.

$\sum_i y_i d_i(x_i) \in W_1(R)$ alalım. j örten olduğundan

$j\left(\sum_i y_i d_2(x_i)\right) = \sum_i y_i d_1(x_i)$ olacak biçimde bir $\sum_i y_i d_2(x_i) \in W_2(R)$ vardır

ve $t\left(\sum_i y_i d_2(x_i)\right) = 0$ dır. Eğer $\sum_i y_i d_2(x_i) = 0$ ise bu durumda

$\sum_i y_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) = \sum_i (y_i \otimes x_i - y_i x_i \otimes 1) \in I^3$ dür.

Burada $I = \ker j$ dir ve $W_n(R) \cong \frac{I}{I^{n+1}}$ dir.

Buradan, $\sum_i (1 \otimes y_i x_i - y_i x_i \otimes 1) - x_i(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1)$

$$= \sum_i (1 \otimes y_i x_i - y_i x_i \otimes 1) - x_i \otimes y_i + x_i y_i \otimes 1$$

$$= \sum_i d_2(y_i x_i) - x_i d_2(y_i) = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, $\sum_i y_i d_1(x_i) \in W_1(R)$ elemanını

$\sum_i d_2(y_i x_i) - x_i d_2(y_i) \in W_2(R)$ ye taşıyan bir $\mathbf{k}$- lineer dönüşüm vardır.

$t\left(\sum_i y_i d_2(x_i)\right) = 0$ olduğu için $W_1(R) \to W_2(R) \to U^2(W_1(R))$

dönüşümlerinin bileşkesini aldığımızda

$$td = D_1 : W_1(R) \to U^2(W_1(R))$$

$$D_1\left(\sum_i y_i d_1(x_i)\right) = \sum_i d_1(y_i)\times d_1(x_i)$$

olup istenen simetrik türevin varlığı elde edilir. W

Teorem 4.2.15 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir ve $\acute{U}(W_1(R))$ en az bir tane simetrik türeve sahip olsun. $W_1(R)$ nin bir projektif R- modül olması için gerek ve yeter koşul $W_2(R)$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

İspat: $W_1(R)$ nin bir projektif R- modül olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.5 den R bir regüler halka ve Teorem 4.2.4 den $W_2(R)$ bir projektif R- modüldür.
Tersine, Önerme 4.2.3 ve Teorem 4.2.2 den $0 \to \acute{U}^2(W_1(R)) \to W_2(R) \to W_1(R) \to 0$ R- modüllerin bir tam dizisi vardır.
Bu dizi split tam dizidir. Dizinin split oluşu ispat için yeterlidir.
$W_2(R) \cong W_1(R) \oplus \acute{U}^2(W_1(R))$ dir. Bu ise bize $W_1(R)$ nin projektif olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.16 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir ve $\acute{U}(W_1(R))$, en az bir simetrik türeve sahip olsun. $W_1(R)$ nin bir serbest R- modül olması için gerek ve yeter koşul $W_2(R)$ nin bir serbest R- modül olmasıdır.

İspat: Olgun, N., 2016, Corollary 3.10'a bakınız.

Teorem 4.2.17 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir ve $\Omega(W_1(R))$, en az bir simetrik türeve sahip olsun. R nin bir regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $W_2(R)$ nin bir projektif R- modül olmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.4, Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.15 den görülür.

Sonuç 4.2.18 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir ve $\Omega(W_1(R))$, en az bir simetrik türeve sahip olsun. R nin bir regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $W_2(R)$ nin bir serbest R- modül olmasıdır.

Not: Olgun, N., 2016, Corollary 3.12'ye bakınız.

Lemma 4.2.19 R değişmeli $\mathbf{k}$- cebir olsun. $W_1(R)$ nin $d_1 : R \to W_1(R)$ evrensel türev operatörüyle bir evrensel modül olduğunu varsayalım. Bu durumda $a_i, b_i \in R$ olmak üzere $D : W_1(R) \to L^2(W_1(R))$

$$D\left(\sum_i a_i d_1(b_i)\right) = \sum_i d_1(a_i) \wedge d_1(b_i)$$

dönüşümü $W_1(R)$ üzerinde birinci dereceden diferansiyel dönüşümdür.

İspat: Osborn, H., 1968, Lemma 9.2'ye bakınız.

Sonuç 4.2.20 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R- modüllerin

$$0 \to W_2(R) \to J_1(W_1(R)) \to L^2(W_1(R)) \to 0$$

bir split tam dizisi vardır.

İspat: Hart, R., 1996, sayfa 179'a bakınız.

4.3. Kähler Modüllerinin Simetrik Türevleri Üzerine Elde Edilen Sonuçlar

Bu bölümde, birinci dereceden Kähler modüllerinin simetrik türevleri üzerinde tanımlanmış bazı bağıntılar ikinci dereceden Kähler modüllerinde incelenmiş ve bazı yeni bağıntılar ve izomorfizmler elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1 R bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun.Bu durumda

$$J_1(\Omega_1(R)) \otimes \Omega_1(R) \cong \Omega^2(\Omega_1(R)) \cong L^2(\Omega_1(R))$$

izomorfizmi vardır.

İspat: Sonuç 4.2.20 den $J_1(\Omega_1(R))$ nin $\Omega_2(R) \cong L^2(\Omega_1(R))$ ye izomorf olduğu söylenebilir ve Osborn tarafından ispatlanmış olan R- modüllerin

$$0 \to \Omega^2(\Omega_1(R)) \to \Omega_2(R) \to \Omega_1(R) \to 0$$

split tam dizisini kullanarak bu iki split tam diziden

$$J_1(\Omega_1(R)) \otimes \Omega_1(R) \cong \Omega^2(\Omega_1(R)) \cong L^2(\Omega_1(R))$$

izomorfizmi elde edilir.

Örnek 4.3.2 $R = \mathbf{k}[a,b]$ boyutu 2 olan bir polinom cebiri olsun. Bu durumda $\Omega_1(R)$, $\{d_1(a), d_1(b)\}$ bazıyla rankı 2 olan bir serbest R- modüldür.

$Ú^2(W_1(R))$, $\{d_1(a)Úd_1(a), d_1(a)Úd_1(b), d_1(b)Úd_1(b)\}$ üreteç kümesi ile rankı 3 olan bir serbest R- modüldür.

$L^2(W_1(R))$, $\{d_1(a)Ùd_1(b)\}$ üreteç kümesi ile rankı 1 olan bir serbest R- modül

$J_1(W_1(R))$, $\{D_1(d_1(a)), D_1(d_1(b)), D_1(ad_1(a)), D_1(ad_1(b)), D_1(bd_1(a)), D_1(bd_1(b))\}$

tarafından üretilir ve rankı 6 dır. İzomorfizm rankları ile bellidir.Dolayısıyla,

$$J_1(W_1(R)) @ W_1(R) Å Ú^2(W_1(R)) Å L^2(W_1(R)) \text{ dir.}$$

Teorem 4.3.3 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}\, x_s]$ değişmeli bir $\mathbf{k}$- cebir olsun.Bu durumda

$$0 ¾® \ker q ¾® J_2(W_2(R)) ¾® W_2(R) ¾® 0$$

R- modüllerin bir kısa tam dizisi vardır ve

$$\ker q @ L^2(W_2(R)) Å Ú^2(W_2(R))$$

dir.

Bu teoremin ispatını vermeden önce yardımcı olması bakımından aşağıdaki lemmalar verilecektir.

Lemma 4.3.4 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}\, x_s]$ bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun.Bu durumda R- modüllerin

$$W_2(R) ¾® J_2(W_2(R)) ¾® L^2(W_2(R)) ¾® 0$$

bir tam dizisi vardır.

İspat: R birimli ve değişmeli bir $\mathbf{k}$- cebir, $W_2(R)$, R nin ikinci dereceden türevlerinin evrensel modülü,

$J_2(W_2(R))$; $D_2 : W_2(R) \to J_2(W_2(R))$ evrensel diferansiyel operatörüyle $W_2(R)$ üzerinde derecesi 2 ye eşit veya daha küçük diferansiyel operatörlerin evrensel modülü olsun. Bu durumda, $x_i, x_j, x_k, x_l \in R$ ve $m,n,t,r = 0,1,2$ $1 \le i, j, k, l \le s$

olmak üzere

$$\Phi_2 : W_2(R) \to L^2(W_2(R))$$

$$\Phi_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

dönüşümü $W_2(R)$ üzerinde tanımlı ikinci dereceden diferansiyel dönüşümdür.

$J_2(W_2(R))$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan

$q_1 D_2 = \Phi_2$ olacak biçimde tek bir $q_1 : J_2(W_2(R)) \to L^2(W_2(R))$ R- modül homomorfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc} W_2(R) & \xrightarrow{\Phi_2} & L^2(W_2(R)) \\ D_2 \searrow & & \nearrow q_1 \\ & J_2(W_2(R)) & \end{array}$$

$$q_1 D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \Phi_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

olduğundan dolayı q_1 örtendir.Bu yüzden R- modüllerin

$$W_2(R) \to J_2(W_2(R)) \to L^2(W_2(R)) \to 0$$

bir tam dizisi yazılabilir. Bu dizinin $J_2(W_2(R))$ de tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathrm{Im}\, D_2$, $D_2(d_2(x_i))$, $D_2(d_2(x_i, x_j))$ $i, j = 1, \mathbf{K}, s$ tarafından üretilir ve

$$d_2(x_i) \cdot d_2(x_j) + d_2(x_j) \cdot d_2(x_i) = 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$\pi_1 D_2(d_2(x_i)) = D_2(d_2(x_i)) = d_2(1) \cdot d_2(x_i) = 0$$

$$\pi_1 D_2(d_2(x_i x_j)) = D_2(d_2(x_i x_j)) = d_2(1) \cdot d_2(x_i x_j) = 0$$

Bu ise, $\mathrm{Im}\, D_2 \subseteq \ker \pi_1$ olduğunu gösterir. Buradan

$p: J_2(W_2(R)) \big/ \mathrm{Im}\, D_2 \to L^2(W_2(R))$ dönüşümü

$p\left(\overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)}\right) = d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$ olarak tanımlanabilir.

