ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Deniz ÖZONUR

KARMA REGRESYON TAHMİN EDİCİLERİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMA REGRESYON TAHMİN EDİCİLERİ

Deniz ÖZONUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 04/08/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oy birliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....	.....
Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR	Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
DANIŞMAN	ÜYE

.....
Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARMA REGRESYON TAHMİN EDİCİLERİ

Deniz ÖZONUR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİMDALI

Danışman :Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl: 2011, Sayfa:107
Jüri :Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
:Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
:Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Örneklem bilgisi ve parametreler hakkında yardımcı bilgi olduğunda daha iyi tahmin edici bulma çalışmaları ve bu kapsamda, tam, stokastik ve zayıflatılmış lineer kısıtlamalar altında karma tahmin konusu incelenmiştir. Ayrıca, karma regresyon tahmin edicisine alternatif tahmin ediciler ele alınmıştır ve bu tahmin edicilerin performansları hata kareler ortalaması ve yanlılıkları göz önünde bulundurularak değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karma tahmin, Hata kareler ortalaması, Kısıtlı tahmin, Yanlı tahmin edici

ABSTRACT

MSc THESIS

MIXED ESTIMATORS

Deniz ÖZONUR

DEPARTMENT OF STATISTICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor :Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year : 2011, Pages:107
Jury :Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
:Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
:Assoc. Prof. Ahmet TEMİZYÜREK

When sample and prior information on parameters simultaneously, attempts to provide better estimators and in this context mixed estimation under exact, stochastic and weakened linear restrictions are examined. Furthermore, alternative estimators to mixed estimator are introduced and the performance of these estimators are considered under the mean squared error and the bias criteria.

Key Words: Mixed estimation, Mean squared error, Restricted estimation, Biased estimator

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tezimi hazırlarken her zaman yanımda olan ve beni anlayışla karşılayan eşim Can ÖZONUR'a ve aileme her türlü desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
SİMGELER VE KISALTMALAR VI
1. GİRİŞ 1
1.1. Temel Bilgiler 1
1.2. Genel Lineer Regresyon Modeli 14
1.2.1. b 'nın En İyi Lineer Tahmini 14
1.2.2. Aitken Tahmin Edici 20
2. TAM LİNEER KISITLAMALAR 25
2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici (RLSE) 25
2.2. Tam Lineer Kısıtlayıcıların Kademeli Olarak Eklenmesi 27
2.3.Yanlı Lineer Kısıtlamalar ve MSE Kriterine Göre LSE ile Karşılaştırmalar 32
2.4. İki Yanlı Kısıtlı Tahmin Edicinin MSE Karşılaştırması 36
2.4.1. Kademeli Yanlı Kısıtlamalar (Özel Durum) 40
3. STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR 47
3.1. Mixed Tahmin Edici 47
3.2. Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar 49
3.3. Yanlı Stokastik Kısıtlamalar 53
3.3.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{b}(R)$'nin $\hat{b}$ Üzerine Üstünlüğü 54
3.3.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{b}$'nin $\hat{b}(R)$ Üzerine Üstünlüğü 55
3.3.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{b}(R)$'nin $\hat{b}$ Üzerine Üstünlüğü 57
3.3.4. $\hat{b}(R)$ ve $\hat{b}$ için MSE-III Karşılaştırması 58
4. ZAYIFLATILMIŞ LİNEER KISITLAMALAR 61
4.1. Zayıf (R,r)-Yansızlık 61

4.2. Optimal Zayıf (R,r)-Yansız Tahmin Ediciler 62
4.3. $\hat{b}_1(b,A)$ Tahmin Edicisinde b 'nın En Uygun Seçimi 68
4.4. Mixed Tahmin Edici Yerine RLS Tahmin Edicisinin Kullanılması 70
5. MIXED TAHMİN EDİCİ İLE İLİŞKİLİ TAHMİN EDİCİLER 73
5.1. Ridge Regresyon (RR) Tahmin Edicisi 73
5.2. Liu Tahmin Edici 76
5.3. Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici (SRLE) 77
5.4. Alternatif Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici 80
5.5. Genel Mixed Ridge Tahmin Edici 82
5.6. Kısıtsız ve Kısıtlı İki Parametreli Tahmin Edici 84
5.7. Stokastik Kısıtlı Ridge Tahmin Edici 91
5.8. Çoklu Çok Değişkenli Ridge Tahmin Edici 93
5.9. Ağırlıklı Mixed Tahmin Edici 97
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 101
KAYNAKLAR 103
ÖZGEÇMİŞ 107

SİMGELER VE KISALTMALAR

EKK : En Küçük Kareler

GEKK : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler

MSE : Hata Kareler Ortalaması

BLUE : En İyi Yansız Tahmin Edici

RLSE : Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici

SRLE :Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici

OME : Genel Mixed Tahmin Edici

OMRE : Genel Mixed Ridge Tahmin Edici

RR : Ridge regresyon

MRR : Modified Ridge Regresyon

SUR : Görünüşte İlişkisiz

WME : Ağırlıklı Mixed Tahmin Edici

WMLE : Ağırlıklı Mixed Liu Tahmin Edici

1. GİRİŞ

Uygulamalarda örneklem bilgisine ek olarak yardımcı bilgi de aynı anda görülebilmektedir. Örneklem ve yardımcı bilgiyi aynı anda kullanarak elde edilen yeni bir tahmin edici ilk olarak Durbin (1953) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963), örneklem ve yardımcı bilgiyi birleştirerek karma tahmin tekniğini geliştirmişlerdir.

Parametreler hakkında yardımcı bilgi olması durumunda klasik en küçük kareler tahmin edici uygun olmamaktadır. Bu nedenle daha iyi tahmin edici bulma çalışmaları yapılmaktadır. Bu çalışmada, yardımcı bilgiyi göz önüne alan karma regresyon tahmin edicileri ele alınmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde gerekli temel bilgiler verilmiş ve genel lineer regresyon modeli ele alınmıştır. İkinci bölümde tam lineer kısıt altında tahmin ediciler, bazı özellikleri ve karşılaştırmaları incelenmiştir. Üçüncü bölümde stokastik lineer kısıt altında karma tahmin ediciler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca dördüncü bölümde zayıflatılmış lineer kısıtlamalar altında yansız tahmin ediciler ve beşinci bölümde karma tahmin edicilerle ilişkili yeni tahmin ediciler verilmiştir.

1.1. Temel Bilgiler

Bu bölümde, sonraki bölümlerdeki, bazı teoremlerin ispatlarında gerekli olabilecek tanım ve teoremler verilecektir.

Teorem 1.1

A, B, C, D matrisleri uygun boyutta tersi alınabilir matrisler ise, aşağıdakiler geçerlidir:

i. c bir skaler olmak üzere, $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$'dir.

ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iii. $A: p\times p, B: p\times n, C: n\times n, D: n\times p$ matris ise,

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1} DA^{-1}$$

dir.

iv. a ve b uygun boyutta vektörler olmak üzere, $1+b'A^{-1}a \neq 0$ ise (iii)'den,

$$(A+ab')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab'A^{-1}}{1+b'A^{-1}a}$$

olur.

v. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

Teorem 1.2

$A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ matrisi için, $E: n_1 \times n_1, F: n_1 \times n_2, G: n_2 \times n_1, H: n_2 \times n_2$,

($n_1 + n_2 = n$) ve $D = H - GE^{-1}F$ olsun. E ve D tekil olmayan matrisler olmak üzere, A matrisinin tersi A^{-1};

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1}\left(I + FD^{-1}GE^{-1}\right) & -E^{-1}FD^{-1} \\ -D^{-1}GE^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 1.3

A: nxn tipinde ve $A > 0$ olsun. l_i , A'nın özdeğerleri olmak üzere;

i. $l_i > 0$

ii. $x \neq 0$ için $x'Ax > 0$

iii. $A^{-1} > 0$

iv. $tr(A) > 0$

v. P: nxm , rank(P)=m$\leq n$ olsun. O zaman $P'AP > 0$

dır.

Teorem 1.4

A ve B nxn tipinde ve $A>0$, $B\geq 0$ olsun. O zaman**;**

i. $C=A+B>0$

ii. $A^{-1}-(A+B)^{-1}\geq 0$

dır.

Teorem 1.5

$A\geq 0$ olsun; l_i'ler A'nın özdeğerleri olmak üzere;

i. $l_i\geq 0$.

ii. $tr(A)\geq 0$.

iii. $A^{1/2}=\Gamma\Lambda^{1/2}\Gamma'$ için $A=A^{1/2}A^{1/2}$'dir.

Burada, $\Lambda=diag(l_1,...,l_p)$, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen matris ve $\Gamma=(\gamma_{(1)},...,\gamma_{(p)})$, standartlaştırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal matristir.

iv. Herhangi bir $C:n\times m$ matrisi için $C'AC\geq 0$'dır.

v. Herhangi bir C matrisi için $C'C\geq 0$ ve $CC'\geq 0$'dır.

Teorem 1.6

$l_1\geq ...\geq l_n$ simetrik $A:n\times n$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\sup_x \frac{x'Ax}{x'x}=l_1\ ,\ \inf_x \frac{x'Ax}{x'x}=l_n$$

dir.

Teorem 1.7

$rank(A) = m \le n$, $A: n \times m$ matris ve $B: m \times m$ tipinde herhangi bir simetrik matris olsun. $ABA' \ge 0 \Leftrightarrow B \ge 0$ olmasıdır.

Teorem 1.8

$A > 0$ ve $B > 0$ olsun. O zaman, $B - A > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A^{-1} - B^{-1} > 0$ olmasıdır.

Teorem 1.9

$I: n \times n$ tipinde birim matris ve $a: n$-vektör olsun. $I - aa' \ge 0 \Leftrightarrow a'a \le 1$ olmasıdır.

Teorem 1.10

$A: n \times n$ matris, $(-A) > 0$ ve a bir n-vektör olsun. $n \ge 2$ olması durumunda $A + aa'$ hiçbir zaman negatif olmayan tanımlı (n.n.d.) olamaz.

Teorem 1.11

$A > 0$ ve T herhangi bir karesel matris ise;

i. $\sup_{\mathbf{x} \ne 0} \dfrac{(x'y)^2}{x'Ax} = y'A^{-1}y$,

ii. $\sup_{\mathbf{x} \ne 0} \dfrac{(y'Tx)^2}{x'Ax} = y'TA^{-1}T'y$

dır.

Teorem 1.12

$A: n\times n$ matrisi, $rank(A) = r \le n$ olan idempotent matris olsun.

i. A matrisinin özdeğerleri, 1 veya 0'dır.

ii. $tr(A) = rank(A) = r$.

iii. A matrisi tam ranklı matris ise $A = I_n$'dir.

iv. A ve B matrisleri idempotent ve $AB = BA$ ise bu durumda AB matrisi de idempotenttir.

v. A idempotent ve P ortogonal matris ise bu durumda PAP' matrisi de idempotenttir.

vi. A idempotent matris ise $I - A$ matrisi de idempotenttir ve

$$A(I-A) = (I-A)A = 0$$

dır.

Teorem 1.13

$A: m\times n$ matris olsun. A^+, A'nın Moore-Penrose tersi olmak üzere,

i. A tekil olmayan matris ise $A^+ = A^{-1}$.

ii. $\left(A^+\right)^+ = A$.

iii. $\left(A^+\right)' = \left(A'\right)^+$.

iv. $rank(A) = rank\left(A^+\right) = rank\left(A^+A\right) = rank\left(AA^+\right)$.

v. A ortogonal izdüşüm ise $A^+ = A$.

vi. $rank(A): m\times n = m \Rightarrow A^+ = A'\left(AA'\right)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$.

vii. $rank(A): m\times n = n \Rightarrow A^+ = \left(A'A\right)^{-1}A'$ ve $A^+A = I_n$.

viii. $P: m\times m$ ve $Q: n\times n$ ortogonal matrisler ise $\left(PAQ\right)^+ = Q^{-1}A^+P^{-1}$'dir.

ix. $(A'A)^{+} = A^{+}(A')^{+}$ ve $(AA')^{+} = (A')^{+}A^{+}$.

x. $A^{+} = (A'A)^{+}A' = A'(AA')^{+}$

dır.

Tanım 1.1

$X : TxK$ matrisi için $\Re^{T}$ 'nin bir alt uzayı olan

$$\Re(X) = \{q : q = Xb, b \in \Re^{K}\}$$

kolon uzayı olarak adlandırılır.

Teorem 1.14

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ simetrik matris olsun. Bu durumda,

(a) $A \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

i. $A_{22} \geq 0$,

ii. $A_{21} = A_{22}A_{22}^{-}A_{21}$,

iii. $A_{11} \geq A_{12}A_{22}^{-}A_{21}$

olmasıdır.

(b) $A > 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

i. $A_{22} > 0$,

ii. $A_{11} > A_{12}A_{22}^{-}A_{21}$

olmasıdır. Burada A^{-}, A'nın genelleştirilmiş tersini (g-ters) gösterir.

Teorem 1.15

x bir n- vektör ve A bir $n \times n$ simetrik matris olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial x} x'Ax = 2Ax$$

dir.

Teorem 1.16

x bir n- vektör, y bir m-vektör ve C bir $n \times m$ matris olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial C} x'Cy = xy'$$

olur.

Teorem 1.17

x bir K-vektör, A: TxT ve C: TxK tipinde matris ise,

$$\frac{\partial}{\partial C} x'C'ACx = 2ACxx'$$

olur.

Teorem 1.18

İz(trace)'in türevleri için aşağıdaki kurallar geçerlidir;

i. $\frac{\partial}{\partial X} tr(AX) = A'$

ii. $\frac{\partial}{\partial X} tr(X'AX) = (A + A')X$

iii. $\frac{\partial}{\partial X} tr(XAX) = X'A + A'X'$

iv. $\frac{\partial}{\partial X} tr(XAX') = X(A + A')$

v. $\frac{\partial}{\partial X} tr(X'AX') = AX' + X'A$

vi. $\frac{\partial}{\partial X} tr(X'AXB) = AXB + A'XB'$

Tanım 1.2

y bir T-vektör, C: KxT ve d: $Kx1$ stokastik olmayan matrisler olsun. β'nın bir tahmini olarak $\hat{b}$ aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$\hat{b}$ =Cy+d.

Eğer d=0 ise $\hat{b}$ homojen tahmin edici olarak adlandırılır. Aksi halde heterojen tahmin edici olarak adlandırılır.

Tanım 1.3

$\hat{b}_1$ ve $\hat{b}_2$, b 'nın iki tahmini olsun. $M(\hat{b}, b) = E\left[(\hat{b} - b)(\hat{b} - b)'\right]$ hata kareler ortalaması (MSE) olmak üzere;

i. $\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = M(\hat{b}_1, b) - M(\hat{b}_2, b) \geq 0$ ise; o zaman $\hat{b}_2$, MSE-I kriterine göre $\hat{b}_1$'dan üstündür denir.

ii. $E\left[(\hat{b}_1 - b)'(\hat{b}_1 - b)\right] - E\left[(\hat{b}_2 - b)'(\hat{b}_2 - b)\right] = tr\left\{\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2)\right\} \geq 0$ ise; o zaman $\hat{b}_2$, MSE-II kriterine göre $\hat{b}_1$'dan üstündür denir.

iii.

$$E\left[(X\hat{b}_1 - Xb)'(X\hat{b}_1 - Xb)\right] - E\left[(X\hat{b}_2 - Xb)'(X\hat{b}_2 - Xb)\right] =$$
$$E\left[(\hat{b}_1 - b)'S(\hat{b}_1 - b)\right] - E\left[(\hat{b}_2 - b)'S(\hat{b}_2 - b)\right] = tr\left\{S\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2)\right\} \geq 0$$

ise o zaman; $\hat{b}_2$,MSE-III kriterine göre $\hat{b}_1$'dan üstündür denir.

Tanım 1.4

Karesel risk fonksiyonu; MSE'nin skaler bir versiyonudur:

$$R_1(\hat{b}, b, A) = tr\left\{AM(\hat{b}, b)\right\}$$

Tanım 1.5

$$R_2(\hat{b}, b, A) = E\left[(\hat{b} - b)'a\right]^2, \ a \neq 0 \text{ K-vektör}$$

$$R_3(\hat{b}, b) = E\left[(y - x\hat{b})'W^{-1}(y - x\hat{b})\right].$$

Ayrıca i=1, 2, 3 için $R_i(\hat{b}, b, .) \leq R_i(\tilde{b}, b, .)$ ise $\hat{b}$ lineer tahmini b için $R_i(\hat{b})$-minimum risklidir denir.

Tanım 1.6 (Lineer Model)

Y bağımlı değişkeni; $X_1, \mathbf{K}, X_K$ bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun.

$$Y = f(X_1, \mathbf{K}, X_K) + e$$

f lineer olduğunda $Y = X_1 b_1 + \mathbf{K} + X_K b_K + e$ lineer regresyon modeline dönüşür.

$y = (y_1, \mathbf{K}, y_T)$, T -vektör

$x_i = (x_{1i}, \mathbf{K}, x_{Ki})'$, K -vektör

$x_{(j)} = (x_{j1}, \mathbf{K}, x_{jT})'$, T -vektör

$e' = (e_1, \mathbf{K}, e_T)$

$b' = (b_1, \mathbf{K}, b_K)$

Matris notasyonu ile $y = Xb + e$ yazılabilir.

$$y = Xb + e \; ; \; E(e) = 0 \, , E(ee') = s^2 \mathrm{I} \qquad (1.1.)$$

$X : TxK$ sabitlerin matrisi ve $\text{rank}(X) = K$ şeklinde tanımlı modele lineer regresyon modeli denir.

Bu varsayımlar altında EKK tahmin edicisi şöyle elde edilebilir:

$$S(b) = \sum_{i=1}^{T} e_i^{\,2} = e'e = (y - Xb)'(y - Xb)$$

fonksiyonu bilinmeyen regresyon parametreleri $b' = (b_1, \mathbf{K}, b_K)$'ye göre minimum yapılarak $(b_1, \mathbf{K}, b_K)$ parametreleri tahmin edilir.

$$S(b) = y'y + b'X'Xb - 2b'X'y$$

fonksiyonunun b'ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = 2X'Xb - 2X'y \, ,$$

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b} = 2X'X \;\; \text{(n.n.d).}$$

denklemleri elde edilir. Birinci dereceden türevler sıfıra eşitlenirse normal denklemler elde edilir.

$$2X'Xb - 2X'y = 0 \Rightarrow X'Xb = X'y.$$

Eğer $\text{rank}(X) = K$ ise $X'X$ tekil olmayan matristir. Böylece;

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

elde edilir.

Teorem 1.19 (Rao(1973), syf.317)

$E(T) = q$ ve $V(T) < \infty$ olmak üzere T bir istatistik olsun. (q :skaler bir parametre) O zaman, T'nin q parametresi için minimum varyanslı yansız tahmin edici olması için gerek ve yeter koşul; her t için $Cov(T,t) = 0$ olmasıdır. Öyle ki; $E(t) = 0$ ve $V(T) < \infty$ olur.

Teorem 1.20

b 'nın minimum varyanslı yansız tahmin edicisi (MDLUE);

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

dır. b 'nın EKK tahmin edicisi ile aynıdır ve minimum varyans-kovaryans matrisi;

$$s^2(X'X)^{-1}$$

dır.

Tanım 1.7

t_1 ve t_2, q 'nın iki tahmin edicisi olsun. $\Delta(t_1,t_2) = M(t_1,q) - M(t_2,q)$ n.n.d. matris ise $\Delta(t_1,t_2) \geq 0$ 'dır. Bu durumda t_2 tahmin edicisi, MSE-I'e göre t_1 'den daha güçlüdür denir.

$$d_i = bias(t_i, q) \qquad i = 1, 2$$

$$D(t_i) = V(t_i) \qquad i = 1, 2$$

$$D = D(t_1) - D(t_2)$$

$$\Delta(t_1, t_2) = D + d_1 d_1' - d_2 d_2'$$

olmak üzere $\Delta(t_1, t_2)$ için aşağıdaki koşullar incelenerek, bu matrisin p.d. veya n.n.d. olduğuna karar verilebilir:
$d_1 d_1' \geq 0$ olduğundan,

$D > 0$ ise $D + d_1 d_1' > 0$

$D \geq 0$ ise $D + d_1 d_1' \geq 0$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\Delta(t_1, t_2)$'nin p.d. veya n.n.d. olup olmadığına karar verme problemi, A p.d. ya da n.n.d. iken $A - aa'$ matrisinin, p.d veya n.n.d. olup olmaması problemine dönüşür.

1. Koşul: $D > 0$

Teorem 1.21 (Farebrother, 1976)

A, $n \times n$ tipinde p.d. bir matris ve a, bir n-vektör olsun. $A - aa' > (\geq) 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a' A^{-1} a < (\leq) 1$ olmasıdır.

2. Koşul: $D \geq 0$

Bu koşul altında, iki yanlı tahmin edicinin MSE matrislerinin karşılaştırmaları, temelde $A - aa'$ matrisinin $A \geq 0$ olduğu durum ile açıklanabilir.

Teorem 1.22 (Baksalary ve Kala, 1983)

A, $n\times n$ tipinde n.n.d. bir matris ve a, bir n-vektör olsun. A^- matrisi A'nın g-ters matrisi olmak üzere ($AA^-A=A$), $A-aa'\geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $a\in\Re(A)$ ve $a'A^-a\leq 1$ olmasıdır.

Not: $a\in\Re(A)$ ise herhangi bir c vektörü için, $a=Ac$'dir. Bundan dolayı, $a'A^-a=c'AA^-Ac=c'Ac$ olur ve $a'A^-a$, A'nın seçilen herhangi bir g-tersine göre değişmez.

Teorem 1.23

$p\times p$ tipindeki her simetrik A matrisi, $A=\Gamma\Lambda\Gamma'=\sum l_i g_{(i)}g'_{(i)}$ şeklinde yazılabilir. Burada, $\Lambda=diag(l_1,...,l_p)$, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan diagonal matris ve $\Gamma=(\gamma_{(1)},...,\gamma_{(p)})$, standartlaştırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal matristir.

Teorem 1.24

A simetrik matris ve $A=\Gamma\Lambda\Gamma'$ olsun.

i. A ve Λ aynı özdeğerlere sahiptir.

ii. $A=\Gamma\Lambda\Gamma'$ olduğundan $\Lambda=\Gamma'A\Gamma$ olur.

iii. A, $p\times p$ tipinde bir simetrik matris ise, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, $A^n=\Gamma\Lambda^n\Gamma'$ ve $\Lambda^n=diag(l_i^n)$ yazılabilir. A matrisinin özdeğerleri pozitif ise $s>0$ ve r tamsayılar olmak üzere, $A^{\frac{r}{s}}=\Gamma\Lambda^{\frac{r}{s}}\Gamma'$ ve $\Lambda^{\frac{r}{s}}=diag(l_i^{\frac{r}{s}})$ tanımlanabilir.

iv. A herhangi bir kare matris ise, A matrisinin rankı, sıfır olmayan özdeğerlerinin sayısına eşittir.

