ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher KORKMAZ

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİNİN ETKİNLİĞİ AR(1), SUR VE HETEROSCEDASTİC MODELLERLE UYGULAMALAR

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİNİN ETKİNLİĞİ AR(1), SUR VE HETEROSCEDASTİC MODELLERLE UYGULAMALAR

Seher KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez …./…./2013 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	……	.....
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL	Doç. Dr. Deniz ÜNAL	Yrd. Doç. Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİNİN ETKİNLİĞİ AR(1), SUR VE HETEROSCEDASTİC MODELLERLE UYGULAMALAR

Seher KORKMAZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
Yıl: 2013, Sayfa: 120
Jüri : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
: Doç. Dr. Deniz ÜNAL
: Yrd.Doç. Dr. Gülsen KIRAL

Çoklu lineer regresyon modeli ve onun alışılmış en küçük kareler tahmini, hiç şüphesiz istatistikte yaygın şekilde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem bağımlı değişken ile açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi tahmin etmeye olanak sağlar. Genellikle pratikte klasik koşulların geçerli olmadığı görülür. Tüm bu klasik koşulların sağlanamamasının en küçük kareler (EKK) yöntemi üzerinde etkisi olmamasına rağmen, istatistik test sonuçları ve EKK in özellikleri etkilenir. Özellikle, y nin elemanları eşit olmayan varyansa sahip ve/ya da ilişkili olduklarında, var(y) artık skaler varyans-kovaryans matris değildir. Böylece EKK tahmin edici lineer yansız tahmin ediciler sınıfı içinde olmayı garanti edemez. Pratikte, y nin doğru özelliklerini bilmekte zorlanırız. Bu nedenle var(y) daha genel formda olduğunda geçerli tahmini incelemek önemlidir.

Bu tezde, var(y) matrisi skaler varyans-kovaryans matrisi olmadığı durumda, tahminin etkinliğini geliştirmek için genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi tanıtılmış ve görünüşte ilişkisiz regresyon (SUR) ve heteroscedastic modellerde uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, Householder Dönüşümü, AR(1), SUR, Heteroscedastic Modeller.

ABSTRACT

MSc THESIS

EFFICIENCY OF GENERALIZED LEAST SQUARES ESTIMATOR WITH APPLICATIONS TO AR(1), SUR AND HETEROSCEDASTIC MODELS

Seher KORKMAZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
Yıl: 2013, Sayfa: 120
Jury : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Assoc. Prof. Dr. Deniz ÜNAL
: Asst. Prof. Dr. Gülsen KIRAL

The multiple linear regression model and its estimation using ordinary least squares (OLS) is doubtless the most widely used tool in statistics. It allows to estimate the relation between a dependent variable and a set of explanatory variables. Generally, it is seen that the classical conditions need not hold in practice. Although these classical conditions have no effect on the OLS method, they do affect the properties of the OLS estimators and resulting test statistics. In particular, when the elements of $\boldsymbol{y}$ have unequal variances and/or are correlated, var($\boldsymbol{y}$) is no longer a scalar variance-covariance matrix and hence there is no guarantee that the OLS estimator is the most efficient within the class of linear unbiased (or the class of unbiased) estimators. In practice, we hardly know the true properties of $\boldsymbol{y}$. It is therefore important to consider estimation that is valid when var($\boldsymbol{y}$) has a more general form.

In this thesis, the method of generalized least squares (GLS) is introduced to improve upon estimation efficiency when var($\boldsymbol{y}$) is not a scalar variance-covariance matrix and its applications to seemingly unrelated regression (SUR) and heteroscedastic models are analyzed.

Keywords: Generalized Least Squares, Householder Transformation, AR(1), SUR Heteroscedastic Models.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen bana görüş ve deneyimleri ile yol gösteren, değerli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Güzin YÜKSEL'e ve tezimin ilk aşamasında danışmanım olan, görüş ve deneyimlerinden yararlanma fırsatı bulduğum Sayın Prof. Dr. Fikri AKDENİZ'e sonsuz teşekkürler.

Ayrıca çalışmalarımda bana yardımcı olan eşim Sedat BODUR'a ve çalışmalarım boyunca uslu duran doğacak bebeğimize, eğitim ve öğretim hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini esirgemeyen anne-babama teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGER DİZİNİ VI
KISALTMALAR DİZİNİ VIII
1. GİRİŞ 1
1.1.Giriş 1
1.2. Lineer İstatistiksel Model 2
1.3. Bir Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri Ve Varyansı 3
1.4. Standart Lineer Model 4
1.5. $\hat{\beta}$ nın Beklenen Değeri ve Varyansı 6
1.6. σ^2 nin En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 8
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİ 11
2.1. Giriş 11
2.2. Gruplandırılmış Veri 11
2.3. Üç Lineer Model 14
2.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler ve Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicileri 17
2.5. Temel Hesaplama İşlemleri 19
2.6. Householder Dönüşümleri İle Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi 21
2.7. Householder Yönteminin Yeniden İncelenmesi 25
3. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN EKK PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK ÇÖZÜMLERİ 27
3.1. Lineer En Küçük Kareler Problemlerinin Ardışık Çözümleri 27
3.1.1. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi 27

3.1.2. Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi 29
3.2. Lineer Olmayan En Küçük Kareler Problemlerinin Ardışık Çözümleri 34
4. LİNEER OLMAYAN GAUSS-MARKOV TEOREMİ 39
4.1. Giriş 39
4.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Ön Kestirimleri 39
5. LİNEER OLMAYAN GAUSS-MARKOV TEOREMİ 47
5.1. Giriş 47
5.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Ön Kestirimleri 49
5.3. Ön Kestirimde Lineer Olmayan Gauss-Markov Teoremi 54
6. SUR VE HETEROSCEDASTİC MODELLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ EKK TAHMİN EDİCİSİNİN UYGULANIŞI VE ETKİNLİĞİ 57
6.1. Giriş 57
6.2. Basit Kovaryans Yapılı Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicileri 64
6.3. Bir Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicisinin Kovaryans Matrisi için Üst Sınır 73
6.4. Bir SUR Modeldeki UZE için Üst Sınır Problemi 76
7. HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE EKK TAHMİN EDİCİLERİNİN ELDE EDİLMESİ 79
7.1. Householder Dönüşüm Yöntemi 79
7.2. β ve σ^2 nin Yansız Tahmin Edicileri ve Sayısal Hesaplanması 97
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 107
8.1. Sonuçlar ve Öneriler 107
KAYNAKLAR 109
ÖZGEÇMİŞ 111
EKLER 120

ÇİZELGER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 7.1. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin bulunduğu tanımlamalar 81

KISALTMALAR DİZİNİ

EKK : En Küçük Kareler

GME : Gauss Markov Tahmin Edicisi

SUR : Görünüşte İlişkisiz Regresyon

UZE : Kısıtlamasız Zellner Tahmini

GLSP : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Ön Kestirimi

1. GİRİŞ

1.1. Giriş

Bu çalışmada

$y = X\beta + \varepsilon$

genel lineer regresyon modeli ele alınacaktır. Modelde

$y: n \times 1$, $X: n \times k$ tam ranklı,

$E(\varepsilon) = 0$, $Cov(\varepsilon) = \Omega = \sigma^2 \sum$

şeklinde tanımlanır.

$\sum = \sum(\theta)$

formunda olup bilinmeyen fakat tahmin edilebilir θ parametresinin fonksiyonu şeklindedir.

Genel lineer regresyon modeli, uygulamalı pek çok alanda kullanılan, bazı özelliklere sahip farklı modelleri de içinde bulundurur. Seri korelasyonlu model, eşit korelasyonlu model ve heteroscedastic model gibi tek değişkenli lineer regresyon modellerinin yanı sıra çok değişkenli varyans analizi modeli (MANOVA) ve görünüşte ilişkisiz regresyon (SUR) modeli gibi çok değişkenli modeller de bir genel lineer regresyon modelidir. Böyle modeller X matrisinin açıklayıcı değişkeninin özel yapısına ve kovaryans matrisi $\Omega = \sigma^2 \sum(\theta)$ ya göre belirlenir.

Bu modellerin tahmininde, Gauss-Markov teoreminden bilinen Gauss-Markov tahmin edicisi (GME) kullanılır ve şöyle tanımlanır:

$b\ (\sum) = (X' \sum^{-1} X)^{-1} X' \sum^{-1} y$

Bu tahmin edici ∑ matrisi bilindiği zaman, β regresyon katsayı vektörünün en iyi lineer yansız tahmin edicisidir. Ancak çoğu durumlarda ∑ matrisi

bilinmediğinden $b(\sum)$ hesaplanamaz. Böyle durumlarda $\sum$ bilinmeyenine sahip GME olarak tanımlanan genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\sum)$ da, $\sum$ ile $\widehat{\sum}$ tahmin edicisi yer değiştirir. Böylece uygulanabilir duruma gelir.

Farebrother R. W. (1988) ve Kariya T. ve Kurata H. (2004) EKK ve genelleştirilmiş EKK konularına ayrıntılı olarak yer vermişlerdir. Ayrıca, Fletcher (1975) $\hat{\beta}$ için ardışık yöntem belirlemiştir. Bijörck (1967, 1968) tarafından önerilen ikinci ardışık yöntemde yer almaktadır. Puntanen S. ve Styan GPH. (1989) ise alışılmış en küçük kareler tahmin ediciler eşitliğini ve en iyi yansız lineer tahmin ediciyi belirlemişlerdir. Goldberger (1962) ise ön kestirimdeki durumu Gauss-Markov teoremini genişleterek incelemiştir.

1.2. Lineer İstatistiksel Model

Bir Y değişkeninin $X_1, X_2, \dots, X_p$ değişkenlerinin tümü ile lineer ilişkili olduğu varsayılsın.

$$Y_i = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \cdots + X_p\beta_p + \varepsilon \qquad (1.1.)$$

ve p+1 değişkenin n≥p gözlemden oluşan bir kümesinden $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ bilinmeyen parametreleri tahmin etmek gerektiği varsayılsın. Eğer, $X_1, X_2, \dots, X_p$ hatasız ancak Y hatalı gözlenirse, Y nin i-inci gözlenen değeri ile X değişkenlerinin gözlenen i-inci değerleri arasında tam lineer ilişki olacaktır. Böylece

$$Y = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \cdots + X_{ip}\beta_p + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (1.2.)$$

yazılır. Bu eşitlikler birleştirilerek matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ya da

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{1.3.}$$

dir. $E(\varepsilon_i) = 0$ ve $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ $(i = 1,2,\dots,n)$ şeklinde normal dağıldığı söylenebilir.

1.3. Bir Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri Ve Varyansı

$x_1, x_2, \dots, x_m$ diye adlandırılan m-yüzlü ideal bir zar göz önüne alınsın. X değeri zar yuvarlandıktan sonra üst yüzünde kalan değer olsun. Böylece X rasgele değişkeni eşit olasılıkla $x_1, x_2, \dots, x_m$ değerini alır. Ortalaması ya da beklenen değeri

$$\mu = E(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

ve varyansı

$$Var(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2$$

ile verilir.

Burada, henüz olmamış bir olayın olası sonuçları üzerinde durulur. Bu bölümdeki tanımlamalar daha karmaşık dağılımlarla rasgele değişkenlere genelleştirilebilir. Ancak

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (1.4.)$$

şeklinde tanımlanan denklem rasgele X değişkeninin varyansını ifade etmek için yeterlidir. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans

$$Cov(X,Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)] \quad (1.5.)$$

dir.

1.4. Standart Lineer Model

Bölüm 1.2.'de ε vektörünün elemanlarının sıfır ortalama ve σ^2 varyansı ile bağımsız normal dağıldığı belirtildi. O halde

$$E(\varepsilon_i) = 0\,, \quad i = 1,2,\dots,n$$

ve varyans

$$E\left[[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]\right]^2 = \sigma^2\,, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

ya da

$$E({\varepsilon_i}^2) = \sigma^2\,, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

yazılabilir. ε_i ve ε_j nin bağımsızlığı onların sıfır kovaryansa sahip oldukları anlamına gelir.

$$E\left\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]\left[\varepsilon_j - E\left(\varepsilon_j\right)\right]\right\} = 0\,, \qquad i \neq j = 1,2,\dots,n$$

ya da

$$E\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0\,, \qquad i \neq j = 1,2,\dots,n$$

şeklinde gösterilir.

Bu sonuçlar birleştirilirse

$$E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ .\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ .\\ .\\ .\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

ya da

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

ve

$$E\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ .\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}[\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \dots\ \varepsilon_n]\right\} = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}E({\varepsilon_1}^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E({\varepsilon_2}^2) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E({\varepsilon_n}^2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ . & . & \cdots & .\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$$

elde edilir.

Bölüm 1.2.'deki cebirsel model ile bu istatistiksel varsayımlar birleştirilerek standart lineer istatistiksel model elde edilir (Farebrother(1988)).

$$y = X\beta + \varepsilon \quad E(\varepsilon) = 0 \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n \tag{1.6.}$$

dir.