$J_2(W_2(R)) \big/ \mathrm{Im}\, D_2$ nin üreteç kümesi,

$$\left\{\overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)} : 1 \le i, j, k, l \le s, m, n, t, r = 0, 1, 2\right\} \quad \text{dir.}$$

$L^2(W_2(R))$, $d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$ bazı ile bir serbest R- modül olduğundan

$$q: L^2(W_2(R)) \to J_2(W_2(R)) \big/ \mathrm{Im}\, D_2 \quad \text{dönüşümü}$$

$$q\left(d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)}$$

olarak tanımlanabilir.

Bu dönüşüm pq ve qp nin birim olduğunu kanıtlar.

$\ker p = \ker q_1 / \operatorname{Im} D_2 = 0 \Rightarrow \ker q_1 = \operatorname{Im} D_2$ dir. Dolayısıyla dizi tam dizidir.

Benzer biçimde aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 4.3.5 $R = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}\, x_s]$ bir afin $\mathbf{k}$- cebir olsun. Bu durumda R- modüllerin

$$W_2(R) \to J_2(W_2(R)) \to \Omega^2(W_2(R)) \to 0$$

bir tam dizisi vardır.

İspat: $J_2(W_2(R))$; $D_2 : W_2(R) \to J_2(W_2(R))$ evrensel diferansiyel operatörüyle $W_2(R)$ üzerinde derecesi 2 ye eşit veya daha küçük diferansiyel operatörlerin evrensel modülü ve $m,n,t,r = 0,1,2$ ve $1 \le i, j, k, l \le s$ olmak üzere

$$\overset{\cup}{D}_2 : W_2(R) \to \Omega^2(W_2(R)) \text{ dönüşümü}$$

$$\overset{\cup}{D}_2 \left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right) \right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

olarak tanımlansın.

$J_2(W_2(R))$ nin evrensellik özelliğinden aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan

$q_2 D_2 = \overset{\cup}{D}_2$ olacak biçimde tek bir $q_2 : J_2(W_2(R)) \to \Omega^2(W_2(R))$

R- modül homomorfizmi vardır.

$W_2(R)$ $\to$ $\Gamma^2(W_2(R))$

D_2 $J_2(W_2(R))$

$$q_2 D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \tilde{D}_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

olduğundan dolayı q_2 örtendir. Bu yüzden R- modüllerin

$$W_2(R) \to J_2(W_2(R)) \to \Gamma^2(W_2(R)) \to 0$$

bir tam dizisi yazılabilir.Bu dizinin $J_2(W_2(R))$ de tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$\operatorname{Im} D_2$, $D_2\left(d_2(x_i)\right)$, $D_2\left(d_2(x_i, x_j)\right)$ $i, j = 1, \mathbf{K}, s$ tarafından üretilir ve

$$d_2(x_i)\cdot d_2(x_j) - d_2(x_j)\cdot d_2(x_i) = 0 \quad \text{dır.}$$

Dolayısıyla,

$$q_2 D_2\left(d_2(x_i)\right) = \tilde{D}_2\left(d_2(x_i)\right) = d_2(1)\cdot d_2(x_i) = 0$$

$$q_2 D_2\left(d_2(x_i x_j)\right) = \tilde{D}_2\left(d_2(x_i x_j)\right) = d_2(1)\cdot d_2(x_i x_j) = 0$$

Bu ise, $\operatorname{Im} D_2 \subseteq \ker q_2$ olduğunu gösterir. Buradan

$p_1 : J_2(W_2(R)) \Big/ \operatorname{Im} D_2 \to \Gamma^2(W_2(R))$ dönüşümü

$p_1\left(\overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)}\right) = d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$ olarak tanımlanabilir.

$J_2(W_2(R))/\operatorname{Im} D_2$ nin üreteç kümesi,

$$\left\{\overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)} : 1 \le i, j, k, l \le s, m, n, t, r = 0,1,2\right\} \quad \text{dir.}$$

$\Omega^2(W_2(R))$, $d_2(x_i^m x_j^n) \otimes d_2(x_k^t x_l^r)$ bazı ile bir serbest R- modül olduğundan

$$q_1 : \Omega^2(W_2(R)) \to J_2(W_2(R))/\operatorname{Im} D_2 \quad \text{dönüşümü}$$

$$q_1\left(d_2(x_i^m x_j^n) \otimes d_2(x_k^t x_l^r)\right) = \overline{D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right)}$$

olarak tanımlanabilir.

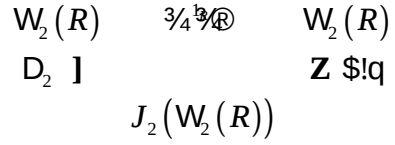
Bu dönüşüm $p_1 q_1$ ve $q_1 p_1$ in birim olduğunu verir.

$\ker p_1 = \ker q_2 / \operatorname{Im} D_2 = 0 \Rightarrow \ker q_2 = \operatorname{Im} D_2$ dir. Dolayısıyla dizi tam dizidir.

Teorem 4.3.3 ün ispatı aşağıdaki gibidir.

İspat: $J_2(W_2(R))$; D_2 evrensel diferansiyel operatörüyle $W_2(R)$ üzerinde derecesi 2 ye eşit veya daha küçük diferansiyel operatörlerin evrensel modülü olsun.

Bu durumda aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $qD_2 = 1_R$ olacak biçimde bir tek $q : J_2(W_2(R)) \to W_2(R)$ R- modül homomorfizmi vardır.



$$q\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right) \quad m,n,t,r = 0,1,2,\ 1 \le i,j,k,l \le s$$

olduğundan q örtendir. Bu yüzden R- modüllerin

$$0 \to \ker q \to J_2\left(W_2(R)\right) \to W_2(R) \to 0$$

bir kısa tam dizisi yazılabilir.

$i_1 : L^2\left(W_2(R)\right) \to J_2\left(W_2(R)\right)$ dönüşümü

$$i_1\left(d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cup d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \frac{1}{2}\left[D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) + D_2\left(x_k^t x_l^r d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\right)\right.$$
$$\left. + x_i^m x_j^n D_2\left(d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) - x_k^t x_l^r D_2\left(d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\right)\right]$$

olarak tanımlansın.

Benzer biçimde,

$i_2 : \cup^2\left(W_2(R)\right) \to J_2\left(W_2(R)\right)$ dönüşümü

$$i_2\left(d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cup d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \frac{1}{2}\left[D_2\left(x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) - D_2\left(x_k^t x_l^r d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\right)\right.$$
$$\left. - x_i^m x_j^n D_2\left(d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) + x_k^t x_l^r D_2\left(d_2\left(x_i^m x_j^n\right)\right)\right]$$

olarak tanımlansın. Buradan, $a \in L^2\left(W_2(R)\right)$ ve $b \in \cup^2\left(W_2(R)\right)$ olmak üzere

$f : L^2\left(W_2(R)\right) \oplus \cup^2\left(W_2(R)\right) \to J_2\left(W_2(R)\right)$

$f(a,b) = q i_1(a) + q i_2(b)$ olacak biçimde bir dönüşüm tanımlandığında

$$\ker q \subseteq L^2\left(W_2(R)\right) \oplus \cup^2\left(W_2(R)\right)$$

elde edilir.

Dizinin split oluşunu ispatlayalım:

$$D_2 : W_2(R) \to L^2(W_2(R))$$

$$D_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cdot d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

ve

$$\acute{D}_2 : W_2(R) \to \acute{U}^2(W_2(R))$$

$$\acute{D}_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \acute{\cdot} d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

dönüşümleri ikinci dereceden türevlerdir. Dolayısıyla $J_2(W_2(R))$ nin evrensellik özelliğinden dolayı aşağıdaki diyagramları değişmeli yapan

$$q_1 : J_2(W_2(R)) \to L^2(W_2(R))$$
$$q_2 : J_2(W_2(R)) \to \acute{U}^2(W_2(R))$$

R - modül homomorfizmaları vardır öyle ki

$$\begin{array}{ccc} W_2(R) & \to & L^2(W_2(R)) \\ {\scriptstyle D_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{W_2(R)}} \\ J_2(W_2(R)) & \to & L^2(W_2(R)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} W_2(R) & \to & \acute{U}^2(W_2(R)) \\ {\scriptstyle D_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{W_2(R)}} \\ J_2(W_2(R)) & \to & \acute{U}^2(W_2(R)) \end{array}$$

dir. Bu nedenle,

$$\mu_1 D_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = D_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cup d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

ve

$$\mu_2 D_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = D_2\left(\sum_{i,j,k,l} x_i^m x_j^n d_2\left(x_k^t x_l^r\right)\right) = \sum_{i,j,k,l} d_2\left(x_i^m x_j^n\right) \cup d_2\left(x_k^t x_l^r\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\mu_1 i_1 = 1_{L^2(W_2(R))}$$

$$\mu_2 i_2 = 1_{U^2(W_2(R))}$$

$$\mu_1 i_2 = 0$$

$$\mu_2 i_1 = 0$$

elde edilir. Bu ise dizinin split oluşunu verir.