1.2. Genel Lineer Regresyon Modeli

1.2.1. b 'nın En İyi Lineer Tahmini

$$y = Xb + e \;;\; E(e) = 0 \,,\, E(ee') = s^2 W \tag{1.2.}$$

modeli için; W : pozitif tanımlı X : stokastik olmayan bir matris ve $rank(X) = K$ olsun. Bu şekilde tanımlı modele Genel Lineer Regresyon Modeli denir.

R_1'e Göre Optimal Tahmin Ediciler

(a) R_1'e Göre Optimal Heterojen Tahmin Edici

$\hat{b}$, Tanım 1.2'de verildiği gibi olsun.

$$\hat{b} - b = (CX - \mathrm{I})b + d + Ce$$

dır.

$$\begin{aligned} R_1(\hat{b}, b, A) &= E\left[(\hat{b} - b)' A(\hat{b} - b)\right] \\ &= E\left[\{(CX - \mathrm{I})b + d + Ce\}' A\{(CX - \mathrm{I})b + d + Ce\}\right] \\ &= \left[(CX - \mathrm{I})b + d\right]' A\left[(CX - \mathrm{I})b + d\right] + E\left[e'C'ACe\right] \end{aligned} \tag{1.3.}$$

(1.3.)'ün ikinci parçası d 'den bağımsızdır. Böylece d 'nin optimal değeri ilk ifadeyi minimum yapar. İlk ifade negatif olmadığı için,

$$\hat{d} = -(\hat{C}X - \mathrm{I})b \tag{1.4.}$$

olduğunda minimum değerine ulaşır.

$$\min_C E[\varepsilon' C' AC\varepsilon] = \min_C tr\{ACE(\varepsilon\varepsilon')C'\} = \min_C \sigma^2 tr\{ACWC'\} \tag{1.5.}$$

O halde Teorem 1.17 ve Teorem 1.18'den

$$\frac{\partial}{\partial C} s^2 tr\{ACWC'\} = 2s^2 ACW \qquad (1.6.)$$

sıfır matrisine eşitlenirse, A ve W pozitif tanımlı olduklarından $\hat{C} = 0$ olur. (1.4.)'de $\hat{C} = 0$ yazılırsa $\hat{d} = b$ olur.

Sonuç olarak b 'nın R_1'e göre optimal heterojen tahmin edicisi kendisidir. Yani;

$$R_1(\hat{b}_1, b, A) = 0 \text{ ve } V(\hat{b}_1) = 0 \text{ ile } \hat{b}_1 = b$$

dır.

(b) R_1'e Göre Optimal Homojen Tahmin Edici

Tanım 1.2'de $d = 0$ alınırsa $\hat{b} = Cy$ olur.

$$\hat{b} - b = (CX - \mathrm{I})b + Ce \ ,$$

$$\begin{aligned} R_1(\hat{b}, b, A) &= E\left[(\hat{b} - b)' A (\hat{b} - b) \right] \\ &= \left[(CX - \mathrm{I})b\right]' A \left[(CX - \mathrm{I})b\right] + E\left[e'C'ACe\right] \\ &= b'(X'C' - \mathrm{I})A(CX - \mathrm{I})b + E\left[e'C'ACe\right] \\ &= b'X'C'ACXb - b'X'C'Ab - b'ACXb + b'Ab + E\left[e'C'ACe\right]. \end{aligned} \qquad (1.7.)$$

Teorem 1.16 ve Teorem 1.17'nin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1(\hat{b}, b, A)}{\partial C} &= 2ACXbb'X' - 2Abb'X' + 2s^2 ACW \\ &= 2A\left[C(Xbb'X' + s^2 W) - bb'X'\right] \end{aligned} \qquad (1.8.)$$

olur. Teorem 1.4'den $Xbb'X' + s^2 W$ pozitif tanımlı olduğu için tekil olmayan matristir. (1.8.) sıfıra eşitlenirse;

$$\hat{C}_2 = bb'X'(Xbb'X'+s^2W)^{-1}$$

olur. Teorem 1.1 (iv) uygulanırsa;

$$(Xbb'X'+s^2W)^{-1} = s^{-2}W^{-1} - \frac{s^{-4}W^{-1}Xbb'X'W^{-1}}{1+s^{-2}b'X'W^{-1}Xb}$$

olur. $rank(X) = K$ olduğundan $S = X'W^{-1}X$ pozitif tanımlı olur. Böylece, R_1'e göre optimal homojen tahmin edici;

$$\begin{aligned}\hat{b_2} = \hat{C}_2 y &= bb'X'(Xbb'X + s^2W)^{-1}y \\ &= bb'X'(s^{-2}W^{-1} - \frac{s^{-4}W^{-1}Xbb'X'W^{-1}}{1+s^{-2}b'X'W^{-1}Xb})y \\ &= b(s^{-2}b'X'W^{-1}y - \frac{s^{-4}b'Sbb'X'W^{-1}y}{1+s^{-2}b'Sb}) \\ &= b(\frac{b'X'W^{-1}y}{s^2+b'Sb})\end{aligned}$$

dır.

$$a(b) = (\frac{b'Sb}{s^2+b'Sb})$$

notasyonu kullanılırsa, $a(b) < 1$ ve $E(\hat{b_2}) = ba(b)$'dır. $\hat{b_2}$'nın yanlılık vektörü;

$$\begin{aligned}Bias(\hat{b_2}, b) = E(\hat{b_2}) - b &= ba(b) - b \\ &= [a(b)-1]b = \frac{-s^2}{s^2+b'Sb}b\end{aligned}$$

kovaryans matrisi;

$$\begin{aligned}V(\hat{b_2}) &= V(\frac{bb'X'W^{-1}y}{s^2+b'Sb}) \\ &= s^2bb'\frac{b'Sb}{(s^2+b'Sb)^2}\end{aligned}$$

ve hata kareler ortalaması;

$$M(\hat{b}_2, b) = \frac{s^2 bb'}{s^2 + b'Sb}$$

dır.

(c) R_1'e Göre Optimal Homojen Yansız Tahmin Edici

$$CX - \mathrm{I} = 0 \tag{1.9.}$$

ise homojen lineer tahmin edici yansızdır. Eşit olarak;

$$c_i' X - e_i' = 0 \ (i = 1, 2, ..., K)$$

dır. Burada e_i' ve c_i'sırasıyla I ve C'nın i-nci satır vektörleridir. (1.9.) eşitliği (1.7.)'de kullanılırsa; $R_1(\hat{b}, b, A) = s^2 tr(ACWC')$ olur. Böylece, bu durumdaki en uygun C aşağıdaki eşitlikten elde edilir;

$$\min_C \hat{R}_1 = \min_C \left\{ s^2 tr(ACWC') - 2\sum_{i=1}^{K} l_i'(c_i' X - e_i') \right\}.$$

Bu eşitlikte $l_1, \mathbf{K}, l_K$; Lagrange çarpanlarının K-vektörleridir. $\Lambda'_{KxK} = (\ l_1, \mathbf{K}, l_K)$ yazılarak C ve Λ'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \hat{R}_1}{\partial C} = 2s^2 ACW - 2\Lambda X' = 0 \tag{1.10.}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_1}{\partial \Lambda} = 2(CX - \mathrm{I}) = 0 \tag{1.11.}$$

elde edilir. (1.10.) ve (1.11.)'den optimal C;

$$\hat{C}_3 = (X'W^{-1}X)^{-1} X'W^{-1} = SX'W^{-1}$$

olur. $\hat{C}_3$ matrisi (1.9.) koşulu ile tutarlıdır. Yani;

$$\hat{C}_3 X = S^{-1} X' W^{-1} X = S^{-1} S = \mathrm{I}$$

dır. Böylece, R_1'e göre optimal homojen yansız tahmin edici;

$$\hat{b_3} = b = S^{-1} X' W^{-1} y$$

şeklindedir. Risk fonksiyonu ve kovaryans matrisi ise;

$$R_1(b, b, A) = s^2 tr(AS^{-1}) = tr(AV(b))$$

$$V(b) = s^2 S^{-1}$$

dır.

Teorem 1.25

(1.2.)'deki genel lineer regresyon modeli düşünülsün ve karesel risk fonksiyonu;

$$R_1(\hat{b}, b, A) = E\left[(\hat{b} - b)' A(\hat{b} - b)\right], A > 0$$

olsun. O zaman b için optimal lineer tahmin ediciler;

(a) Heterojen: $\hat{b_1} = b$

(b) Homojen: $\hat{b_2} = b\left(\frac{b' X' W^{-1} y}{s^2 + b' S b}\right)$

(c) Homojen yansız: $\hat{b_3} = b = S^{-1} X' W^{-1} y$

şeklindedir. R_1'e göre optimal tahmin ediciler A'dan bağımsızdır. Ayrıca, optimal tahmin edicilerin risk fonksiyonları sırasıyla,

$$R_1(\hat{b_1}, b, A) \leq R_1(\hat{b_2}, A) \leq R_1(\hat{b_3}, b, A)$$

dır.

(d) R_3'e Göre Optimal Tahmin Ediciler

Tanım 1.5'deki $R_3(\hat{b}, b)$ riski ve $\hat{b} = Cy + d$ heterojen lineer tahmin edici için hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} R_3(\hat{b}, b) &= E\left[(y - Xb)'W^{-1}(y - Xb)\right] \\ &= \left[(\mathrm{I} - CX)b - d\right]'S\left[(\mathrm{I} - CX)b - d\right] + s^2 tr\left[W^{-1}(\mathrm{I} - XC)W(\mathrm{I} - C'X')\right] \\ &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

olur. İkinci terim v^2, d'den bağımsızdır. Bu yüzden d'nin optimal değeri u^2'yi minimum yapan değerdir. u^2 negatif olmayan tanımlı olduğundan minimum değer sıfır olabilir. Böylece u^2=0 alınırsa,

$$\hat{d} = (\mathrm{I} - \hat{C}X)b \qquad (1.12.)$$

olur. Burada $\hat{C}$, C'nin optimal değeridir. C'nin optimal değeri v^2'nin minimizasyonu ile elde edilir. Teorem 1.15, Teorem 1.18'e uygulanırsa;

$$v^2 = s^2 tr(\mathrm{I} + C'SCW - 2C'X')$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{2s^2}\frac{\partial v^2}{\partial C} = SCW - X' = 0$$

olur. Buradan, $\hat{C} = S^{-1}X'W^{-1}$ elde edilir ve $\hat{C}$, (1.12.)'de yerine yazılırsa,

$$\hat{d} = (\mathrm{I} - S^{-1}X'W^{-1}X)b = 0$$

olur.

Teorem 1.26

R_3'e göre b için optimal tahmin edici; $b = S^{-1}X'W^{-1}y$ ve varyansı; $V(b) = s^2 S^{-1}$'dır. $S = X'W^{-1}X$ için,

$$R_3(b,b) = s^2 tr(\mathrm{I} - W^{-1}XS^{-1}X')$$
$$= s^2(T-K)$$

dır.

1.2.2. Aitken Tahmin Edici

Klasik modelde EKK tarafından belirlenen en iyi lineer yansız tahmin edici(BLUE),

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

dir. (1.2.) genel lineer regresyon modelinde b için BLUE, klasik model ile (1.2.) arasında basit işlemler yapılarak bulunabilir;

W ve W^{-1} simetrik ve pozitif tanımlı oldukları için,

$$W = MM \text{ ve } W^{-1} = NN$$

olacak şekilde M ve N (Teorem 1.24) matrisleri vardır. Burada $M = W^{1/2}$ ve $N = W^{-1/2}$ düzenli ve simetriktir. (1.2.) modeli N ile çarpılırsa,

$$Ny = NXb + Ne$$

olur. $Ny = y^*$, $NX = X^*$ ve $Ne = e^*$ olsun.

$$E(e^*) = E(Ne) = 0 \ , E(e^*e^{*\prime}) = E(Nee'N) = s^2\mathrm{I}$$

elde edilir. Böylece lineer şekilde dönüştürülmüş model;

$$y = Xb + e \tag{1.13.}$$

klasik modelin varsayımlarını içerir.
Bu modelde EKK tahmini ,

$$\begin{aligned}\hat{b} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X'NN'X)^{-1}X'NN'y \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}y\end{aligned} \tag{1.14.}$$

dir. Teorem 1.20 kullanılarak bu tahmin edicinin yansız olduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned}E(\hat{b}) &= (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}E(y) \\ &= (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Xb = b.\end{aligned}$$

Ayrıca minimum varyanslıdır: $b^* = Cy$, b için başka bir lineer yansız tahmin edici olsun ve $\hat{C} = S^{-1}X'W^{-1}$ için $C = \hat{C} + D$ olsun. O zaman b^*'nın yansızlığı $DX = 0$ ile sağlanır ve $\hat{C}WD = 0$'dır. b^*'nın kovaryans matrisi;

$$\begin{aligned}V(b^*) &= E(Cee'C') \\ &= s^2(\hat{C} + D)W(\hat{C}' + D') \\ &= s^2\hat{C}W\hat{C}' + s^2DWD' \\ &= V(b) + s^2DWD'\end{aligned}$$

olur ve $V(b^*) - V(b) = s^2DWD'$ negatif olmayan tanımlıdır (Teorem 1.5).

Teorem 1.27

$$y = Xb + e\ ,\ e\ :\ (0, s^2W)$$

genel lineer model için genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi (GLSE);

$$\hat{b} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}y$$

dır.

$$E\left(\hat{b}\right) = E\left(\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}y\right)$$
$$= \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}E(y)$$
$$= \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}Xb = b$$

olduğundan $\hat{b}$ tahmin edicisi b için yansızdır ve en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE). $\hat{b}$'nın kovaryans matrisi;

$$V\left(\hat{b}\right) = V\left(\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}y\right)$$
$$= \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}V(y)\left(\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}\right)'$$
$$= \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}s^{2}WW^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}$$
$$= s^{2}\left(X'W^{-1}X\right)^{-1} = s^{2}S^{-1}$$

dir. Bu tahmin edici R_1 ve R_2'ye göre optimal yansız tahmin edici olmakla birlikte R_3'e göre de optimal tahmin edicidir.

Bilinmeyen s^2 parametresi ve kovaryans matrisi için kullanılan tahmin edici ise,

$$s^2 = \frac{(y - Xb)'W^{-1}(y - Xb)}{T - K}$$

ve

$$\hat{V}\left(\hat{b}\right) = s^2S^{-1}$$

dir. Bu tahmin ediciler s^2 ve s^2S^{-1} için yansızdır;

$$E\left(s^2\right) = R_3(b,b)(T-K)^{-1} = s^2$$

$$E\left(\hat{V}\left(\hat{b}\right)\right) = s^2S^{-1}$$

dir.

Teorem 1.28

(1.2.) genelleştirilmiş lineer modelini ele alalım. $d = a'b$ lineer formunun en iyi lineer yansız tahmin edicisi; $\hat{d} = a'\hat{b}$ olur ve varyansı;

$$V(\hat{d}) = s^{2}a'S^{-1}a = a'V(\hat{b})a$$

dır.

2. TAM LİNEER KISITLAMALAR

Klasik regresyon modeli olan; $y = Xb + e$ modelinde, b için yansız tahmin ediciler sınıfı içinde en iyi tahmin edici olan en küçük kareler tahmin edicisi (LSE);

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

dır. İstatistiksel araştırmalarda daha iyi tahmin ediciler sağlamak için birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin;

i) b 'nın bazı $\hat{b}_i$ elemanlarının varyanslarını minimum yaparak veya uygun bir X seçimiyle $s^2(X'X)^{-1}$ kovaryans matrisi tasarlayarak

ii) Yanlı tahmin ediciler tanımlayarak

iii) Tam veya stokastik kısıtlamaları önceki bilgilerle birleştirerek (Chipman ve Rao, 1964, Toutenburg, 1973, Yancey ve ark., 1973, 1974)

olabilir. Bu bölümde (iii)'deki yöntemle ilgilenilecektir.

Klasik regresyon modeli üzerinde yoğunlaşılan bu çalışmalarda X , $rank(X) = K$ olan $T \times K$ matris kabul edilmiştir.

Regresyon katsayıları üzerinde sahip olunan yardımcı bilgiler, aşağıdaki lineer denklem formunda yazılabiliyor olsun. r bir $J \times 1$ vektör ve R bir $J \times K$ matris olmak üzere;

$$r = Rb$$

$$rank(R) = J$$

olsun.

2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici (RLSE)

Örneklem ve yardımcı bilgiler kullanılarak, hataların kareleri toplamı $S(b)$, $r = Rb$ lineer kısıtlaması altında minimize edilecektir. Yani,

$$S(b,l)=(y-Xb)'(y-Xb)-2l'(Rb-r)$$

minimize edilecektir. Burada l , $K\times 1$ vektör olan Lagrange çarpanıdır.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial S(b,l)}{\partial b}&=-X'y+X'Xb-R'l=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial S(b,l)}{\partial l}&=Rb-r=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.)$$

olmak üzere, problemin çözümü $b(R)$ kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (RLSE);

$$b(R)=(X'X)^{-1}X'y+(X'X)^{-1}R'l$$

dır ve

$$Rb(R)=r=R\hat{b}+R(X'X)^{-1}R'l$$

olduğu görülür. $R(X'X)^{-1}R'\rangle 0$ olduğu kullanılırsa, optimal l ,

$$\hat{l}=\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}\left(r-R\hat{b}\right)$$

olarak bulunur. $S=X'X$ olmak üzere;

$$b(R)=\hat{b}+S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r-R\hat{b}\right) \qquad (2.2.)$$

şeklinde yazılabilir. $Rb(R)$, $r=Rb$ kısıtlamasını sağlar. Yani,

$$\begin{aligned}Rb(R)&=R\hat{b}+\left(RS^{-1}R'\right)\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r-R\hat{b}\right)\\ &=r\end{aligned}$$

dir.

$b(R)$' nin beklenen değeri: $E(\hat{b}) = b$ olmak üzere;

$$E(b(R)) = b + S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}(r - Rb)$$
$$= b$$

dir. Dolayısıyla $b(R)$, b için yansız tahmin edicidir. $b(R)$'nin varyansı;

$$V(b(R)) = s^2 S^{-1} - s^2 S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1}$$

dir. Görüldüğü gibi, $b(R)$'nin kovaryans matrisi sadece R'ye bağlıdır. Bu, $b(R)$ tahmin edicisinin, $\hat{b}$ ile karşılaştırıldığında her zaman daha küçük varyansa sahip olduğunu gösterir.

$$V(\hat{b}) - V(b(R)) = s^2 S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \geq 0 \qquad (2.3.)$$

dır. Dolayısıyla regresyon modeli üzerinde lineer kısıtların kullanılmasının yeteri kadar etkili olduğu söylenebilir.

2.2. Tam Lineer Kısıtlayıcıların Kademeli Olarak Eklenmesi

Bu bölümde iki lineer bağımlı veya lineer bağımsız kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi arasındaki ilişki incelenecektir.

$Rb = r$ lineer kısıtlaması $J < K$ tane lineer kısıta sahiptir.

$$r_j = R_j' b \qquad j = 1, 2, ..., J$$

$r_1 = R_1 b$, $r_2 = R_2 b$ lineer bağımsız kısıtlar olsun.

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} b = Rb$$

$rank(R_1) = J_1$, $rank(R_2) = J_2$ ve $rank(R) = J_1 + J_2 = J$ 'dir. $b(R_1)$, $b(R_2)$, $b(R)$; kısıt matrisleri R_1, R_2 ve R olan kısıtlı en küçük kareler tahmin ediciler ise,

$$V(b(R)) \le V(b(R_i)) \le V(\hat{b}) \quad i = 1, 2$$

dir. $V(\hat{b}) - V(b(R_i)) \ge 0$ ve $V(\hat{b}) - V(b(R)) \ge 0$ olduğu bilindiğinden,

$$V(b(R_1)) - V(b(R)) \ge 0$$

eşitsizliği kontrol edilecektir:

$$b(R) = \hat{b} + S^{-1}(R_1', R_2') \begin{pmatrix} R_1 S^{-1} R_1' & R_1 S^{-1} R_2' \\ R_2 S^{-1} R_1' & R_2 S^{-1} R_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 - R_1 \hat{b} \\ r_2 - R_2 \hat{b} \end{pmatrix}$$

$$E = R_1 S^{-1} R_1', \quad F = R_1 S^{-1} R_2', \quad G = R_2 S^{-1} R_2', \quad H = G - F' E^{-1} F$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$A = R S^{-1} R' = \begin{pmatrix} E & F \\ F' & G \end{pmatrix}$$

$$s^{-2} V(b(R)) = S^{-1} - S^{-1}(R_1', R_2') \begin{pmatrix} E^{-1} + E^{-1} F H^{-1} F' E^{-1} & -E^{-1} F H^{-1} \\ -H^{-1} F' E^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$Cov(b(R_1), b(R)) = E\left[(b(R_1) - b)(b(R) - b)' \right]$$

olur.

$$b(R_1) - b = S^{-1} (I - R_1' E^{-1} R_1 S^{-1}) X' e$$

$$b(R) - b = S^{-1} \left(I - (R_1', R_2') A^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right) X' e$$

$$(I, E^{-1} F) A^{-1} = (E^{-1}, 0)$$

$$R_1'(I, E^{-1}F)A^{-1}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = R_1'E^{-1}R_1$$

kullanılırsa;

$$Cov\big(b(R_1), b(R)\big) = V\big(b(R)\big)$$

elde edilir. $\big(b(R_1) - b(R)\big)\big(b(R_1) - b(R)\big)' \geq 0$ olduğu bilindiğinden (Teorem 1.5),

$$\begin{aligned} & E\Big[b(R_1) - b - \big(b(R) - b\big)\Big]\Big[b(R_1) - b - \big(b(R) - b\big)\Big]' \\ & = V\big(b(R_1)\big) + V\big(b(R)\big) - 2Cov\big(b(R_1), b(R)\big) \\ & = V\big(b(R_1)\big) - V\big(b(R)\big) \geq 0 \end{aligned}$$

olur ve aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1

$r_1 = R_1 b$, $rank(R_1) = J_1$ olarak tanımlanmış tam lineer kısıtların bir kümesi olsun. Eğer başka bir bağımsız kısıt kümesi; $r_2 = R_2 b$, $rank(R_2) = J_2$ ve $rank(R) = J = J_1 + J_2$ ise kısıtlı en küçük kareler tahmin edicileri $b(R_1)$ ve $b(R)$ yansızdır ve $V\big(b(R_1)\big) - V\big(b(R)\big) \geq 0$ 'dır. Dolayısıyla bağımsız kısıtlayıcıların sonuçlarına ek olarak, tam kısıtlayıcıları kademeli olarak eklemenin, varyansı kademeli olarak azalttığı söylenebilir.