1.5. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ nın Beklenen Değeri ve Varyansı

Standart lineer modelde

$$y = X\beta + \varepsilon \quad E(\varepsilon) = 0 \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$$

β nın alışılmış EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{1.7.}$$

ile verilir. EKK tahmin edicisinin elde edilmesi için

$$\begin{aligned} Q(\beta) = \varepsilon'\varepsilon &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \tag{1.8.}$$

hesaplanır ve aşağıdaki gibi kısmi türevi sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\beta = 0$$
$$X'y = X'X\hat{\beta}$$

$(X'X)^{-1}$ ile soldan çarpılırsa;

$$(X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'X\hat{\beta}$$

Böylece

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

elde edilir.

Şimdi $y = X\beta + \varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \end{aligned} \quad (1.9.)$$

X ve β, ε nun fonksiyonu değildir. Böylece beklenen değer

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]$$

dir. Fakat $E(\varepsilon) = 0$ olduğundan $\hat{\beta}$ nın beklenen değeri

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}) &= \beta + (X'X)^{-1}X'0 \\ E(\hat{\beta}) &= \beta \end{aligned} \quad (1.10.)$$

dır ve $\hat{\beta}_i$ nın beklenen değeri $E(\hat{\beta}_i) = \beta_i$ dir. Ayrıca,

$$bias(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta = 0 \quad (1.11.)$$

olduğundan $\hat{\beta}$, β nın yansız tahmin edicisidir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \hat{\beta} - E(\hat{\beta}) \\ &= \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\delta} &= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta \\ \hat{\delta} &= (X'X)^{-1}X'\varepsilon \end{aligned} \quad (1.12.)$$

şeklinde yazılır. $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$ olmak üzere $\hat{\beta}$ nın varyansı

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= E(\hat{\delta}\hat{\delta}') \\ &= E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')\, X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'I_n X(X'X)^{-1} \\ Var(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \qquad (1.13.)$$

$Var(\hat{\beta})$ nın köşegen üzerindeki ii-inci elemanı $\hat{\beta}_i$ nın varyansını ve $Var(\hat{\beta})$ nın ij-inci elemanı $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\beta}_j$ nın kovaryansını gösterir.

1.6. σ^2 nin En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Önceki bölümlerde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ nin tahmin edicisi ile ilgilenildi. Fakat, standart lineer model bağlamında, σ^2 nin tahmini de düşünülmesi gerekir. σ^2 nin alışılmış EKK tahmin edicisini bulmada matrisin izi kavramı kullanılmalıdır.

Eğer C: $m \times m$ matris ise, bunun izi köşegen elemanlarının toplamıdır.

$$\text{tr (C)}=\sum_{i=1}^{m} C_{ii} \qquad (1.14.)$$

ve izin temel özellikleri kullanılırsa: A: $m \times p$ ve B: $p \times m$ matris olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{tr (AB)} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{ki}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ik}\right) \\ &= \text{tr (BA)} \end{aligned} \qquad (1.15.)$$

dır. Householder yöntemine (Farebrother, 1988 s. 81) göre $X = Q_1 U$ burada $U: (p \times p)$ üst üçgensel matris, $Q_1: (n \times p)$ matris ve ${Q_1}'Q_1 = I_p$ olmak üzere $Q_2: n \times (n - p)$ matris $Q_2'X = 0$, ${Q_1}'Q_2 = 0$ ve ${Q_2}'Q_2 = I_{n-p}$ eşitlikleri sağlanır.

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = Q_2{Q_2}'y$$
$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = Q_2Q_2'y = Q_2t \qquad (t = {Q_2}'y)$$
$$\hat{\varepsilon} = Q_2Q_2'\left(X\hat{\beta} + \varepsilon\right) = Q_2Q_2'X\hat{\beta} + Q_2Q_2'\varepsilon \qquad (Q_2'X = 0)$$
$$\hat{\varepsilon} = Q_2Q_2'\,\varepsilon \tag{1.16.}$$

dır. Ek olarak,

$$\begin{aligned} E(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}') &= E[\, Q_2Q_2'\,\varepsilon\varepsilon'\,Q_2Q_2'\,] \\ &= Q_2Q_2'\,E(\varepsilon\varepsilon')Q_2Q_2' \qquad (E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n) \\ &= Q_2Q_2'\,(\sigma^2 I_n)Q_2Q_2' \\ &= \sigma^2 Q_2Q_2'Q_2Q_2' \qquad ({Q_2}'Q_2 = I_{n-p}) \\ &= \sigma^2 Q_2Q_2' \end{aligned} \tag{1.17.}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = E[tr(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})] &= E[tr(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}')] \\ &= tr[E(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}')] = tr(\sigma^2 Q_2Q_2') \\ &= \sigma^2 tr(Q_2Q_2') = \sigma^2 tr(I_{n-p}) \end{aligned}$$

ve

$$E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = (n-p)\sigma^2 \tag{1.18.}$$

elde edilir. Böylece σ^2 nin alışılmış EKK tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}\prime\hat{\varepsilon}}{n-p} \tag{1.19.}$$

dir. $\hat{\sigma}^2$, σ^2 nin yansız tahmin edicisidir ve $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ sağlanır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİ

2.1. Giriş

Bölüm 1'de standart lineer modelde alışılmış EKK tahmin edicisinden bahsedildi. Ayrıca, $\hat{\beta}$ nın beklenen değeri, varyansı ve σ^2 nin alışılmış EKK tahmin edicisi konuları üzerinde de duruldu. Bu bölümde ise Householder yöntemi ile alışılmış EKK tahmin edicisi incelenecektir.

2.2. Gruplandırılmış Veri

1.bölüm de aşağıdaki standart lineer model tanıtıldı.

$$y = X\beta + \varepsilon \quad E(\varepsilon) = 0 \quad E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$$

Daha sonraki kolaylık için Δ alt sembolünü eklenerek,

$$y_\Delta = X_\Delta\beta + \varepsilon_\Delta \quad E(\varepsilon_\Delta) = 0 \quad E(\varepsilon_\Delta\varepsilon_\Delta') = \sigma^2 I_{n_\Delta} \tag{2.1.}$$

modeli elde edilir. Burada; $y_\Delta : (n_\Delta \times 1)$ Y değişkenindeki gözlemlerin matrisi, $X_\Delta : (n_\Delta \times p)$ X değişkenindeki gözlemlerin matrisi, $\beta : (p \times 1)$ parametreler vektörü ve ε_Δ: $(n_\Delta \times 1)$ hatalar vektörüdür.

Bu bölümde, modelde vurgulananların doğru olduğu ancak X_Δ ve y_Δ nın gözlenmediği varsayılacaktır. Bunun yerine, $F_* : (n_* \times n_\Delta)$ sıfır ve birlerin matrisi olmak üzere; $(n_* \times p)$ matris $X_* = F_* X_\Delta$ ve $(n_* \times 1)$ matris $y_* = F_* y_\Delta$ gözlemlenebilir. Örneğin, $n_* = 3$, $n_\Delta = 6$ ve p=2 ve eğer,

$$F_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece orijinal veri matrisleri (X_Δ , y_Δ) gözlenmez.

$$X_\Delta = \begin{bmatrix} 1\ x_1 \\ 1\ x_2 \\ 1\ x_3 \\ 1\ x_4 \\ 1\ x_5 \\ 1\ x_6 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \qquad y_\Delta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Fakat sadece

$$X_* = F_* X_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & x_1 + x_2 \\ 3 & x_1 + x_3 + x_4 \\ 4 & x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$y_* = F_* y_\Delta = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_3 + y_4 \\ y_2 + y_3 + y_5 + y_6 \end{bmatrix}$$

gözlemlenebilir. Şimdi,

$$\varepsilon_* = F_* \varepsilon_\Delta \tag{2.2.}$$

olsun.

$y_\Delta = X_\Delta \beta + \varepsilon_\Delta$ olduğundan,

$\varepsilon_\Delta = y_\Delta - X_\Delta \beta$

$\varepsilon_* = F_* (y_\Delta - X_\Delta \beta)$

$= F_* y_\Delta - F_* X_\Delta \beta$

$= y_* - X_* \beta$ e

olarak model

$$y_* = X_* \beta + \varepsilon_* \tag{2.3.}$$

olur. Burada ε_* ın beklenen değeri sıfırdır.

$\varepsilon_* = F_* \varepsilon_\Delta$

ise buradan;

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_*) &= E(F_*\varepsilon_\Delta) \\ &= F_*E(\varepsilon_\Delta) \\ &= F_*.0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.}$$

ve varyans matrisi

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_*) &= E(F_*\varepsilon_\Delta) \\ E(\varepsilon_*\varepsilon_*') &= E(F_*\varepsilon_\Delta\varepsilon_\Delta' F_*') \\ &= F_*E(\varepsilon_\Delta\varepsilon_\Delta')F_*' \\ &= F_*(\sigma^2 I_{n_\Delta})F_*' \\ &= \sigma^2 F_*F_*' \end{aligned} \tag{2.5.}$$

dır.

Verilen örnek için,

$$F_* = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, böylece

$$E(\varepsilon_*\varepsilon_*') = \sigma^2 F_*F_*' = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2&1&1 \\ 1&3&1 \\ 1&1&4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu sonuçlar birleştirilerek ve $V = F_*F_*'$: $n_* \times n_*$ pozitif yarı tanımlı matris için

$$y_* = X_*\beta + \varepsilon_* \quad E(\varepsilon_*) = 0 \qquad E(\varepsilon_*\varepsilon_*') = \sigma^2 V \tag{2.6.}$$

modeli elde edilir ve bu genel lineer istatistiksel model olarak bilinir (Grob ve Puntanen (2000)).

Bu bölümde, bu model bağlamında σ^2 ve β nın tahmini düşünülecektir. Anlatım kolaylığı için n_* ın yerine n yazılacaktır.

2.3. Üç Lineer Model

Genelde, V, $(n \times n)$ simetrik pozitif yarı tanımlı matristir fakat şimdilik pozitif tanımlı matris olduğu varsayılacaktır. Bu bağlamda L_0, köşegen üzerindeki elemanlar birim olarak $(n \times n)$ alt üçgensel matris ve D köşegen üzerindeki elemanlar pozitif olarak $(n \times n)$ köşegen matris olmak üzere V

$$V = L_0 D L_0' \tag{2.7.}$$

formunda ifade edilebilir.

$$y_0 = {L_0}^{-1} y_* , \quad X_0 = {L_0}^{-1} X_*, \quad \varepsilon_0 = {L_0}^{-1} \varepsilon_* \tag{2.8.}$$

olsun. (2.6) daki genel lineer model

$y_* = X_* \beta + \varepsilon_*$ (soldan ${L_0}^{-1}$ ile çarpılırsa)

$$ {L_0}^{-1} y_* = {L_0}^{-1} X_* \beta + {L_0}^{-1} \varepsilon_* \tag{2.9.}$$

$$y_0 = X_0 \beta + \varepsilon_0$$

formunda olur.

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_0 \varepsilon_0') &= ({L_0}^{-1} \varepsilon_* \varepsilon_*' ({L_0}^{-1})') \\ &= {L_0}^{-1} E(\varepsilon_* \varepsilon_*') ({L_0}^{-1})' \\ &= {L_0}^{-1} \sigma^2 V ({L_0}')^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 {L_0}^{-1} L_0 D L_0' (L_0')^{-1}$$
$$= \sigma^2 D$$

şeklindedir. Buradan

$$y_0 = X_0\beta + \varepsilon_0 \quad E(\varepsilon_0) = 0 \quad E(\varepsilon_0 \varepsilon_0') = \sigma^2 D \tag{2.10.}$$

formunda yeniden yazılabilir ki bu köşegen lineer model olarak adlandırılır.

Ayrıca, $W = D^{-1}$ ve $y = W^{1/2} y_o$, $X = W^{1/2} X_o$ ve $\varepsilon = W^{1/2} \varepsilon_o$ olsun. Böylece köşegen lineer model, standart lineer model formunda yeniden yazılabilir.

$$y_0 = X_0\beta + \varepsilon_0$$
$$W^{1/2} y_0 = W^{1/2} X_0 \beta + W^{1/2} \varepsilon_0$$
$$y = X\beta + \varepsilon$$

elde edilir.

$$E(\varepsilon) = E(W^{1/2} \varepsilon_o)$$
$$= W^{1/2} E(\varepsilon_o)$$
$$= W^{1/2} . 0$$
$$= 0$$

olur ve $W = D^{-1} \rightarrow W^{-1} = D$ olup,

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E(W^{1/2} \varepsilon_o \varepsilon_o' W^{1/2})$$
$$= W^{1/2} E(\varepsilon_o \varepsilon_o') W^{1/2}$$
$$= W^{1/2} \sigma^2 D W^{1/2}$$
$$= W^{1/2} \sigma^2 W^{-1} W^{1/2}$$
$$= \sigma^2 W^{1/2} W^{1/2} W^{-1}$$
$$= \sigma^2 I_n$$

dir. Bu ifadelerden yola çıkılırsa standart lineer model:

$$
\begin{aligned}
&Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \ldots + X_{ip}\beta_p + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma^2\,,\ i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0\,,\ i \neq j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{2.11.}
$$

formunda bulunur.