Örnek 4.3.6 $R = k[x, y]$ bir polinom cebiri olsun.

$W_2(R)$, $\{d_2(x), d_2(y), d_2(xy), d_2(x^2), d_2(y^2)\}$ bazı ile rankı 5 olan bir serbest R- modüldür.

$U^2(W_2(R))$, $\{ d_2(x) \cup d_2(x), d_2(x) \cup d_2(y), d_2(x) \cup d_2(xy), d_2(x) \cup d_2(x^2), d_2(x) \cup d_2(y^2),$

$d_2(y) \cup d_2(y), d_2(y) \cup d_2(xy), d_2(y) \cup d_2(x^2), d_2(y) \cup d_2(y^2),$

$d_2(xy) \cup d_2(xy), d_2(xy) \cup d_2(x^2), d_2(xy) \cup d_2(y^2),$

$d_2(x^2) \cup d_2(x^2), d_2(x^2) \cup d_2(y^2), d_2(y^2) \cup d_2(y^2)\}$ bazı ile rankı 15 olan bir serbest R- modüldür.

$L^2(W_2(R))$,

$\{ d_2(x) \cup d_2(y), d_2(x) \cup d_2(xy), d_2(x) \cup d_2(x^2), d_2(x) \cup d_2(y^2),$

$d_2(y)\dot{\cup}d_2(xy), d_2(y)\dot{\cup}d_2(x^2), d_2(y)\dot{\cup}d_2(y^2), d_2(xy)\dot{\cup}d_2(x^2),$

$d_2(xy)\dot{\cup}d_2(y^2), d_2(x^2)\dot{\cup}d_2(y^2)\}$ üreteç kümesi ile rankı 10 olan bir serbest R- modüldür.

$J_2(W_2(R))$, $\{D_2(d_2(x)), D_2(d_2(y)), D_2(d_2(xy)), D_2(d_2(x^2)), D_2(d_2(y^2))$

$D_2(xd_2(x)), D_2(xd_2(y)), D_2(xd_2(xy)), D_2(xd_2(x^2)), D_2(xd_2(y^2))$

$D_2(yd_2(x)), D_2(yd_2(y)), D_2(yd_2(xy)), D_2(yd_2(x^2)), D_2(yd_2(y^2))$

$D_2(xyd_2(x)), D_2(xyd_2(y)), D_2(xyd_2(xy)), D_2(xyd_2(x^2)), D_2(xyd_2(y^2))$

$D_2(x^2d_2(x)), D_2(x^2d_2(y)), D_2(x^2d_2(xy)), D_2(x^2d_2(x^2)), D_2(x^2d_2(y^2))$

$D_2(y^2d_2(x)), D_2(y^2d_2(y)), D_2(y^2d_2(xy)), D_2(y^2d_2(x^2)), D_2(y^2d_2(y^2))\}$

kümesi tarafından üretilir.

İzomorfizm $W_2(R)$, $L^2(W_2(R))$, $\acute{U}^2(W_2(R))$ nin rankları ile bellidir.

Dolayısıyla, $J_2(W_2(R)) \cong W_2(R) \wedge L^2(W_2(R)) \wedge \acute{U}^2(W_2(R))$ dir.

Örnek 4.3.7 $R = \mathbf{k}[x, y, z]$ bir polinom cebiri olsun. Bu durumda $W_2(R)$, $\{d_2(x), d_2(y), d_2(z), d_2(xy), d_2(xz), d_2(yz), d_2(x^2), d_2(y^2), d_2(z^2)\}$ bazı ile rankı $\binom{5}{3} - 1 = 9$ olan bir serbest R- modüldür.

$rank\,\acute{U}^2(W_2(R)) = \binom{10}{8} = 45$, $rank\,L^2(W_2(R)) = \binom{9}{2} = 36$ dır.

$J_2(W_2(R)) = W_2(R) \wedge L^2(W_2(R)) \wedge \acute{U}^2(W_2(R))$ izomorfizmini kullanarak $rank\,J_2(W_2(R)) = 9 + 36 + 45 = 90$ elde edilir.

Örnek 4.3.8 $R=\mathbf{k}[x,y]$ polinomlar cebiri ve I da $f=y^2-x^3$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S=\mathbf{k}[x,y]/(f)$ alınsın. $W_2(S)\cong F'/N'$ dir. Burada F', $\{d_2(x),d_2(y),d_2(xy),d_2(x^2),d_2(y^2)\}$ bazıyla bir serbest S-modül, N' de F' nün $\{d_2(f),d_2(xf),d_2(yf)\}$ elemanları tarafından üretilen bir alt modülüdür.

$$d_2(f)=d_2(y^2)-3xd_2(x^2)+3x^2d_2(x)$$

$$d_2(xf)=xd_2(y^2)-6x^2d_2(x^2)+2yd_2(xy)+7x^3d_2(x)-2xyd_2(y)$$

$$d_2(yf)=3yd_2(y^2)-3xyd_2(x^2)-3x^2d_2(xy)+6x^2d_2(x)-y^2d_2(x)$$

$rank W_2(S)=\binom{2+1}{1}-1=2$ olduğundan

$rank N'=rank F'-rank W_2(S)=5-2=3$ elde edilir ki buradan N' serbest S-modüldür.

Benzer biçimde, $\Lambda^2(W_2(S))\cong \Lambda^2 F/I_N$ dir. Burada $\Lambda^2 F$,

$\{d_2(x)\wedge d_2(x),d_2(x)\wedge d_2(y),d_2(x)\wedge d_2(xy),d_2(x)\wedge d_2(x^2),d_2(x)\wedge d_2(y^2),$
$d_2(y)\wedge d_2(y),d_2(y)\wedge d_2(xy),d_2(y)\wedge d_2(x^2),d_2(y)\wedge d_2(y^2),d_2(xy)\wedge d_2(xy),$
$d_2(xy)\wedge d_2(x^2),d_2(xy)\wedge d_2(y^2),d_2(x^2)\wedge d_2(x^2),d_2(x^2)\wedge d_2(y^2),d_2(y^2)\wedge d_2(y^2)\}$

üreteç kümesi ile bir serbest modül, I_N de $\Lambda^2 F$ nin

$$d_2(f)\wedge d_2(x)=d_2(y^2)\wedge d_2(x)-3xd_2(x^2)\wedge d_2(x)+3x^2d_2(x)\wedge d_2(x)$$

$$d_2(f)\wedge d_2(y)=d_2(y^2)\wedge d_2(y)-3xd_2(x^2)\wedge d_2(y)+3x^2d_2(x)\wedge d_2(y)$$

$$d_2(f)\wedge d_2(xy)=d_2(y^2)\wedge d_2(xy)-3xd_2(x^2)\wedge d_2(xy)+3x^2d_2(x)\wedge d_2(xy)$$

$$d_2(f)\acute{U}d_2(x^2)=d_2(y^2)\acute{U}d_2(x^2)-3xd_2(x^2)\acute{U}d_2(x^2)+3x^2d_2(x)\acute{U}d_2(x^2)$$

$$d_2(f)\acute{U}d_2(y^2)=d_2(y^2)\acute{U}d_2(y^2)-3xd_2(x^2)\acute{U}d_2(y^2)+3x^2d_2(x)\acute{U}d_2(y^2)$$

$$d_2(xf)\acute{U}d_2(x)=xd_2(y^2)\acute{U}d_2(x)-6x^2d_2(x^2)\acute{U}d_2(x)+2yd_2(xy)\acute{U}d_2(x)+$$
$$+7x^3d_2(x)\acute{U}d_2(x)-2xyd_2(y)\acute{U}d_2(x)$$

$$d_2(xf)\acute{U}d_2(y)=xd_2(y^2)\acute{U}d_2(y)-6x^2d_2(x^2)\acute{U}d_2(y)+2yd_2(xy)\acute{U}d_2(y)+$$
$$+7x^3d_2(x)\acute{U}d_2(y)-2xyd_2(y)\acute{U}d_2(y)$$

$$d_2(xf)\acute{U}d_2(xy)=xd_2(y^2)\acute{U}d_2(xy)-6x^2d_2(x^2)\acute{U}d_2(xy)+2yd_2(xy)\acute{U}d_2(xy)+$$
$$+7x^3d_2(x)\acute{U}d_2(xy)-2xyd_2(y)\acute{U}d_2(xy)$$

$$d_2(xf)\acute{U}d_2(x^2)=xd_2(y^2)\acute{U}d_2(x^2)-6x^2d_2(x^2)\acute{U}d_2(x^2)+2yd_2(xy)\acute{U}d_2(x^2)+$$
$$+7x^3d_2(x)\acute{U}d_2(x^2)-2xyd_2(y)\acute{U}d_2(x^2)$$

$$d_2(xf)\acute{U}d_2(y^2)=xd_2(y^2)\acute{U}d_2(y^2)-6x^2d_2(x^2)\acute{U}d_2(y^2)+2yd_2(xy)\acute{U}d_2(y^2)+$$
$$+7x^3d_2(x)\acute{U}d_2(y^2)-2xyd_2(y)\acute{U}d_2(y^2)$$

$$d_2(yf)\acute{U}d_2(x)=3yd_2(y^2)\acute{U}d_2(x)-3xyd_2(x^2)\acute{U}d_2(x)-3x^2d_2(xy)\acute{U}d_2(x)+$$
$$+6x^2yd_2(x)\acute{U}d_2(x)-y^2d_2(y)\acute{U}d_2(x)$$