Not: R_1 ve R aşağıdaki lineer dönüşüme sahip ise;

$$R_1 = PR, \quad P = (I, 0)$$

$A = RS^{-1}R'$ matrisi kullanılarak aşağıdaki gibi farklı bir kovaryans matrisi yazılabilir:

$$s^{-2}\left[V(b(R_1))-V\left(b(R)\right)\right]=S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}-S^{-1}R_1'\left(R_1S^{-1}R_1'\right)^{-1}R_1S^{-1}$$
$$=S^{-1}R'\left(A^{-1}-P'\left(PAP'\right)^{-1}P\right)RS^{-1}$$

$rank(R)=J$ kabul edildiğinden, bu farkın n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul, $A^{-1}-P'\left(PAP'\right)^{-1}P\geq 0$ veya Teorem 1.11'den, $\Re\left(P'PA^{-1}\right)\subset\Re\left(A^{-1}\right)$ olmasıdır.

$b(R_1)$ ile $b(R_2)$'nin Karşılaştırılması;

$$r_j=R_jb,\qquad rank(R_j)=J_j\quad j=1,2 \tag{2.4.}$$

$$b\left(R_j\right)=\hat{b}+S^{-1}R_j'\left(R_jS^{-1}R_j'\right)^{-1}\left(r_j-R_j\hat{b}\right)$$

$$A_j=R_jS^{-1}R_j'$$

$$G_j=S^{-1}R_j'A_j^{-1}R_jS^{-1}$$

kısaltmaları kullanılarak;

$$V\left(b\left(R_j\right)\right)=s^2\left(S^{-1}-G_j\right)$$

elde edilir.

$$C=V\left(b\left(R_1\right)\right)-V\left(b\left(R_2\right)\right)$$
$$=s^2\left(G_2-G_1\right)$$
$$=s^2S^{-1}\left(R_2'A_2^{-1}R_2-R_1'A_1^{-1}R_1\right)S^{-1}\geq 0$$

veya $R_2'A_2^{-1}R_2-R_1'A_1^{-1}R_1\geq 0$ ise kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi $b\left(R_2\right)$, $b\left(R_1\right)$ tahmin edicisinden daha iyi bir tahmin edicidir.

Teorem 2.2 (Trenkler, 1987)

(2.4.) kabulü altında,

$$R_2'A_2^{-1}R_2 - R_1'A_1^{-1}R_1 \geq 0 \qquad (2.5.)$$

olması için gerek ve yeter koşul, $R_1 = PR_2$ olacak şekilde $J_1 \times J_2$ tipinde bir P matrisi olmasıdır.

Sonuç 1.

$R_1 = PR_2$ ve $rank(R_1) = J_1$ ise, bu $J_1 \leq J_2$ ve $rank(P) = J_1$ olmasını gerektirir. Ayrıca $r_1 = \Pr_2$ olur.

Not: $J_1 = J_2$ durumunda, $r_1 = R_1 b$ ve $r_2 = R_2 b$ kısıtları ile bu kısıtlara ait tahmin ediciler birbirine eşit olacağından sadece $J_1 < J_2$ durumu incelenebilir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$rank(P) = J_1 = J_2$ için $R_1 = PR_2$ olduğundan P^{-1} vardır, dolayısıyla $R_2 = P^{-1}R_1$ ve $r_2 = P^{-1}r_1$ sağlanır. Bu sebeple $r_2 = R_2 b$ kısıtı $P^{-1}(r_1 - R_1 b) = 0$ olur. $R_1 = PR_2$ ($P : J_1 \times J_1$ ve $rank(P) = J_1 = J_2$) için, tahmin edicilerin eşitliği kontrol edilirse;

$$\begin{aligned} b(R_2) &= b + S^{-1}R_1'P^{-1}\left(P^{-1}R_1S^{-1}R_1'P^{-1}\right)^{-1}\left(P^{-1}r_1 - P^{-1}R_1 b\right) \\ &= b(R_1) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$J_1 < J_2$ Durumu;

$C : J_2 \times J_2$ tipinde tekil olmayan matris olmak üzere, $r_2 = R_2 b$ ve $Cr_2 = CR_2 b$ koşulları birbirine eşittir. $rank(P) = J_1$ olmak üzere $J_1 \times J_2$ tipinde bir P matrisi için

$R_1 = PR_2$ olsun. $rank(C') = J_2$ olmak üzere $C' = (Q', P')$ olacak şekilde, $(J_2 - J_1) \times J_2$ tipinde ve $rank(Q) = J_2 - J_1$ olan bir Q matrisi seçilsin. Bu Q matrisi P matrisini tamamlayan matris olarak adlandırılır. $Qr_2 = r_3$ ve $QR_2 = R_3$ olsun,

$$Cr_2 = \begin{pmatrix} Qr_2 \\ \Pr_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 \\ r_1 \end{pmatrix} \text{ ve } CR_2 = \begin{pmatrix} QR_2 \\ PR_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

olur. $r_1 = R_1 b$ ve $r_2 = R_2 b$ kısıtları $R_1 = PR_2$ lineer dönüşümü ile bağlanırsa, $r_1 = R_1 b$ kısıtının $r_2 = R_2 b$ kısıtını içerdiği kabul edilebilir. Genelliği bozmaksızın $P = (I, 0)$ seçilebilir.

Sonuç 2.

$r_1 = R_1 b$, $r_2 = R_2 b$, $R_1 = PR_2$, $r_1 = \Pr_2$, $rank(P) = J_1 < J_2$ kısıt kümesi, $r_3 = Qr_2$, $R_3 = QR_2$ olmak üzere $r_1 = R_1 b$, $r_2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} b = R_2 b$ ve Q matrisinin P'yi tamamlayan matris olması koşulları birbirine denktir. Teorem 2.2'den, iki tam lineer kısıtlayıcının, uygun iki kısıtlı tahmin edicilerinin karşılaştırılabilmesi için gerek ve yeter koşul $R_1 = PR_2$ ve $rank(P) = J_1 < J_2$ olmasıdır. $P = (I, 0)$ özel durumu $R_2 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$, $r_2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \end{pmatrix}$ kısıtlarını tanımlar.

2.3. Yanlı Lineer Kısıtlamalar ve MSE Kriterine Göre LSE ile Karşılaştırmalar

$r = Rb$ lineer kısıtlamasının modele eklenmesi durumunda, bu kısıtlamanın $H_0 : Rb = r$ hipotezi ve F-testi yardımı ile kontrol edilmesi gerekir. Bu hipotezin reddi,

ya

$$r = Rb + d, \quad d \neq 0 \tag{2.6.}$$

ya da

$$r = Rb + d + \Phi, \quad \Phi : (0, s^2 V)$$

olmasından kaynaklanabilir. Burada d , stokastik olmayan yanlılık ve Φ stokastik etkidir.

Eğer kısıtlamada $d \neq 0$ yanlılık vektörü varsa, $b(R)$ yanlı olur. Ayrıca, $b(R)$'nin kovaryans matrisi d 'dan etkilenmez ve her durumda $b(R)$, $\hat{b}$ 'den daha küçük varyansa sahip olmaya devam eder. Bu nedenle, MSE kullanılarak $\hat{b}$ 'nın $b(R)$ üzerindeki etkisinin araştırılması gerekir. (2.6.) kabulü altında,

$$E(b(R)) = b + S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} d$$

olur.

$$A = RS^{-1}R' = A^{1/2}A^{1/2}$$

$$H = S^{-1}R'A^{-1} \tag{2.7.}$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$E(b(R)) = b + Hd$$

$$bias(b(R), b) = Hd \tag{2.8.}$$

$$V(b(R)) = V(\hat{b}) - s^2 HAH' \tag{2.9.}$$

$$M(b(R), b) = V(\hat{b}) - s^2 HAH' + Hdd'H' \tag{2.10.}$$

elde edilir.

$\hat{b}$ ve $b(R)$'nin MSE Karşılaştırması

i) $\hat{b}$ ve $b(R)$'nin Karşılaştırması İçin MSE-I Kriterinin Kullanılması:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\hat{b},b(R)\right) &= V\left(\hat{b}\right)-V\left(b(R)\right)-\left(bias\left(b(R)\right),b\right)\left(bias\left(b(R)\right),b\right)' \\ &= s^2H\left(A-s^2dd'\right)H' \geq 0\end{aligned}$$

olması için gerek ve yeter koşul, $rank(R)=J$ olduğundan,

$$A-s^{-2}dd' \geq 0 \qquad (2.11.)$$

olmasıdır. Bu durumda Tanım 1.3'den $b(R)$ tahmin edicisinin, MSE-I kriterine göre yansız tahmin edici $\hat{b}$'den daha iyi olduğu söylenir. Teorem 1.9 ve Teorem 1.21'in kullanılmasıyla (2.11.)'in,

$$l = s^{-2}d'A^{-1}d = s^{-2}d'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}d \leq 1 \qquad (2.12.)$$

koşuluna denk olduğu görülür.

ii) $\hat{b}$ ve $b(R)$'nin Karşılaştırması İçin MSE-II Kriterinin Kullanılması:

MSE-II kriterini kullanarak, $b(R)$ ve $\hat{b}$ karşılaştırılsın. Buradan,

$tr\left\{\Delta\left(\hat{b},b(R)\right)\right\} = s^2tr\{HAH'\}-d'H'Hd \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşulun,

$$d'H'Hd \leq s^2tr\{HAH'\} = tr\left\{V\left(\hat{b}\right)-V\left(b(R)\right)\right\} \qquad (2.13.)$$

olduğu elde edilir. Bu durumda Tanım 1.3'den $b(R)$ tahmin edicisinin, MSE-II kriterine göre yansız tahmin edici $\hat{b}$'den daha iyi olduğu söylenir.

$X'X = S$ kısaltması ile, $H'SH = A^{-1}$ olur, dolayısıyla (2.12.)'deki l ile,

$$d'H'SHd = d'A^{-1}d = s^2 l$$

elde edilir. Teorem 1.11'in kullanılmasıyla ve $d \neq 0$ varsayımı ile

$$d_K \leq \frac{d'H'SHd}{d'H'Hd} \leq d_1$$

elde edilir. Burada, $d_1 \geq d_2 \geq \mathbf{K}\, d_K > 0$, $S > 0$'ın özdeğerleridir. Bu durumda (2.13.)'ün sol tarafı için,

$$d'H'Hd \leq d_K^{-1} d'A^{-1}d = d_K^{-1} s^2 l$$

üst sınırı elde edilir. Dolayısıyla (2.13.) formülünün sağlanması için yeterli koşul;

$$\begin{aligned} l &\leq d_K tr\{HAH'\} \\ &= d_K tr\left\{S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}\right\} \\ &= l_0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

iii) $\hat{b}$ ve $b(R)$**'nin Karşılaştırması İçin MSE-III Kriterinin Kullanılması:**

$$\begin{aligned} tr\left\{S\Delta\left(\hat{b}, b(R)\right)\right\} &= s^2 tr\left\{SS^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}\right\} - d'A^{-1}d \\ &= s^2\left(tr\{I_J\} - l\right) \\ &= s^2\left(J - l\right) \geq 0. \end{aligned}$$

olması için gerek ve yeter koşul, $l \leq J$ olmasıdır. Bu durumda Tanım 1.3'den $b(R)$ tahmin edicisinin, MSE-III kriterine göre $\hat{b}$'den daha iyi olduğu söylenir.

$J \geq 2$ ise MSE-III kriteri, MSE-I'den daha zayıftır. $J = 1$ ise iki kriter birbirine eşittir.

Teorem 2.3

$r - Rb = d$ yanlı bir lineer kısıtlama olsun. Bu durumda yanlı RLSE $b(R)$'nin, yansız olan $\hat{b}$'den MSE kriterlerine göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki gibi verilebilir:

i. MSE-I kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul, $l \leq 1$ olmasıdır.

ii. MSE-II kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul, $l \leq l_0$ olmasıdır.

iii.MSE-III kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $l = s^{-2}(r - Rb)'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}(r - Rb)$ için $l \leq J$ olmasıdır.

$l \leq 1$, $l \leq l_0$ veya $l \leq J$ koşullarını test etmek için, $e : N(0, s^2 I)$ kabul edilir ve test istatistiği olarak;

$$F = \frac{1}{Js^2}\left(r - R\hat{b}\right)'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right)$$

kullanılır. Burada F merkezi olmayan $F_{J,T-K}(l)$ dağılımından gelmektedir.

$H_0 : l \leq 1$ (veya $l \leq l_0$ veya $l \leq J$)

$H_1 : l > 1$ (veya $l > l_0$ veya $l > J$)

hipotezleri test edildiğinde; $F \leq F_{J,T-K,1-a}(1)$, $F \leq F_{J,T-K,1-a}(l_0)$ veya $F \leq F_{J,T-K,1-a}(J)$ ise H_0 kabul edilir. Aksi halde H_0 reddedilir.

2.4. İki Yanlı Kısıtlı Tahmin Edicinin MSE Karşılaştırması

b üzerindeki iki kısıtlama;

$r_i = R_i b + d_i \quad i = 1, 2$

olsun. Burada R_i, $J_i \times K$ tipinde J_i tam satır ranklı bir matristir. Bu kısıta en uygun lineer RLSE;

$$b(R_i) = \hat{b} + S^{-1}R_i'\left(R_iS^{-1}R_i'\right)^{-1}\left(r_i - R_i\hat{b}\right)$$

şeklinde verilir. $S^{-1/2}$, S^{-1} matrisinin p.d. karekökü ve $rank(R_i) = J_i$ olduğu varsayılırsa, $R_iS^{-1/2}$ matrisinin $J_i \times K$ tipinde ve $rank\left(R_iS^{-1/2}\right) = J_i$ olduğu görülür. Bu matrisin Moore-Penrose ters matrisi; (Teorem 1.13)

$$\left(R_iS^{-1/2}\right)^{+} = S^{-1/2}R_i'\left(R_iS^{-1}R_i'\right)^{-1} \qquad i = 1,2$$

dir.
$i = 1,2$ için,

$$P_i = \left(R_iS^{-1/2}\right)^{+} R_iS^{-1/2} \tag{2.14.}$$

matrisinin $J_i < K$ ranklı idempotent matris ve $\Re\left(S^{-1/2}R_i'\right)$ kolon uzayı üzerinde ortogonal projektör (izdüşüm) olduğu göz önüne alınırsa, (2.8.) ve (2.9.)'dan

$$d_{\mathbf{i}} = bias\left(b(R_i), b\right) = S^{-1}R_i'\left(R_iS^{-1}R_i'\right)^{-1}d_{\mathbf{i}}$$
$$= S^{-1/2}\left(R_iS^{-1/2}\right)^{+}d_{\mathbf{i}}$$

$$V\left(b(R_i)\right) = s^{2}S^{-1/2}\left(I - P_i\right)S^{-1/2}$$

elde edilir. Burada, $d_i = R_ib - r_i \quad i = 1,2$'dir.

$$P_{21} = P_2 - P_1$$

gösterimi kullanılırsa dağılım matrisleri farkı;

$$D = V\left(b\left(R_1\right)\right) - V\left(b\left(R_2\right)\right)$$
$$= s^{2} S^{-1/2} P_{21} S^{-1/2}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $D \geq 0 \Leftrightarrow P_{21} \geq 0$ 'dır.

Not: $c_i = S^{1/2} d_i = \left(R_i S^{-1/2}\right)^{+} d_i$ olmak üzere;

$$\Delta\left(b\left(R_1\right), b\left(R_2\right)\right) = S^{-1/2}\left(s^{2} P_{21} + c_1 c_1' - c_2 c_2'\right) S^{-1/2} \geq 0$$

ise veya denk olarak $P_{21} + c_1 c_1' - c_2 c_2' \geq 0$ ise $b\left(R_2\right)$'nin MSE-I kriterine göre $b\left(R_1\right)$ 'den daha iyi olduğu söylenebilir. Teorem 1.19'a göre, $P_2 = S^{-1/2} R_2'\left(R_2 S^{-1} R_2'\right)^{-1} R_2 S^{-1/2}$ matrisi $J_2 < K$ ranklı olduğundan, $K \times K$ tipindeki simetrik P_2 matrisi p.d. olamaz ve böylece P_2 matrisi tekil (singüler) olur.

Teorem 2.4

(2.14.) formülü ile verilen P_1 ve P_2 için $P_{21} = P_2 - P_1$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

I. $P_{21} \geq 0$**;**

II. $\Re\left(S^{-1/2} R_1'\right) \subset \Re\left(S^{-1/2} R_2'\right)$**;**

III. $R_1 = F R_2$ olacak şekilde bir F matrisi vardır;

IV. $P_2 P_1 = P_1$;

V. $P_1 P_2 = P_1$;

VI. P_{21} ortogonal izdüşümdür.

Teorem 2.5

$r_1 = R_1 b$ ve $r_2 = R_2 b + d_2$ verilsin ve $D = V\left(b\left(R_1\right)\right) - V\left(b\left(R_2\right)\right) \geq 0$ olsun. Yanlı $b\left(R_2\right)$ tahmin edicisinin MSE kriterine göre yansız $b\left(R_1\right)$ tahmin edicisinden daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$s^{-2} d_2' \left(R_2 S^{-1} R_2'\right)^{-1} d_2 \leq 1 \qquad (2.15.)$$

olmasıdır.

Teorem 2.6

$d_i = r_i - R_i b \neq 0$ olsun. O zaman, $\Delta\left(b\left(R_1\right), b\left(R_2\right)\right) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul; $bias\left(b\left(R_1\right), b\right) = bias\left(b\left(R_2\right), b\right)$ olmasıdır.

Özet olarak, $r_i = R_i b + d_i \quad i = 1, 2$ lineer kısıtlamaları ve $b\left(R_1\right)$ ve $b\left(R_2\right)$ uygun RLS tahmin edicilerini göstersin. Bu tahmin edicilerin varyans-kovaryans matrisleri farkının n.n.d. olduğu kabul edilirse,

i. $d_1 = 0$ veya

ii. $bias\left(b\left(R_1\right), b\right) = bias\left(b\left(R_2\right), b\right)$

ise bu lineer kısıtlamalar MSE-I kriterine göre karşılaştırılabilir. (ii) koşulu sağlanıyorsa bu tahmin edicilerin MSE matrislerinin farkı, $\Delta\left(b\left(R_1\right), b\left(R_2\right)\right) = V\left(b\left(R_1\right)\right) - V\left(b\left(R_2\right)\right)$ varyans-kovaryans matrislerinin farkına indirgenir.

2.4.1. Kademeli Yanlı Kısıtlamalar (Özel Durum)

İki RLS tahmin edicinin önceki karşılaştırılmaları $V\left(b\left(R_1\right)\right)-V\left(b\left(R_2\right)\right)$ farkının n.n.d. olması gerekliliğini göstermiştir. Bu koşul $R_1 = PR_2$ olmasına denktir.

Teorem 2.2'nin ikinci sonucuna göre genelliği bozmadan $P=\left(I,0\right)$ kabul edilsin. Dolayısıyla $V\left(b\left(R_1\right)\right)-V\left(b\left(R_2\right)\right)\geq 0$ kabulü altında aşağıdaki lineer kısıtlamalar verilebilir;

$$r_2=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \end{pmatrix}, \qquad R_2=\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, \qquad d_2=\begin{pmatrix} 0 \\ d_3 \end{pmatrix}, \qquad J_1+J_3=J_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &r_1 = R_1 b \qquad && rank(\underset{J_1\times K}{R_1}) = J_1 \\ &r_2 = R_2 b + d_2 \quad && rank\left(\underset{J_2\times K}{R_2}\right) = J_2 \\ &r_3 = R_3 b + d_3 \quad && rank\left(\underset{J_3\times K}{R_3}\right) = J_3 \end{aligned} \tag{2.16.}$$

dür. Teorem 2.5 ve Teorem 2.6'dan, $r_1 - R_1 b = d_1 = 0$ olduğu bilinmektedir. Burada amaç $b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} = b\left(R_2\right)$ ile $b\left(R_1\right)$'in MSE kriterlerine göre karşılaştırılmasıdır ve özellikle,

$\hat{b} = S^{-1}X'y$ (yansız tahmin edici),

$b\left(R_1\right) = \hat{b} + S^{-1}R_1'\left(R_1 S^{-1} R_1'\right)^{-1}\left(r_1 - R_1\hat{b}\right)$ (yansız tahmin edici),

$b\left(R_3\right) = \hat{b} + S^{-1}R_3'\left(R_3 S^{-1} R_3'\right)^{-1}\left(r_3 - R_3\hat{b}\right)$ ($d_3 \neq 0$ ise yanlı tahmin edici),

$$b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} = \hat{b} + S^{-1}\left(R_1' R_3'\right)\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix} S^{-1}\left(R_1' R_3'\right)\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\hat{b}\right)$$ ($d_3 \neq 0$ ise yanlı tahmin edici) tahmin edicilerinin karşılaştırılması ile ilgilenilecektir.

$A_i = R_i S^{-1} R_i', \quad A_i > 0 \;\; i = 1,2,3$ ve $H_i = S^{-1} R_i' A_i^{-1} \;\; i = 1,2,3$ notasyonları kullanılırsa, $bias\, b\left(R_i, b\right) = H_i d_i \quad i = 1,2,3$ yazılabilir.

(a) $b\left(R_1\right)$ ve $\hat{b}$ 'nin Karşılaştırılması:

Karşılaştırılan iki tahmin edici de yansızdır ve $b\left(R_1\right)$, MSE kriterlerine göre daima $\hat{b}$ 'den daha iyidir. Bunun sebebi;

$$\begin{aligned} \Delta\left(\hat{b}, b\left(R_1\right)\right) &= V\left(\hat{b}\right) - V\left(b\left(R_1\right)\right) \\ &= s^2 H_1 A_1 H_1' \\ &= s^2 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} \geq 0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

(b) $b\left(R_3\right)$ ve $\hat{b}$ 'nin Karşılaştırılması:

$$\Delta\left(\hat{b}, b\left(R_3\right)\right) = S^{-1/2}\left[s^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} - S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} d_3 d_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2}\right] S^{-1/2},$$

$$S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} d_3 = s^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2}\left[s^{-2}\left(R_3 S^{-1/2}\right)^{+}\right] d_3,$$

$$s^2 S^{-1/2} R_3' A_3^{-1} R_3 S^{-1/2} \geq 0$$

olduğu bilinmektedir. Teorem 1.22'nin uygulanması ile aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$l_3 = s^{-2} d_3' A_3^{-1} d_3 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\left(b, b\left(R_3\right)\right) \geq 0 \qquad (2.17.)$$

(c) $b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ **ve** $b(R_1)$**'in Karşılaştırılması:**

$R_1 = PR_2$, $P = (I, 0)$, $R_2 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_3 \end{pmatrix}$ ve Teorem 1.2 kullanılarak, (2.15.) formülü aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$s^{-2} d_2' \left(R_2 S^{-1} R_2' \right)^{-1} d_2 = s^{-2} \left(0, d_3' \right) \begin{pmatrix} R_1 S^{-1} R_1' & R_1 S^{-1} R_3' \\ R_3 S^{-1} R_1' & R_3 S^{-1} R_3' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (2.18.)$$
$$= s^{-2} d_3' \left(A_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} R_3' \right)^{-1} d_3 \leq 1.$$

(2.17.) ve (2.18.) koşullarının karşılaştırılmasıyla Teorem 1.21'den,

$$s^{-2} d_3' A_3^{-1} d_3 \leq s^{-2} d_3' \left(A_3 - R_3 S^{-1} R_1' A_1^{-1} R_1 S^{-1} R_3' \right)^{-1} d_3$$

elde edilir.