Köşegen lineer model:

$$
\begin{aligned}
&Y_i{}^0 = X_{i1}{}^0\beta_1 + X_{i2}{}^0\beta_2 + \ldots + X_{ip}{}^0\beta_p + \varepsilon_i{}^0, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i{}^0) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E[(\varepsilon_i{}^0)^2] = \sigma^2 d_{ii}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i{}^0\varepsilon_j{}^0) = 0\,, \qquad i \neq j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{2.12.}
$$

olur ve genel lineer model:

$$
\begin{aligned}
&Y_i{}^* = X_{i1}{}^*\beta_1 + X_{i2}{}^*\beta_2 + \ldots + X_{ip}{}^*\beta_p + \varepsilon_i{}^*, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i{}^*) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E[(\varepsilon_i{}^*)^2] = \sigma^2 v_{ii}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\\
&E(\varepsilon_i{}^*\varepsilon_j{}^*) = \sigma^2 v_{ij}\,, \quad i \neq j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{2.13.}
$$

dir. Böylece üst sembol göz ardı edilirse, $v_{ij} = 0$ olarak sıfır kovaryanslı hatalar düşünülüp genel lineer modelin özel durumu olan köşegen lineer model elde edilir ve $d_{ii} = 1$ alınarak aynı varyanslı hatalar düşünülüp, köşegen lineer modelin özel bir durumu olan standart lineer model elde edilir. Standart lineer modelde hataların eşit varyanslı olduğu ve köşegen lineer modelde eşit varyanslı olmadığı söylenebilir (Plackett(1950)).

2.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler Ve Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Bölüm 1.4.'de alışılmış EKK tahmin edicisi oluşturuldu. Standart lineer modelde alışılmış EKK tahmin edicisi

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

varyans matrisi ile

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

β nın yansız tahmin edicisidir. Varyans matrisini

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

ve Bölüm 1.6.'da $(n-p)\sigma^2$ ağırlıklandırılmamış alışılmış EKK ler rezidü karelerinin toplamı ile yansız bir şekilde tahmin edilebileceği hesaplandı.

$$(n-p)\sigma^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$
$$(n-p)\sigma^2 = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$

dir. $X = W^{1/2}X_o$ ve $y = W^{1/2}y_o$ olmak üzere ağırlıklı alışılmış EKK tahmin edicisi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X_o'W^{1/2}W^{1/2}X_o)^{-1}X_o'W^{1/2}W^{1/2}y_o \\ &= (X_o'WX_o)^{-1}X_o'Wy_o \end{aligned} \quad (2.14.)$$

ve

$$Var(\hat{\beta}) = Var((X_o'WX_o)^{-1}X_o'Wy_o)$$

$(X_o'WX_o)^{-1}X_o'W$=A olsun. $Var(y_o) = \sigma^2 D$ ve $W^{-1} = D$ olduğundan $Var(y_o) = \sigma^2 W^{-1}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= Var(Ay_o) \\ &= AVar(y_o)A' \\ &= (X_o'WX_o)^{-1}X_o'W\sigma^2 DWX_o(X_o'WX_o)^{-1} \\ Var(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X_o'WX_o)^{-1} \end{aligned} \quad (2.15.)$$

elde edilir. Varyans matrisi ile köşegen lineer modelde β nın yansız tahmin edicisi olacaktır ve ağırlıklı alışılmış EKK rezidülerinin ağırlıklı kareleri toplamı

$$(n-p)\hat{\sigma}^2 = (y_0 - X_0\hat{\beta})'(y_0 - X_0\hat{\beta})$$

$(n-p)\sigma^2$ nin yansız tahmin edicisi olacaktır (Chen ve Shao(1993)).

Ayrıca,

$$X_0 = {L_0}^{-1}X_*, \; y_0 = {L_0}^{-1}y_* \, , W = D^{-1}$$

ve

$$\begin{aligned} V^{-1} &= (L_0 D L_0')^{-1} \\ &= (L_0')^{-1}D^{-1}{L_0}^{-1} \\ &= (L_0')^{-1}W{L_0}^{-1} \end{aligned} \quad (2.16.)$$

dir. Böylece genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = \left[X_*'({L_0}^{-1})'W{L_0}^{-1}X_*\right]^{-1}X_*'({L_0}^{-1})'W{L_0}^{-1}y_*$$

ya da

$$\hat{\beta} = (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_* \quad (2.17.)$$

elde edilir ve

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X_*'V^{-1}X_*)^{-1} \qquad (2.18.)$$

varyans matrisi ile genel lineer modelde β nın yansız tahmin edicisi olacaktır ve genelleştirilmiş EKK ler rezidülerinin ağırlıklı kareleri toplamı

$$(n-p)\hat{\sigma}^2 = (y_* - X_*\hat{\beta})'V^{-1}(y_* - X_*\hat{\beta})$$

ile $(n-p)\sigma^2$ nin yansız tahmin edicisi olacaktır.

2.5. Temel Hesaplama İşlemleri

Verilen X_0, y_0 ve $W = D^{-1}$, bölüm 2.2.'nin sonuçlarına göre ağırlıklı alışılmış EKK ifadeleri

$$(y_0 - X_0\beta)'W(y_0 - X_0\beta) = L$$

L amaç fonksiyonu olmak üzere;

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = y_0'Wy_0 - y_0'WX_0\beta - \beta'X_0'Wy_0 + \beta'X_0'WX_0\beta = 0$$
$$= -2(y_0'WX_0)' + 2(X_0'WX_0\beta) = 0$$

$(X_0'WX_0)^{-1}X_0'WX_0\beta = (X_0'WX_0)^{-1}X_0'Wy_0$ ($(X_0'WX_0)^{-1}$ ile soldan çarpıldı)

$$\hat{\beta} = (X_o'WX_o)^{-1}X_o'Wy_o \qquad (2.19.)$$

olarak bulunur.

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X_o'WX_o)^{-1}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y_0 - X_0\hat{\beta})'W(y_0 - X_0\hat{\beta})}{(n-p)}$$

olarak ifade edilebilir.

$X = W^{1/2}X_0$ ve $y = W^{1/2}y_0$ kullanılarak alışılmış EKK ifadeleri belirlenebilir.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$
$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})}{(n-p)}$$

dir. Benzer şekilde, verilen X_*, y_* ve V (Farebrother, 1988 s. 180-181) nin sonuçlarına göre

$V = L_0 D L_0'$, $y_0 = {L_0}^{-1} y_*$, $X_0 = {L_0}^{-1} X_*$ şeklinde düzenlenerek genelleştirilmiş EKK ifadeleri belirlenebilir.

$$\hat{\beta} = (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_*$$
$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X_*'V^{-1}X_*)^{-1}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y_*-X_*\hat{\beta})'V^{-1}(y_*-X_*\hat{\beta})}{(n-p)} \qquad (2.20.)$$

şeklindedir (Plackett (1972)). Alternatif olarak $L = L_0 D^{1/2}$ tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} V &= L_0 D L_0' \\ &= L_0 D^{1/2} D^{1/2\prime} L_0' \\ &= LL' \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} X &= W^{1/2}X_0 \\ &= (D^{-1})^{1/2}{L_0}^{-1}X_* \end{aligned}$$

$$= (D^{1/2})^{-1} {L_0}^{-1} X_*$$
$$= L^{-1} X_* \qquad (2.21.)$$

ve

$$y = W^{1/2} y_0$$
$$= (D^{-1})^{1/2} {L_0}^{-1} y_*$$
$$= (D^{1/2})^{-1} {L_0}^{-1} y_*$$
$$= L^{-1} y_* \qquad (2.22.)$$

şeklinde düzenlenerek alışılmış EKK ifadeleri de elde edilebilir.

2.6. Householder Dönüşümleri İle Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Bölüm 1.5.'de alışılmış EKK tahmin edicisinden bahsedildi. Alışılmış EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$
$$\varepsilon = y - X\beta \qquad (2.23.)$$

olmak üzere

$$\varepsilon'\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 \qquad (2.24.)$$

rezidü kareler toplamını minimum yapan β nın değeridir ve $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ da

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}$$

ifadesinin minimum değeridir.

Şimdi, $X = L^{-1} X_*$, $y = L^{-1} y_*$ olduğunda ise genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X_*'(L^{-1})'\,L^{-1}X_*)^{-1}X_*'(L^{-1})'\,L^{-1}y_* \\ &= (X_*'(L')^{-1}\,L^{-1}X_*)^{-1}X_*'(L')^{-1}\,L^{-1}y_* \\ &= (X_*'(LL')^{-1}\,X_*)^{-1}X_*'(LL')^{-1}\,y_*\end{aligned}$$

ve buradan

$$\hat{\beta} = (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_* \qquad (2.25.)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= y - X\beta \\ &= L^{-1}y_* - L^{-1}X_*\beta \\ &= L^{-1}(y_* - X_*\beta)\end{aligned}$$

formunda olup

$$\begin{aligned}L\varepsilon &= LL^{-1}(y_* - X_*\beta) \\ L\varepsilon &= (y_* - X_*\beta)\end{aligned}$$

ya da

$$X_*\beta + L\varepsilon = y_*$$

a bağlı $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ yi minimum yapan β nın değeridir. $[X_* \quad y_* \quad L]$: $(n \times n + p + 1)$ matrisine p Householder dönüşümünün matrislerinin bir dizisi uygulanarak

$$Q'[X_* \quad y_* \quad L] = \begin{bmatrix} U & t_1 & Q_1'L \\ 0 & t_2 & Q_2'L \end{bmatrix} \qquad (2.26.)$$

matrisine sahip olunur ve burada

$$Q = [Q_1 \quad Q_2]$$

matrisi ilk p kolonu ve kalan *(n-p)* kolonu olarak parçalı $(n \times n)$ ortonormal matris, U: $(p \times p)$ üst üçgensel matris, t_1: $(p \times 1)$ ve t_2: $(n-p) \times 1$ şeklinde vektörlerdir.

$[L'Q_2 \quad L'Q_1]$: $(n \times n)$ matrisine *n-p* Householder dönüşümünün matrislerinin bir dizisi uygulanarak

$$P_0'[L'Q_2 \quad L'Q_1] = \begin{bmatrix} S_{22}' & S_{12}' \\ 0 & S_{11}' \end{bmatrix}$$

matrisine sahip olunur ve burada $P_0 = [P_2 \quad P_1]$ ilk *(n-p)* ve kalan p kolonu olarak parçalı $(n \times n)$ ortonormal matris, S_{22}': $(n-p) \times (n-p)$ üst üçgensel matris, S_{12}': $(n-p) \times p$ matris ve S_{11}': $(p \times p)$ matristir. Sonuç olarak,

$$g_1 = P_1'\varepsilon, \qquad g_2 = P_2'\varepsilon \qquad \text{ve} \qquad g_0 = P_0'\varepsilon$$

olsun. $\hat{\beta}$,

$$X_*\beta + L\varepsilon = y_*$$
$$Q'X_*\beta + Q'LP_0P_0'\varepsilon = Q'y_*$$

denklemine bağlı olarak

$$g'g = \varepsilon'P_0P_0'\varepsilon$$
$$= \varepsilon'\varepsilon$$

ifadesini minimum yapan β nın değeridir.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$
$$Q_1'X_*\beta + Q_1'LP_2g_2 + Q_1'LP_1g_1 = Q_1'y_*$$

ve

$$Q_2'X_*\beta + Q_2'LP_2g_2 + Q_2'LP_1g_1 = Q_2'y_*$$

bağlı ya da

$$Ub + S_{12}g_2 + S_{11/}g_1 = t_1$$

ve

$$S_{22}g_2 = t_2$$

denklemine bağlı

$$g_2'g_2 + g_1'g_1$$

ifadesini minimum yapan β nın değeridir.

S_{22} köşegenler üzerinde sıfırdan farklı elemanlara sahip üst üçgensel matris öyle ki g_2

$$S_{22}g_2 = t_2$$

g_2 ileriye dönük yer değiştirme ile elde edilebilir. g_2 için bu değer ile

$$\varepsilon'\varepsilon = g_2'g_2 + g_1'g_1$$

minimum yapılır.

$$U\beta + S_{12}g_2 + S_{11}g_1 = t_1$$

olduğundan $g_1 = 0$ ile

$$X_*\beta + L\varepsilon = y_*$$

ε a bağlı olarak $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ yi minimum yapan β nın değeridir

$$U\beta = t_1 - S_{12}g_2 \tag{2.27.}$$

yerine yazma ile elde edilebilir (Ouellette (1981)).