$$d_2(yf)\acute{U}d_2(y)=3yd_2(y^2)\acute{U}d_2(y)-3xyd_2(x^2)\acute{U}d_2(y)-3x^2d_2(xy)\acute{U}d_2(y)+$$
$$+6x^2yd_2(x)\acute{U}d_2(y)-y^2d_2(y)\acute{U}d_2(y)$$

$$d_2(yf)\cup d_2(xy)=3yd_2(y^2)\cup d_2(xy)-3xyd_2(x^2)\cup d_2(xy)-3x^2d_2(xy)\cup d_2(xy)+$$
$$+6x^2yd_2(x)\cup d_2(xy)-y^2d_2(y)\cup d_2(xy)$$

$$d_2(yf)\cup d_2(x^2)=3yd_2(y^2)\cup d_2(x^2)-3xyd_2(x^2)\cup d_2(x^2)-3x^2d_2(xy)\cup d_2(x^2)+$$
$$+6x^2yd_2(x)\cup d_2(x^2)-y^2d_2(y)\cup d_2(x^2)$$

$$d_2(yf)\cup d_2(y^2)=3yd_2(y^2)\cup d_2(y^2)-3xyd_2(x^2)\cup d_2(y^2)-3x^2d_2(xy)\cup d_2(y^2)+$$
$$+6x^2yd_2(x)\cup d_2(y^2)-y^2d_2(y)\cup d_2(y^2)$$

elemanları tarafından üretilen bir alt modülüdür.

$rank\cup^2(W_2(S))=\binom{2+1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$ Benzer düşünceyle,

$L^2(W_2(S))\cong L^2F/L_N$ dir. Burada L^2F,

$\{d_2(x)\cup d_2(y),d_2(x)\cup d_2(xy),d_2(x)\cup d_2(x^2),d_2(x)\cup d_2(y^2),d_2(y)\cup d_2(xy),$
$d_2(y)\cup d_2(x^2),d_2(y)\cup d_2(y^2),d_2(xy)\cup d_2(x^2),d_2(xy)\cup d_2(y^2),d_2(x^2)\cup d_2(y^2)\}$

bazıyla bir serbest modül ve L_N de L^2F nin

$$d_2(f)\cup d_2(x)=d_2(y^2)\cup d_2(x)-3xd_2(x^2)\cup d_2(x)$$
$$d_2(f)\cup d_2(y)=d_2(y^2)\cup d_2(y)-3xd_2(x^2)\cup d_2(y)+3x^2d_2(x)\cup d_2(y)$$
$$d_2(f)\cup d_2(xy)=d_2(y^2)\cup d_2(xy)-3xd_2(x^2)\cup d_2(xy)+3x^2d_2(x)\cup d_2(xy)$$
$$d_2(f)\cup d_2(x^2)=d_2(y^2)\cup d_2(x^2)+3x^2d_2(x)\cup d_2(x^2)$$
$$d_2(f)\cup d_2(y^2)=-3xd_2(x^2)\cup d_2(y^2)+3x^2d_2(x)\cup d_2(y^2)$$

$$d_2(xf)\cup d_2(x)=xd_2(y^2)\cup d_2(x)-6x^2d_2(x^2)\cup d_2(x)+2xyd_2(xy)\cup d_2(x)$$
$$-2xyd_2(y)\cup d_2(x)$$

$$d_2(xf)\grave{U}d_2(y)=xd_2(y^2)\grave{U}d_2(y)-6x^2d_2(x^2)\grave{U}d_2(y)+2yd_2(xy)\grave{U}d_2(y)+7x^3d_2(x)\grave{U}d_2(y)$$

$$d_2(xf)\grave{U}d_2(xy)=xd_2(y^2)\grave{U}d_2(xy)-6x^2d_2(x^2)\grave{U}d_2(xy)+7x^3d_2(x)\grave{U}d_2(xy)-2xyd_2(y)\grave{U}d_2(xy)$$

$$d_2(xf)\grave{U}d_2(x^2)=xd_2(y^2)\grave{U}d_2(x^2)+2yd_2(xy)\grave{U}d_2(x^2)+7x^3d_2(x)\grave{U}d_2(x^2)-2xyd_2(y)\grave{U}d_2(x^2)$$

$$d_2(xf)\grave{U}d_2(y^2)=-6x^2d_2(x^2)\grave{U}d_2(y^2)+2yd_2(xy)\grave{U}d_2(y^2)+7x^3d_2(x)\grave{U}d_2(y^2)-2xyd_2(y)\grave{U}d_2(y^2)$$

$$d_2(yf)\grave{U}d_2(x)=3yd_2(y^2)\grave{U}d_2(x)-3xyd_2(x^2)\grave{U}d_2(x)-3x^2d_2(xy)\grave{U}d_2(x)-y^2d_2(y)\grave{U}d_2(x)$$

$$d_2(yf)\grave{U}d_2(y)=3yd_2(y^2)\grave{U}d_2(y)-3xyd_2(x^2)\grave{U}d_2(y)+6x^2d_2(x)\grave{U}d_2(y)$$

$$d_2(yf)\grave{U}d_2(xy)=3yd_2(y^2)\grave{U}d_2(xy)-3xyd_2(x^2)\grave{U}d_2(xy)+6x^2d_2(x)\grave{U}d_2(xy)-y^2d_2(y)\grave{U}d_2(xy)$$

$$d_2(yf)\grave{U}d_2(x^2)=3yd_2(y^2)\grave{U}d_2(x^2)-3x^2d_2(xy)\grave{U}d_2(x^2)+6x^2yd_2(x)\grave{U}d_2(x^2)-y^2d_2(y)\grave{U}d_2(x^2)$$

$$d_2(yf)\grave{U}d_2(y^2)=-3xyd_2(x^2)\grave{U}d_2(y^2)-3x^2d_2(xy)\grave{U}d_2(y^2)+6x^2yd_2(x)\grave{U}d_2(y^2)-y^2d_2(y)\grave{U}d_2(y^2)$$

tarafından üretilen bir alt modülüdür. $rank\,L^2(W_2(S)) = \binom{2}{2} = 1$ dir.

$J_2(W_2(S))$ nin rankı $W_2(S)$, $Ú^2(W_2(S))$, $L^2(W_2(S))$ nin ranklarından hesaplanabilir. Dolayısıyla

$J_2(W_2(S)) @ W_2(S) Å L^2(W_2(S)) Å Ú^2(W_2(S))$ dir.

5. SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİNİN PROJEKTİF BOYUTLARI

Bu bölümde ilk olarak evrensel türev modüllerin projektif boyutları incelenecek, daha sonra hiperyüzeylerde evrensel türev modüllerin projektif boyutları verilecek ve hiperyüzeylerde evrensel türev modüllerinin ikinci dereceden simetrik kuvvet modüllerinin projektif boyutları hesaplanacaktır.

5.1. Evrensel Türev Modüllerinin Projektif Boyutları

İlk olarak evrensel türev modüllerinin projektif boyutlarının hesaplanmasında gerekli önerme ve sonuçlar verilecek, daha sonra hiperyüzeylerde projektif boyutların nasıl hesaplandığı örnekler üzerinde anlatılacaktır.

Önerme 5.1.1 $R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_{\mathbf{l}}]$ polinom cebiri ve $I=(f_1,\mathbf{K},f_m)$ R nin bir ideali olsun. K, $J_n(R)$ nin $\left\{\mathsf{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_{\mathsf{a}}\right):\mathsf{a}=1,\mathbf{K},m;\ 0\pounds \mathrm{i}_1+\mathbf{K}i_{\mathbf{l}}\pounds n-1,\ i_{\mathbf{l}}\hat{\mathrm{I}}\ \mathbf{¥}\right\}$ tarafından üretilen bir alt modülü olsun. Bu durumda $\mathsf{D}_n:R¾®J_n(R)$ n- inci dereceden evrensel diferansiyel operatör olmak üzere $R\mathsf{D}_n(I)\acute{\mathrm{I}}\ \mathsf{K}+IJ_n(R)$ dir.

İspat: D_n bir $\mathbf{k}$- lineer dönüşüm olduğundan herhangi bir $f'\hat{\mathrm{I}}\ R$ için $\mathsf{D}_n(f_if')\acute{\mathrm{I}}\ \mathsf{K}+IJ_n(R)$ olduğunu göstermeliyiz. $f'\hat{\mathrm{I}}\ R$ olsun. Bu durumda $a_{i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}}}$, $b_{j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}}}\ \hat{\mathrm{I}}\ \mathbf{k}$; $i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\,^3\,n$ ve $j_1+\mathbf{K}+j_{\mathbf{l}}<n$ olmak üzere $f'=\underset{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})}{\mathring{\mathrm{a}}}a_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})}x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}+\underset{(j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}})}{\mathring{\mathrm{a}}}b_{(j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}})}x_1^{j_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{j_{\mathbf{l}}}$ yazılabilir. Bu nedenle $\mathsf{D}_n(f_if')=\underset{i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}}}{\mathring{\mathrm{a}}}a_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})}\mathsf{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_i\right)+\underset{j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}}}{\mathring{\mathrm{a}}}b_{(j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}})}\mathsf{D}_n\left(x_1^{j_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{j_{\mathbf{l}}}f_i\right)$ yazılabilir.