Teorem 2.7 (Toutenburg, 1989)

(2.16.) formülündeki kısıtlamalar sağlanıyorsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

a. Yanlı lineer kısıtlı tahmin edici $b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$'ün MSE kriterlerine göre RLSE $b(R_1)$ 'den daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ tahmin edicisinin MSE kriterlerine göre $\hat{b}$ 'den daha iyi olması yani (2.18.) formülünün sağlanmasıdır.

b. $\Delta\left(b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, b(R_1) \right) \geq 0$ ise $\Delta\left(b(R_3), \hat{b} \right) \geq 0$ olmak zorundadır.

Sonuç:

$y = Xb + e$ modeline $r_1 = R_1 b$ tam kısıtının eklenmesi her durumda modelin etkinliğinin artmasını sağlar. Bir başka kısıt olan $r_3 - R_3 b = d_3$ kısıtının kademeli olarak eklenmesinin, MSE kriterlerine göre modelin etkinliğinin artmasını sağlaması için, (2.18.)'in sağlanması gerekir. Bu durumda yanlı tahmin edici $b(R_3)$, MSE kriterlerine göre $\hat{b}$'den daha iyidir, bu gerekli koşuldur fakat yeterli koşul değildir.

$b(R_1)$ ve $b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}$ tahmin edicilerinin varyans-kovaryans matrisleri farkı n.n.d.'dir.

$P = (I, 0)$ kullanılarak F matrisi;

$$F = A_2^{1/2}\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\left((I \quad 0)A_2\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1}(I \quad 0)A_2^{1/2}$$
$$= A_2^{1/2}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A_2^{1/2}$$

şeklinde yazılabilir ve aşağıdaki sonuca ulaşılır;

$$V(b(R_1)) - V\left(b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) = s^2 S^{-1}R_2' A_2^{-1/2}(I - F)A_2^{-1/2}R_2 S^{-1}$$
$$= s^2 S^{-1}R_2' A_2^{-1}R_2 S^{-1} - s^2 S^{-1}R_1' A_1^{-1}R_1 S^{-1}$$
$$= \left[V(\hat{b}) - V\left(b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right)\right] - \left[V(\hat{b}) - V(b(R_1))\right].$$

Teorem 1.2, parçalı matris A_2'ye uygulanarak,

$$U = R_3 - R_3 S^{-1}R_1' A_1^{-1}R_1$$
$$= R_3 S^{-1/2}\left(I_K - S^{-1/2}R_1' A_1^{-1}R_1 S^{-1/2}\right)S^{1/2}$$

notasyonu kullanılsın. $S^{-1/2}R_1' A_1^{-1}R_1 S^{-1/2}$ matrisi idempotenttir ve rankı J_1'dir.

Teorem 1.12 (iv)'den $I_K - S^{-1/2}R_1'A_1^{-1}R_1S^{-1/2}$ matrisi de idempotenttir ve rankı $K-J_1$ 'dir. $rank(U)=J_3$ olduğunu göstermek için, $J_3 \le K-J_1$ yani $J_1+J_3 \le K$ olduğunu göstermek gereklidir.

$$Z_{J_3xJ_3} = A_3 - R_3S^{-1}R_1'A_1^{-1}R_1S^{-1}R_3'$$

kısaltması kullanılsın. A_2 matrisinin alt matrisleri aşağıdaki gibi değiştirilir ve yeni matris $\ddot{A}_2$ şeklinde adlandırılarak Teorem 1.14 $\ddot{A}_2$ 'ya uygulanırsa,

$$\ddot{A}_2 = \begin{pmatrix} R_3'S^{-1}R_3 & R_3'S^{-1}R_1 \\ R_1'S^{-1}R_3 & R_1'S^{-1}R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & R_3'S^{-1}R_1 \\ R_1'S^{-1}R_3 & A_1 \end{pmatrix},$$

$\ddot{A}_2 > 0$ 'ın $Z>0$ 'a denk olduğu görülür. (Teorem 1.14 b(ii))

$$V\left(b(R_1)\right) - V\left(b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) = s^2 S^{-1}U'Z^{-1}US^{-1}$$

$$bias\, b\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, b\right) = -S^{-1}U'Z^{-1}d_3$$

bulunur ve aşağıda görüldüğü gibi MSE matrisleri farkı n.n.d. olur.

$$\Delta\left(b(R_1)\right) - V\left(b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}\right) = S^{-1}U'Z^{-1/2}\left[s^2 I - Z^{-1/2}d_3d_3'Z'^{-1/2}\right]Z'^{-1/2}US^{-1} \ge 0\,.$$

Burada $rank(U)=J_3$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$l = s^{-2}d_3'Z^{-1}d_3 \le 1 \qquad (2.19.)$$

olmasıdır. (Teorem 1.21). Böylece (2.15.) için gerekli ve yeterli bir sonuç bulunmuş olur. (2.18.) koşulu F istatistiği kullanılarak test edilebilir.

$$F = \frac{\left(r_3 - R_3\hat{b}\right)' Z^{-1}\left(r_3 - R_3\hat{b}\right)}{J_3 s^2} : F_{J_3,T-K}(l).$$

Burada l (2.19.)'da tanımlanan parametredir. Hipotez testinin sonucuna aşağıdaki şekilde karar verilir.

$H_0 : l \leq 1,\ F \leq F_{J_3,T-K}(1)$ ise kabul edilir.

$H_1 : l \leq 1,\ F > F_{J_3,T-K}(1)$ ise reddedilir.

Not: Bu karar kuralına göre, pre-test (ön-test) tahmin edici olarak adlandırılan,

$$b^* = \begin{cases} b\begin{pmatrix} R_1 \\ R_3 \end{pmatrix}, & F \leq F_{J_3,T-K}(l)\, ise \\ b(R_1), & F > F_{J_3,T-K}(l)\, ise \end{cases}$$

tahmin edici tanımlanabilir. Bu tahmin edicinin MSE matrisi basit bir yapıda değildir. Judge ve Bock (1978) bu tahmin ediciyi detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

3. STOKASTİK LİNEER KISITLAMALAR

3.1. Mixed Tahmin Edici

Pratik uygulamalarda, (y, X) matrisinin örneklem bilgilerine ek olarak çoğu zaman,

$$r = Rb + f, \qquad f : (0, s^2 V) \tag{3.1.}$$

tipinde ifade edilen bir lineer stokastik kısıt bilgisi de bulunur. Burada $r : J \times 1$ ve $R : J \times K$ tipinde matrisler, $rank(R) = J$ ' dir. Ayrıca R ve V 'nin bilindiği kabul edilmektedir. $V > 0$ olsun. r vektörü $E(r) = Rb$ beklenen değeri ile bir rasgele değişken olarak yorumlanabilir. Böylece (3.1.) kısıtlaması bu anlamda tam olarak sağlanmaz. r 'nin bilindiği kabul edilirse bütün beklenen değerler r 'ye bağlı $E(\hat{b} \setminus r)$ gibi koşullu beklenen değerler olur. Durbin (1953) örneklem bilgilerini ve yardımcı (ek) bilgiyi aynı anda kullanarak, parametrelerin stepwise (aşamalı, kademeli) tahmin edicisini tanımlayan ilk kişidir. Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) örneklem bilgilerini ve ön bilgiyi,

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{3.2.}$$

ortak modelinde birleştirerek mixed tahmin tekniğini ortaya koymuşlardır. Burada hatalar arasında korelasyon olmadığı kabul edilmelidir. Yani;

$$E(ef') = 0 \tag{3.3.}$$

dır. Daha önceki varsayımların aksine burada genel regresyon modeli kabul edilir ve $E(ee') = s^2 W$ olur. (3.3.) kullanılarak varyans-kovaryans matrisi;

$$E\left[\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}(e,f)'\right] = s^2 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Mixed model,

$$y^* = X^* b + e^*, \quad e^* : (0, s^2 W^*) \tag{3.4.}$$

olarak yazılır. Burada,

$$y^* = \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}, \qquad X^* = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \qquad e^* = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \qquad W^* = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} > 0$$

dır. $rank(X^*) = rank(X) = K$ olduğunda (3.4.) modeli, genelleştirilmiş lineer model gibi görünür. $S = X'W^{-1}X$ olmak üzere Teorem 1.27'nin uygulanmasıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1

(3.2.) mixed modelinde b için en iyi lineer yansız tahmin edici;

$$\begin{aligned} \hat{b}(R) &= \left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1}\left(X'W^{-1}y + R'V^{-1}r\right) \\ &= \hat{b} + S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \end{aligned} \tag{3.5.}$$

dir ve $\hat{b}(R)$'nin varyans-kovaryans matrisi;

$$V\left(\hat{b}(R)\right) = s^2\left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1} \tag{3.6.}$$

dir. $\hat{b}(R)$ tahmin edicisi b 'nın mixed tahmin edicisi olarak adlandırılır.

İspat.

Teorem 1.27 , (3.4.) modeline doğrudan uygulanırsa, b için GLSE;

$$\hat{b} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1} X'W^{-1}y$$
$$= \left(X'W^{-1}X + R'V^{-1}R\right)^{-1}\left(X'W^{-1}y + R'V^{-1}r\right)$$

olur. Teorem 1.1 (iii) uygulanırsa,

$$\left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1} = S^{-1} - S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \qquad (3.7.)$$

elde edilir. Bu sonuç $\hat{b}(R)$'de kullanılarak ispat tamamlanır.

$\hat{b}(R)$ ile GLSE' nin Karşılaştırılması:

Mixed tahmin edicisi yansızdır ve GLSE den daha küçük bir varyans-kovaryans matrisine sahiptir, yani

$$V\left(\hat{b}\right) - V\left(\hat{b}(R)\right) = s^2 S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \geq 0$$

dır. Mixed tahmin edicisinin daha küçük varyansa sahip olması $E(r) = Rb$ denkleminin sağlanıp sağlanmamasından bağımsızdır.

3.2. Varyans-Kovaryans Matrisi Üzerine Varsayımlar

(3.1.) modelinde, $E(ff') = s^2 V$ kabul edilmiştir. Pratikte bu gösterim yeterli olmayabilir. Dolayısıyla, bazen $E(ff') = V$ gösterimi daha gerçekçi olabilir. Bunun bir sonucu olarak bilinmeyen s^2'yi içeren mixed tahmin edici,

$$\hat{b}\left(R, s^{2}\right)=\left(s^{-2}S+R'V^{-1}R\right)^{-1}\left(s^{-2}X'W^{-1}y+R'V^{-1}r\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu problemin giderilmesi için çeşitli metotlar önerilmiştir.

i. $\hat{b}\left(R, s^{2}\right)$'deki s^{2}'yi Tahmin Etmek için, Örneklem Varyansı s^{2}'nin Kullanılması

s^{2}'nin s^{2}'yi tahmin etmek için kullanılması Theil (1963) tarafından önerilmiştir. Genelde $\hat{b}\left(R, s^{2}\right)$ tahmin edicisi yansız değildir. Belirli koşullar sağlanırsa $\hat{b}\left(R, s^{2}\right)$ asimptotik olarak yansız ve asimptotik olarak $\hat{b}\left(R, s^{2}\right)$ ile aynı varyans-kovaryans matrisine sahiptir. Bu tahmin edicinin özelliklerini inceleyenler arasında, Giles ve Srivastava (1991), Kakwani (1968, 1974), Mehta ve Swamy (1970), Nagar ve Kakwani (1964), Srivastava ve Chandra (1985), Srivastava ve Upadhyaya (1975), Swamy ve Mehta (1969) gösterilebilir.

ii. Bir Sabit Kullanılması;

Theil (1963), Teräsvirta ve Toutenburg (1980) ve Toutenburg (1982) $\hat{b}\left(R, c\right)$ tahmin edicisini incelemişlerdir. Burada c, yansız tahmin edici $\hat{b}\left(R, c\right)$ GLSE tahmin edicisinden daha küçük varyans-kovaryans matrisine sahip olacak şekilde seçilebilen stokastik olmayan bir sabittir.

$M_{c}=cS+R'V^{-1}R$ notasyonu ile,

$$\hat{b}\left(R, c\right)=M_{c}^{-1}\left(cX'W^{-1}y+R'V^{-1}r\right)$$

$$V\left(\hat{b}\left(R, c\right)\right)=M_{c}^{-1}\left(c^{2}s^{2}S+R'V^{-1}R\right)M_{c}^{-1}$$

elde edilir.

$$B\left(c, s^{2}\right)=s^{2} S^{-1}+\left(2 c s^{2}-1\right)\left(R^{\prime} V^{-1} R\right)^{-1}$$

matrisi tanımlanırsa, varyans-kovaryans matrislerinin farkı olan,

$$\begin{aligned}\Delta(c) &= V\left(\hat{b}\right)-V\left(\hat{b}\left(R, c\right)\right) \\ &= M_{c}^{-1}\left(R^{\prime} V^{-1} R\right) B\left(c, s^{2}\right)\left(R^{\prime} V^{-1} R\right) M_{c}^{-1}\end{aligned} \tag{3.8.}$$

matrisi n.n.d. olur. Yani $\Delta(c) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M_{c}^{-1}>0$ ve $\left(R^{\prime} V^{-1} R\right)>0$ iken $B\left(c, s^{2}\right) \geq 0$ olmasıdır.

Burada incelenmesi gereken iki durum ortaya çıkmaktadır;

a. $B\left(0, s^{2}\right)=s^{2} S^{-1}-\left(R^{\prime} V^{-1} R\right)^{-1}<0$ (n.d.), $B\left(s^{-2} / 2, s^{2}\right)=s^{2} S^{-1}$ (p.d.) ve $a^{\prime} B\left(c, s^{2}\right) a$ ($a \neq 0$ sabit K-vektör) c'nin sürekli bir fonksiyonu iken,

$$a^{\prime} B\left(c_{o}(a), s^{2}\right) a=0, \quad 0<c_{o}(a)<\frac{1}{2} s^{-2} \text{ için}$$

$$a^{\prime} B\left(c, s^{2}\right) a>0, \quad c>c_{o}(a) \text{ için}$$

olacak şekilde $c_{0}(a)$ kritik noktası vardır. $a^{\prime} B\left(c_{o}(a), s^{2}\right) a=0$ denklemi $c_{0}(a)$ için çözülürse, kritik değer,

$$c_{0}(a)=\left(2 s^{2}\right)^{-1}-\frac{a^{\prime} S^{-1} a}{2 a^{\prime}\left(R^{\prime} V^{-1} R\right)^{-1} a} \tag{3.9.}$$

olarak bulunur. Açıkça bu s^{2}'nin bilinmeyen bir fonksiyonudur. s^{2} hakkında ön bilginin kullanılması bu zorluğun ortadan kalkmasına yardımcı olur.

Teorem 3.2

s^2 için alt ve üst sınırların;

i. $0 < s_1^2 < s^2 < s_2^2 < \infty$ ve

ii. $B\left(0, s_2^2\right) < 0$

şeklinde verildiği varsayılsın. Bu durumda $\hat{b}(R,c)$ tahmin ediciler ailesi $F_c = \left\{\hat{b}(R,c):\ c \geq s_1^{-2}\right\}$ şeklinde özelleştirilmiş GLSE'den daha küçük varyans-kovaryans matrisine sahiptir.

İspat:

$B\left(0, s_2^2\right) < 0$ olduğundan $B\left(0, s^2\right) < 0$ bulunur. $s_1^{-2} > \frac{1}{2} s^{-2}$'dir ve böylece $s_1^{-2} > c_0(a)$ olduğundan $c \geq s_1^{-2}$ için $\Delta(c) \geq 0$ olur.

b. $B\left(0, s^2\right)$ n.n.d.'dir. Bu durumda $B\left(c, s^2\right) \geq 0$ ve dolayısıyla her $c > 0$ için $\Delta(c) \geq 0$'dır.

$B\left(0, s^2\right) \geq 0$ koşulunu incelemek için, $B\left(0, s_1^2\right) \geq 0$ ile $0 < s_1^2 < s^2$ alt sınırının olduğu varsayılır. Dolayısıyla tahmin ediciler için uygun aile $F_c = \left\{\hat{b}(R,c): c \geq 0\right\}$ olur.

Özetle, s^2 için $s_1^2 < s^2 < s_2^2$ şeklindeki ön bilgi, $\hat{b}(R,c)$ tahmin edicisi, $\hat{b}$'dan daha küçük bir varyansa ($\Delta(c) \geq 0$) sahip olacak şekilde bir c sabitinin bulunmasının mümkün olacağını ifade eder.

Verimliliğin Ölçülmesi

$\Delta(c) \geq 0$ olması niteldir. GLSE $\hat{b}$ yerine $\hat{b}(R,c)$ tahmin edicisini kullanarak verimliliği ölçmek için skaler bir ölçüm tanımlanır. Tanım 1.4'den $R_1(\hat{b}, b, A)$ riski seçilsin ve $A = S = X'W^{-1}X$ olsun.

$$R_1(b,.,S) = s^2 tr\left\{SS^{-1}\right\} = s^2 K$$

olduğundan verimliliğin ölçümü;

$$d(c) = \frac{R_1(b,.,S) - R_1(\hat{b}(R,c),.,S)}{R_1(b,.,S)}$$
$$= \frac{tr\left\{S\Delta(c)\right\}}{s^2 K}$$

dır ve $0 \leq d(c) \leq 1$ olur. $cs^2 = 1$ alınırsa $V(\hat{b}(R,c)) \approx M_c^{-1}$ olur. O zaman,

$$d(c) \approx 1 - \frac{tr\left\{SM_c^{-1}\right\}}{s^2 K}$$
$$= 1 - \frac{tr(S(S + c^{-1}R'V^{-1}R)^{-1})}{cs^2 K}$$
$$\approx 1 - \frac{tr\left\{S(S + c^{-1}R'V^{-1}R)^{-1}\right\}}{K}$$

olur. $d(c)$ 1'e yaklaştıkça yardımcı bilgi daha önemli olur, 0'a yaklaştıkça tahmin ediciye olan etkisi daha az önemli olur.

3.3. Yanlı Stokastik Kısıtlamalar

Bölüm 2'dekine benzer şekilde $E(r) - Rb = d$, $d \neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (3.1.) stokastik kısıtlaması,

$$r = Rb + d + f, \qquad f : (0, s^2 V)$$

olur ve bu varsayımın sağlandığı durumda mixed tahmin edicisi yanlı olur:

$$E\left(\hat{b}(R)\right) = b + S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} d \ .$$

3.3.1. MSE-I Kriterine Göre $\hat{b}(R)$'nin $\hat{b}$ Üzerine Üstünlüğü

D; varyans-kovaryans matrislerinin farkı olmak üzere,

$$\begin{aligned} V\left(\hat{b}\right) - V\left(\hat{b}(R)\right) &= D \\ &= s^2 S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.10.)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} bias\left(\hat{b}(R), b\right) &= S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} d \\ &= Dd \end{aligned} \qquad (3.11.)$$

dir. Burada, $R^+ = R'(RR')^{-1}$ olmak üzere, $d = SR^+ d s^{-2}$' dir. Bu nedenle $bias\left(\hat{b}(R), b\right) \in \Re(D)$'dir ve Teorem 1.22 uygulanabilir.

Teorem 3.3

Yanlı tahmin edicinin MSE-I kriterine göre GLSE $\hat{b}$'dan daha üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$l = s^{-2} d'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} d \leq 1 \qquad (3.12.)$$

olmasıdır. e ve f bağımsız olarak normal dağılıma sahiplerse l ,

$$F = \frac{1}{Js^2}\left(r - R\hat{b}\right)'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \qquad (3.13.)$$

istatistiğinin merkezi olmama parametresidir. Burada merkezi olmayan $F_{J,T-K}(l)$ dağılımı $H_0 : l \leq 1$ hipotezi altında bulunur.

Not: (3.12.) ve (2.12.) koşulları karşılaştırıldığında, mixed tahmin edici $\hat{b}(R)$ ve RLSE $b(R)$'nin MSE-I kriterine göre LSE $\hat{b}$'ye olan üstünlüğü,

$$\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} - \left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} \geq 0$$

ile görülür ki (3.12.) koşulu, (2.12.) koşulundan daha zayıftır. Dolayısıyla, $r = Rb$ kısıtına stokastik f teriminin eklenmesi, parametre bölgesinin genişlemesine neden olarak yardımcı bilgiye dayalı tahmin edicinin, LSE $\hat{b}$'den daha iyi olmasını kesinleştirir.

3.3.2. MSE-I Kriterine Göre $\hat{b}$'nin $\hat{\boldsymbol{\beta}}(R)$ Üzerine Üstünlüğü

MSE matrisleri farkının n.n.d. yani,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\hat{b}(R), \hat{b}\right) &= M\left(\hat{b}(R), b\right) - V\left(\hat{b}\right) \\ &= -s^2 S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1} \\ &\quad + bias\left(\hat{b}(R), b\right) bias\left(\hat{b}(R), b\right)' \geq 0\end{aligned}$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$-I_J + \left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1/2} dd'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1/2} \geq 0 \qquad (3.14.)$$

(Teorem 1.7) olmasıdır.

Teorem 1.10'a göre; $J \geq 2$ için bu matris hiçbir zaman n.n.d. olamaz. $J = 1$ için kısıt,

$$\underset{1,1}{r} = \underset{1,K}{R'} b + \underset{1,1}{d} + \underset{1,1}{f} \qquad f : \left(0, s^2 \underset{1,1}{v}\right)$$

olur. Buradan (3.14.) matrisinde $-1 + d^2 \left(v + R'S^{-1}R\right)^{-1} \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$l = \frac{d^2}{\left(v + R'S^{-1}R\right)} \geq 1$$

olmasıdır. Aşağıdaki teorem bu bulguları özetler.