2.7. Householder Yönteminin Yeniden İncelenmesi

Bölüm 2.5.'deki yöntem $A_0 = [X_* \quad y_* \quad L]$ nin yapısının kullanımını gerçekleştiremediğinden yetersizdir. Aslında bu yöntem X_*'ın yapısını basitleştirdiğinden $Q_0 = [Q_2 \quad Q_1]$: $(n \times n)$ ortonormal matrisinin transpozu ile A_0 matrisi soldan çarpılır fakat bu durumda L nin yapısı bozulur.

$$Q_0'[X_* \quad y_* \quad L] = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & Q_2'L \\ U & t_1 & Q_1'L \end{bmatrix}$$

$(n \times n)$ $Q_0'L$ matrisi, $(n \times n)$ ortonormal P_0 matrisi ile sağdan çarpılarak alt üçgensel forma dönüştürülür ve burada $Q_0'A_0$ matrisi ile

$$P_{00} = \begin{bmatrix} I_{p+1} & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$(n + p + 1) \times (n + p + 1)$ ortonormal matris sağdan çarpılır.
Böylece,

$$Q_0'[X_* \quad y_* \quad L]P_{00} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & S_{22} & 0 \\ U & t_1 & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$$

S_{11} alt üçgensel matris değil fakat S_{22} alt üçgensel matristir. L nin alt üçgenselliğini sürdürmesi için Givens dönüşümlerini kullanan bir alternatif Paige (1979b) tarafından geliştirilmiştir. Orijinal formunda, bu yöntem

$$Q_0'[X_* \quad y_* \quad L]P_{00} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & S_{22} & 0 \\ K & t_1 & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$$

formunun bir matrisini üretir. Burada K, S_{11} ve S_{22} nin tümü alt üçgensel matrislerdir. Ayrıca, amaçlar için Paige'in yöntemini değiştirmek daha uygundur. Böylece,

$$Q'[X_* \quad y_* \quad F]P_* = \begin{bmatrix} 0 & t_1 & T_{11} & T_{12} \\ U & t_2 & 0 & T_{22} \end{bmatrix} \tag{2.28.}$$

formunun bir matrisini üretir. Burada F, $FF' = V$ yi sağlayan üst üçgensel bir matris ve U, T_{11} ve T_{22} üst üçgensel matrislerdir.

3. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN EKK PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK ÇÖZÜMLERİ

3.1. Lineer En Küçük Kareler Problemlerinin Ardışık Çözümleri

3.1.1. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi

Bölüm 2.4.'te X_* tüm kolon ranklı ve V pozitif tanımlı matris iken β nın genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi olarak

$$\hat{\beta} = (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_*$$

verildi. Şimdi $\hat{\beta}$

$$X_*'V^{-1}X_*\beta = X_*'V^{-1}y_*$$

ya da

$$X_*'V^{-1}(y_* - X_*\hat{\beta}) = 0$$

eşitliklerinin çözümüdür. Böylece

$$a = V^{-1}(y_* - X_*\hat{\beta})$$
$$Va = y_* - X_*\hat{\beta}$$

ya da

$$Va + X_*\hat{\beta} = y_*$$

olmak üzere $b = \hat{\beta}$

$$X_*'a = 0$$

ın çözümüdür.

Bu eşitlikleri birleştirerek X_*, tüm kolon ranklı ve V pozitif tanımlı matris iken β nın genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Bu denklem X_* tüm kolon rankından daha azına sahip ve V pozitif tanımlı matris olmadığı zaman genelleştirilmiş EKK tanımlamak için de kullanılabilir.

$a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ yaklaşık olarak bu denklemi sağlayan a ve b nin değerleri ve $d = a - a^{(1)}$ ve $c = b - b^{(1)}$ olsun. Böylece daha kesin bir çözüm $d = d^{(1)}$ ve $c = c^{(1)}$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d + a^{(1)} \\ c + b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix}$$

çözülerek ve $a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ e bu düzeltmeler eklenerek elde edilebilir.

$$a^{(2)} = a^{(1)} + d^{(1)}$$
$$b^{(2)} = b^{(1)} + c^{(1)}$$

bu ardışık yöntem yeterli kesin sonuçlar elde edilene kadar devam ettirilir. Böylece aşağıdaki genel yöntemler elde edilir:

1. $a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix}$$

çözülür.

2. $i = 1,2,\ldots$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.2.)$$

çözülür. $d^{(i)}$ ve $c^{(i)}$ için

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + d^{(i)}$$
$$b^{(i+1)} = b^{(i)} + c^{(i)}$$

düzenlenir. Eğer $a^{(0)} = 0$ ve $b^{(0)} = 0$ olarak tanımlanırsa ikinci aşama içindeki ilk adım ihmal edilir ve $i = 1,2,\ldots$ yerine $i = 0,1,2,\ldots$ ikinci aşama uygulanır.

3.1.2. Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi

Açıklamadaki kolaylık için $V = I_n$ varsayılacak ve standart lineer modelde β nın alışılmış EKK tahmin edicisi $\hat{\beta}$ nın ardışık değerlendirmesinin sınırlaması üzerinde durulacaktır. Şimdi e$= y - Xb$ tanımlanarak

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

nin lineer olmayan alışılmış EKK problemlerinin ardışık çözümündeki yönteme göre;

$$X'Xb = X'y$$

ya da

$$X'e = 0$$

ın çözümü olduğu incelenecektir. Bu yönteme göre,

1. $e^{(0)} = 0$ ve $b^{(0)} = 0$

belirlenir.

2. $i = 0,1,2,\ldots$ için

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix}$$

çözülür. Bu bağlamda $d^{(i)}$ ve $c^{(i)}$ için

$$e^{(i+1)} = e^{(i)} + d^{(i)}$$
$$b^{(i+1)} = b^{(i)} + c^{(i)}$$

ve

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + d^{(i)}$$
$$b^{(i+1)} = b^{(i)} + c^{(i)}$$

oluşturulur.

$$f^{(i)} = y - e^{(i)} - Xb^{(i)}$$

ve

$$g^{(i)} = -X'e^{(i)}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(i)} \\ g^{(i)} \end{bmatrix}$$

ve $d^{(i)}$ ve $c^{(i)}$ için

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(i)} \\ g^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.3.)$$

eşitliğinin ya da

$$d^{(i)} + Xc^{(i)} = f^{(i)} \quad (3.4.)$$

ve

$$X'd^{(i)} = g^{(i)} \quad (3.5.)$$

eşitliklerinin çözülmesi gerekir. Fakat

$$Xc^{(i)} = f^{(i)} - d^{(i)} \text{ ve } d^{(i)} = f^{(i)} - Xc^{(i)}$$

şeklindedir. Böylece

$$(X'X)^{-1}X'Xc^{(i)} = (X'X)^{-1}X'(f^{(i)} - d^{(i)})$$
$$= (X'X)^{-1}(X'f^{(i)} - X'd^{(i)})$$
$$X'd^{(i)} = g^{(i)}$$

olduğundan

$$c^{(i)} = (X'X)^{-1}(X'f^{(i)} - g^{(i)}) \qquad (3.6.)$$

olur. Böylece $\hat{\beta}$ için ardışık yöntem şu şekilde oluşur:

$e^{(0)} \coloneqq 0$
$b^{(0)} \coloneqq 0$
$i = 0,1,2,\ldots$ için
$f^{(i)} \coloneqq y - e^{(i)} - Xb^{(i)}$
$g^{(i)} \coloneqq -X'e^{(i)}$
$c^{(i)} = (X'X)^{-1}(X'f^{(i)} - g^{(i)})$
$d^{(i)} \coloneqq f^{(i)} - Xc^{(i)}$
$e^{(i+1)} \coloneqq e^{(i)} + d^{(i)}$
$b^{(i+1)} \coloneqq b^{(i)} + c^{(i)}$

burada $c^{(i)}$ yeterince küçük olduğu zaman ve tüm üst simgeler lüzumsuz olduğu zaman tekrarlama durur.

$X = Q_1U$ ve $y = Q_1v + Q_2t$ notasyonlarına (Farebrother, 1988 s. 84) göre
$h^{(i)} = (U')^{-1}g^{(i)}$ ve $k^{(i)} = Q_1{}'f^{(i)}$ olmak üzere,
$c^{(i)} = (X'X)^{-1}(X'f^{(i)} - g^{(i)})$
$= (U'U)^{-1}(X'f^{(i)} - g^{(i)})$
$= U^{-1}(U')^{-1}(X'f^{(i)} - g^{(i)})$
$= U^{-1}[(U')^{-1}X'f^{(i)} - (U')^{-1}g^{(i)}]$

$$c^{(i)} = U^{-1}(k^{(i)} - h^{(i)})$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$d^{(i)} = f^{(i)} - Xc^{(i)}$$
$$Q_1'd^{(i)} = Q_1'f^{(i)} - Q_1'Xc^{(i)}$$
$$Q_1'd^{(i)} = k^{(i)} - Uc^{(i)} = h^{(i)}$$

ve

$$d^{(i)} = f^{(i)} - Xc^{(i)}$$
$$Q_2'd^{(i)} = Q_2'f^{(i)} - Q_2'Xc^{(i)} \qquad (Q_2'X = 0)$$
$$= Q_2'(y - e^{(i)} - Xb^{(i)})$$
$$= Q_2'y - Q_2'e^{(i)} - Q_2'Xb^{(i)}$$
$$= Q_2'(Q_1v + Q_2t) - Q_2'(y - Xb^{(i)})$$
$$= Q_2'Q_1v + Q_2'Q_2t - Q_2'y - Q_2'Xb^{(i)}$$
$$= \mathrm{I} - \mathrm{I} = \mathrm{I}$$
$$Q_2'd^{(i)} = Q_2'f^{(i)} = \mathrm{I}^{\mathrm{i}}$$

elde edilir ve

$$Q_1'd^{(i)} = h^i \Longrightarrow d^{(i)} = Q_1'h^{(i)}$$
$$Q_2'd^{(i)} = \mathrm{I}^{\mathrm{i}} \Longrightarrow d^{(i)} = Q_2'\mathrm{I}^{(\mathrm{i})}$$

şeklindedir ve algoritma şu şekilde oluşturulur:

$e \coloneqq 0$

$b \coloneqq 0$

$i = 0,1,2,\ldots$ için

$$f \coloneqq y - e - Xb$$
$$g \coloneqq -X'e, \quad h: = (U)^{-1}(k - h)$$
$$k \coloneqq Q_1{}'f\ , \quad I \coloneqq Q_2{}'f$$
$$c \coloneqq (U)^{-1}(k - h)$$
$$d \coloneqq Q_1 h + Q_2 I$$
$$e \coloneqq e + d$$
$$b \coloneqq b + c$$

Bu algoritmaların birincisi Fletcher'e (1975) ve ikincisi Bijörck'e (1967, 1968) ve Bijörck ve Golub'e (1967) aittir. Hesaplamalarda tek hassasiyetli aritmetik kullanılırsa her iki algoritmanın $\hat{\beta}$ değeri $b^{(1)} = U^{-1}(U')^{-1}X'y$ ve $b^{(1)} = (U')^{-1}v$ in ilk tahminlerine yakın değer olarak verecektir. Fakat çift hassasiyetli aritmetik kullanılırsa her iki algoritma $\hat{\beta}$ nın tam değerini verecektir. Fletcher kendi karşılaştırmalı çalışmasında, kendi algoritmasının Björck in algoritmasından daha fazla ardışık işleme sahip olduğunu buna rağmen daha kısa sürede ve daha hızlı bir şekilde bu amacı başardığını bulmuştur.

3.2. Lineer Olmayan En Küçük Kareler Problemlerinin Ardışık Çözümleri

Bu bölüme kadar Y değişkeninin $X_1, X_2, \dots, X_p$ değişkenleri ile tam lineer ilişkili olduğu varsayıldı.

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \cdots + X_p\beta_p$$

ve gözlenmiş ilişkileri

$$Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \cdots + X_{ip}\beta_p + \varepsilon_i\ , \qquad i = 1,2, \dots, n$$

EKK metoduna uygulanarak $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ bilinmeyen parametreleri tahmin edildi.

Bu bölümde bu varsayımlar göz ardı edilerek, bu ilişkinin lineer olmaması varsayılacaktır. Örneğin

$$Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + {X_{i2}}^2\beta_3 + \varepsilon_i \ , \ i = 1,2,\dots,n \qquad (3.7.)$$

ya da

$$Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + X_{i3}{\beta_2}^2 + \varepsilon_i \ , \ i = 1,2,\dots,n \qquad (3.8.)$$

eşitliklerine sahip olunur. Bu örneklerin birincisinde $X_{i3} = {X_{i2}}^2$ tanımlanabilir ve

$$Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + X_{i3}\beta_3 + \varepsilon_i \ , \quad i = 1,2,\dots,n \qquad (3.9.)$$

eşitliğine EKK yöntemi uygulanarak β_1, β_2 ve β_3 ün tahminlerini elde edilir.

Fakat ikinci örneği çözmek için $\beta_3 = {\beta_2}^2$ tanımlanarak aynı yol denenirse, β_3 ün tahmin edicisi β_2 nin tahmin edicisinin karesine eşit olmayabilir.

Bu örnekler genelleştirilerek Y nin gözlenen değeri ile bilinmeyen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ parametrelerinin lineer olmayan bir ilişki içinde oldukları varsayılır.

$$y_i = f_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + \varepsilon_i \ , \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (3.10.)$$

dir. Burada f_i gösterimi, $X_1, X_2, \dots, X_p$ i-inci gözlenmiş değerinin bir fonksiyonunu gösterir.