D_n, n- inci dereceden diferansiyel operatör olduğundan

$$D_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_i\right)=\sum_{(t_1\mathbf{K}t_{\mathbf{l}})}\mu_{(t_1\mathbf{K}t_{\mathbf{l}})}D_n\left(x_1^{t_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{t_{\mathbf{l}}}f_i\right)+f_i\sum_{(w_1\mathbf{K}w_{\mathbf{l}})}\mu_{(w_1\mathbf{K}w_{\mathbf{l}})}D_n\left(x_1^{w_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{w_{\mathbf{l}}}\right)$$

dir. Burada $\mu_{(t_1\mathbf{K}t_{\mathbf{l}})},\mu_{(w_1\mathbf{K}w_{\mathbf{l}})}\in\mathbf{k}$ ve $0\le t_1+\mathbf{K}t_{\mathbf{l}}<n$, $0\le w_1+\mathbf{K}+w_{\mathbf{l}}\le n$ dir. Denklemleri toplarsak,

$$D_n(f_if')=\sum_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})(t_1\mathbf{K}t_{\mathbf{l}})}a_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})}\mu_{(t_1\mathbf{K}t_{\mathbf{l}})}D_n\left(x_1^{t_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{t_{\mathbf{l}}}\right)+\sum_{(j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}})}b_{(j_1\mathbf{K}j_{\mathbf{l}})}D_n\left(x_1^{j_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{j_{\mathbf{l}}}f_i\right)$$
$$+f_i\sum_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})(w_1\mathbf{K}w_{\mathbf{l}})}a_{(i_1\mathbf{K}i_{\mathbf{l}})}\mu_{(w_1\mathbf{K}w_{\mathbf{l}})}D_n\left(x_1^{w_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{w_{\mathbf{l}}}\right)$$

elde edilir ki bu toplam $K+IJ_n(R)$ ye aittir.

Sonuç 5.1.2 $RD_n(I)+IJ_n(R)\big/IJ_n(R)$ bir R/I- modül olarak $\left\{D_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_i\right)+IJ_n(R):\ i=1,\mathbf{K},m,\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}<n,\ i_1,\mathbf{K}i_{\mathbf{l}}\in\mathbf{¥}\right\}$ kümesi tarafından üretilir.

İspat: $K+IJ_n(R)\big/IJ_n(R)$,

$\left\{D_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_i\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}<n,\ i_1,\mathbf{K}i_{\mathbf{l}}\in\mathbf{¥},\ i=1,\mathbf{K},m\right\}$ kümesi tarafından üretilir. Bu yüzden $K+IJ_n(R)\big/IJ_n(R)=RD_n(I)+IJ_n(R)\big/IJ_n(R)$ dir.

Sonuç 5.1.3 $D_n:R/I\to J_n(R/I)$ evrensel diferansiyel operatörünü ve Önerme 2.2.1 deki $0\to N+IJ_n(R)\big/IJ_n(R)\to J_n(R)\big/IJ_n(R)\to J_n(R/I)\to 0$ tam

dizisini göz önüne alarak $J_n\left(R/I\right)$, $\{\mathbf{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\}$ kümesi tarafından üretilir ve $\mathbf{b}\left(\mathrm{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right)+IJ_n(R)\right)=0$ bağıntısı vardır.

İspat: $J_n(R)$, $\left\{\mathrm{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\right\}$ bazıyla serbesttir. Bu yüzden $J_n(R)\big/IJ_n(R)$, $\left\{\mathbf{b}\mathrm{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\right\}$ bazıyla bir serbest R/I- modüldür. Dolayısıyla $J_n\left(R/I\right)$, $\left\{\overline{\mathbf{b}\mathrm{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right)}:\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\right\}$ kümesi tarafından üretilir ki bu $\left\{\mathbf{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\right\}$ e eşittir. $\ker\mathbf{b}$ nın üreteçleri tarafından belirlenen bağıntılar son sonuçtan $\left\{\mathrm{D}_n\left(x_1^{i_1}\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}^{i_{\mathbf{l}}}f_i\right):\ 0\le i_1+\mathbf{K}+i_{\mathbf{l}}\le n\ ;\ i=1,\mathbf{K},m\right\}$ dir.

5.2. Hiperyüzeylerde Evrensel Türev Modüllerinin Projektif Boyutları

R regüler afin cebirse $J_n(R)$ bir projektif R- modüldür. O halde R regüler afin cebirse $J_n(R)$ nin projektif boyutu sıfırdır. L, R nin kesir cismi olsun. $\dim_L L\otimes J_n(R)=\binom{n+p}{p}$ dir. Burada p , L nin transandant derecesidir ve $\binom{n+p}{p}$ binom katsayısıdır.

$R=\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K}\,x_{\mathbf{l}}]$ polinomlar cebiri ve I da $g\in R$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. Bu durumda $R/I=\dfrac{\mathbf{k}[x_1,\mathbf{K},x_{\mathbf{l}}]}{(g)}$ olarak gösterilen afin tamlık

bölgesine hiperyüzey denir. $S = R/I$ olarak alınsın. F, $\{d_n(x^\beta) : |\beta| \leq n\}$ üreteç kümesi ile serbest S- modül ve N de F nin $\{d_n(x^\beta g) : |\beta| < n\}$ kümesi tarafından üretilen alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3 den $W_n(S) \cong F/N$ izomorfizması vardır. Bundan dolayı S- modüllerin

$$0 \to N \to F \to W_n(S) \cong F/N \to 0$$

bir tam dizisi yazılabilir.

Teorem 5.2.1 $S = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}\, x_l]/(g)$ bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $J_n(S)$ nin projektif boyutu 1 veya 1 den küçüktür.

İspat: Erdogan, A., 1993, Teorem 3.1.4'e bakınız.

Not: $n = 1$ için R sonlu boyutlu bir tamlık bölgesi ise bu durumda R nin complete intersection olması için gerek ve yeter koşul $J_1(R)$ nin projektif boyutunun 1 veya 1 den küçük olmasıdır. Buna göre yukarıdaki teoremde S bir complete intersectiondır. Bu yüzden $J_1(S)$ nin projektif boyutu 1 veya 1 den küçüktür.

Sonuç 5.2.2 $S = \mathbf{k}[x_1, \mathbf{K}, x_s]/(g)$ bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $pd(W_n(S)) \leq 1$ dir.

Örnek 5.2.3 $R=\mathbf{k}[x,y,z]$ polinomlar cebiri ve I, R nin $g=yz-x^3$ elemanı tarafından üretilen bir ideali olsun. $S=R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 2 dir. Buna göre $W_1(S)$, $W_2(S)$ ve $W_3(S)$ nin projektif boyutları hesaplanabilir.

$W_1(S)$: F, bazı $\{d_1(x),d_1(y),d_1(z)\}$ olan bir serbest S-modül ve N de F nin $d_1(g)=yd_1(z)+zd_1(y)-3x^2d_1(x)$ elemanı tarafından üretilen bir S-alt modülüdür. Sonuç 5.1.3 den $W_1(S)\cong F/N$ dir. $rankW_1(S)=\binom{3}{2}-1=2$ olduğundan $rankN=rankF-rankW_1(S)=3-2=1$ olup N serbest S-modüldür. O halde

$$0\to N\to F\to W_1(S)\cong F/N\to 0$$

S-modül tam dizisi yazılabilir. Bu ise $W_1(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd(W_1(S))\le 1$ bulunur.

$W_2(S)$: F', bazı $\{d_2(x),d_2(y),d_2(z),d_2(xy),d_2(xz),d_2(yz),d_2(x^2),d_2(y^2),d_2(z^2)\}$ kümesi olan serbest S-modül ve N' de $d_2(g)$, $d_2(xg)$, $d_2(yg)$, $d_2(zg)$ elemanları tarafından üretilen F' nün bir alt modülü olsun. Burada $d_2(g)=yd_2(z)+zd_2(y)-3x^2d_2(x)$

$$d_2(xg) = xd_2(yz) + yd_2(xz) + zd_2(xy) - xyd_2(z) - xzd_2(y)$$
$$-6x^2d_2(x^2) + (8x^3 - yz)d_2(x)$$
$$d_2(yg) = 2yd_2(yz) + zd_2(y^2) - y^2d_2(z) - (x^3 + 2yz + x^2)d_2(y) + (3xy + y - yx)d_2(x^2)$$
$$-(4x^2y + 2xy)d_2(x) + (x^2 + 2x)d_2(xy)$$
$$d_2(zg) = yd_2(z^2) + 2zd_2(yz) + (2x^3 - 2yz)d_2(z) - 3xzd_2(x^2)$$
$$-3x^2d_2(xz) + 6x^2zd_2(x) - z^2d_2(y)$$

olup Sonuç 5.1.3 den $W_2(S) \cong F'/N'$ dir. $rankW_2(S) = \binom{4}{2} - 1 = 5$ olduğundan $rankN' = rankF' - rankW_2(S) = 9 - 5 = 4$ olup N' serbest S- modüldür. O halde S- modüllerin

$$0 \to N' \to F' \to W_2(S) \cong F'/N' \to 0$$

tam dizisi alınabilir. Bu da $W_2(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd(W_2(S)) \le 1$ bulunur. Burada ρ doğal homomorfizma ve φ ise

$$\begin{pmatrix} -3x^2 & z & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8x^3 - yz & -xz & -xy & z & y & x & -6x^2 & 0 & 0 \\ 6x^2y & 2x^3 - 2yz & -y^2 & -3x^2 & 0 & 2y & -3xy & z & 0 \\ 6x^2z & -z^2 & 2x^3 - 2yz & 0 & -3x^2 & 2z & -3xz & 0 & y \end{pmatrix}$$

matrisidir.