Teorem 3.4

Yanlı tahmin edici $\hat{b}(R)$'nin MSE-I kriterine göre, $\hat{b}$ tahmin edicisinden üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$l = s^{-2} d' \left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} d \leq 1$$

olmasıdır. Tersine,

i. $J = 1 \Leftrightarrow l \geq 1$

ii. $J \geq 2$ için hiçbir durumda

koşulları için $\hat{b}$ tahmin edicisi MSE-I'e göre $\hat{b}(R)$'den daha iyidir.

$J = 1$ kabul edilsin. l parametrelerinin bölgesi, $\{l < 1\}$ ve $\{l > 1\}$ ayrık alt bölgelerine ayrılır, bu bölgeler sırasıyla $\hat{b}(R)$ ve $\hat{b}$ tahmin edicilerinin birbirlerine üstünlük sağladıkları alt bölgelerdir. $l = 1$ için, her iki tahmin edici birbirine denk olur.

$J \geq 2$ için, $\hat{b}(R)$'nin $\hat{b}$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu bir bölge $(l \leq 1)$ vardır fakat $\hat{b}$'nin $\hat{b}(R)$'den daha iyi olduğu bir parametre bölgesi yoktur.

3.3.3. MSE-II Kriterine Göre $\hat{b}(R)$'nin $\hat{b}$ Üzerine Üstünlüğü

Tanım 1.3'e göre, mixed tahmin edici $\hat{b}(R)$,

$$tr\left\{\Delta\left(\hat{b},\hat{b}(R)\right)\right\} = tr\left\{V\left(\hat{b}\right) - V\left(\hat{b}(R)\right)\right\} - bias\left(\hat{b}(R),b\right)' bias\left(\hat{b}(R),b\right) \geq 0 \qquad (3.15.)$$

ise MSE-II kriterine göre GLSE $\hat{b}$'dan daha iyidir. (3.10.) ile (3.11.) formüllerinin uygulanması ve $A = V + RS^{-1}R'$ notasyonunun kullanılmasıyla (3.15.),

$$Q(d) = s^{-2}d'A^{-1}RS^{-1}S^{-1}R'A^{-1}d \leq tr\left(S^{-1}R'A^{-1}RS^{-1}\right) \qquad (3.16.)$$

şeklinde yazılabilir. Bu koşul, $Q(d)$ merkezi olmama parametreli bir istatistik yoksa test edilemez. Bu eşitliğin sağlanması için yeter koşul, Wallace'ın (1972) düşüncesine dayalı olarak aranır.

$$s^{-2}d'A^{-1}RS^{-1}GS^{-1}R'A^{-1}d = s^{-2}d'A^{-1}d = l$$

olacak şekilde $K \times K$ tipinde bir G simetrik matrisi olduğu kabul edilsin. $R^{+} = R'(RR')^{-1}$ (Teorem 1.13 (vi)) için, $G = S + SR^{+}VR^{+'}S$'dir. Buradan da $RS^{-1}GS^{-1}R' = A$ olur. Teorem 1.6'dan;

$$l_{\min}(G) \leq \frac{s^{-2}d'A^{-1}RS^{-1}GS^{-1}R'A^{-1}d}{Q(d)} = \frac{l}{Q(d)}$$

veya denk olarak,

$$Q(d) \le \frac{l}{l_{\min}(G)}$$

dir. Böylece,

$$l \le l_{\min}(G)\, tr\left(S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1}\right) = l_2 \qquad (3.17.)$$

koşulunun, (3.16.) formülünün sağlanması için yeterli koşul olduğu söylenebilir. Ayrıca koşul (3.17.) test edilebilir. F ((3.13.)) istatistiği, $H_0 : l \le l_2$ hipotezi altında $F_{J,T-K}(l_2)$ dağılımına sahiptir.

Not: Tam lineer kısıtlayıcılar için, $V = 0$ ve dolayısıyla $G = S$'dir. $W = I$ için (3.17.) koşulu, $b(R)$'nin MSE-II kriterine göre $\hat{b}$'den daha iyi olma koşuluna denk olur.

3.3.4. $\hat{b}(R)$ ve $\hat{b}$ için MSE-III Karşılaştırması

MSE-III kriteri tanımına göre, $A = V + RS^{-1}R'$ olmak üzere,

$$tr\left\{S\Delta\left(\hat{b}, \hat{b}(R)\right)\right\} = s^2 tr\left\{A^{-1}RS^{-1}R'\right\} - d'A^{-1}RS^{-1}R'A^{-1}d \ge 0 \qquad (3.18.)$$

ise veya denk olarak $l_1 \ge l_2 \ge \mathbf{K} \ge l_J > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} s^{-2}d'A^{-1}RS^{-1}R'A^{-1}d &\le J - tr\left(A^{-1}V\right) \\ &= J - \sum_{j=1}^{J}\left(1 + l_j\right)^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^{J} l_j\left(1 + l_j\right)^{-1} \end{aligned} \qquad (3.19.)$$

ise $\hat{b}(R)$ tahmin edicisi MSE-III kriterine göre $\hat{b}$'dan daha iyidir. Burada l_i'ler $V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}$ matrisinin özdeğerleridir. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$tr\left(A^{-1}V\right)=tr\left(V^{1/2}A^{-1}V^{1/2}\right)=tr\left(\left(V^{-1/2}AV^{-1/2}\right)^{-1}\right)$$
$$=tr\left\{\left(I+V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}\right)^{-1}\right\}=tr\left\{\left(I+\Lambda\right)^{-1}\right\}=\sum_{j=1}^{J}\left(1+l_j\right)^{-1}.$$

(3.19.) denkleminin sol yanı, (3.12.)'de tanımlanan l ile aşağıdaki şekilde sınırlanır;

$$s^{-2}d'A^{-1}\left(RS^{-1}R'+V-V\right)A^{-1}d$$
$$=s^{-2}d'A^{-1}d-s^{-2}d'A^{-1}VA^{-1}d$$
$$\le s^{-2}d'A^{-1}d=l.$$

$$l\le\sum_{j=1}^{J}l_j\left(1+l_j\right)^{-1}=l_3 \qquad (3.20.)$$

koşulu, örneğin (3.18.) formülünün sağlanması için yeterlidir. $H_0: l\le l_3$ hipotezi altında F istatistiğinin dağılımı $F_{J,T-K}\left(l_3\right)$ olduğu için (3.20.) koşulu, (3.13.)'deki F istatistiği kullanılarak test edilebilir.

Not: $l_1\ge l_2\ge\mathbf{K}\ge l_J>0$ olduğundan,

$$J\frac{l_J}{1+l_J}\le\sum_{j=1}^{J}\frac{l_j}{1+l_j}\le J\frac{l_1}{1+l_1}$$

olur. $l_J>\left(J-1\right)^{-1}$ ve $J\ge 2$ olsun, buradan $l_3>1$ ve MSE-III kriterinin MSE-I'e göre daha zayıf bir kriter olduğu sonuçlarına varılır. $J=1$ için $l_3=l_1/\left(1+l_1\right)<1$ elde edilir.

Yanlı iki mixed tahmin edicinin MSE-I karşılaştırmaları ve yanlı stokastik kısıtlamaların uyarlanması için stepwise (kademeli) ekleme prosedürlerinin uygulanması problemleri Freund ve Trenkler (1986), Teräsvirta (1979a, 1981, 1982, 1986) ve Toutenburg (1989a, b) tarafından incelenmiştir.

4. ZAYIFLATILMIŞ LİNEER KISITLAMALAR

4.1. Zayıf (R,r)-Yansızlık

Bir lineer ilişkinin modellenmesinde ve test edilmesinde bazı yardımcı bilgiler mevcut olabilir; örneğin, ön tahminler, parametreler üzerindeki doğal kısıtlamalar ($b_i < 0$ vb.) ya da uzman tahminleri.

Yaygın bir kullanım şekli, bu yardımcı bilgileri aşağıdaki şekilde lineer stokastik kısıtlayıcı formunda birleştirmektir. $r : J \times 1$ ve $R : J \times K$ olmak üzere,

$$r = Rb + f \qquad f \ : (0, V)$$

dir. Ancak bu bilgiler ağırlıklı olarak f 'nin varyans-kovaryans matrisi olan V matrisi hakkında sahip olunan bilgilere bağlıdır. İstatistiksel uygulamalarda V matrisi genellikle bilinmediğinden $\hat{b}(R)$'ler hesaplanamaz. Yine de $r = Rb + f$ kısıtındaki uygulanabilir bilgiler kullanılmalıdır. Bu kısıttaki yardımcı bilgilerin kullanılması düşüncesi ile $E(r) = Rb$ olur ve b 'nın, $\hat{b}$ tahminlerini oluştururken, $r = Rb + f$ kısıtındaki bilgileri dikkate almak için

$$E\left(R\hat{b} / r\right) = r$$

denklemine ihtiyaç duyulur.

Tanım 4.1

$E\left(R\hat{b} / r\right) = r$ ise $r = Rb + f$ stokastik lineer kısıtına göre $\hat{b}$ tahminlerine b 'nın zayıf (R,r)-yansız tahmin edicisi denir. Bu tanım ilk defa Toutenburg, Trenkler ve Liski (1992) tarafından verilmiştir.

4.2. Optimal Zayıf $(R,\mathbf{r})$-Yansız Tahmin Ediciler

• Heterojen tahmin edici;

Öncelikle tahmin edici için lineer heterojen bir form yani,

$$\hat{b} = Cy + d$$

seçilir. Bu durumda, zayıf (R,r)-yansızlığı gereksinimi,

$$E\left(R\hat{b}\right) = RCX\,b + Rd = r$$

ifadesine denk olur. $R_1\left(\hat{b}, b, A\right) = E\left[\left(\hat{b}-b\right)' A\left(\hat{b}-b\right)\right]$, $(A>0)$ karesel risk fonksiyonu kullanılırsa aşağıdaki optimizasyon problemi ele alınmalıdır:

$$\min_{C,d,l}\left\{R_1\left(\hat{b}, b, A\right) - 2\,l'\left(RCX\,b + Rd - r\right)\right\} = \min_{C,d,l} g\left(C, d, l\right) \tag{4.1.}$$

Burada l, Lagrange çarpanlarının bir J-vektörüdür. En uygun sonuç için $g\left(C,d,l\right)$ fonksiyonunun C, d ve l'ya göre türevlerinin alınması ile (Teorem 1.15 ve Teorem 1.16), aşağıdaki birinci dereceden denklemler elde edilir:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial d} = Ad + A\left(CX - I\right)b - R'l = 0 \tag{4.2.}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial C} &= ACX\,b\,'b\,X' - Ab\,b\,'X' + Ad\,b\,'X' \\ &\quad + s^{2}ACW - R'l\,b\,'X' = 0\end{aligned} \tag{4.3.}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial l} = RCX\,b + Rd - r = 0. \tag{4.4.}$$

Ad için (4.2.) denklemi çözülürse,

$$Ad = -A\left(CX - I\right)b + R'l$$

elde edilir ve bu sonuç (4.3.) denkleminde kullanılırsa,

$$s^2 ACW = 0$$

olur. A ve W pozitif tanımlı olduğundan $C = 0$'dır. (4.4.) denklemi tekrar kullanılarak,

$$\hat{d} = b + A^{-1}R'l \tag{4.5.}$$

bulunur. (4.3.) denklemi R ile çarpılırsa,

$$R\hat{d} = r = Rb + (RA^{-1}R')l$$

olur, buradan $\hat{l} = (RA^{-1}R')^{-1}(r - Rb)$ ve $\hat{d} = b + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}(r - Rb)$ elde edilir. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1

$y = Xb + e$ regresyon modelinde**,** b için heterojen R_1-optimal zayıf (R, r)-yansız tahmin edicisi;

$$\hat{b_1}(b, A) = b + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}(r - Rb)$$

ile verilebilir ve r'ye bağlı risk fonksiyonu;

$$R_1\left[\hat{b_1}(b, A), b, A\right] = (r - Rb)'(RA^{-1}R')^{-1}(r - Rb)$$

dır.

Not:

i. $\hat{b_1}(b, A)$; R_1 optimal heterojen tahmin edici $\hat{b_1} = b$'ların toplamıdır ve zayıf (R, r)-yansızlığını gidermek için düzeltme terimi aşağıdaki gibidir;

$$E\left[R\hat{b}_1(b,A)\right] = Rb + \left(RA^{-1}R'\right)\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}(r - Rb) = r.$$

ii. $\hat{b}_1(b,A)$ bilinmeyen parametre vektörü b'ya bağlıdır ve bu doğrudan kullanılamaz. Ancak b yerine b'nın yansız tahmin edicisi $\hat{b}$ kullanılırsa elde edilen $\hat{b}_1(\hat{b},A)$ uygulanabilir tahmin edicisi zayıf (R,r)-yansız hale gelir.

$$E\left[R\hat{b}_1(\hat{b},A)\right] = RE(\hat{b}) + \left(RA^{-1}R'\right)\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - RE(\hat{b})\right) = r.$$

$\hat{b}_1(b,A)$ bilinmeyen b'yı içermesine rağmen bu ifade kullanılabilir tahmin edicinin zayıf (R,r)-yansız olmasını sağlayan yapıyı belirler ve bu tür tahmin edicilerin daha iyi istatistiksel özelliklere sahip olabileceğini gösterir.

iii. $R_1\left(\hat{b},b,A\right)$, C'nin konveks fonksiyonu olduğu için, $\hat{d} = \hat{b}_1(b,A)$ çözümü minimum değerdir.

iv. Minimum risk için verilen $R_1\left[\hat{b}_1(b,A),b,A\right]$, karesel risk fonksiyonu $R_1\left(\hat{b},b,A\right)$ ve $\hat{b}_1(b,A)$'nin basit bir sonucudur.

v. $\hat{b}_1(b,A)$; A ağırlık matrisine bağlı olduğundan A'ya bağlı yeni bir tahmin edici sınıfı tanımlar. Bu nedenle A matrisi ek parametre olarak tanımlanabilir. Örneğin, $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ LSE tahmin edicisi b yerine kullanılsın. Bu durumda $A = X'X = S$ seçerek $b(R)$ RLSE

$$\hat{b}_1(b,S) = \hat{b} + S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right)$$

elde edilir.

- Homojen Tahmin Edici;

  $\hat{b} = Cy$ ise zayıf (R,r) yansızlığı için,

$$RCX\,b = r$$

olmalıdır. (4.1.) denkleminde $d = 0$ alınıp, C ve l 'ya göre türevler incelenirse (heterojen tahmin edicilerde $C = 0$ alınmıştı), $B = X\,bb'\,X' + s^2 W$ ile tanımlı olmak üzere,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial C} = ACB - Abb'\,X' - Rl'\,b'\,X' = 0 \qquad (4.6.)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial l} = RCX\,b - r = 0 \qquad (4.7.)$$

denklemleri elde edilir. B pozitif tanımlıdır ve tersi,

$$B^{-1} = s^{-2}\left(W^{-1} - \frac{W^{-1}X\,bb'\,X'W^{-1}}{s^2 + b'\,X'W^{-1}X\,b}\right)$$

dir (Teorem 1.1 (iv)). (4.6.) denklemi C için çözülürse,

$$C = bb'\,X'B^{-1} + A^{-1}R'\,l'\,b'\,X'B^{-1} \qquad (4.8.)$$

bulunur. Bu ifade (4.7.) denkleminde kullanılarak,

$$RCX\,b = r = \left[Rb + \left(RA^{-1}R'\right)l'\right]a\,(b)$$

elde edilir ve buradan,

$$a\,(b) = \frac{b'\,Sb}{s^2 + b'\,Sb}$$

ile tanımlanan $a\,(b)$ için optimal l ,

$$\hat{l}' = \left(RA^{-1}R'\right)^{-1}\left(\frac{r}{a\,(b)} - Rb\right)$$

olarak bulunur. $\hat{l}$, (4.8.) denkleminde kullanılırsa, C için aşağıdaki çözüm elde edilir;

$$\hat{C} = bb'X'B^{-1} + A^{-1}R'\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}\left(\left[a\left(b\right)\right]^{-1}r - Rb\right)b'X'B^{-1}.$$

Sonuç olarak, $\hat{C}_2 = bb'X'\left(Xbb'X' + s^2W\right)^{-1}$ ve

$$\left(Xbb'X' + s^2W\right)^{-1} = s^{-2}W^{-1} - \frac{s^{-4}W^{-1}Xbb'X'W^{-1}}{1+s^{-2}b'X'W^{-1}Xb}$$

ifadelerinin kısaltılmış formu $a\left(y\right) = b'X'B^{-1}y = \dfrac{b'X'W^{-1}y}{s^2 + b'Sb}$ olmak üzere R_1-optimal homojen zayıf $\left(R,r\right)$-yansız tahmin edicisi,

$$\hat{b_2}\left(b,A\right) = ba\left(y\right) + A^{-1}R'(RA^{-1}R')^{-1}\left(\frac{r}{a(b)} - Rb\right)a\left(y\right)$$

olarak ifade edilir. $\hat{b_2} = ba\left(y\right)$'nin b için R_1-optimal homojen tahmin edici olduğu gerçeği göz önünde bulundurulmalıdır. Burada,

$$\begin{aligned}
\hat{b_2} &= b\left[s^{-2}b'X'W^{-1}y - \frac{s^{-4}b'Sbb'X'W^{-1}y}{1+s^{-2}b'Sb}\right] \\
&= b\left[s^{-2} - \frac{s^{-4}b'Sb}{1+s^{-2}b'Sb}\right]b'X'W^{-1}y \\
&= b\left[\frac{b'X'W^{-1}y}{s^2+b'Sb}\right]
\end{aligned}$$

dır. $E(a(y)) = a(b)$ olduğundan $\hat{b_2}\left(b,A\right)$ zayıf $\left(R,r\right)$-yansızdır. Yani;

$$E\left[R\hat{b_2}\left(b,A\right)\right] = Rba(b) + \frac{r}{a(b)}a(b) - Rba(b) = r$$

dir. Bu tahmin edici, b'ya göre yanlıdır. Yanlılık ise,

$z = A^{-1}R'\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}\left(\frac{r}{a(b)} - Rb\right)$ olmak üzere,

$$bias\left[\hat{b}_2(b, A), b\right] = b\left(a(b) - 1\right) + za(b)$$

dır. Ayrıca varyans-kovaryans matrisi;

$$V\left(\hat{b}_2(b, A)\right) = V\left(\hat{b}_2\right) + zz'\frac{s^2 a(b)}{s^2 + b'Sb} + 2z'b\frac{s^2 a(b)}{s^2 + b'Sb}$$

olur ki burada

$$V\left(\hat{b}_2\right) = s^2 bb'\frac{b'Sb}{\left(s^2 + b'Sb\right)^2}$$

dir. Buradan $\hat{b}_2(b, A)$'nın MSE matrisi;

$$M\left(\hat{b}_2(b, A), b\right) = M\left(\hat{b}_2, b\right) + zz'a(b)$$

dir. Burada, $M\left(\hat{b}_2, b\right) = \frac{s^2 bb'}{s^2 + b'Sb}$ şeklindedir. Dolayısıyla,

$$\Delta\left(\hat{b}_2(b, A), \hat{b}_2\right) = zz'a(b) \geq 0$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2

b için R_1-optimal homojen zayıf (R, r)-yansız tahmin edicisi $\hat{b}_2(b, A)$ olarak verilir. Bu tahmin edici için R_1-riski;

$$R_1\left(\hat{b}_2(b,A),b,A\right)=R_1\left(\hat{b}_2,b,A\right)$$
$$+a(b)\left(\frac{r}{a(b)}-Rb\right)'(RA^{-1}R')^{-1}\left(\frac{r}{a(b)}-Rb\right)$$

dir. Burada $R_1\left(\hat{b}_2,b,A\right)=tr\left(AM\left(\hat{b}_2,b\right)\right)$, $\hat{b}_2$'nın R_1-riskidir.

4.3. $\hat{b}_1(b,A)$ Tahmin Edicisinde b'nın En Uygun Seçimi

b'nın herhangi bir yansız tahmin edicisi $\tilde{b}$'nın kullanılması $\hat{b}_1(b,A)$'yı zayıf (R,r)-yansız yapar (Bölüm 4.2). Karesel riske göre, $\hat{b}_1\left(\tilde{b},A\right)$'nın uygulanabilir ve en uygun formunu oluşturan $\tilde{b}$ tahmin edicisi belirlenirken, bu tahmin edicilerin iyi tanımlı kümeleri ile sınırlama yapılır. Bu, lineer homojen tahmin edicilerin $\left\{\tilde{b}=\tilde{C}y:\tilde{C}X=I\right\}$ sınıfı için gösterilebilir;

$$\tilde{A}=A^{-1}R'\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}$$

notasyonunun kullanılması ile,

$$\hat{b}_1\left(\tilde{C}y,A\right)=\tilde{C}y+\tilde{A}\left(r-\tilde{C}y\right)$$

elde edilir. Bu ifade b için yansızdır, yani;

$$E\left(\hat{b}_1\left(\tilde{C}y,A\right)\right)=\tilde{C}Xb+\tilde{A}\left(r-R\tilde{C}Xb\right)=b$$

ve varyans-kovaryans matrisi,

$$V\left(\hat{b}_1\left(\tilde{C}y,A\right)\right)=s^2\left(I-\tilde{A}R\right)\tilde{C}W\tilde{C}'\left(I-\tilde{A}R\right)'$$

olur. Ayrıca, $Q = I - A^{-\frac{1}{2}} R' \left(RA^{-1} R' \right)^{-1} RA^{-\frac{1}{2}}$ matrisi, $K - J$ ranklı, idempotent bir matristir ve

$$\left(I - R'\hat{A}' \right) A \left(I - \hat{A}R \right) = A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}}$$

olduğu kolayca görülür. Lagrange çarpanları olan l_i vektörlerinin $K \times K$ matrisi, $\Lambda = \left(l_1, ..., l_K \right)$ olsun. $\hat{b}\left(\hat{b}, A \right)$ tahmin edicisinin yansız R_1-optimal $\hat{b} = \hat{C}y$ ifadesi aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümüdür;

$$\begin{aligned}
&\min_{\hat{C},\Lambda} \left\{ tr\left[AV\left(\hat{b}_1 \left(\hat{C}y, A \right) \right) \right] - 2\sum_{i=1}^{K} \hat{l}_i \left(\hat{C}X - I \right)_{(i)} \right\} \\
&= \min_{\hat{C},\Lambda} \left\{ s^2 tr\left[A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} \hat{C} W \hat{C}' \right] - 2\sum_{i=1}^{K} \hat{l}_i \left(\hat{C}X - I \right)_{(i)} \right\} \\
&= \min_{\hat{C},\Lambda} g\left(\hat{C}, \Lambda \right).
\end{aligned}$$

$\hat{C}$ ve Λ'ya göre türev alınırsa minimumluk için gerek koşullar;

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g\left(\hat{C}, \Lambda \right)}{\partial \hat{C}} = A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} \hat{C} W - \Lambda X' = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g\left(\hat{C}, \Lambda \right)}{\partial \Lambda} = \hat{C}X - I = 0$$

olarak elde edilir. $\hat{C}$'ya göre türev, $W^{-1}X$ ile çarpılarak, Λ'ya göre türev formülünde kullanılırsa, $\hat{\Lambda} = A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} S^{-1}$ olur ve sonuç olarak $\hat{C}$'ya göre türev formülünden,

$$A^{\frac{1}{2}} Q A^{\frac{1}{2}} \left[\hat{C} - S^{-1} X' W^{-1} \right] = 0$$

elde edilir ve bu ifadenin çözümü, $\hat{\hat{b}}$'ya karşılık gelen $\hat{b}$ GLSE ve

$$\hat{b}_1\left(\hat{\hat{C}}_* y, A\right) = \hat{b} + A^{-1}R'\left(RA^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right)$$

ile $\hat{\hat{C}}_* = S^{-1}X'W^{-1}$ olarak verilir.