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ nin tahminleri tekrar ardışık bir yöntemle elde edilir. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ için yaklaşık $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)}$ değerine sahip olduğu varsayılsın. $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)}$ hakkında bir Taylor serisinde $f_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ genişletilebilir ve lineer ilişki elde edilir.

$$Y_i \cong f_i^{(k)} + z_{i1}^{(k)}\gamma_1^{(k)} + z_{i1}^{(k)}\gamma_1^{(k)} + z_{i2}^{(k)}\gamma_2^{(k)} + \cdots + z_{ip}^{(k)}\gamma_p^{(k)}, \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$f_i^{(k)} = f_i(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)})$$
$$z_{ij}^{(k)} = z_{ij}(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)})$$

ve

$$\gamma_j^{(k)} = \beta_j - b_j^{(k)} \tag{3.11.}$$

dir. Burada

$$z_{ij}(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p) = \frac{\partial f_i(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p)}{\partial \beta_j}$$

β_j ye göre $f_i(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p)$ nin kısmi türevidir. Örneğin,

$$f_i(\beta_1, \beta_2) = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + X_{i3}{\beta_2}^2$$

ise o zaman

$$z_{i1}(\beta_1, \beta_2) = X_{i1}$$

dir ve

$$z_{i2}(\beta_1, \beta_2) = X_{i2} + 2X_{i3}\beta_2$$

böylece

$$z_{i1}^{(k)} = X_{i1}$$

ve

$$z_{i2}^{(k)} = X_{i2} + 2X_{i3}b_2^{(k)}$$

dir. Bu eşitlikler birleştirilirse

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ f_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11}^{(k)} & z_{12}^{(k)} & \cdots & z_{1p}^{(k)} \\ z_{21}^{(k)} & z_{22}^{(k)} & \cdots & z_{2p}^{(k)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ z_{n1}^{(k)} & z_{n2}^{(k)} & \cdots & z_{np}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1^{(k)} \\ \gamma_2^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ya da

$$y \cong f^{(k)} + Z^{(k)}\gamma^{(k)} + \varepsilon$$

ya da

$$y - f^{(k)} \cong Z^{(k)}\gamma^{(k)} + \varepsilon$$

elde edilir ve böylece

$$\gamma^{(k)} = \beta - b^{(k)}$$

ile

$$c^{(k)} = (Z^{(k)\prime}Z^{(k)})^{-1}Z^{(k)\prime}(y - f^{(k)})$$

olmak üzere

$$c^{(k)} + b^{(k)} = \beta \qquad (3.12.)$$

olacağından β için genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi elde edilir.

4. GENEL LİNEER REGRESYON MODELİ

4.1. Giriş

Bu bölümde genel lineer regresyon modeli ve birkaç özel model tanımlanacaktır.

Genel lineer regresyon modeli: Genel lineer regresyon model aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{4.1.}$$

dir. y: $(n \times 1)$ vektör ve X: $(n \times k)$ tam ranklı bilinen matristir. Burada, ε: $(n \times 1)$ boyutlu hata terimi 0 ortalamalı ve Ω kovaryans matrisli rasgele vektördür.

$$E(\varepsilon) = 0 \text{ ve } Cov(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega \in \mathcal{S}(n) \tag{4.2.}$$

$\mathcal{S}(n)$, $(n \times n)$ pozitif tanımlı matrislerin dizisini gösterir.

Gerektiği zaman, ε nun dağılımı P ile ve .'nın beklenen değeri $E_p(.)$ ya da $E(.)$ ile gösterilir. Kovaryans matris Ω bilinmeyenin fonksiyonu olarak formüle edilir ve genellikle bilinmez. Fakat θ parametresi tahmin edilebilir.

$$\Omega=\Omega(\theta) \tag{4.3.}$$

Ω(.) nın fonksiyonel formunun bilindiği varsayılır.

4.2. Tipik Modeller

Başlangıç olarak, aşağıdaki kovaryans yapısının modellerinin dizisi olduğu düşünülsün.

$$\mathbf{\Omega}=\sigma^2\sum(\theta)$$

ile

$$\sum(\theta)^{-1} = I_n + \lambda_n(\theta)C \text{ ve } \theta \in \Theta \subset R^1 \quad (4.4.)$$

C $(n \times n)$ bilinen simetrik matris, $\lambda = \lambda_{11} = \lambda_n(\theta)$ Θ de sürekli gerçek değerli fonksiyondur. $\sum(\theta)$, herhangi bir $\theta \in \Theta$ için pozitif tanımlıdır.

C nin bilindiği varsayıldığından, genelliğini kaybetmeden köşegen matris olarak gösterilebilir. Görüldüğü gibi, Γ C' yi köşegenleştiren ortogonal matris olsun.

$$\Gamma'C\Gamma = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \equiv D \text{ ile } d_1 \leq \cdots \leq d_n \quad (4.5.)$$

Böylece

$$y = X\beta + \varepsilon ,$$

$$\Gamma'y = \Gamma'X\beta + \Gamma'\varepsilon$$

denklemine dönüştürülerek, $\text{Cov}(\Gamma'\varepsilon) = \sigma^2\Gamma'\sum(\theta)\Gamma$ kovaryans yapısına sahip model elde edilir ve

$$(\Gamma'\sum(\theta)\Gamma)^{-1} = I_n + \lambda_n(\theta)\text{D} \quad (4.6.)$$

şartı sağlanır. $1 + \lambda_n(\theta)d_j$ j-inci köşegen elemanı ile köşegen matristir.

AR(1) Hata Modeli: (4.2.) koşuluna sahip (4.1.) lineer regresyon modelinde hata terimi $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ aşağıdaki process ile üretilen 1.dereceden (AR(1)):

$$\varepsilon_j = \theta\varepsilon_{j-1} + \xi_j \text{ ile } |\theta| < 1 \ (j = 0 \pm 1, \pm 2, \dots.) \quad (4.7.)$$

olsun ve

$$E(\xi_i) = 0, Var(\xi_i) = \tau^2,$$
$$Cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \ (i \neq j).$$

koşulları sağlansın. Böylece, bilindiği gibi Ω kovaryans matrisi

$$\Omega=\tau^2\Phi \text{ ile } \Phi = \Phi(\theta) = \frac{1}{1-\theta^2}(\theta^{|i-j|}) \tag{4.8.}$$

şeklinde tanımlanır ve Φ nın tersi

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta & & & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2-\theta & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1+\theta^2-\theta \\ 0 & & & & -\theta \quad 1 \end{pmatrix} \tag{4.9.}$$

ile gösterilir. Φ^{-1} matrisi (4.4.) formunda değildir. Aslında aşağıdaki gibi

$$\Phi^{-1} = (1-\theta)^2[I_n + \lambda_n(\theta)\mathrm{C} + \Psi(\theta)\mathrm{B}] \tag{4.10.}$$

tanımlanır.

$$\lambda(\theta) = \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \qquad \Psi(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} \text{ ve}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \quad -1 \\ 0 & & & & -1 \quad 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

formundadır.

Eşit Korelasyonlu Model: (4.1.) modelinin ε hata teriminin $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ olduğu varsayılsın.

$$Var(\varepsilon_i) = \tau^2 \text{ ve } Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \tau^2\theta \ \ (i \neq j) \tag{4.11.}$$

koşulunu sağlar ve $\tau^2 > 0$ ve $\theta \in \left(-\frac{1}{(n-1)}, 1\right) \equiv \Theta$, yani, Ω kovaryans matrisi

$$\Omega = \tau^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \theta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12.}$$

şeklinde tanımlanır. Bu kovaryans yapısına sahip model eşit korelasyonlu model olarak adlandırılır. Bu model (4.4.) denkleminin parçasıdır. Çünkü Ω

$$\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \sum(\theta)$$

ile

$$\sum(\theta)^{-1} = I_n + \lambda_n(\theta) 1_n 1_n{}' \tag{4.13.}$$

formundadır ve

$$\sigma^2 = \tau^2(1-\theta),\ \lambda_n(\theta) = \frac{\theta}{1+(n-1)\theta}$$

şartı sağlanır ve $1_n = (1,\dots,1)' : n \times 1$ dir. Burada σ^2 ve λ_n fonksiyonel olarak bağımsızdır.

Heteroscedastic Model: Model (4.1.) aşağıdaki yapıya sahiptir.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} : n \times 1, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} : n \times k,$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} : n \times 1 \tag{4.14.}$$

ve

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p^2 I_{n_p} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(n) \tag{4.15.}$$

p farklı varyansa sahip heteroscedastic model ya da p-eşitlikli heteroscedastic modeldir.

$$y_j : n_j \times 1, \qquad X_j : n_j \times k, \qquad \varepsilon_j : n_j \times 1 \qquad \text{ve} \qquad n = \sum_{j=1}^{p} n_j$$

şartı sağlanır.

Bu model p farklı lineer regresyon modellerinden oluşur ve

$$y_j = X_j \beta_j + \varepsilon_j \tag{4.16.}$$

ile

$$E(\varepsilon_j) = 0 \text{ ve } Cov(\varepsilon_j) = \sigma_j^2 I_{n_j} \qquad (j = 1,\dots,p)$$

şartı sağlanır. Katsayı vektörleri

$$\beta_1 = \cdots = \beta_p \equiv \beta \tag{4.17.}$$

şeklinde sınırlandırılır.

Görünüşte ilişkisiz regresyon (SUR) modeli: (4.1.) deki $y = X\beta + \varepsilon$ modeli aşağıdaki formda olduğu zaman

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} : n \times 1, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_p \end{pmatrix} : n \times k,$$
$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} : k \times 1, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} : n \times 1 \tag{4.18.}$$

kovaryans yapısı ile

$$\Omega = \sum \otimes I_m \text{ ve } \sum = \sigma_{ij} \in \mathcal{S}(p) \tag{4.19.}$$

p-eşitlikli SUR modeldir.

$$y_j : m \times 1, \qquad X_j : m \times k_j, \qquad n = pm \qquad \text{ve} \qquad k = \sum_{j=1}^{p} k_j$$

$\otimes$ Kronecker çarpımı gösterir. Burada $P = (p_{ij}) : a \times b$ ve $Q = (q_{ij}) : c \times d$ matrisleri için, P ve Q nun Kronecker çarpımı

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q \ldots p_{1b}Q \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ p_{a1}Q \ldots p_{ab}Q \end{pmatrix} : ac \times bd \tag{4.20.}$$

şeklinde tanımlanır.

Model (4.18.) p farklı lineer regresyon model ile oluşturulur ve cross-korelasyon yapısı:

$$y_j = X_j\beta_j + \varepsilon_j \tag{4.21.}$$

ile

$$E(\varepsilon_j) = 0,\ Cov(\varepsilon_j) = \sigma_{ij}I_m$$

ve

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij}I_m \quad (i, j = 1, \dots, p) \tag{4.22.}$$

dir.

5. LİNEER OLMAYAN GAUSS-MARKOV TEOREMİ

5.1. Giriş

Bölüm 4'te genel lineer regresyon modelinde

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{5.1.}$$

genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin bazı temel özelliklerine değinildi.

Bu bölümde regresyonda ön tahmin yöntemi ve Gauss-Markov teoreminin lineer olmama durumunda ön tahmini ve tahmini üzerinde durulacaktır.

İlk önce ön tahmin problemini formüle etmek için (5.1.) deki model aşağıdaki model şeklinde genelleştirilir.

$$\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_0 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_0 \end{pmatrix} \tag{5.2.}$$

y_0 ın gelecekteki değerini tahmin etme problemi ele alınsın. Burada

$$E\left(\begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Cov\left(\begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_0 \end{pmatrix}\right) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \Sigma & \Delta' \\ \Delta & \sum_0 \end{pmatrix} \equiv \Phi \tag{5.3.}$$

eşitlikleri varsayılır.

(5.2.) de kullanılan aşağıda verilen üç değişken

$$y: n \times 1, \quad X: n \times k \quad ve \quad X_o: m \times k$$

gözlenebilir değişkenlerdir ve

$$y_o : m \times 1$$

değişkeni için ön tahminde bulunulur. Bunun dışında

$$rankX = k \ ve \ \sum \in \mathcal{S}(n)$$

varsayılır ve burada $\mathcal{S}(n)$, $n \times n$ pozitif tanımlı matrislerin kümesini gösterir. $\sum_0$ bir $m \times m$ matrisi non-negatif tanımlı, $\sigma^2 > 0$ ve $\Delta : m \times n$ dir.

(5.1.) deki β nın tahmin edilme problemi (5.2.) deki y_0'ın ön tahmini problemi ile ilişkilendirilmiştir. Aslında

$$m = k, \quad X_0 = I_k, \quad \Delta = 0 \quad ve \quad \sum_0 = 0 \tag{5.4.}$$

alınırsa $y_0 = \beta$ sonucunu verir. Bu yüzden (5.4.) sağlandığında (5.2.) deki y_0 ı tahmin etme (5.1.) deki β nın tahmin edilmesine eşdeğerdir.