$W_3(S)$: F'', $\{d_3(x^iy^jz^k) : i,j,k = 0,1,2,3 \quad 0 \le i+j+k \le 3\}$ kümesi ile serbest S- modül ve N'' de $d_3(g)$, $d_3(xg)$, $d_3(yg)$, $d_3(zg)$, $d_3(x^2g)$, $d_3(y^2g)$, $d_3(z^2g)$, $d_3(xyg)$, $d_3(xzg)$, $d_3(yzg)$ elemanları tarafından üretilen F'' nün bir S- alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3 den dolayı

$W_3(S) \cong F''/N''$ dir. $rank W_3(S) = \binom{5}{2} - 1 = 9$ olduğu için $rank N'' = rank F'' - rank W_3(S) = 19 - 9 = 10$ olup N'' serbest S- modüldür. O halde S- modüllerin

$$0 \to N'' \to F'' \to W_3(S) \cong F''/N'' \to 0$$

tam dizisi alınabilir. Bu ise $W_3(S)$ için serbest çözünürlük olup $pd(W_3(S)) \leq 1$ bulunur.

Evrensel türev modüllerinin projektif boyutlarının sonlu olmadığı bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.2.4 $R = \mathbf{k}[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$, $g = yz - x^3$, $h = z^2 - x^2 y$ elemanları tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ olarak alınsın. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir, regüler değildir ve $pd(W_1(S)) = \infty$ bulunur.

Not: Olgun, N., 2005, Sayfa 28'e bakınız.

Örnek 5.2.5 $R = \mathbf{k}[x, y, z]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - xz$ ve $g = z^2 - x^3$ elemanları tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ olarak alınsın. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir ve $pd(W_2(S)) = \infty$ bulunur.

Not: Olgun, N., 2005, Sayfa 29'a bakınız.

Önerme 5.2.6 S boyutu $\mathbf{l}$ - 1 olan regüler lokal halka olsun. S - modüllerin

$$0 \to N \to F \to W_n(S) \to 0$$

bir tam dizisi alınsın. m, S nin maximal ideali olmak üzere $N \subseteq mF$ dir.

İspat: S regüler lokal halka ise Önerme 2.3.3 ve Teorem 2.4.6 dan $W_n(S)$ rankı $\binom{n+\mathbf{l}-1}{\mathbf{l}-1}-1$ olan serbest S - modüldür. Böylece $\frac{W_n(S)}{mW_n(S)}$, S/m üzerinde boyutu $\binom{n+\mathbf{l}-1}{\mathbf{l}-1}-1$ olan bir vektör uzayıdır. $N \subset mF$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{W_n(S)}{mW_n(S)} \cong \frac{F/N}{m(F/N)} \cong \frac{F/N}{mF+N/N} \cong \frac{F}{mF}$ izomorfizmleri elde edilir. $\frac{F}{mF}$, S/m üzerinde vektör uzayı olup boyutu $\binom{n+\mathbf{l}}{\mathbf{l}}-1$ dir. Buradan $\binom{n+\mathbf{l}}{\mathbf{l}} = \binom{n+\mathbf{l}-1}{\mathbf{l}-1}$ eşitliği yazılır. Bu ise çelişkidir. Böylece $N \subseteq mF$ dir. W

Sonuç 5.2.7 S boyutu $\mathbf{l}$ - 1 olan regüler halka olsun. S - modüllerin

$$0 \to N \to F \to W_n(S) \cong F/N \to 0$$

tam dizisi alınsın. m, S nin maximal ideali olmak üzere $N \subseteq mF$ dir.

İspat: Olgun, N., 2005, Sonuç. 3.2.2'ye bakınız.

Örnek 5.2.8 $R=\mathbf{k}[x,y]$ polinomlar cebiri ve I da $f=x^2+y^2-1$ elmanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S=R/I$ olarak alınsın. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir ve regüler bir halkadır. m, S nin bir maksimal ideali olsun. F, $\{d_1(x),d_1(y)\}$ kümesi üzerinde serbest S-modül ve N de $\{xd_1(x)+yd_1(y)\}$ kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3 den $\Omega_1(R)\cong F/N$ idi. O halde $N\subset mF$ dir.

Önerme 5.2.9 S boyutu $\lambda-1$ olan afin tamlık bölgesi olsun. S-modüllerin

$$0\to N\to F\to \Omega_n(S)\cong F/N\to 0$$

tam dizisi alınsın. m,S nin maximal ideali olmak üzere $N\subset mF$ ise $pd(\Omega_n(S))=1$ dir.

İspat: Sonuç 5.2.2 den $pd(\Omega_n(S))\le 1$ dir. O halde $pd(\Omega_n(S))$ nin 1 e eşit olduğunu göstermek için $\Omega_n(S)$ nin projektif modül olmadığı gösterilmelidir.

S lokal halka ve $\Omega_n(S)$ nin projektif modül olduğunu varsayalım. $rank(\Omega_n(S))=\binom{n+\lambda-1}{\lambda-1}-1$ dir.

Böylece $\frac{W_n(S)}{mW_n(S)}$, S/m üzerinde boyutu $\binom{n+1}{n-1}-1$ olan bir vektör uzayıdır.

$N \subset mF$ olduğundan dolayı $\frac{W_n(S)}{mW_n(S)} \cong \frac{F/N}{m(F/N)} \cong \frac{F/N}{mF+N/N} \cong \frac{F}{mF}$

izomorfizmleri elde edilir.

$\frac{F}{mF}$, S/m üzerinde vektör uzayıdır ve boyutu $\binom{n+1}{1}-1$ dir. Buradan

$\binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n-1}$ eşitliği elde edilir. Bu ise çelişkidir. $W_n(S)$ projektif değildir. Dolayısıyla $pd(W_n(S)) = 1$ dir. ∎

Örnek 5.2.10 $R = \mathbf{k}[x,y]$ polinomlar cebiri ve I da $f = y^2 - x^3$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alınsın. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sonuç 5.2.2 den $pd(W_n(S)) \leq 1$ dir.

F, $\{d_n(x^i y^j) : y^2 = x^3,\ i,j = 1,\mathbf{K},n \text{ ve } 0 \leq i+j \leq n\}$ üzerinde serbest S-modül ve N de

$$\{[d_n, r_0, r_1, \mathbf{K}, r_n](1) : y^2 = x^3,\ r_i \in R\}$$

kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun. $m = (x,y)$, S de maksimal ideal olsun. Bu durumda $N \subset mF$ olur. Böylece Önerme 5.2.9 dan $pd(W_n(S)) = 1$ bulunur.

Not: Olgun, N., 2005, Sayfa 33'e bakınız.

Örnek 5.2.11 $R=\mathbf{k}[x,y,z]$ polinomlar cebiri ve I da $f=y^2-xz$ elemanı tarafından üretilen R nin bir ideali olsun. $S=R/I$ alalım. S afin tmlık bölgesi olup boyutu 2 dir. Sonuç 5.2.2 den $pd(W_n(S))\leq 1$ dir.

F, $\{d_n(x^i y^j z^k): y^2=xz,\ i,j,k=1,\mathbf{K},n\ ve\ 0\leq i+j+k\leq n\}$ üzerinde serbest S- modül ve N de

$$\{[d_n,r_0,r_1,\mathbf{K},r_n](1): y^2=xz,\ r_i\in R\}$$

kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun. $m=(x,y,z)$, S de maksimal ideal olsun. Bu durumda $N\subset mF$ olur. Böylece Önerme 5.2.9 dan $pd(W_n(S))=1$ bulunur.

Not: Olgun, N., 2005, Sayfa 33'e bakınız.

5.3. Hiperyüzeylerde Evrensel Türev Modüllerinin İkinci Dereceden Simetrik Kuvvet Modüllerinin Projektif Boyutları

Önerme 5.3.1 M bir R- modül olsun. N, M nin bir alt modülü ve L_N, $\Omega^2 M$ nin $\{x\,dy: x\in M, y\in N\}$ kümesi tarafından üretilen bir alt modülü olsun. Bu durumda, $\Omega^2 M/L_N \cong \Omega^2(M/N)$ dir.

İspat: $\varphi : M \times M \to \Lambda^2\left(M/N\right)$ dönüşümü $M \times M \xrightarrow{\pi \times \pi} M/N \times M/N \xrightarrow{\varphi'} \Lambda^2\left(M/N\right)$ olacak biçimde bileşke dönüşüm olsun. Burada $\pi : M \to M/N$ doğal örten bir dönüşümdür.