4.4. Mixed Tahmin Edici Yerine RLS Tahmin Edicisinin Kullanılması

V varyans-kovaryans matrisi biliniyorsa, $r = Rb + f,\ f : (0,V)$ ön bilgisi kullanılabilir.

V matrisinin bilinmediği durumlarda, Bölüm 3.2'de anlatılan V'yi tahmin etme yöntemi kullanılır. Alternatif çözüm ise RLSE $b(R)$'nin kullanılmasıdır.

Bu durum V yerine hatalı olarak, $V_m = 0$ varyans-kovaryans matrisi kullanılarak elde edilen eksik belirlenmiş mixed tahmin edici olarak tanımlanabilir. Bunu daha fazla açıklamak için,

$$b(R) = b(R,V_m) = \hat{b} + S^{-1}R'\left(RS^{-1}R' + V_m\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right)$$

notasyonu kullanılır. $r = Rb + f,\ f : (0,V)$ stokastik kısıtlamasının doğru olarak tanımlanması ile $b(R,V_m)$, b için yansız tahmin edici olur yani,

$$E\left(b(R,V_m)\right) = b$$

dır. Fakat $V\left(b(R)\right)$ RLSE'nin kovaryans matrisi olmak üzere, $b(R,V_m)$'nin kovaryans matrisi;

$$V\left(b(R,V_m)\right) = V\left(b(R)\right) + s^2 S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} V\left(RS^{-1}R'\right)^{-1} RS^{-1}$$

dir. Karşılaştırılan $b(R,V_m)$ ve $\hat{b}(R)$ tahmin edicilerinin yansızlığından dolayı MSE karşılaştırmaları yerine varyans-kovaryans matrisleri karşılaştırılabilir.

$$A = S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}V^{1/2}$$

olmak üzere varyans-kovaryans matrislerinin farkı;

$$\Delta\left(b\left(R,V_m\right),\hat{b}\left(R\right)\right) = s^{2}A\left[I-\left(I+V^{1/2}\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}V^{1/2}\right)^{-1}\right]A'$$

olarak elde edilir.

Mixed tahmin edici $\hat{b}\left(R\right)$'nin optimal olmasına bağlı olarak $b\left(R,V_m\right)$ tahmin edicisi daha az etkin olmalıdır. Yani her durumda,

$$\Delta\left(b\left(R,V_m\right),\hat{b}\left(R\right)\right) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. V bilinmediği için etkinlikteki bu kaybın büyüklüğü tahmin edilemez. $b\left(R,V_m\right)$ ve GLSE $\hat{b}$ karşılaştırılırsa,

$$\Delta\left(\hat{b},b\left(R,V_m\right)\right) = s^{2}A\left[V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}-I\right]A' \geq 0$$

veya denk olarak,

$$l_{\min}\left(V^{-1/2}RS^{-1}R'V^{-1/2}\right) \geq 0$$

ise hatalı olarak tanımlanan $b\left(R,V_m\right)$ tahmin edicisi, MSE kriterine göre $\hat{b}$'dan daha üstündür denir. Fakat bu koşul V bilinmediğinden kullanılabilir değildir

5. MIXED TAHMİN EDİCİ İLE İLGİLİ TAHMİN EDİCİLER

5.1. Ridge Regresyon (RR) Tahmin Edicisi

Hoerl ve Kennard (1970), $b^{*'}b^{*}$ 'yı $(y-Xb^{*})'(y-Xb^{*})=c$ 'ye bağlı olarak minimize etme probleminin çözümü olan ridge regresyonu tanımlamaktadır; (c, bir sabit)

$$f_1 = b^{*'}b^{*} + \frac{1}{k}\left[(y-Xb^{*})'(y-Xb^{*}) - c\right]. \tag{5.1.}$$

Burada k Lagrange çarpanıdır. (5.1.)'deki ifadenin çözümü olarak ridge regresyon tahmin edici (RRE);

$$\hat{b}(k) = (X'X + k\mathrm{I}_p)^{-1}X'y, \quad k>0 \tag{5.2.}$$

şeklinde önerilmektedir. Burada k pozitif bir sabittir. (5.2.)'deki ridge tahmin edici,

$$\hat{b}(k) = (X'X + k\mathrm{I}_p)^{-1}X'y = T_k\hat{b} \tag{5.3.}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, $T_k = (\mathrm{I}+kS^{-1})^{-1} = S_k^{-1}S = SS_k^{-1}$ şeklindedir. Bu tahmin edici aynı zamanda (1.1.) modelinin

$$0 = k^{1/2}b + e \tag{5.4.}$$

ile genişletilip, genişletilmiş modele en küçük karelerin uygulanmasıyla da elde edilmektedir.

Ayrıca $X'W^{-1}X$ matrisinin kötü koşullu olması durumunda, çoklu iç ilişki problemi GLSE $\hat{b}$'yı etkiler. Trenkler (1984), bu düşünceyi ridge regresyona taşımaktadır.

Otokorelasyon ve çoklu iç ilişki problemlerinin etkisi azaltmak için (1.13.)'deki dönüştürülmüş modelde ridge regresyon tahmin edici

$$\hat{b}(k) = (\tilde{X}'\tilde{X} + k\mathrm{I}_p)^{-1}\tilde{X}'\tilde{y} = (X'W^{-1}X + k\mathrm{I}_p)^{-1}X'W^{-1}y \qquad (5.5.)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 5.1

$A: nxn$ ve $B: nxn$ tipinde iki matris olsun. $|A - l\,B| = 0$ eşitliğinin kökleri $l_i = l_i^{B}(A)$, B metriğinde A'nın özdeğerleri olarak adlandırılır.

Teorem 5.1

$A > 0$ (veya $A \geq 0$) ve $B > 0$ olsun. $B - A > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $l_i^{B}(A) < 1$ olmasıdır.

$\hat{b}(k)$ ve $\hat{b}(R)$'nin Karşılaştırılması:

$\hat{b}(R)$ ve $\hat{b}(k)$'nin kovaryans matrisleri;

$$V_1 = Cov\left(\hat{b}(R)\right) = s^2\left(X'W^{-1}X + R'V^{-1}R\right)^{-1} = s^2\left(S + R'V^{-1}R\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} V_2 = Cov(\hat{b}(k)) &= s^2(X'W^{-1}X + k\mathrm{I})^{-1}X'W^{-1}X(X'W^{-1}X + k\mathrm{I})^{-1} \\ &= s^2(S + k\mathrm{I})^{-1}S(S + k\mathrm{I})^{-1} \\ &= s^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} \end{aligned}$$

dır. Burada $S_k = X'W^{-1}X + k\mathrm{I} = S + k\mathrm{I}$ şeklindedir. $\hat{b}(k)$'nin yanlılık vektörü;

$$Bias(\hat{b}(k)) = -kS_k^{-1}b$$

ve hata kareler ortalaması;

$$MSE(\hat{b}(k)) = s^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} + k^2 S_k^{-1} bb' S_k^{-1}$$

dır.

$$V_1 - V_2 = s^2 \left[\left(S + R'V^{-1}R \right)^{-1} - S_k^{-1} S S_k^{-1} \right] = s^2 \Delta$$

dır. $V_1 - V_2 > 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\Delta > 0$ olmasıdır. $S > 0$ (Teorem 1.3) ve $R'V^{-1}R$ pozitif yarı tanımlı (Teorem 1.7) oduğundan $S + R'V^{-1}R > 0$ olur. Benzer şekilde, $S_k^{-1} S S_k^{-1} > 0$'dır.

Teorem 1.8'den

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[S_k S^{-1} S_k - \left(S + R'V^{-1}R \right) \right] > 0 \Leftrightarrow \left[2k\mathrm{I} + k^2 S^{-1} - R'V^{-1}R \right] > 0$$

elde edilir. $G = 2k\mathrm{I} + k^2 S^{-1}$ ve $H = R'V^{-1}R$ olsun. Tüm $k > 0$ değerleri için G pozitif tanımlı ve H pozitif yarı tanımlı olduğundan, Teorem 5.1'den

$$G - H > 0 \Leftrightarrow l_i^G(H) < 1 \text{ veya } l_{\max}(G^{-1}H) < 1$$

olur. Bu aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 5.2

$\hat{b}(k)$'nın varyansının $\hat{b}(R)$'nın varyansından daha küçük olması için gerek ve yeter koşul, $l_i^G(H) < 1$ veya $l_{\max}(G^{-1}H) < 1$ olmasıdır.

$Cov\left(\hat{b}(R)\right) = MSE\left(\hat{b}(R)\right)$ olduğundan ,

$$MSE\left(\hat{b}(R)\right) - MSE\left(\hat{b}(k)\right) = s^2 \Delta - k^2 S_k^{-1} bb' S_k^{-1} \qquad (5.6.)$$

olur. $d = S_k^{-1} b$ notasyonuyla, (5.6.) eşitliği $s^2\Delta - k^2 dd'$ olarak yazılabilir. $\Delta > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $l_i^G(H) < 1$ olmasıdır. Teorem 1.7'yi kullanarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3

$l_i^G(H) < 1$ olsun. $MSE\left(\hat{b}(R)\right) - MSE\left(\hat{b}(k)\right)$ pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul,

$$b'\left[2k\mathrm{I} + k^2 S^{-1} - S_k S^{-1} R'(V + RS^{-1}R')^{-1} RS^{-1} S_k\right]^{-1} b < \frac{s^2}{k^2}$$

olmasıdır.

5.2. Liu Tahmin Edici

Liu tahmin edici olarak adlandırılan ,

$$\hat{b}_d = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{b}) \quad , \; 0 < d < 1 \tag{5.7.}$$

Liu (1993), tarafından tanımlanmaktadır.

$$F_d = (S + \mathrm{I})^{-1}(S + d\mathrm{I}), \; S = X'X \tag{5.8.}$$

olmak üzere Liu tahmin edici

$$\hat{b}_d = F_d \hat{b} \tag{5.9.}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu tahmin edici, (1.1.) modelinin

$$d\hat{b} = b + e' \tag{5.10.}$$

ile genişletip, genişletilmiş modele en küçük karelerin uygulanmasıyla elde edilebilmektedir. $E(\hat{b}_d) = F_d b$ olduğundan $\hat{b}_d$ yanlıdır ve kovaryans matrisi $Cov(\hat{b}_d) = s^2 F_d S^{-1} F_d'$ şeklindedir.

5.3. Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici (SRLE)

(1.2.)'de $W = I$ alınarak elde edilen genel mixed tahmin edici (OME);

$$\begin{aligned} \hat{b}_{OME} &= (S + R'V^{-1}R)^{-1}(X'y + R'V^{-1}r) \\ &= \hat{b} + S^{-1}R'\left(V + RS^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{b}\right) \end{aligned} \qquad (5.11.)$$

Durbin (1953), Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) tarafından tanımlanmaktadır. Burada $S = X'X$ şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} y \\ db(R) + Sg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} e \\ \text{é} \end{pmatrix}$$

genişletilmiş modeline EKK uygulanarak elde edilen kısıtlı Liu tahmin edici $\hat{b}_{rd} = F_d b(R)$ Kaçıranlar ve ark. (1999) tarafından tanımlanmaktadır. Burada $g = S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{b})$ ve $E(\text{é}) = 0$, $Cov(\text{é}) = s^2\mathrm{I}$, $E(\text{é}\text{é}') = 0$ şeklindedir. Bu tahmin ediciden ve Liu tahmin edicinin $\hat{b}_d = F_d\hat{b}$ olmasından esinlenerek,

$$\hat{b}_{srd} = F_d \hat{b}_{OME} \qquad (5.12.)$$

şeklinde alternatif bir Liu tahmin edici M. H. Hubert ve P. Wijekoon (2006) tarafından tanımlanmaktadır. Bu tahmin edicinin,

$$\begin{pmatrix} y \\ d\hat{b}_{OME} + Sg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} e \\ \text{é} \end{pmatrix} \qquad (5.13.)$$

genişletilmiş modeli ile elde edilebileceği de gösterilmektedir. Burada $g = S^{-1}R'(W + RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{b})$ ve $\hat{e}$, $E(\hat{e}) = 0$, $Cov(\hat{e}) = s^2\mathrm{I}$, $E(e\hat{e}') = 0$ şeklinde bir rasgele vektördür.

(5.13.)'deki modelden b 'nın en küçük kareler tahmin edicisi bulunursa ;

$$\begin{aligned}\hat{b}_{srd} &= (S+\mathrm{I})^{-1}(X'y + d\hat{b}_{OME} + Sg) \\ &= (S+\mathrm{I})^{-1}(S+d\mathrm{I})\hat{b}_{OME}\end{aligned} \qquad (5.14.)$$

elde edilir. Bu tahmin edici stokastik kısıtlı Liu tahmin edici (SRLE) olarak adlandırılmaktadır. SRLE'nin beklenen değeri,

$$E(\hat{b}_{srd}) = F_d b + F_d S^{-1}R'(W + RS^{-1}R')^{-1}d$$

ve kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{b}_{srd}) = s^2 F_d A F_d'$$

dir. Burada $d = E(r) - Rb$ ve $A = (S + R'W^{-1}R)^{-1} = S^{-1} - S^{-1}R'(W + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$ şeklindedir.

$\hat{b}_d$ ve $\hat{b}_{srd}$ 'nin Karşılaştırılması:

$\hat{b}_d$ ve $\hat{b}_{srd}$ 'nin hata kareler ortalaması,

$$MSE(\hat{b}_d) = s^2 F_d A F_d' + (F_d - \mathrm{I})bb'(F_d - \mathrm{I})'$$

$$MSE(\hat{b}_{srd}) = s^2 F_d A F_d' + \left[(F_d - \mathrm{I})b + F_d S^{-1}d^*\right]\left[(F_d - \mathrm{I})b + F_d S^{-1}d^*\right]'$$

şeklindedir. Burada $d^* = R'(W + RS^{-1}R')^{-1}d$ 'dır. Buradan,

$$MSE(\hat{b}_d) - MSE(\hat{b}_{srd}) = s^2 F_d (S^{-1} - A) F_d' + (F_d - \mathrm{I}) bb' (F_d - \mathrm{I})' - \left[(F_d - \mathrm{I})b + F_d S^{-1} d^*\right]\left[(F_d - \mathrm{I})b + F_d S^{-1} d^*\right]' \quad (5.15.)$$

elde edilir.

(i) $E(r) = Rb$ kısıtı doğruyken ($d = 0$),

$$MSE(\hat{b}_d) - MSE(\hat{b}_{srd}) = s^2 F_d (S^{-1} - A) F_d'$$

olur.

$$A^{-1} - S = (S + R'W^{-1}R) - S = R'W^{-1}R$$

dır. $R'W^{-1}R$ negatif olmayan tanımlı olduğundan $A^{-1} - S$ de negatif olmayan tanımlıdır. $S^{-1} - A$ negatif olmayan tanımlı olduğundan $MSE(\hat{b}_d) - MSE(\hat{b}_{srd}) \geq 0$ olur. Böylece, $d = 0$ iken SRLE, MSE matris kriteri altında Liu tahmin edicisinden üstündür.

(ii) $d \neq 0$ iken, (5.15.)'de bazı kısaltmalar yapılırsa,

$$MSE(\hat{b}_d) - MSE(\hat{b}_{srd}) = F_d (D + d_1 d_1' - d_2 d_2') F_d'$$

olur. Burada,

$$D = s^2 S^{-1} R' (W + RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1},$$

$$d_1 = (d - 1)(S + d\mathrm{I})^{-1} b,$$

$$d_2 = (d - 1)(S + d\mathrm{I})^{-1} b + S^{-1} d^*$$

şeklindedir.

$\hat{b}_{srd}$'nin $\hat{b}_d$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul $(D + d_1 d_1' - d_2 d_2')$'nin negatif tanımlı olmayan matris olmasıdır. D negatif tanımlı olmayan bir matris olduğundan, aşağıda verilen Baksalary ve Trenkler (1991)'in teoremi uygulanarak MSE kriteri bakımından $\hat{b}_{srd}$, $\hat{b}_d$'den üstün olmaktadır.

Teorem 5.4: (Baksalary ve Trenkler, 1991)

C, negatif tanımlı olmayan bir matris ve c_1, c_2 lineer bağımsız vektörler olsun. Ayrıca C'nin genelleştirilmiş tersi C^- için, $f_{ij} = c_i' C^- c_j$; $i = 1,2$, $j = 1,2$ ve

$$s = \frac{c_{1i}'(\mathrm{I} - CC^-)'(\mathrm{I} - CC^-)c_2}{c_1'(\mathrm{I} - CC^-)'(\mathrm{I} - CC^-)c_1}$$

olsun. Burada, $\Re(.)$ ilgili matrisin kolon uzayı ve $c_1 \in \Re(C)$'dir. O zaman $C + c_1 c_1' + c_2 c_2' \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul,

(a) $c_1 \in \Re(C)$, $c_2 \in \Re(C)$ ve $(f_{11}+1)(f_{22}-1) \leq f_{12}^{\,2}$ veya

(b) $c_1 \notin \Re(C)$, $c_2 \in \Re(C, c_1)$ ve $(c_2 - sc_1)' C^- (c_2 - sc_1) \leq 1 - s^2$

olmasıdır.

5.4. Alternatif Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici

H. Yang ve J. Xu (2009), (5.11.)'de OLSE yerine Liu tahmin ediciyi yerleştirerek elde edilen tahmin ediciyi alternatif stokastik kısıtlı Liu tahmin edici,

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{SRLE}(d) &= \hat{b}_d + S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{b}_d) \\
&= S^{-1}F_d X'y + S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}(r - RS^{-1}F_d X'y) \\
&= (S^{-1} - S^{-1}R'(V + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})(F_d X'y + R'V^{-1}r) \\
&= (S + R'V^{-1}R)^{-1}(F_d X'y + R'V^{-1}r) \qquad (5.16.)
\end{aligned}$$

olarak tanımlamaktadırlar.

Bu tanımdan $d = 1$ iken $\hat{b}_{SRLE}(1) = \hat{b}_{OME}$ ve $R = 0$ iken $\hat{b}_{SRLE}(d) = \hat{b}_d$ olduğu söylenebilir. Böylece SRLE, OME ve Liu tahmin edicinin genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir.

Bu tahmin edicinin beklenen değeri;

$$E(\hat{b}_{SRLE}(d)) = A(F_d S + R'V^{-1}R)b = b + A(F_d - \mathrm{I})Sb$$

ve kovaryans matrisi;

$$Cov(\hat{b}_{SRLE}(d)) = s^2 \ddot{A}(F_d S F_d' + R'V^{-1}R)\ddot{A}$$

dir. Burada $\ddot{A} = (S + R'V^{-1}R)^{-1}$ dir.

$\hat{b}_{OME}$ ve $\hat{b}_{SRLE}(d)$'nin Karşılaştırılması:

$$MSE(\hat{b}_{OME}) = s^2 \ddot{A}$$

$$MSE(\hat{b}_{SRLE}(d)) = s^2 \ddot{A}(F_d S F_d' + R'V^{-1}R)\ddot{A} + b_2 b_2'$$

dır. Burada, $b_2 = Bias(\hat{b}_{SRLE}(d)) = \ddot{A}(F_d - \mathrm{I})Sb$ şeklindedir.

$$D_1 = \ddot{A} - \ddot{A}(F_d S F_d' + R'V^{-1}R)\ddot{A} = \ddot{A}(S - F_d S F_d')\ddot{A}$$

olmak üzere,

$$\Delta_1 = MSE(\hat{b}_{OME}) - MSE(\hat{b}_{SRLE}(d)) = s^2 D_1 - b_2 b_2'$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.5

MSE kriteri altında alternatif stokastik kısıtlı Liu tahmin edici $\hat{b}_{SRLE}(d)$'nin $\hat{b}_{OME}$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul, $b_2' D_1^{-1} b_2 \le s^2$ olmasıdır.

$\hat{b}_{SRLE}(d)$ ve $\hat{b}_{srd}(d)$'nin Karşılaştırılması:

$$MSE(\hat{b}_{SRLE}(d)) = s^2 \ddot{A}(F_d S F_d' + R'V^{-1}R)\ddot{A} + b_2 b_2'$$

$$MSE(\hat{b}_{srd}(d)) = s^2 F_d \ddot{A} F_d' + b_1 b_1'$$

dır. Burada, $b_1 = (F_d - \mathrm{I})b$ ve $b_2 = Bias(\hat{b}_{SRLE}(d)) = \tilde{A}(F_d - \mathrm{I})Sb$ şeklindedir.

$$D_2 = F_d \tilde{A} F_d' - \tilde{A}(F_d S F_d' + R'V^{-1}R)\tilde{A}$$

olmak üzere,

$$\Delta_2 = MSE(\hat{b}_{srd}(d)) - MSE(\hat{b}_{SRLE}(d)) = s^2 D_3 + b_1 b_1' - b_2 b_2'$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.6

MSE kriteri altında alternatif stokastik kısıtlı Liu tahmin edici $\hat{b}_{SRLE}(d)$'nin $\hat{b}_{srd}(d)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul, $b_2'(s^2 D_3 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$ olmasıdır.

5.5. Genel Mixed Ridge Tahmin Edici

Yalian Li ve Hu Yang (2010), (5.3.) ve (5.11.)'deki tahmin edicileri birleştirerek ;

$$\hat{b}_{OMRE}(k) = T_k \hat{b}_{OME} = T_k (S + R'V^{-1}R)^{-1}(X'y + R'V^{-1}r) \qquad (5.17.)$$

genel mixed ridge tahmin ediciyi (OMRE) tanımladılar. Bu tahmin edici, OME ve ORE'nin genel halidir; $k = 0$ iken $\hat{b}_{OMRE}(0) = \hat{b}_{OME}$, $R = 0$ iken $\hat{b}_{OMRE}(k) = \hat{b}(k)$, $k = 0$ ve $R = 0$ iken $\hat{b}_{OMRE}(0) = \hat{b}$.