(5.1.) ve (5.2.) için tipik modeller seri korelasyon modeller, heteroscedastic modeller, eşit korelasyonlu modeller ve SUR modellerdir. Ayrıca model (5.2.) deki kayıp gözlemlerin tahmini problemi, model (5.2.) deki y_0 vektörünün kayıp vektör olarak düşünülmesi ile çözülebilir. Bu durumda Φ matrisi genellikle pozitif tanımlı olarak varsayılır.

Model (5.2.) ele alındığında, tahmin probleminde genelleştirilmiş EKK ön kestirimleri (GLSP) için Gauss-Markov'un lineer olmayan türü oluşturulabilir.

Bölüm 5.2. de, önce Model 5.2. altında bir genelleştirilmiş EKK ön tahmini tanımlanır ve daha sonra onun özelliklerini incelenir. Bölüm 5.3. tahminde GMT'nin bir lineer olmayan türünün kurulmasına ayrılmıştır ki o bir genelleştirilmiş EKK ön tahmininin kovaryans matrisinin GMP tarafından aşağıdan sınırlandırılır.

5.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Ön Kestirimleri

Bu bölümde GLSP'yi tanımlanıp ve onun temel özellikleri incelenecektir.

Tahminde Gauss Markov Teoremi: Başlangıç olarak (5.2.) modeline

$$\zeta = \varepsilon \quad ile \quad \zeta_0 = \Delta\sum^{-1}\varepsilon + \varepsilon_0$$

şeklinde verilen dönüşümler uygulanarak model

$$\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_0 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Delta & \sum_0 \end{pmatrix} \tag{5.5.}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$E\left(\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Cov\left(\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}\right) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum & 0 \\ 0 & \sum_0 - \Delta\sum^{-1}\Delta' \end{pmatrix} \equiv \Omega \tag{5.6.}$$

dır. Böylece $(\varepsilon', \varepsilon_0{}')'$ açısından model ele alınabilir. Hata teriminin dağılımına ait varsayımları daha genel bir biçimde ifade edebilmek için $P \equiv \mathcal{L}(.)$ notasyonu .'nın dağılımı olarak gösterilsin.

$\mathcal{P}_{n+m}(\mu, \Psi)$ =ortalaması μ, kovaryans matrisi Ψ olan R^{n+m}'de ki dağılımların kümesidir. (5.7.)

Böylece $(\varepsilon', \varepsilon_0{}')'$ açısından varsayım

$$P = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{P}_{n+m}(0, \Omega) \tag{5.8.}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu hazırlıkla birlikte, öncelikle model (5.5.) deki ön kestirimde Gauss-Markov teoremi oluşturulsun.

$$\widehat{y_0} = \widehat{y_0}(y): R^n \to R^m$$

y_0'ın ön kestirimi y_0'ın vektör-değerli fonksiyondur. Bu fonksiyon gözlemlenebilir y vektörünün uzayı R^n den, ön kestirilen y_0 vektörünün R^m'ye tanımlıdır.

$$E_p(\widehat{y_0}) = E_p(y_0)(= X_0\beta) \tag{5.9.}$$

(5.9.) sağlandığında ön kestirim $\widehat{y_0}$'nın yansız olduğu söylenebilir. P notasyonu beklenen değerin durumu için dağılımı gösterir ve hiçbir karışıklık olmadığı zaman göz ardı edilir. Eğer ön kestirici $\widehat{y_0}$

$$\widehat{y_0} = Cy$$

şartı sağlanırsa lineer olarak adlandırılır ve C m× n rasgele olmayan bir matristir. Ayrıca bir ön kestirici hem lineer hem de yansız ise lineer yansız ön kestirici olarak adlandırılır. Eğer bir lineer ön kestirici $\widehat{y_0} = Cy$ ancak ve ancak C matrisi

$$CX = X_0$$

şartını sağlarsa yansızdır. Böylece y_0'ın lineer yansız kestiricisinin $C_0(X_0)$ sınıfı

$$C_0(X_0) = \{\widehat{y_0} = Cy \mid \text{C m} \times \text{n matristir öyle ki } CX = X_0\} \tag{5.10.}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde GLSP $\widehat{y_0}$ ın etkinliği kovaryans matrisi olan

$$R_p(\widehat{y_0}, y_0) = E_p[(\widehat{y_0} - y_0)(\widehat{y_0} - y_0)'] \tag{5.11.}$$

ile ölçülür. Goldberger (1962) ön kestirimdeki bu durumu Gauss-Markov teoremini genişleterek incelemiştir.

Teorem 5.1. (Ön Kestirimdeki Gauss-Markov Teoremi): $\sum$ ve Δ matrislerinin bilindiği varsayılsın. Ön kestiricinin aşağıdaki formu

$$\widetilde{y_0}(\sum, \Delta) = X_0 b(\sum) + \Delta \sum^{-1} [y - Xb(\sum)] \tag{5.12.}$$

y_0'ın en iyi lineer yansız ön kestiricinin şeklidir.

$$\mathrm{R}(\widetilde{y_0}(\sum, \Delta)\ y_0) \leq R(\widehat{y_0}, y_0) \tag{5.13.}$$

Böylece (5.13.) eşitliği herhangi bir $\widehat{y_0} \in C_0(X_0)$ için sağlanır. Burada (5.12.) deki b($\sum$) aşağıda verilen β'nın Gauss-Markov tahmin edicisidir.

$$\mathrm{b}(\sum)=(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}y$$

İspat:

$\widetilde{y_0}(\sum, \Delta)$ nın bir lineer yansız ön kestirici olduğunu görebilmek için

$$\widetilde{y_0}(\sum, \Delta) = C_* y \tag{5.14.}$$

şeklinde tekrar yazılsın. Burada

$$C_* = X_0(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1} + \Delta\sum^{-1}[I_n - X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}]$$

tanımlansın. Bu durumda C_* ın

$$C_* X = X_0$$

eşitliğini sağladığı görülür.

Daha sonra (5.13.) eşitsizliğini kurmak için $\widehat{y_0} = C_y \in C_0(X_0)$'ı keyfi olarak sabitlenir ve

$$\begin{aligned}\widehat{y_0} - y_0 &= [\widetilde{y_0}(\sum, \Delta) - y_0] + [\widehat{y_0} - \widetilde{y_0}(\sum, \Delta)] \\ &= Y_1 + Y_2 \end{aligned} \tag{5.15.}$$

şeklinde parçalanır. Böylece (5.15.)'in sağ tarafındaki iki terim sırasıyla

$$\begin{aligned}Y_1 &= \widetilde{y_0}(\sum, \Delta) - y_0 \\ &= (X_0 - \Delta\sum^{-1}X)(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}\varepsilon - \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{5.16.}$$

ve

$$\begin{aligned}Y_2 &= \widehat{y_0} - \widetilde{y_0}(\sum, \Omega) \\ &= (C - \Delta\sum^{-1})[I_n - X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}]\varepsilon \end{aligned} \tag{5.17.}$$

şeklinde tanımlanır.

$$V_{ij} = E(Y_i Y_j') \qquad \text{(i,j=1,2)}$$

olsun. O halde

$$\mathrm{R}(\widetilde{y_0}(\sum, \Delta), y_0) = V_{11}$$

ve

$$\mathrm{R}(\widehat{y_0}, y_0) = V_{11} + V_{12} + V_{21} + V_{22}$$

olur. Burada doğrudan hesaplama ile

$$V_{12} = 0 = V_{21}'$$

şeklinde gösterilir. Böylece

$$\mathrm{R}(\widehat{y_0}, y_0) = V_{11} + V_{22} \geq V_{11} = \mathrm{R}(\widehat{y_0}(\sum, \Delta), y_0)$$

elde edilir. Burada V_{11} ve V_{22} sırasıyla

$$V_{11} = \sigma^2[(X_0 - \Delta\sum^{-1}X)(X'\sum^{-1}X)^{-1}(X_0 - \Delta\sum^{-1}X)' + (\sum_0 - \Delta\sum^{-1}\Delta')] \tag{5.18.}$$

ve

$$V_{22} = \sigma^2(C - \Delta\sum^{-1})[\sum - X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'](C - \Delta\sum^{-1})' \tag{5.19.}$$

verilir. Böylece ispat tamamlanır.

(5.12.) deki $\widetilde{y_0}(\sum, \Delta)$ ön kestirici "Gauss-Markov ön kestirici (GMP)" olarak adlandırılır. Aslında koşul (5.4.) gerçekleştiğinde y_0 ön kestirimi β olur ve (5.12.) deki GMP $\widetilde{y_0}(\sum, \Delta)$ da GME b(∑) ya indirgenir. Buna karşın, $C_0(X_0) = C_0(I_n)$ sınıfı yansız lineer tahmin edicilerin sınıfı C_0'a indirgenir. Böylece herhangi bir $\widehat{\beta} \in C_0$ için

$$\begin{aligned} R(\widehat{\beta}, \beta) &\equiv E[(\widehat{\beta} - \beta)(\widehat{\beta} - \beta)'] \\ &\geq E[(\mathrm{b}(\sum) - \beta)(\mathrm{b}(\sum) - \beta)'] \\ &\equiv R(\mathrm{b}(\sum), \beta) = \mathrm{Cov}(\mathrm{b}(\sum)) \\ &= \sigma^2(X'\sum^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \tag{5.20.}$$

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Ön Kestiricileri: Şimdi GLSP leri ele alınsın. ∑ ve Δ bilinmediği zaman y_0 ön kestiricisini tanımlamanın doğal bir yolu GMP $\widetilde{y_0}(\sum, \Delta)$ içindeki bilinmeyen ∑ ve Δ' yı bunların tahmin edicileri ile yer değiştirmektir. Bu bir GLSP'nin tanımlanmasını anımsatır.

Daha özel olarak aşağıdaki formda verilen bir ön kestiricisi

$$\widetilde{y_0}(\hat{\sum}, \hat{\Delta}) = X_0 b(\hat{\sum}) + \hat{\Delta}\hat{\sum}^{-1}[y - Xb(\hat{\sum})] \quad (5.21.)$$

$\hat{\sum}$ ve $\hat{\Delta}$ tahmin edicileri aşağıdaki alışılmış EKK rezidü vektörünün fonksiyonları

$$e = Ny \text{ ile } N = I_n - X(X'X)^{-1}X' \quad (5.22.)$$

ve β için genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\hat{\sum})$

$$b(\hat{\sum}) = (X'\hat{\sum}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\sum}^{-1}y \quad (5.23.)$$

şeklinde verilirse, GLSP $\widetilde{y_0}(\hat{\sum}, \hat{\Delta})$ (5.21.) deki gibi tanımlanır. GLSP $\widetilde{y_0}(\hat{\sum}, \hat{\Delta})$ şu şekilde tekrar yazılır:

$$\widetilde{y_0}(\hat{\sum}, \hat{\Delta}) = C(e)y$$

eşitlikteki $C(e)$

$$C(e) = X_0(X'\hat{\sum}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\sum}^{-1} + \hat{\Delta}\hat{\sum}^{-1}X[I_n - X(X'\hat{\sum}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\sum}^{-1}] \quad (5.24.)$$

şeklinde tanımlanır. Fonksiyon $C(e)$, $C(e)X = X_0$ eşitliğini sağlar. Bu özellik GLSP'lerin sınıfını karakterize eder.

5.3. Ön Kestirimde Lineer Olmayan Gauss-Markov Teoremi

Bu bölümde ön kestirimde lineer olmayan Gauss Markov teoremi anlatılacaktır. Aynı zamanda AR(1) hata modeli uygulaması da verilecektir.

GLSP'nin Parçalanışı: Teoremleri ifade edebilmek için, bu modelde öncelikle GLSP'nin parçalanışı aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_0 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Delta\sum^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Bu modelde

$$P \equiv \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{P}_{n+m}(0, \Omega) \tag{5.25.}$$

$$\Omega = \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum & 0 \\ 0 & \sum_0 - \Delta\sum^{-1}\Delta' \end{pmatrix}' \tag{5.26.}$$

ve X: $(n \times k)$ tam ranklı olduğu varsayılır.