Bu durumda φ bilineer bir dönüşümdür. $\Lambda^2 M$ nin evrensellik özelliğinden aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak biçimde bir $\rho : \Lambda^2 M \to \Lambda^2\left(M/N\right)$ R- modül homomorfizmi vardır öyleki

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda^2\left(M/N\right) \\ \Lambda & \nearrow \rho & \\ & \Lambda^2 M & \end{array}$$

dir. $\rho\left(L_N\right) = 0$ olduğu açıktır.Bu yüzden $r_i \in R$, $x_i, x_i' \in M$ olmak üzere

$\overline{\rho} : \Lambda^2 M/L_N \to \Lambda^2\left(M/N\right)$

$\overline{\rho}\left(\sum_i r_i \overline{x_i \wedge x_i'}\right) = \rho\left(\sum_i r_i x_i \wedge x_i'\right) = \sum_i r_i \overline{x}_i \wedge \overline{x_i'}$ olacak biçimde bir dönüşüm tanımlanabilir. Diğer yandan, $M \times M \xrightarrow{\varphi} \Lambda^2 M \xrightarrow{\eta} \Lambda^2 M/L_N$ bileşke dönüşümü bilineer bir dönüşümdür. F doğal dönüşümdür.Her $x \in M$ ve $y \in N$ için $F \wedge(x,y) \in L_N$ dir. $x \wedge y - y \wedge x = 0$ olduğundan $x \wedge y \in L_N$ ve bu durumda $F \wedge(x,y) \in L_N$ dir.Dolayısıyla $\beta : M/N \times M/N \to \Lambda^2 M/L_N$ dönüşümü $\beta\left(\overline{x}, \overline{x'}\right) = \overline{x \wedge x'}$ biçiminde tanımlanabilir. Benzer düşünceyle β ,

$g : Ú^2\left(M/N\right) ¾® Ú^2 M/L_N$ R- modül homomorfizmini meydana getirir öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} M/N \times M/N & ¾® & Ú^2 M/L_N \\ Ú & & \nearrow g \\ & Ú^2\left(M/N\right) & \end{array}$$

Bu ise istenildiği gibi $\bar{r}g$ ve $g\bar{r}$ nin birim dönüşüm olduğunu gösterir. W

Önerme 5.3.2 $R = k\left[x_1, \mathbf{K}, x_s\right]$ bir polinom cebiri ve $I = \left(g_1, \mathbf{K}\, g_m\right)$ R nin bir ideali olmak üzere $S = R/I$ olarak tanımlanan bir afin cebir olsun. Bu durumda

$$j : Ú^2\left(F/N\right) ¾® Ú^2 F/L_N$$

$$j\left(\overline{d_1(x_i)} Ú \overline{d_1(x_j)}\right) = \overline{d_1(x_i) Ú d_1(x_j)}$$

dönüşümü bir S- modül izomorfizmidir.

Burada $Ú^2 F$, $\left\{d_1(x_i) Ú d_1(x_j) : 1 £ i < j £ s\right\}$ bazıyla bir serbest S- modül, L_N , $Ú^2 F$ nin $\left\{d(g_k) Ú d(x_j) : k = 1, \mathbf{K}, m;\ j = 1, \mathbf{K}, s\right\}$ kümesi tarafından üretilen bir alt modülüdür.

İspat: Önerme 5.3.1 den açıktır.

Teorem 5.3.3 $S = k[x_1, \mathbf{K}, x_s]/(g)$ bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $pd(W_n(S)) \leq 1$ dir.

İspat: Erdogan, A., 1993, Teorem 3.1.4 ile aynıdır.

Teorem 5.3.4 $S = k[x_1, \mathbf{K}\, x_s]/(g)$ bir afin tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $Ú^2(W_1(S))$ nin projektif boyutu 1'e eşit veya küçüktür.

İspat: $R = k[x_1, \mathbf{K}, x_s]$ ve $d_1 : R \to W_1(R)$ R nin birinci dereceden $\mathbf{k}$-türevi olsun. m , R nin g yi içeren bir maximal ideali olduğunu varsayalım. Bu durumda R nin m deki lokalizasyonu s boyutlu bir regüler cebirdir. Lemma 3.2.10 dan $Ú^2(W_1(R))$ bir serbest R- modüldür.

Eğer $\dim R = s$ ise $rank W_1(R) = \binom{s+1}{s} - 1 = \binom{s}{s-1}$ dir.

$\binom{s}{s-1} = t$ olsun. Bu durumda $rank\, Ú^2(W_1(R)) = \binom{t+1}{t-1}$ dir. m, R nin maximal ideali olduğundan $Ú^2(W_1(R)) Ä R/m$ boyutu $\binom{t+1}{t-1}$ olan bir R/m- vektör uzayıdır. $Ú^2(W_1(R)) Ä R/m @ Ú^2\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right)$ dir. Bu durumda $Ú^2\left(\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}\right)$ nin boyutu $\binom{t+1}{t-1}$ olan bir R/m- vektör uzayı olabilmesi için

gerek ve yeter koşul $\frac{W_1(R)}{mW_1(R)}$ nin boyutu t olan bir R/m- vektör uzayı olmasıdır. S , $s-1$ boyutuyla bir tamlık bölgesidir. Bu durumda $\frac{W_1(R)}{gW_1(R)}$ de $s-1$ boyutlu bir tamlık bölgesidir. L , $\frac{W_1(R)}{gW_1(R)}$ nin kesir cismi olsun. Bu durumda $tr\deg_L \frac{W_1(R)}{gW_1(R)} = s-1$ dir. Dolayısıyla

$\dim_L \frac{W_1(R)}{gW_1(R)} \otimes_L L = \binom{s+1}{s-1} - 1 = \binom{s}{s-1} - 1 = \binom{s-1}{s-2}$ dir.

$\binom{s}{s-1} = t$ olduğundan $\binom{s-1}{s-2} = t-1$ dir. Bu nedenle

$\dim \Lambda^2(W_1(L)) = \binom{t+1-1}{t-1-1} = \binom{t}{t-2}$ dir. şimdi,

$0 \to \ker q \to \Lambda^2\left(\frac{W_1(R)}{gW_1(R)}\right) \to \Lambda^2(W_1(S)) \to 0$ tam dizisini

düşünelim. Bu dizi S_M ile tensörlendiği zaman

$0 \to (\ker q)_M \to \Lambda^2\left(\frac{W_1(R)}{gW_1(R)}\right)_M \to \Lambda^2(W_1(S))_M \to 0$ elde

ederiz.Burada M , m nin S deki görüntüsüdür.

$\Lambda^2\left(\frac{W_1(R)}{gW_1(R)}\right)_M$, rankı $\binom{t+1}{t-1}$ olan bir serbest modüldür.Burada $t = \binom{s}{s-1}$

dir. Bu nedenle $\dim_L(\ker q_M \otimes_L L) = \binom{t+1}{t-1} - \binom{t}{t-2} = \binom{t}{t-1}$ elde ederiz.

Diğer taraftan, $\ker\varphi$, $X=\{d_1(g)\cup d_1(x_j): j=1,\dots,s\}$ kümesi tarafından üretilir ve eleman sayısı $\binom{t}{t-1}$ dir. Bu yüzden X kümesi $(\ker\varphi)_M$ nin bir serbest bazıdır. m keyfi olduğundan, $\ker\varphi$ lokal serbesttir. Dolayısıyla $\ker\varphi$ bir serbest S- modüldür. deki Prop.2.3.5 den $\ker\varphi$ bir projektif S- modüldür. Sonuç olarak, $pd\,\Omega^2(W_1(S))\le 1$ dir.

Örnek 5.3.9 $R=\mathbf{k}[x,y,z]$ bir polinom cebiri ve I da R nin $f=z^2-x^2y$ elemanı tarafından üretilen bir ideali olsun. $S=R/I$ alınsın. Bu durumda $W_1(S)$ ve $\Omega^2(W_1(S))$ nin projektif boyutları hesaplanabilir.

F, bazı $\{d_1(x),d_1(y),d_1(z)\}$ kümesi olan serbest S- modül, N F nin $d_1(f)=d_1(z^2-x^2y)=2zd_1(z)-x^2d_1(y)-2xyd_1(x)$ elemanı tarafından üretilen bir S- alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3 den $W_1(S)\cong F/N$ dir.

$rank\,W_1(S)=\binom{s-1}{s-2}=\binom{2}{1}=2$ dir. Bu durumda

$rank\,N=rank\,F-rank\,W_1(S)=3-2=1$ dir. Lemma 2.3.2 den N bir serbest S- modüldür. Bu yüzden $0\to N\to F\to W_1(S)\cong F/N\to 0$ tam dizisi $W_1(S)$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd(W_1(S))\le 1$ dir.

Bu modülleri kullanarak Önerme 5.3.1 ve Önerme 5.3.2 den

$\Omega^2(W_1(S))\cong \Omega^2F/L_N$ yazılabilir. Burada Ω^2F,

$\{d_1(x)\cup d_1(x),d_1(x)\cup d_1(y),d_1(x)\cup d_1(z),d_1(y)\cup d_1(y),d_1(y)\cup d_1(z),d_1(z)\cup d_1(z)\}$ bazıyla bir serbest modül, L_N de Ω^2F nin

$$d_1(f)\dot{\cup}d_1(x) = 2zd_1(z)\dot{\cup}d_1(x) - x^2d_1(y)\dot{\cup}d_1(x) - 2xyd_1(x)\dot{\cup}d_1(x)$$

$$d_1(f)\dot{\cup}d_1(y) = 2zd_1(z)\dot{\cup}d_1(y) - x^2d_1(y)\dot{\cup}d_1(y) - 2xyd_1(x)\dot{\cup}d_1(y)$$

$$d_1(f)\dot{\cup}d_1(z) = 2zd_1(z)\dot{\cup}d_1(z) - x^2d_1(y)\dot{\cup}d_1(z) - 2xyd_1(x)\dot{\cup}d_1(z)$$

elemanları tarafından üretilen bir alt modülüdür. $t = \binom{s}{s-1} = \binom{3}{2} = 3$ olmak üzere $rank\,\dot{\cup}^2(W_1(S)) = \binom{t}{t-2} = \binom{3}{3-2} = 3$ olduğundan

$rankL_N = rank\,\dot{\cup}^2 F - rank\,\dot{\cup}^2(W_1(s)) = 6 - 3 = 3$ elde edilir. Dolayısıyla L_N rankı 3 olan bir serbest S- modüldür.

Bu yüzden

$$0 \to L_N \to \dot{\cup}^2 F \to \dot{\cup}^2(W_1(S)) \to \dot{\cup}^2 F/L_N \to 0$$

tam dizisi $\dot{\cup}^2(W_1(S))$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd(\dot{\cup}^2(W_1(S))) \le 1$ dir.