OMRE'nin beklenen değeri ;

$$E(\hat{b}_{OMRE}(k)) = T_k b + T_k S^{-1} R'(S + R'V^{-1}R)^{-1} d$$

ve kovaryansı;

$$Cov(\hat{b}_{OMRE}(k)) = s^2 T_k A T_k'$$

dır. Burada $A = (S + R'V^{-1}R)^{-1}$ ve $d = E(r) - Rb$ şeklindedir.

$$MSE(\hat{b}_{OMRE}(k)) = s^2 T_k A T_k' + b_1 b_1'$$

$$MSE(\hat{b}_{OME}) = s^2 A + S^{-1} d^* d^{*\prime} S^{-1}$$

$$MSE(\hat{b}(k)) = s^2 T_k S^{-1} T_k' + b_2 b_2'$$

dır. Burada, $d^* = R'(V + RS^{-1}R')^{-1} d$, $b_1 = Bias(\hat{b}_{OMRE}(k)) = (T_k - \mathrm{I})b + T_k S^{-1} d^*$ ve $b_2 = Bias(\hat{b}(k)) = (T_k - \mathrm{I})b$ şeklindedir.

$$\Delta_1 = MSE(\hat{b}(k)) - MSE(\hat{b}_{OMRE}(k)) = s^2 T_k (S^{-1} - A) T_k' + b_2 b_2' - b_1 b_1'$$

olur ve aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.7

(a) Kısıt doğru iken ($d = 0$), MSE kriteri bakımından $\hat{b}_{OMRE}(k)$, $\hat{b}(k)$'den daima üstündür.

(b) Kısıt doğru değil iken **(**$d \neq 0$**),** $\hat{b}_{OMRE}(k)$'nin MSE kriteri bakımından $\hat{b}(k)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned}
&\left[(1-k)^2 b'(S + k\mathrm{I})^{-1} D^+ (S + k\mathrm{I})^{-1} b + 1\right] \\
&\times \left[\left\{(1-k)(S + k\mathrm{I})^{-1} b + S^{-1} d^*\right\}' \times D^+ \left\{(1-k)(S + k\mathrm{I})^{-1} b + S^{-1} d^*\right\} - 1\right] \\
&\leq \left[(1-k) b'(S + k\mathrm{I})^{-1} D^+ \left\{(1-k)(S + k\mathrm{I})^{-1} b + S^{-1} d^*\right\}\right]^2
\end{aligned}$$

olmasıdır. Burada, $D = s^2 S^{-1} R'(V + RS^{-1}R')^{-1} RS^{-1}$ şeklindedir ve D^+ Moore-Penrose tersidir. Ayrıca,

$$\Delta_2 = MSE(\hat{b}_{OME}) - MSE(\hat{b}_{OMRE}(k)) = s^2(A - T_k A T_k') + S^{-1}d^*d^{*\prime}S^{-1} - b_1 b_1'$$

şeklindedir ve $S = X'X$ olduğundan $S = ¤\Lambda¤'$ olacak şekilde ortogonal bir $¤$ matrisi vardır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.8

(a) Kısıt doğruyken **(**$d = 0$**)**, MSE kriteri bakımından $\hat{b}_{OMRE}(k)$ 'nin $\hat{b}_{OME}$ 'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$a'E^+a \le \frac{s^2}{1-k}$$

olmasıdır. Burada, $E = ¤'(G-H)¤$, G=2I+(1+k)S^{-1} ve

$H = S^{-1}R'(V+RS^{-1}R')^{-1}R + R'(V+RS^{-1}R')^{-1} + (1-k)^{-1}R'(V+RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$

şeklindedir.

(b) Kısıt doğru değil iken **(**$d \neq 0$**),** $\hat{b}_{OMRE}(k)$ 'nin MSE kriteri bakımından $\hat{b}_{OME}$ 'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned}
&\left[d^*¤E^+¤'d^* + s^2(1-k)\right]\left[\left\{(\Lambda+k\mathrm{I})\Lambda^{-1}¤'d^* - (1-k)a\right\}'\right.\\
&\left.\times E^+\left\{(\Lambda+k\mathrm{I})\Lambda^{-1}¤'d^* - (1-k)a\right\} - s^2(1-k)\right]\\
&\le\left[d^{*\prime}¤E^+\left\{(\Lambda+k\mathrm{I})\Lambda^{-1}¤'d^* - (1-k)a\right\}\right]^2
\end{aligned}$$

olmasıdır.

5.6. Kısıtsız ve Kısıtlı İki Parametreli Tahmin Edici

Ridge regresyon (RR) tahmin edicisinin k 'ya bağlı olmasından dolayı bazı dezavantajları vardır. $k \to \infty$ iken $\hat{b}(k) \to 0$ olup b için yanlı bir tahmin edici olur. $k \to 0$ iken $\hat{b}(k) \to \hat{b}$ olup yansız tahmin edici olur.

k arttıkça $\hat{b}(k)$ ve b arasındaki farkın azalması beklenir. Fakat, bir nokta tahmin üreten k 'nın tek bir değeri yoktur. Bu dezavantajların olması nedeniyle, RR tahmin edicinin elde edilişi göz önüne alınarak, aşağıdaki minimizasyon probleminin çözümü olarak modified ridge regresyon (MRR) tahmin edicisi Swindel (1976) tarafından önerilmektedir;

$$(b^{*}-b)'(b^{*}-b)+\frac{1}{k}\left[(y-Xb^{*})'(y-Xb^{*})-c\right]$$

b 'nın bir denklik sınıfı içinde aynı rezidü kareler toplamıyla b 'ye en yakın tahmin edici,

$$\hat{b}(k,b)=(X'X+k\mathrm{I})^{-1}(X'y+kb),\ k\geq 0 \qquad (5.18.)$$

şeklindedir. Burada b, b üzerindeki ön bilgiyi yansıtan parametre uzayında keyfi bir noktadır. k sonsuza yaklaştıkça, $\hat{b}(k,b)\to b$ 'ye yaklaşmaktadır.

RR ve MRR tahmin edicilerin elde edilişi göz önüne alınarak, aşağıdaki minimizasyon problemlerinin çözümü olarak yeni bir tahmin edici $\hat{b}(k,d)$, Özkale ve Kaçıranlar (2007), tarafından önerilmektedir;

$\hat{b}(k,d)$, b 'nın tahmin edicilerinin bir denklik sınıfı içinde aynı rezidü kareler toplamıyla $d\hat{b}$ 'ye en yakın tahmin edicidir,

$$(b^{*}-d\hat{b})'(b^{*}-d\hat{b})+\frac{1}{k}[(y-Xb^{*})'(y-Xb^{*})-c] \qquad (5.19.)$$

Burada c, bir sabit ve $\frac{1}{k}$, Lagrange çarpanıdır. (5.19.)'daki fonksiyonun b^{*}'a göre türevi alınarak,

$$(X'X+k\mathrm{I})b^{*}=X'y+kd\hat{b} \qquad (5.20.)$$

elde edilir. RR tahmin edicisinde olduğu gibi $(X'X+k\mathrm{I})$ tekil değildir. Böylece, (5.20.)'nin çözümü olarak,

$$\hat{b}(k,d) = (X'X + k\mathrm{I})^{-1}(X'y + kd\hat{b}),\ k > 0\ ,0 < d < 1 \qquad (5.21.)$$

elde edilir. Bu tahmin edici aşağıdaki gibi de elde edilebilir:

b hakkındaki ön bilgi,

$$kd\hat{b} = kb + e \qquad (5.22.)$$

şeklinde olsun. Burada e, $px1$ tipinde bir rasgele vektör ve $E(e) = 0$, $Cov(e) = s^2\mathrm{I}$ şeklindedir. Ayrıca, $E(ee') = 0$ olduğu varsayılır. Mixed tahmin tekniği kullanılarak, $kd\hat{b} = kb + e$ ile (1.1.) modelinin birleştirilmesiyle $\hat{b}(k,d)$ elde edilir. Bu aşağıda verilen Liu(2003)'te tanımlanan tahmin ediciden farklıdır.

$\hat{b}(k,d)$'da farklı d ve k değerleri için farklı tahmin ediciler elde edilir;

(i) $Lim_{d\to 1}\hat{b}(k,d) = (X'X)^{-1}X'y$, OLS tahmin edicisidir.

(ii) $Lim_{k\to 0}\hat{b}(k,d) = (X'X)^{-1}X'y$, OLS tahmin edicisidir.

(iii) $Lim_{d\to 0}\hat{b}(k,d) = (X'X + k\mathrm{I})^{-1}X'y$, RR tahmin edicisidir.

(iv) $k = 1$ için $\hat{b}(1,d) = \hat{b}_d$, Liu tahmin edicisidir.

(v) $\hat{b}(k,d) = (X'X + k\mathrm{I})^{-1}(X'y + kd\hat{b})$

$$= [\mathrm{I} + k(X'X)^{-1}]^{-1}(X'X)^{-1}(X'y + kd\hat{b})$$

$$= [\mathrm{I} + k(X'X)^{-1}]^{-1}(\hat{b}_L + kd(X'X)^{-1}\hat{b})$$

$$= [\mathrm{I} + k(X'X)^{-1}]^{-1}(\hat{b}_L - d\hat{b}_L) + d\hat{b}$$

Buradan, $Lim_{k\to\infty}\hat{b}(k,d) = d\hat{b}$, contraction tahmin edicidir.

$$\hat{b}(k,d) = (X'X + k\mathrm{I})^{-1}(X'y + kd\hat{b})$$
$$= (X'X + k\mathrm{I})^{-1}(X'X + kd\mathrm{I})\hat{b}$$

olarak yazılırsa $\hat{b}$'nın her bir elemanını farklı şekilde büzen bir tahmin edici olduğu görülmektedir.

Kısıtlı ridge regresyon tahmin edicisi ,

$$b^*(k) = T_k b(R) \ , \ T_k = (\mathrm{I}_p + k(X'X)^{-1})^{-1} \ , \ k \geq 0$$

Sarkar (1992) tarafından tanımlanmaktadır. Burada $b(R)$, (2.2.)'de verildiği gibidir. Gross (2003), $b^*(k)$'nın (3.1.) kısıtını sağlamadığı için kısıtlı tahmin edici olmadığını ifade etmektedir. Bu nedenle (3.1.) kısıtını sağlayan yeni bir ridge tahmin edici;

$$\hat{b}_r(k) = \hat{b}(k, b_0) - S(k)^{-1}R'[RS(k)^{-1}R']^{-1}(R\hat{b}(k, b_0) - r) \ , \ k \geq 0$$

Gross (2003) tarafından önerilmektedir. Burada, $S(k) = X'X + k\mathrm{I}_p$, $b_0 = R'(RR')^{-1}r$ ve $\hat{b}(k, b_0) = S(k)^{-1}(X'y + kR'(RR')^{-1}r)$ şeklindedir. Ayrıca, $\hat{b}_r(k) = \hat{b}(k) - S(k)^{-1}R'[RS(k)^{-1}R']^{-1}(R\hat{b}(k) - r)$ olduğu Kaçıranlar ve ark. (2011) tarafından gösterilmektedir.

RR, MRR ve RLS tahmin edicilerin elde edilişleri göz önüne alınarak, aşağıdaki minimizasyon probleminin çözümü olarak yeni iki parametreli kısıtlı tahmin edici, Özkale ve Kaçıranlar (2007), tarafından önerilmektedir.

(3.1.)'de verilen kısıt doğruyken *b* 'nın tahmin edicilerinin bir denklik sınıfı içinde aynı rezidü kareler toplamıyla $d\hat{b}$'ye en yakın tahmin edici,

$$\Psi_1 = (b^* - d\hat{b})'(b^* - d\hat{b}) + \frac{1}{k}[(y - Xb^*)'(y - Xb^*) - c] - 2l'(Rb^* - r)$$

minimizasyon probleminin çözümü olarak önerilmektedir. Burada $\frac{1}{k}$, Lagrange çarpanı, l, Lagrange çarpanlarının bir vektörü ve c, bir sabittir. Bu fonsiyonun sırasıyla b^*, $\frac{1}{k}$ ve l'ya göre türevi alınarak,

$$(b^* - d\hat{b}) + \frac{1}{k}(X'Xb^* - X'y) - R'l = 0 \qquad (5.23.)$$

$$(y - Xb^*)'(y - Xb^*) = c \qquad (5.24.)$$

$$Rb^* - r = 0 \qquad (5.25.)$$

normal denklemleri elde edilir. (5.23.)'den

$$b^* = (X'X + k\mathrm{I})^{-1}[X'y + kd\hat{b}] + (X'X + k\mathrm{I})^{-1}R'kl \qquad (5.26.)$$

elde edilir. (5.26.) R ile çarpılır ve (5.25.) kullanılırsa,

$$k\hat{l} = [R(X'X + k\mathrm{I})^{-1}R']^{-1}[r - R(X'X + k\mathrm{I})^{-1}(X'y + kd\hat{b})] \qquad (5.27.)$$

elde edilir. (5.27.), (5.26.)'da yerine yazılırsa, normal denklemlerin çözümü,

$$\hat{b}_r(k,d) = \hat{b}(k,d) + S(k)^{-1}R'[RS(k)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{b}(k,d)),\ k > 0,\ 0 < d < 1$$

olur.

Özel durumlarda, $\hat{b}(k,d)$'dan OLS, RR, Liu ve contraction tahmin edicileri elde edilmişti. Aynı özel durumlar $\hat{b}_r(k,d)$'da uygulanırsa;

(i) $Lim_{k\to 0}\hat{b}_r(k,d) = \hat{b} + (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{b})$, RLSE'dir.

(ii) $Lim_{d\to 0}\hat{b}_r(k,d) = \hat{b}(k) + S(k)^{-1}R'[RS(k)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{b}(k))$, Gross'un önerdiği kısıtlı ridge tahmin edicisidir.

(iii) $Lim_{k\to\infty}\hat{b}_r(k,d) = \hat{b}_R(d) = d\hat{b} + R'[RR']^{-1}(r - Rd\hat{b})$

(iv) $k = 1$ için $\hat{b}_{Rd} = \hat{b}_r(1,d) = \hat{b}_d + (X'X + \mathrm{I})^{-1}R'[R(X'X + \mathrm{I})^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{b}_d)$ (5.28.)
elde edilir.

$\hat{b}_r(k,d)$, (3.1.) kısıtını sağladığı için bu dört tahmin edici de (3.1.) kısıtını sağlar: $k \to 0$'a yaklaştıkça $\hat{b}(k,d)$, OLSE'ye ve $\hat{b}_r(k,d)$, RLSE'ye yaklaşır;

$d \to 0$'a yaklaştıkça $\hat{b}(k,d)$, RR tahmin edicine ve $\hat{b}_r(k,d)$, kısıtlı ridge tahmin edicisine; $k \to \infty$'a yaklaştıkça, $\hat{b}(k,d)$, contraction tahmin edicisine yaklaşır ve $k=1$ iken, Liu tahmin edici olur. Bu nedenle Özkale ve Kaçıranlar (2007), $\hat{b}_R(d)$'yi kısıtlı contraction tahmin edici olarak ve (5.28.)'i kısıtlı Liu tahmin edicisi olarak adlandırmaktadır. (5.28.), daha önce Kaçıranlar ve ark. (1999) tarafından tanımlanan kısıtlı Liu tahmin edicisinden farklıdır. Bu farkı ayırt etmek için, $\hat{b}_{Rd}$, modified kısıtlı Liu (MRL) tahmin edici olarak adlandırılmaktadır.

$\hat{b}(k,d)$ ve OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması:

$$\hat{b}(k,d) = S(k)^{-1}S(kd)\hat{b}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $S(k) = S + k\mathrm{I}$, $S(kd) = S + kd\mathrm{I}$ ve $S = X'X$ şeklindedir.

$$V(\hat{b}(k,d)) = s^2 S(k)^{-1}S(kd)S^{-1}S(kd)S(k)^{-1}$$

$$Bias(\hat{b}(k,d)) = (S(k)^{-1}S(kd) - \mathrm{I})b = k(d-1)S(k)^{-1}b$$

olduğundan

$$MSE(\hat{b}(k,d)) = s^2 S(k)^{-1}S(kd)S^{-1}S(kd)S(k)^{-1} + k^2(d-1)^2 S(k)^{-1}bb'S(k)^{-1}$$

olur. OLS $\hat{b}$ için $MSE(\hat{b}) = s^2 S^{-1}$'dir.

$$\begin{aligned}\Delta &= MSE(\hat{b}) - MSE(\hat{b}(k,d)) \\ &= S(k)^{-1}\left[s^2 S(k)S^{-1}S(k) - s^2 S(kd)S^{-1}S(kd) - k^2(d-1)^2 bb'\right]S(k)^{-1}\end{aligned}$$

olur. Gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.9

MSE kriteri bakımından $\hat{b}(k,d)$'nin $\hat{b}$'den üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s^{-2}k(1-d)b'\left[k(1+d)S^{-1}+2\mathrm{I}\right]^{-1}b \le 1$ olmasıdır.

$\hat{b}(k,d)$ ve $\hat{b}_r(k,d)$'nin Karşılaştırılması:

$$\hat{b}_r(k,d) = M(k)S(kd)\hat{b} + S(k)^{-1}R'\left[RS(k)^{-1}R'\right]^{-1}r$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $M(k) = S(k)^{-1} - S(k)^{-1}R'\left[RS(k)^{-1}R'\right]^{-1}RS(k)^{-1}$'dir.

$$V(\hat{b}_r(k,d)) = s^2M(k)S(kd)S^{-1}S(kd)M(k)$$

$$Bias(\hat{b}_r(k,d)) = M(k)\left[S(kd)-S(k)\right]b = k(d-1)M(k)b$$

olup

$$MSE(\hat{b}_r(k,d)) = s^2M(k)S(kd)S^{-1}S(kd)M(k) + k^2(d-1)^2M(k)bb'M(k)$$

elde edilir ve aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.10

MSE kriteri bakımından $\hat{b}_r(k,d)$'nin $\hat{b}(k,d)$'den üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul $l_{\max}(B^{-1}M(k)S(k)BS(k)M(k)) \le 1$ olmasıdır. Burada, $B = MSE(\hat{b}(k,d))$ şeklindedir.

5.7. Stokastik Kısıtlı Ridge Tahmin Edici

(3.5.)'de verilen mixed tahmin edici;

$$\Psi_2 = (y_m - X_m b)'\Sigma^{-1}(y_m - X_m b)$$
$$= (y - Xb)'s^{-2}V^{-1}(y - Xb) + (r - Rb)'s^{-2}W^{-1}(r - Rb)$$

fonksiyonunun minimizasyonu ile elde edilmektedir. Ridge regresyonun elde edilişi göz önüne alınarak,

$$\Psi_3 = b'b + \frac{s^2}{k}[(y_m - X_m b)'\Sigma^{-1}(y_m - X_m b) - c_1]$$
$$= b'b + \frac{s^2}{k}[(y - Xb)'s^{-2}V^{-1}(y - Xb) + (r - Rb)'s^{-2}W^{-1}(r - Rb) - c_2]$$

fonksiyonunun minimizasyonuyla elde edilen stokastik kısıtlı ridge regresyon (SRRR) tahmin edici;

$$\hat{b}_m(k) = (X'V^{-1}X + R'W^{-1}R + k\mathrm{I}_p)^{-1}(X'V^{-1}y + R'W^{-1}r)\ ,\ k > 0$$

veya

$$\hat{b}_m(k) = \hat{b}(k) + G_k^{-1}R'(W + RG_kR')^{-1}(r - R\hat{b}(k))\ ,k > 0 \qquad (5.29.)$$

şeklinde Özkale (2009) tarafından önerilmektedir. Burada $\frac{s^2}{k}$, Lagrange çarpanı ; c_1, bir sabit ve $G_k = (X'V^{-1}X + k\mathrm{I}_p)$ şeklindedir.

f_1'de $b'b$ yerine $b'X'V^{-1}Xb$ kullanıldığı düşünelim. O zaman,

$$f_2 = b'X'V^{-1}Xb + \frac{1}{k}[(y - Xb)'V^{-1}(y - Xb) - d]$$

olur. f_2'nin minimizasyonu ile elde edilen

$$b^{*} = (\frac{1}{1+k})\hat{b},\ k>0 \tag{5.30.}$$

$0 < \frac{1}{1+k} < 1$ olduğu için shrinkage GLS olarak Özkale (2009) tarafından önerilmektedir. Bu düşünce Ψ_3'e uygulanınca,

$$y_4 = b'X'V^{-1}Xb + \frac{s^2}{k}[(b-\hat{b})'s^{-2}X'V^{-1}X(b-\hat{b}) + (r-Rb)'s^{-2}W^{-1}(r-Rb) - c_3]$$

elde edilir ve y_4'ün minimizasyonu ile elde edilen,

$$\begin{aligned} b^{**} &= (k+1)^{-1}\hat{b} + (k+1)^{-1}G^{-1}R[W + (k+1)^{-1}RG^{-1}R']^{-1}(r - R(k+1)^{-1}\hat{b}) \\ &= b^{*} + G^{-1}[(1+k)W + RG^{-1}R']^{-1}(r - Rb^{*}) \end{aligned} \tag{5.31.}$$

stokastik kısıtlı shrinkage tahmin edici olarak Özkale (2009) tarafından önerilmektedir.

$$MSE(\hat{b}_m(k)) = s^2 M_k M_0^{-1} M_k + k^2 M_k bb' M_k$$

$$MSE(\hat{b}(R)) = s^2 M_0$$

dır. Burada, $M_k = (X'V^{-1}X + R'W^{-1}R + k\mathrm{I})^{-1}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} \Delta &= MSE(\hat{b}(R)) - MSE(\hat{b}_m(k)) \\ &= s^2 M_0 - s^2 M_k M_0^{-1} M_k - k^2 M_k bb' M_k \end{aligned}$$

olur. $\Delta > 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$k^2 b' M_k \left[M_0 - M_k M_0^{-1} M_k \right]^{-1} M_k b < s^2$$

olmasıdır (Farebrother, 1976). Bu koşul gerekli kısaltmalar yapılarak aşağıdaki teoremle basitleştirilebilir.

Teorem 5.11

MSE kriteri bakımından $\hat{b}_m(k)$'nın $\hat{b}(R)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$b'\left[\frac{2}{k}\mathrm{I}+(X'V^{-1}X+R'W^{-1}R)^{-1}\right]^{-1}b<s^2$$

olmasıdır.