Z: $n \times (n-k)$ matris ve N=$I_n - X(X'X)^{-1}X'$ olmak üzere

$$\text{N= } ZZ' \text{ ve } Z'Z = I_{n-k} \tag{5.27.}$$

olsun. Alışılmış EKK'ler rezidü vektörü e

$$e = ZZ'y = ZZ'\varepsilon \tag{5.28.}$$

şeklinde yazılır. Daha sonra aşağıdaki matris sıklıkla kullanılır.

$$I_n = X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1} + \sum Z(Z'\sum Z)^{-1}Z' \tag{5.29.}$$

Bu denklemde $X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}$ parçası, sıfır uzayı $L(\sum Z)$ olan $L(X)$ in projeksiyon matrisidir. Burada $L(.)$, matrisin sütun vektörleri tarafından gerilen lineer alt uzayını belirtir. (5.29.) denklemi kullanılarak ε vektörü şu şekilde analiz edilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= X(X'\sum^{-1}X)^{-1}X'\sum^{-1}\varepsilon + \sum Z(Z'\sum Z)^{-1}Z'\varepsilon \\ &= XA^{-1}u_1 + \sum B^{-1}u_2 \end{aligned} \tag{5.30.}$$

şeklinde parçalanabilir. Bu parçalanışta

$$A = X'\sum^{-1}X \in \mathcal{S}(k), \qquad B = Z'\sum Z \in \mathcal{S}(n-k) \tag{5.31.}$$

ve

$$u_1 = X'\sum^{-1}\varepsilon: k \times 1, \qquad u_2 = Z'\varepsilon: (n-k) \times 1 \tag{5.32.}$$

şeklinde tanımlanır. $(\varepsilon', \varepsilon_0')'$ dağılımıda verildiğinden ve

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'\sum^{-1} & 0 \\ Z' & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Olduğundan dolayı u_1, u_2 ve ε_0'ın dağılımı

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{P}_{n+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \sum_0 - \Delta\sum^{-1}\Delta' \end{pmatrix} \tag{5.33.}$$

şeklindedir ve böylece u_1, u_2 ve ε_0 karşılıklı olarak ilişkisizdir. Burada $u_1$ve u_2 nin sırasıyla $b(\sum) - \beta$ ve e ile bire-bir karşılık geldiği düşünülürse,

$$b(\sum) - \beta = A^{-1}u_1 \tag{5.34.}$$

ve

$$e = Zu_2 \text{ ya da } u_2 = Z'e \tag{5.35.}$$

olduğu ifade edilebilir.

6. SUR VE HETEROSCEDASTİC MODELLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ EKK TAHMİN EDİCİSİNİN UYGULANIŞI VE ETKİNLİĞİ

6.1. Giriş

Genel olarak bu bölüm aşağıdaki bölümlerin temeli üzerine bir teori geliştirir. Bölüm 6.2. de genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin bazı temel özellikleri üzerinde durulacak. Bölüm 6.3. te genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin kovaryans matrisi için (6.14.) formunun üst sınırı genel düzenleme altında elde edilecek. Sonuçlar sırasıyla Bölüm 6.4. ve Bölüm 6.5.'teki, SUR modelde alışılmış bir şekilde genelleştirilmiş EKK tahmin ediciler için heteroscedastic modelde uygulanacak.

Bölüm 5'te, genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin kovaryans matrisi kesin bir şart altında GME'nin kovaryans matrisi tarafından alttan sınırlandırıldığı gösterilmiştir. İki kovaryans matrisi arasındaki fark, hata teriminin kovaryans matrisindeki bilinmeyen parametrelerin tahmini tarafından sebep olan etkinlik kaybını yansıtır. Bu bölümde, GME'nin göreceli kovaryans matrisi için etkin bir üst sınır türeterek, genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin etkinliğinin değerlendirilmesi problemini düşündük. Böylece türetilen üst sınır, genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin verimliliğinin bir ölçüsü olarak işlev görür. Problemi tam olarak tanımlamak için, Y : $n \times 1$ vektör ve X: $n \times k$ bilinen tam ranklı matris olmak üzere genel lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{6.1.}$$

olsun. $\mathcal{P}_n(0,\Omega)$, 0 ortalamalı ve Ω kovaryans matrisli $\mathcal{R}^n$ de dağılımlar kümesi olsun ve $\mathcal{P}_n(0,\Omega)$ da ε hata teriminin dağılımının olduğunu varsayalım. Yani,

$$\mathcal{L}(\varepsilon) \in \mathcal{P}_n(0,\Omega) \text{ ile } \Omega \in \mathcal{S}(n) \tag{6.2.}$$

olur. $\mathcal{L}(x)$ x in dağılımını gösterir ve $\mathcal{S}(n)$ de pozitif tanımlı matrisler kümesidir. Kovaryans matris Ω bilinmeyenin bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Fakat θ

parametre vektörü ile tahmin edilebilir. O halde, Ω(x) in fonksiyonel şeklinin bilindiği durumlarda

$$\Omega = \Omega(\theta) \tag{6.3.}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Bu modelde, β nın GME'si aşağıdaki gibi verilir.

$$b\ (\Omega) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \tag{6.4.}$$

bu formül uygulamada mümkün değildir. β nın uygulanabilir tahmin edicisi

$$b(\widehat{\Omega}) = (X'\ \widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}\ X'\widehat{\Omega}^{-1}y \tag{6.5.}$$

formunun genelleştirilmiş EKK tahmin edicisidir ve $\widehat{\Omega}$

$$\widehat{\Omega} = \Omega(\hat{\theta}) \tag{6.6.}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(e)$ şeklinde EKK rezidü vektörüne dayalı θ nın bir tahmin edicisidir.

$$e = Ny \text{ ile } N = I_n - X(X'X)^{-1}X' \tag{6.7.}$$

Böylece açık bir şekilde, b($\widehat{\Omega}$) aşağıdaki sınıfa ait olur.

$$C_1 = \left\{ \hat{\beta} = C(e)y \;\middle|\; \begin{matrix} C(.)\ k \times n\ boyutlu\ matris\ değerli\ fonksiyon \\ \mathcal{R}^n \text{ de } C(.)X = I_k\ yı\ sağlar \end{matrix} \right\} \tag{6.8.}$$

Çünkü $b(\widehat{\Omega})$, C(e)=$(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}$ şeklinde tanımlanarak $b(\widehat{\Omega}) = C(e)y$ olarak yazılır.

GLSE $b(\widehat{\Omega})$ nın kovaryans matris

$$R\left(b\left(\widehat{\Omega}\right),\beta\right) = E\left\{\left(b\left(\widehat{\Omega}\right)-\beta\right)\left(b\left(\widehat{\Omega}\right)-\beta\right)'\right\}$$

şeklinde elde edilir. Z nin herhangi bir $n \times (n-k)$ matrisi

$$Z'X = 0, Z'Z = I_{n-k} \text{ ve } Z'Z = N \tag{6.9.}$$

eşitliklerini sağlamış olsun ve verilen X için bu eşitlikler bölüm boyunca sabitlenmiş olacak.

$$\mathcal{Q}_n(0,\Omega) = \left\{ P \in \mathcal{P}_n(0,\Omega) \mid E_p(u_1 \mid u_2) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{L}(\varepsilon)$, $\mathcal{Q}_n(0,\Omega)$ sınıfına ait olduğu durumlarda.

$$u_1 = X'\Omega^{-1}\varepsilon : k \times 1 \text{ ve } u_2 = Z'\varepsilon : (n-k) \times 1$$

bu koşullar altında GLSE $b\left(\widehat{\Omega}\right)$ nın kovaryans matrisi, GME'nin kovaryans matrisi tarafından alttan sınırlandırılır.

$$R\left(b\left(\widehat{\Omega}\right),\beta\right) \geq Cov\left(b(\Omega)\right) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \tag{6.10.}$$

$\mathcal{Q}_n(0,\Omega)$ sınıfının sırasıyla normal dağılım içeren $N_n(0,\Omega)$ eliptik simetrik dağılımın $\varepsilon_n(0,\Omega)$ sınıfını içerdiğini varsayalım.

Bu eşitsizlik ile, genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin sınırlı örnek etkinliği aşağıdaki nitelikler ile ölçülebilir.

$$\delta_1 = R\left(b\left(\widehat{\Omega}\right),\beta\right) - Cov\left(b(\Omega)\right) \tag{6.11.}$$

$$\delta_2 = \left|R\left(b\left(\widehat{\Omega}\right),\beta\right)\right| / \left|Cov\left(b(\Omega)\right)\right| \tag{6.12.}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{k} tr\left\{R\left(b\left(\widehat{\Omega}\right),\beta\right)\left[Cov\left(b(\Omega)\right)\right]^{-1}\right\} \tag{6.13.}$$

$|A|$, A nın determinantını gösterir. Ancak, genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ y de genel lineer olmayan formda olduğundan, δ'ların açık formunu hesaplamak zordur. Aslında genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin kovaryans matrisleri bundan önceki bölümde anlatılan birkaç basit durum dışında analitik olarak elde edilmemiştir. Ayrıca bu tür basit durumlarda bile, δ ların nitelikleri genellikle X ve θ nın oldukça karmaşık olan fonksiyonlarıdır ve böylece bu δ lar genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin etkinliği için ölçümleri izlenebilir değildir.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için, kovaryans matris $R(b(\widehat{\Omega}), \beta)$ için etkili üst sınırı aşağıdaki gibi formüle edeceğiz.

$$R(b(\widehat{\Omega}), \beta) \leq \alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right) Cov(b(\Omega)) \qquad (6.14.)$$

ve yukarıdaki δ ların yerine $b(\widehat{\Omega})$ nın etkinliğinin alternatif ölçütü olarak $\alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right)$ miktarını kabul ederiz. Burada $\alpha \equiv \alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right)$, GLSE $b(\widehat{\Omega})$ ile ilişkilendirilen rastlantısal olmayan gerçek değerli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon genellikle, δ'ların aldığı formdan çok daha basit formdadır ve etkinliğin ölçümünün çözülebilir olması beklenir. Herhangi bir $a \in R^k$ için

$$Var(a'b(\Omega)) \leq R(a'b(\widehat{\Omega}), a'\beta) \leq \alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right) Var(a'b(\Omega))$$

ile

$$R(a'b(\widehat{\Omega}), a'\beta) = E\left\{\left[a'b(\widehat{\Omega}) - a'\beta\right]^2\right\} = a'R(b(\widehat{\Omega}), \beta)a$$

şeklinde ifade edilebilir.

Özellikle $b(\widehat{\Omega}) = (b_1(\widehat{\Omega}), \ldots, b_1(\widehat{\Omega}))'$ nın herbir elemanı $b_j(\widehat{\Omega})$ için

$$Var(b_j(\Omega)) \leq R(b_j(\widehat{\Omega}), \beta_j) \leq \alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right) Var(b_j(\Omega))$$

olduğu söylenebilir. Net bir fikir haline getirmek ve kullanımını göstermek için iki denklemli SUR modelindeki kısıtlamasız Zellner tahmin edici (UZE) için (6.14.) eşitsizliğini ispat olmadan örnek olarak gösterebiliriz.

Örnek 6.1 (İki denklemli SUR model): İki denklemli SUR model aşağıdaki eşitlikler ile verilir.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : n \times 1 \ , \ X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} : n \times k \ , \qquad (6.15.)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : k \times 1 \ , \ \ \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} : n \times 1$$

burada,

$$y_j : m \times 1 \ , X_j : m \times k_j \ , n = 2m \text{ ve } k = k_1 + k_2$$

şeklinde tanımlanır.

Hata teriminin $\Omega = \sum \otimes I_m$ ve $\sum = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{S}(2)$ ile $N_n(0, \Omega)$ normal dağılım olarak dağıldığını varsayıyoruz.

Bu model için UZE $\widehat{\sum}$ = S olan $b(\widehat{\sum} \otimes I_m)$ için bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisidir. Yani,

$$b(S \otimes I_m) = (X'(S^{-1} \otimes I_m)X)^{-1}X'(S^{-1} \otimes I_m)y$$

olup burada

$$S = Y'[I_m - X_*(X_*'X_*)^{+}X_*']Y, \qquad (6.16.)$$

+ işareti Moore-Penrose matris tersini gösterir.

$$X_* = (X_1, X_2) : m \times k \ ,$$

$Y = (y_1, y_2): m \times 2$.

şeklinde tanımlanır.

UZE, sonlu ikinci moment ile yansız genelleştirilmiş EKK tahmin edicisidir ve S matrisi $W_2(\sum, q)$ olarak gösterilen Wishart dağılımıdır. Wishart dağılımı için q$\sum$ ortalama ve q serbestlik derecesi ile

q= $m - rankX_*$

eşitliği sağlanır.

Bölüm 6.3. te UZE'nin aşağıdaki eşitsizliği gösterilecektir.

$$(X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1} \leq Cov(b(S \otimes I_m)) \leq \alpha(b(S \otimes I_m))(X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1} \quad (6.17.)$$

burada

$$\alpha\big(b(S \otimes I_m)\big) = E\left[\frac{(w_1+w_2)^2}{4w_1w_2}\right] = 1 + \frac{2}{q-3} \quad (6.18.)$$

şeklinde tanımlanır ve $w_1 \leq w_2$, $W = \sum^{-1/2} S \sum^{-1/2}$ matrisinin gizli köklerini gösterir. Ayrıca, $(X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1}$ matrisi GME $b(\sum \otimes I_m)$ nin kovaryans matrisidir. Bu eşitsizlik göz önünde bulundurularak GME ile ilgili UZE $b(S \otimes I_m)$ nin etkinliğinin bir ölçümü olarak (6.18.) deki üst sınır $\alpha = \alpha_p = \alpha\, b(S \otimes I_m)$ yi kabul etmek uygundur. Aslında X ne olursa olsun UZE nin kovaryans matrisinin [1+2/(q-3)] $(X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1}$ den daha büyük olmadığını görebiliriz. Örneklem büyüklüğü genişken, UZE nin neredeyse GME kadar etkin olduğu açıkça görülür. Çünkü üst sınır, q nun monoton azalan fonksiyonudur ve

$\lim_{q\to\infty} \alpha_q = 1$

şartı sağlanır.