W

Örnek 5.3.10 $R = \mathbf{k}[x,y,z]$ bir polinom cebiri ve $y^2 = xz$ olsun. Bu durumda $W_1(S)$ ve $\dot{\cup}^2(W_1(S))$ nin projektif boyutları hesaplanabilir.

F, $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ bazıyla bir serbest S- modül, N F nin $d_1(f) = d_1(y^2 - xz) = 2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x)$ tarafından üretilen bir alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3. den $W_1(S) \cong F/N$ dir. $rankW_1(S) = \binom{s-1}{s-2} = 2$ dir. Bu durumda $rankN = rankF - rankW_1(S) = 3 - 2 = 1$ dir. Lemma 2.3.2. den N bir serbest S- modüldür. Bu yüzden

$0 \to N \to F \to W_1(S) \to 0$ tam dizisi $W_1(S)$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd(W_1(S)) \leq 1$ dir.

Bu modüller kullanılarak, Önerme 5.3.1 ve Önerme 5.3.2 den

$\Lambda^2(W_1(S)) \cong \Lambda^2 F / L_N$ yazılabilir. Burada $\Lambda^2 F$,

$\{d_1(x) \wedge d_1(x), d_1(x) \wedge d_1(y), d_1(x) \wedge d_1(z), d_1(y) \wedge d_1(y), d_1(y) \wedge d_1(z), d_1(z) \wedge d_1(z)\}$ bazıyla bir serbest modül, L_N de $\Lambda^2 F$ nin

$$d_1(f) \wedge d_1(x) = 2y d_1(y) \wedge d_1(x) - x d_1(z) \wedge d_1(x) - z d_1(x) \wedge d_1(x)$$

$$d_1(f) \wedge d_1(y) = 2y d_1(y) \wedge d_1(y) - x d_1(z) \wedge d_1(y) - z d_1(x) \wedge d_1(y)$$

$$d_1(f) \wedge d_1(z) = 2y d_1(y) \wedge d_1(z) - x d_1(z) \wedge d_1(z) - z d_1(x) \wedge d_1(z)$$

elemanları tarafından üretilen bir alt modülüdür. $t = \binom{s}{s-1} = \binom{3}{2} = 3$ olmak üzere $rank\, \Lambda^2(W_1(S)) = \binom{t}{t-2} = \binom{3}{3-2} = 3$ olduğundan

$rank L_N = rank\, \Lambda^2 F - rank\, \Lambda^2(W_1(S)) = 6 - 3 = 3$ elde edilir. Dolayısıyla, L_N rankı 3 olan bir serbest S- modüldür. Bu yüzden

$0 \to L_N \to \Lambda^2 F \to \Lambda^2(W_1(S)) \to \Lambda^2 F / L_N \to 0$ tam dizisi

$\Lambda^2(W_1(S))$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd(\Lambda^2(W_1(S))) \leq 1$ dir.

Örnek 5.3.11 $R = \mathbf{k}[x, y, z]$ bir polinom cebiri ve I da R nin $f = yz - x^3$ elemanı tarafından üretilen bir ideali olsun. $S = R/I$ alınsın. Bu durumda $W_1(S)$ ve $\Lambda^2(W_1(S))$ nin projektif boyutları hesaplanabilir.

F , bazı $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ kümesi olan serbest S- modül, N F nin $d_1(f) = d_1(yz - x^3) = yd_1(z) + zd_1(y) - 3x^2 d_1(x)$ elemanı tarafından üretilen bir S- alt modülü olsun. Sonuç 5.1.3 den $W_1(S) \cong F/N$ dir. $rank W_1(S) = \binom{s-1}{s-2} = \binom{2}{1} = 2$ dir. Bu durumda $rank N = rank F - rank W_1(S) = 3 - 2 = 1$ dir. Lemma 2.3.2 den N bir serbest S- modüldür. Bu yüzden $0 \to N \to F \to W_1(S) \cong F/N \to 0$ tam dizisi $W_1(S)$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd(W_1(S)) \leq 1$ dir.

Bu modülleri kullanarak Önerme 5.3.1 ve Önerme 5.3.2 den $\dot{U}^2(W_1(S)) \cong \dot{U}^2 F / L_N$ yazılabilir.Burada $\dot{U}^2 F$, $\{d_1(x) \dot{U} d_1(x), d_1(x) \dot{U} d_1(y), d_1(x) \dot{U} d_1(z), d_1(y) \dot{U} d_1(y), d_1(y) \dot{U} d_1(z), d_1(z) \dot{U} d_1(z)\}$ bazıyla bir serbest modül, L_N de $\dot{U}^2 F$ nin

$d_1(f) \dot{U} d_1(x) = yd_1(z) \dot{U} d_1(x) + zd_1(y) \dot{U} d_1(x) - 3x^2 d_1(x) \dot{U} d_1(x)$

$d_1(f) \dot{U} d_1(y) = yd_1(z) \dot{U} d_1(y) + zd_1(y) \dot{U} d_1(y) - 3x^2 d_1(x) \dot{U} d_1(y)$

$d_1(f) \dot{U} d_1(z) = yd_1(z) \dot{U} d_1(z) + zd_1(y) \dot{U} d_1(z) - 3x^2 d_1(x) \dot{U} d_1(z)$

elemanları tarafından üretilen bir alt modülüdür. $t = \binom{s}{s-1} = \binom{3}{2} = 3$ olmak üzere $rank\, \dot{U}^2(W_1(S)) = \binom{t}{t-2} = \binom{3}{3-2} = 3$ olduğundan $rank L_N = rank\, \dot{U}^2 F - rank\, \dot{U}^2(W_1(s)) = 6 - 3 = 3$ elde edilir. Dolayısıyla L_N rankı 3 olan bir serbest S- modüldür.

Bu yüzden

$$0 \to L_N \to Ú^2 F \to Ú^2\left(W_1(S)\right) \to Ú^2 F/L_N \to 0$$

tam dizisi $Ú^2\left(W_1(S)\right)$ nin bir serbest çözünürlüğüdür ve $pd\left(Ú^2\left(W_1(S)\right)\right) £ 1$ dir.

KAYNAKLAR

Berger, J.W., 1988. On The Torsion Of The Differential Module Of A Curve Singularity, Archiv d. Math. 50, 526-533.

Bourbaki, N., 1974. Algebra, Hermann, Paris.

Eisenbud D., 1995. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer Verlag, New York.

Erdoğan A., 1993. Differential Operators and Their Universal Modules, Phd.Thesis,University of Leeds.

Erdoğan A., 1996. Homological Dimension Of The Universal Modules For Hypersurfaces, Communications İn Algebra, 24:5, 1565-1573.

George M.Bergman, 1997. Tensor algebras, exterior algebras and symmetric algebras, http://math.berkeley.edu/gbergman.

Hart, R., 1996. Higher Derivations and Universal Differentials, Journal of Alg. 184 175-181.

Hart, R., 1998. Differential Operators and Affine Algebras, Journal London Math. Soc. (2)28, 470-476.

Johnson J., 1969. Kähler Differentials and differential algebra, The Annals of Mathematics, Second series, Vol.89, No 1, 92–98.

Komatsu H., 2001. High order Kähler Modules of Noncommutative ring extensions, Comm. Algebra 29, 5499-5524.

Kunz, E., 1985. Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.

Litaka, S., 1982. Algebraic Geometry, Springer Verlag, Berlin/Newyork.

Matsuoka, T., 1977. On Almost Complete Intersections, Manuscript Math. 21 329-340.

Mcconnell, J.C and Rabson , J.C ., 1987. Noncommutative Noetherian Rings, Wiley-Interscience.

M. Mohan Kumar, 1977. Complete Intersections, J. Math. Kyoto Univ., 17-3, 533-538.

Nakai, Y., 1970. High Order Derivations, Osaka J. Math. 7, 1-27.

Olgun, N. and Erdoğan, A., 2006. Some Results On Universal Modules, Int. Math. For. 1(15), 707-712.

Olgun, N. and Şahin, M., 2016. Tensor, Symmetric and Exterior Algebras On Kähler Modules, New Trends in Mathematical Sciences NTMSCI 4, No:3, 290-295.

Olgun, N., 2005. The Universal Modules of Finitely Generated Algebras, PhD. Thesis,.

Olgun, N., 2016. Symmetric Derivations On Kähler Modules, arXiv:1602.01343 [math.AC]

Osborn, H., 1968. Modules of Differentials II, Math. Ann. 175, 146-158.

Sweedler, M.E. and Heyneman, R.G., 1977.Affine Hopf Algebras, J.Algebra 13, 192-241.

Sweedler, M.E., 1975. Groups of Simple Algebras, Publ. Math. No: 44.

Vasconcelos, W.V., 1968. A note On Normality And The Module of Differentials, Math. Z., 105, 291-293.

Vasconcelos, W. V., 1978. On The Homology of I/I^2, Comm. Algebra 6(17), 180-189.

ÖZGEÇMİŞ

29-07-1979 yılında Gaziantep'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. Lise öğreniminde 1 yıl İngilizce hazırlık sınıfı okudu. Lisans eğitimini 1998-2002 yılları arasında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde, yüksek lisans eğitimini 2006-2009 yılları arasında Gaziantep Üniversitesi Matematik Anabilim dalı Fonksiyonel Analiz ve Fonk.Teorisi bilim dalında, doktora eğitimini 2010-2016 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi bilim dalında tamamladı. 2002-2003 eğitim-öğretim yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullarda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk annesidir.