5.8. Çoklu Çok Değişkenli Ridge Tahmin Edici

$$\begin{aligned}
y_{1h}&=b_{11}x_{1h}+\mathbf{K}+b_{p1}x_{ph}+e_{1h}\\
y_{2h}&=b_{12}x_{1h}+\mathbf{K}+b_{p2}x_{ph}+e_{2h}\\
\mathrm{M}\quad&\quad\mathrm{M}\quad\quad\mathrm{M}\quad\mathrm{M}\\
y_{qh}&=b_{1q}x_{1h}+\mathbf{K}+b_{pq}x_{ph}+e_{qh}
\end{aligned}$$

regresyon denklemlerinin sistemini göz önüne alalım $(h=1,2,...,n)$. Bu denklem sistemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$Y=XB+e\ . \tag{5.32.}$$

Burada Y, nxq tipinde bağımlı değişkenlerin matrisi, X, nxp tipinde açıklayıcı değişkenler matrisi, $B=(b_1,\mathbf{K},b_q)$, pxq tipinde bilinmeyen katsayılar matrisi ve $e=(e_1,\mathbf{K},e_q)$, nxq tipinde hata matrisidir ve $j,l=1,2,...,q$ için $E(e_j)=0$, $E(e_je_l')=s_{jl}^2\mathrm{I}_n$ varsayımları yapılsın. Matris formları olarak gösterildiğinde;

$$Y=\begin{bmatrix}
y_{11} & y_{21} & y_{31} & \mathbf{K} & y_{q1}\\
y_{12} & y_{22} & y_{32} & \mathbf{K} & y_{q2}\\
\mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M}\\
y_{1n} & y_{2n} & y_{3n} & \mathbf{K} & y_{qn}
\end{bmatrix}\quad,X=\begin{bmatrix}
x_{11} & x_{21} & x_{31} & \mathbf{K} & x_{p1}\\
x_{12} & x_{22} & x_{32} & \mathbf{K} & x_{p2}\\
\mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M}\\
x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \mathbf{K} & x_{pn}
\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \mathbf{K} & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \mathbf{K} & b_{2q} \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \mathbf{K} & b_{pq} \end{bmatrix} \quad , \; e=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \mathbf{K} & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \mathbf{K} & e_{2n} \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\ e_{q1} & e_{q2} & e_{q3} & \mathbf{K} & e_{qn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(5.32.) ile gösterilen lineer regresyon sistemi yeniden düzenlenerek;

$$y = Zb + e \tag{5.33.}$$

elde edilmiştir. Burada y, $qn\,x1$ tipinde y vektörü, hata matrisi olan e, $qn\,x1$ tipinde e vektörü olarak düzenlenmiştir. Bilinmeyen b parametreleri $pq\,x1$ tipinde bir vektör ve Z, $q(n\,x\,p)$ tipinde köşegeni üzerinde orijinal X_j, $j = 1,2,\mathbf{K},q$ matrisinin olduğu bir blok matristir. $\otimes$ matrislerin Kroneker çarpımını göstermek üzere $Z = I_q \otimes X_j$' dir. Hata vektörü 0 (sıfır) ortalamalı ve $\Sigma = \{s_{ij}^{\,2}\}$ $q\,x\,q$ tipinde pozitif tanımlı simetrik bir matris olmak üzere dağılım matrisidir (dispersion matrix) $E\{ee'\} = \Sigma \otimes I_n = \Gamma$.

(5.33.) formundaki modeller, görünüşte ilişkisiz model (SURE) olarak adlandırılır. Modeldeki eşitlikler yapısal olarak ilişkisiz görünseler bile, gerçekte çapraz eşitliklerle ilişkilendirilen hatalar onların arasında bir bağlantı oluşturmaktadır.

Fule (1994), SURE modelde tahminleri orijin yönünde büzmek yerine, modified ridge regresyonda olduğu gibi, b_0 gibi verilen bir parametre vektörü yönünde büzme yöntemini ortaya koymuştur. Burada, stokastik olmayan vektör b_0 formunda, b üzerinde ön bilgiye sahip olunduğu varsayılmaktadır. Minimize etme yaklaşımı düşünüldüğünde, önceki ön bilgiye dayanarak bazı değişkenlere diğerlerinden daha fazla ağırlık verildiği varsayılır. O zaman minimize etmek, orijinden başka verilen bir noktaya uzaklığın minimize edilmesi şeklinde olacaktır. Böylece $b'b$'yı minimize etmek yerine, $(y - Zb)'\Gamma^{-1}(y - Zb) = l$, sabit kısıtına bağlı, uzaklığın ağırlıklandırılmış karesi olan $(b - b_0)'\Theta^{-1}(b - b_0)$' nın minimize

edilmesi seçilir. Burada ağırlık matrisi Θ^{-1} bilinen pozitif elemanlı köşegen matristir. 1/k çarpanıyla Langrange çarpanının gösterilmesiyle ve türevin alınmasıyla SURE modelde, b ' nın modified ridge tahmin edicisi;

$$\hat{b}_{MR} = (Z'\Gamma^{-1}Z + k\Theta^{-1})^{-1}(Z'\Gamma^{-1}y + k\Theta^{-1}b_0) \qquad (5.34.)$$

şeklinde elde edilir.

Modified Ridge tahmin ediciyi elde etmenin ikinci yolu incelendiğinde, her iki bilginin kaynaklarının birleştirildiği görülür. Temel SURE model $y = Zb + e$ ve $b_0 = b + v$ stokastik kısıtlaması ile stokastik bileşen v, $E(v) = 0$, $E(vv') = k^{-1}\Theta$ ve $k > 0$ olmak üzere bir tek modelde birleştirdiğinde,

$$y^* = \begin{bmatrix} y \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ I \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} e \\ v \end{bmatrix} = Z^* b + e^* \qquad (5.35.)$$

elde edilmektedir. Burada e ve v' nin bağımsız oldukları varsayılır ve

$$PP' = \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & k^{-1}\Theta \end{bmatrix}^{-1}$$

$P'\Omega P = \mathrm{I}$ olacak şekildeki P dönüşüm matrisi kullanılır. P matrisini kullanarak PP' eşitliği;

$$P'y^* = P'Z^* b + P'e^*$$

eşitliğine dönüştürülür ve EKK yöntemi bu dönüştürülmüş modele uygulandığında

$$\hat{b}_{MR} = (Z'\Gamma^{-1}Z + k\Theta^{-1})^{-1}(Z'\Gamma^{-1}y + k\Theta^{-1}b_0)$$

tahmin edici elde edilmektedir.

Ekolojik regresyonda EKK tahmin edicisinden kaynaklanan problemlerden kaçınmak ve mümkün olmayan bazı varsayımlarından dolayı birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan biri de Fule (1994)' nin geliştirdiği (5.34.) ile gösterilen tahmin edicinin genelleştirilmiş halidir.

$X_j = X \quad j = 1, 2, ..., q \quad Z = I_q \otimes X$ ve $\Sigma = diag\{s_{ii}^{2}\}$ varsayarak, Γ_0^{-1} , $(pq\, x\, pq)$ tipinde bir köşegen matris için $Z'\Gamma^{-1}Z$ ifadesi $Z'Z\Gamma_0^{-1}$ ifadesine eşit olacaktır ve $Z'\Gamma^{-1}y$ ifadesi de $\Gamma_0^{-1}Z'y$ gibi yazılabilecektir. Yani;

$$\Gamma_0^{-1} = \Sigma = diag\{s_{ii}^{2}\}$$

$$Z'\Gamma^{-1}Z = Z'Z\Gamma_0^{-1}$$

$$Z'\Gamma^{-1}y = \Gamma_0^{-1}Z'y$$

eşitlikleri vardır. Bunu görerek modified ridge tahmin edici, $k\Theta^{-1}\Gamma_0$ ifadesiyle $(pq\, x\, pq)$ tipindeki köşegen K matrisi tarafından yeniden düzenlenerek,

$$\hat{b}_{MGR} = (Z'Z + K)^{-1}(Z'y + Kb_0) = (Z'Z + K)^{-1}(Z'Z\hat{b} + Kb_0) \qquad (5.36.)$$

olarak modified genelleştirilmiş ridge tahmin edici (MGR) olarak adlandırılan yeni bir tahmin edici elde edilir.

(5.36.) ile gösterilen tahmin edicide b_0' ın önceden belirlenmiş değerleri yönünde EKK ile tahmin edilmiş parametreler büzülmektedir (shrinkage).

Ancak önceden belirlenmiş b_0 değerleri yönünde parametre değerlerini büzmek, orijinal modelin birçok önemli özelliklerini kaybetmesine neden olmaktadır. Çünkü geçiş matrisinin satır toplamları bire eşit olmalı ve elemanların her biri geçiş olasılıkları olarak yorumlanabilir olmalıdır. Bunu yapabilmek için, b parametre vektörü üzerine

$$Rb = r$$

lineer eşitlikli kısıt tanımlanmaktadır. Burada her ikisi de bilinen sabitler olmak üzere; R, $(p\,x\,pq)$ tipinde bir matris ve r, $(p\,x1)$ tipinde bir vektördür. Regresyon parametrelerinin geçiş olasılıkları olarak yorumlanabilmesi durumu örneklendirebilmek için, lineer regresyon denklemindeki b matrisinin sadece birleri içeren r vektör gibi gösterilerek (satır toplamları), satır toplamları üzerine kısıtlamalar getirilmektedir. c' birlerden oluşan satır vektörü olmak üzere, R matrisi $c'\otimes I$ olarak yazılabilir ve R matrisi satır toplamını hesaplar.

Son olarak, $Rb = r$, kısıtına karşı, $(y^* - Z^* b)'\Omega^{-1}(y^* - Z^* b)$ denklemi minimize edildiğinde aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\hat{b}_{MGR}^{(r)} = \hat{b}_{MGR} + W^{-1}R'(RW^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{b}_{MGR}) \qquad (5.37.)$$

Burada $W = (Z'Z + K)$ ve $\hat{b}_{MGR}$, MGR tahmin edicidir. $\hat{b}_{MGR}^{(r)}$, shrinkage yöntemi yoluyla EKK ile tahmin edilmiş parametre değerlerini sağlamak şartıyla b için kısıtlanmış bir çözüm olarak gösterilmiştir. Böylece $\hat{b}_{MGR}^{(r)}$ tahmin edici ekolojik regresyon modelindeki tahminler için tüm şartları sağlamaktadır.

5.9. Ağırlıklı Mixed Tahmin Edici

(1.1.) ve (3.1.) modellerini birleştirerek elde edilen ağırlıklı mixed tahmin edici (WME);

$$\begin{aligned}\hat{b}(w) &= (S + wR'W^{-1}R)^{-1}(X'y + wR'W^{-1}r) \qquad 0 \le w \le 1 \\ &= \hat{b} + wS^{-1}R'(W + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{b}) \qquad (5.38.)\end{aligned}$$

Schaffrin ve Toutenburg (1990) tarafından önerilmiştir. Burada $S = X'X$ ve w, stokastik olmayan skaler bir ağırlıktır. (5.38.)'de $\hat{b}$ yerine (5.7.)'de tanımlanan Liu tahmin edici yerleştirilerek elde edilen ağırlıklı mixed Liu tahmin edici (WMLE);

$$\begin{aligned}\hat{b}(w,d) &= \hat{b}_d + wS^{-1}R'(W+wRS^{-1}R')^{-1}(r-R\hat{b}_d)\\ &= S^{-1}F_dX'y + wS^{-1}R'(W+wRS^{-1}R')^{-1}(r-RS^{-1}F_dX'y)\\ &= (S^{-1}-wS^{-1}R'(W+wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})(F_dX'y+wR'W^{-1}r)\\ &= (S+wR'W^{-1}R)^{-1}(F_dX'y+wR'W^{-1}r) \qquad (5.39.)\end{aligned}$$

Yang (2010) tarafından önerilmiştir.

$$MSE(\hat{b}(w,d)) = s^2A(F_dSF_d'+w^2R'W^{-1}R)A+b_1b_1'$$

$$MSE(\hat{b}(w)) = s^2A(S+w^2R'W^{-1}R)A$$

$$MSE(\hat{b}(d)) = s^2F_dS^{-1}F_d'+b_2b_2'$$

şeklindedir. Burada,

$$A=(S+wR'W^{-1}R)^{-1},$$

$$b_1 = Bias(\hat{b}(w,d)) = A(F_d-\mathrm{I})Sb\ ,$$

$$b_2 = Bias(\hat{b}(d)) = (F_d-\mathrm{I})b$$

şeklindedir.

$\hat{b}(w)$ ve $\hat{b}(w,d)$'nin Karşılaştırılması:

$$\begin{aligned}MSE(\hat{b}(w))-MSE(\hat{b}(w,d)) &= s^2A(S+w^2R'W^{-1}R)A-s^2A(F_dSF_d'+w^2R'W^{-1}R)A+b_1b_1'\\ &= s^2D_1-b_1b_1'\end{aligned}$$

olup burada $D_1 = A(S-F_dSF_d')A$ şeklindedir.

Teorem 5.12

MSE kriteri bakımından $\hat{b}(w,d)$'nin $\hat{b}(w)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul, $b_1'D_1^{-1}b_1 \le s^2$ olmasıdır.

$\hat{b}(d)$ ve $\hat{b}(w,d)$'nin Karşılaştırılması:

$$MSE(\hat{b}(d)) - MSE(\hat{b}(w,d)) = s^2 F_d S^{-1} F_d' + b_2 b_2' - (s^2 A(F_d S F_d' + w^2 R' W^{-1} R)A + b_1 b_1')$$
$$= s^2 D_2 + b_2 b_2' - b_1 b_1'$$

olup burada $D_2 = F_d S^{-1} F_d' - A(F_d S^{-1} F_d' + w^2 R' W^{-1} R)A$ şeklindedir.

Teorem 5.13

MSE kriteri bakımından $\hat{b}(w,d)$'nin $\hat{b}(d)$'den üstün olması için gerek ve yeter koşul, $b_1'(s^2 D_2 + b_2 b_2')^{-1} \leq 1$ olmasıdır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Parametreler hakkında yardımcı bilgi olması durumunda klasik en küçük kareler tahmin edici uygun olmamaktadır. Bu nedenle daha iyi tahmin edici bulma çalışmaları yapılmaktadır. İstatistiksel araştırmalarda daha iyi tahmin ediciler sağlamak için birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin; b 'nın bazı $\hat{b}_i$ elemanlarının varyanslarını minimum yaparak veya uygun bir X seçimiyle $s^2(X'X)^{-1}$ kovaryans matrisi tasarlayarak, yanlı tahmin ediciler tanımlayarak, tam veya stokastik kısıtlamaları önceki bilgilerle birleştirerek olabilir.

Bu çalışmada, tam veya stokastik kısıtlamaları önceki bilgilerle birleştirerek elde edilen karma regresyon tahmin edici incelenmiştir. Ayrıca, karma regresyon tahmin edici ile ilişkili yanlı tahmin ediciler; Ridge regresyon (RR) tahmin edicisi, Liu tahmin edici, stokastik kısıtlı Liu tahmin edici (SRLE), alternatif stokastik kısıtlı Liu tahmin edici, genel Mixed Ridge tahmin edici, kısıtsız ve kısıtlı iki parametreli tahmin edici, stokastik kısıtlı Ridge tahmin edici, çoklu çok değişkenli Ridge tahmin edici ve ağırlıklı Mixed tahmin edici ele alınmıştır.

Yapılan karşılaştırmalara göre, yardımcı bilgi olması durumunda bu yanlı tahmin edicilerin EKK tahmin edicisinden daha kullanışlı olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

BAKSALARY, J.K.,and KALA, R., 1983. Partial orderings between matrices one of which is of rank one. Bulletin of the Polish Academy of Science, Math.,31:5-7.

BAKSALARY, J.K., KALA, R., and KLACZYNSKI, K., 1983. The matrix inequality $M \geq B^{*}MB$. Linear Algebra and Its Applications, 54:86, 1983.

BAKSALARY, J.K., LISKI, E.P., and TRENKLER, G., 1989. Mean Square error matrix improvements and admissibility of linear estimators. J. Statist. Planning and Inference, 23:312-325.

CHIPMAN, J.S., and RAO, M.M., 1964. The treatment of linear restrictions in regression analysis. Econometrica, 32:198-209.

DURBIN, J., 1953. A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients. J Am Stat Assoc 48:799-808.

FAREBROTHER, R.W., 1976. Further. Results on the mean square error of ridge regression. J.Royal Statist. Soc. B, 38:248-250.

FREUND, E., and TRENKLER, G., 1986. Mean square error matrix comparisons between mixed estimators. Statistica XLVI, pages 493-501.

FULE, E., 1995. On ecological regression and ridge estimation Commun.Statist,-Simula., 24(2), 385-389.

GILES, D.E.A., and SRIVASTAVA, V.K., 1991. An unbiased estimator of the covariance matrix of the mixed regression estimator. J. Amer. Statist. Assoc., 86:441-444.

GULER, H., and KAÇIRANLAR, S., 2009. A Comparasion of Mixed and Ridge Estimators of Linear Models, Communications in Statistics, 38, 368-401.

GROSS, J., 2003. Restricted ridge estimation. Statistics and Probability Letters. 65:57-64.

HOERL, A.E., and KENNARD, R.W., 1970a. Ridge regression. Biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics. 12 : 55-67.

HUBERT, M.H., and WIJEKOON, P., 2006. İmprovement of the Liu estimator in linear regression model. Statistical Papers. 47 (3), 471-479.

JUDGE, G.G., and BOCK, M.E., 1978. The statistical implications of pre-test and Stein-rule estimators in econometrics. North-Holland, Amsterdam.

KAKWANI, N.C., 1968. Note on the unbiasedness of mixed regression estimation. Econometrics, 36:610-611.

KAKWANI, N.C., 1974. A note on Nagar-Kakwani approximation tovariance of mixed regression estimator. The Indian Economic Journal, 22:105-107.

LIU, K., 1993. A new class of biased estimate in linear regression Commun Statist. Theor. Meth. 22:393-402.

MEHTA, J.S., and SWAMY, P.A.V.B., 1970. The finite sample distribution of Theil's mixed regression estimator and a related problem Rev. Int. Statist. Inst., 38:202-209.

MAYER, L.S., and WILLKE, T.A., 1973. On biased estimationin linear models Technometrics 15:497-508

NAGAR, L., and KAKWANI, N.C., 1964. The bias and moment matrix of a mixed regression estimator. Econometrica, 32:174-182.

OZKALE, M.R., and KAÇIRANLAR, S., 2007. The restricted and unrestricted two parameter estimators. Commun. in Statistics: Theory and Methods. 36 (13-16), 2707-2725

OZKALE, M.R., 2009. A stochastic restricted ridge regression estimator Journal of Multivariate Analysis.

RAO, C.R., and TOUTENBURG, H., 1995. Linear Models, Least Squares and Alternatives. Edwards Brothers Printing. USA. 351p.

SRIVASTAVA, V.K., and CHANDRA, R., 1985. Properties of the mixed regression estimator when disturbances are not necessarily normal .J.Statist. Planning and Inference. 11:11-15.

SRIVASTAVA, V.K., and UPADHYAYA, S., 1975. Small-disturbance and large sample approximation in mixed regression estimation. Eastern Economic J., 2:261-265.

SWAMY, P.A.V.B., and MEHTA, J.S., 1969. On Theil's mixed regression estimator. J. Amer. Statists. Assoc., 66:273-276.

SARKAR, N., 1992. A new estimator combining the ridge regression and the restricted least squares methods of estimation. Communications in Statistics, Theory and Meth. 21:1987-2000.

SWINDEL, B.F., 1976. Good estimators based on prior information. Communications in Statistics, Theory and Meth. 5 , 1065-1075.

SMITH, G., and CAMPBELL, F., 1980. A critiqueof some ridge regression methods. Journal of the American Statistical Association 75:74-81.

SCHAFFRIN, B., and TOUTENBURG, H., 1990 . Weighted mixed regression. Zeitchrift fur Angewandte Mathematik und Mekhanik 70:735-738

THEIL, H., 1963. On the use of incomplete prior information in regression analysis. J. Am. Stat. Assoc. 58:401-414.

THEIL, H., and GOLDBERGER, A. S., 1961. On pure and mixed statistical estimation in economics Intern Econ Rev 2:65-78.

TOUTENBURG, H., 1973. Lineare Restriktionen .und .Modellwahl. im. allgemeinen linearen Regressionsmodell. Biometrische Zeitschrift, 15:325-342.

TERÄSVIRTA, T., and TOUTENBURG, H., 1980. A note on the limits of a modified Theil estimator. Biometrical J., 22:561-562.

TERÄSVIRTA, T., 1979. Some results on improving the least squares estimation of linear models by a mixed estimation. Discussion Paper 7914, Louvain,CORE.

TERÄSVIRTA, T., 1981. Some results on improving the least squares estimation of linear models by mixed estimation. Scand. J. of Statistics, 8:33-38.

TERÄSVIRTA, T., 1982. Superiority comparisons of homogeneous linear estimators. Comm. Statist. A, 11:1595-1601.

TERÄSVIRTA, T., 1986. Superiority comparisons of heterogeneous linear estimators. Comm. Statist., 15:1319-1336.

TRENKLER, G., 1984 On the performance of biased estimators in the linear regression model with correlated or heteroscedastic errors. Journal of Econometrics 25:179-190.

TOUTENBURG, H., 1982. Prior Information in Linear Models. New York: John Wiley & Sons.

TOUTENBURG, H., 1989. Mean-square-error-comparisons between restricted least squares, mixed and weighted mixed estimators. Universität Dortmund, Fachbereich Statistik, Forschungsbericht, 89/12.

TOUTENBURG, H., TRENKLER, G., and LISKI, E., 1992. Optimal estimation methods under weakened linear restrictions in regression Computational Statistics and Data Analysis, 14:527-536.

WALLACE, T.D., 1972. Weaker criteria and tests for linear restrictions in regression. Econometrica, 40:689-698.

YANCEY, T.A., JUDGE, G.G., and BOCK, M.E., 1973. Wallace's weak mean square error criterion for testing linear restrictions in regression. A tighter bound.Econometrica, 41:1203-1206.

YANCEY, T.A., JUDGE, G.G., and BOCK, M.E., 1974. A meansquare error test when stochastic restrictions are used in regression. Comm. Statist., 3:755-768.

YANG, H., and XU, J., 2009. An alternative stochastic restricted. Liu estimator in linear regression. Statistical .Papers. In online pres, DOI 10.1007/s00362-007-0102-3.

YANG, H., and YALIAN, L., 2010. A new stochastic mixed ridge estimator in linear regression model. In online pres, DOI 10.1007/s00362-008-0169-5.

YANG, H., CHANG, X., and LIU, D., 2009. Improvement of the Liu estimator in .weighted..mixed. regression. Communications in Statistics Theory and Methods.38 (2): 285-292.

ÖZGEÇMİŞ

18.10.1987‘de Adana‘da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana’da tamamladı. 2005 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandı. 2007 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü çift anadal programını kazandı. 2009 yılında matematik bölümünden ikincilikle mezun oldu. 2009 yılında Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2010 yılında çift anadal programından mezun oldu.