Ayrıca δ'lara gelince, (6.11.), (6.12.), (6.13.) te olduğu gibi aşağıdaki eşitsizlikler elde edilebilir.

1. δ_1 için sınır :

$$0 \leq \delta_1 \leq \frac{2}{q-3}(X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1} \tag{6.19.}$$

2. δ_2 için sınır :

$$1 \leq \delta_2 \leq \left[1 + \frac{2}{q-3}\right]^k \tag{6.20.}$$

3. δ_3 için sınır :

$$0 \leq \delta_3 \leq 1 + \frac{2}{q-3} \tag{6.21.}$$

Ayrıca UZE'nin $b_j(S \otimes I_m)$: $k_j \times 1$ $(j = 1,2)$ her alt vektörü için (6.17.) eşitsizliğinden sonra aşağıdaki eşitsizlik

$$Cov(b_j(\sum \otimes I_m)) \leq Cov(b_j(S \otimes I_m)) \leq \left\{1 + \frac{2}{q-3}\right\} Cov(b_j(\sum \otimes I_m)) \tag{6.22.}$$

yazılabilir. Böylece örnek (6.1.) burada sonlandırılır.

(6.5) de verilen genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ için aşağıdaki iki şarttan biri gerçekleştiğinde (6.14.) teki $\alpha(b(\widehat{\Omega}))$ üst sınır elde edilir.

(1) $\widehat{\Omega}$ verilmişken $b(\widehat{\Omega})$'nın koşullu beklenen değeri ve kovaryans matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$E[\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,] = \beta \text{ ve } Cov(\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,) = H(\widehat{\Omega}, \Omega) \tag{6.23.}$$

Burada H: $S(n) \times S(n) \to S(k)$ fonksiyonu

$$H = H(\widehat{\Omega}, \Omega)$$
$$= (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\widehat{\Omega}^{-1}X(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1} \quad (6.24.)$$

şeklinde tanımlanır. Sonuç olarak H ın yapısını basit kovaryans yapı diye adlandırırız.

(2) Kovaryans matris $\Omega=\Omega(\theta_1, \theta_2)$ aşağıdaki gibidir.

$$\Omega=\theta_1\sum(\theta_2) \quad (6.25.)$$

burada

$$\sum(\theta_2)^{-1} = I_n + \lambda_n(\theta_2)C \text{ ve } \theta_2 \in \theta$$

şeklinde tanımlanır. C matrisi $n \times n$ bilinen simetrik matris ve θ, R^1'de bir küme ve λ_n'de θ üzerinde sürekli gerçel değerli bir fonksiyon olur.

(6.23.) ile (6.24.) koşulları oldukça kısıtlayıcı görünmesine rağmen X ve Ω belirli yapılara sahipken, bazı önemli genelleştirilmiş EKK tahmin edicileri bu koşulu sağlarlar. Tipik örnekleri SUR modelde UZE ve heteroscedastic modelde kısıtlı olmayan genelleştirilmiş EKK tahmin edicisidir.

6.2. Basit Kovaryans Yapılı Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicileri

Bu bölümde, basit kovaryans yapıya sahip genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin bir sınıfı tanımlanacak ve onun temel özelliklerini incelenecek.

Gauss-Markov teoreminin lineer olmayan türü:

Aşağıdaki lineer regresyon modeli

$$y = X\beta + \varepsilon$$

ve

$$\mathcal{L}(\varepsilon) \in \mathcal{P}_n(0,\Omega) \text{ ve } \Omega = \Omega(\theta) \in \mathcal{S}(n) \qquad (6.26.)$$

olmak üzere $y: n \times 1$ ve $X: n \times k$ bilinen tam ranklı matris olsun. C_3, (6.23.) ile (6.24.) deki basit kovaryans yapıya sahip olan şekil (6.5) deki genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin bir sınıfı olsun.

$$C_3 = \{b(\widehat{\Omega}) \in C_1 \mid E[\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,] = \beta \text{ ve } Cov(\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,) = H(\widehat{\Omega}, \Omega)\} \qquad (6.27.)$$

$E[\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,] = \beta$ nın her iki tarafının beklenen değerinin alınması ile

$$E[b(\widehat{\Omega})] = \beta$$

elde edilir ve C_3'deki genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$'nın yansızlığı görülür. Bu nedenle koşullu kovaryans matris $H(\widehat{\Omega}, \Omega)$

$$H(\widehat{\Omega}, \Omega) = E\{(b(\widehat{\Omega}) - \beta)(b(\widehat{\Omega}) - \beta)' \mid \widehat{\Omega}\}$$

şeklinde yazılabilir ve $H(\widehat{\Omega}, \Omega)$ nın beklenen değeri, koşulsuz kovaryans matrisini verir.

$$Cov\left(b(\widehat{\Omega})\right) = E[\, H(\widehat{\Omega}, \Omega)] \qquad (6.28.)$$

$H(\widehat{\Omega}, \Omega)$ koşullu kovaryans matris olarak adlandırılmasının nedeni aslında bu özelliğin tüm lineer yansız tahmin ediciler ile paylaşılmasına dayanır. Yani $C_0 \subset C_3$ olur.

$$C_0 = \{\hat{\beta} = CY \mid C\ k \times n\ matris\ CX = I_k\} \qquad (6.29.)$$

yansız lineer tahmin edici sınıfıdır. Bunu görmek için, ilk önce şunu dikkate alalım. Lineer yansız tahmin edici $\hat{\beta} = CY$, $\widehat{\Omega}_0 = [C'C + N]^{-1}$ ile bir genelleştirilmiş EKK

tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega}_0)$ dır. $\widehat{\Omega}_0$ matrisi rasgele olmadığından verilen $\widehat{\Omega}_0$ $b(\widehat{\Omega})$ nın koşullu dağılımı koşulsuz olanı ile aynıdır. Bu yüzden $C_0 \subset C_3$ olmak üzere

$$E\left[\, b(\widehat{\Omega}_0) \mid \widehat{\Omega}_0 \,\right] = \beta \text{ ve } Cov\left(\, b(\widehat{\Omega}_0) \mid \widehat{\Omega}_0 \,\right) = H(\widehat{\Omega}_0 \,, \Omega) \qquad (6.30.)$$

yazılır. X ve Ω in yapısını ayırt etmeksizin elde edildiğine dikkat edelim. Tipik örnekleri kovaryans matrisi ile GME $b(\widehat{\Omega})$ dır.

$$H(\Omega \,, \Omega) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (6.31.)$$

ve alışılmış EKK tahmin edicisi $b(I_n) = (X'X)^{-1}X'y$ nin kovaryans matrisi de

$$H(I_n, \Omega) = (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \qquad (6.32.)$$

dir. C_3 sınıfındaki bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin (6.28.) deki kovaryans matrisi GME $b(\Omega)$ tarafından aşağıda sınırlanır.

Teorem 5.1: Herhangi bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega}) \in C_3$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$H(\Omega \,, \Omega) \leq H(\widehat{\Omega} \,, \Omega) \qquad (6.33.)$$

ve böylece aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$Cov(b(\Omega)) \leq Cov(b(\widehat{\Omega})) \qquad (6.34.)$$

İspat: Aşağıdaki matris tanımı kullanılarak

$$I_n = X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} + \Omega Z(Z'\Omega Z)^{-1}Z' \qquad (6.35.)$$

sonuçları

$$
\begin{aligned}
H\left(\widehat{\Omega}, \Omega\right) &= (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}\Omega\widehat{\Omega}^{-1}X\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1} \\
&= (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}[X\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}X'\left(X'^{\widehat{\Omega}^{-1}}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1} + \\
&\Omega Z(Z'\Omega Z)^{-1}Z'] \times \Omega\,\widehat{\Omega}^{-1}X(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1} \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} + \\
&(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}\Omega Z(Z'\Omega Z)^{-1}Z'\Omega\widehat{\Omega}^{-1}X(X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1} \qquad (6.36.) \\
&\geq (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \\
&= H(\Omega, \Omega)
\end{aligned}
$$

eşitsizlik (6.36.) nın ikinci terimi kesin non-negatif olduğundan eşitsizlik böyle yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicilerinin Örneği: C_3 sınıfı SUR modelindeki UZE ve heteroscedastic modeldeki sınırlandırılmamış genelleştirilmiş EKK tahmin ediciyi içeren birkaç tipik genelleştirilmiş EKK tahmin edicileri içerir.

Örnek 6.2 (Heteroscedastic model): Bu örnekte, hata teriminin dağılımı normal iken heteroscedastic modeldeki sınırlandırılmamış genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin C_3 sınıfına ait olduğu gösterildi. Burada heteroscedastic model aşağıda verildiği gibi düşünülür.

$$
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} : n \times 1, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{pmatrix} : n \times k
$$

$$
\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} : n \times 1
$$

$$
\Omega = \Omega(\square) = \begin{pmatrix} \theta_1 I_{n1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_p I_{np} \end{pmatrix} \in S(n) \qquad (6.37.)
$$

Yukarıdan $n = \sum_{j=1}^{p} n_j, y_j : n_j \times 1, X_j : n_j \times k, \varepsilon_j : n_j \times 1$ ve

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_p \end{pmatrix} : p \times 1$$

şeklinde tanımlanır. ε hata teriminin normal dağıldığı varsayılır.

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = N_n(0, \Omega)$$

kısıtlanmamış genelleştirilmiş EKK tahmin edicide $\widehat{\Omega} = \Omega(s)$ alınırsa genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ elde edilir.

$$s: (s_1^2, \dots, s_p^2)' : p \times 1 \tag{6.38.}$$

ve burada

$$\begin{aligned} s_j^2 &= y_j' \left[I_{nj} - X_j \left(X_j' X_j \right)^+ X_j' \right] y_j / q_j \\ &= \varepsilon_j' \left[I_{nj} - X_j \left(X_j' X_j \right)^+ X_j' \right] \varepsilon_j / q_j \end{aligned} \tag{6.39.}$$

$$q_j = n_j - rank X_j$$

şeklinde tanımlanır. $\widehat{\Omega}$, verildiğinde $b(\widehat{\Omega})$ nin koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} E\left[b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega} \right] &= \beta + (X' \widehat{\Omega}^{-1} X)^{-1} E(X' \widehat{\Omega}^{-1} \varepsilon \mid \widehat{\Omega}) \\ &= \beta + (X' \widehat{\Omega}^{-1} X)^{-1} E(X' \widehat{\Omega}^{-1} \varepsilon \mid s) \end{aligned} \tag{6.40.}$$

son eşitlikte $\widehat{\Omega}$ ve s arasında karşılıklı bire-bir uygunluktan dolayı yazılabilir. $\widehat{\Omega}$ matrisinin yapısını ve X_i', ε_i ve s_j^2 arasındaki bağımsızlık kullanılarak

$$E(X'\widehat{\Omega}^{-1}\varepsilon \mid s) = \sum_{j=1}^{p} s_j^{-2}\, E(X_j'\varepsilon_j \mid s)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} s_j^{-2}\, E(X_j'\varepsilon_j)$$
$$=0$$

elde ederiz ve (6.40.) denkleminde yerine yazılarak

$$E\left[b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\right] = \beta \qquad (6.41.)$$

olduğu ispatlanır.

Benzer şekilde

$$E(X'\widehat{\Omega}^{-1}\varepsilon\varepsilon'\widehat{\Omega}^{-1}X \mid \widehat{\Omega}) = X'\widehat{\Omega}^{-1}\Omega\widehat{\Omega}^{-1}X \qquad (6.42.)$$

olduğu kolaylıkla ispatlanır. Bu da şu anlama gelir:

$$Cov\left(b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\right) = H(\widehat{\Omega}, \Omega) \qquad (6.43.)$$

Böylece, (6.41.) ve (6.43.) ten kısıtlanmamış genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ nın C_3'e ait olduğu görülür ve

$$C_3 = \left\{b(\widehat{\Omega}) \in \mathrm{C}_1 \mid E\left[b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\right] = \beta \text{ ve } Cov\left(b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\right) = H(\widehat{\Omega}, \Omega)\right\} \qquad (6.44.)$$

denklemidir.

Böylece Teorem (6.1.) ile aşağıdaki iki eşitsizlik elde edilir.

$$Cov(b(\Omega)) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = H(\Omega, \Omega)$$
$$\leq H(\widehat{\Omega}, \Omega) = Cov\left(b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\right) \qquad (6.45.)$$

$$Cov(b(\Omega)) \leq Cov\left(b(\widehat{\Omega})\right) \qquad (6.46.)$$

dir. Sonrasında her iki tarafın beklenen değeri alınır.

Sonuç olarak, kısıtlanmamış genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ nın koşullu dağılımının normal olduğu daha sonraki konuda tartışılacaktır. Yani,

$$\mathcal{L}(b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}) = N_k(\beta, H(\widehat{\Omega}, \Omega)) \tag{6.47.}$$

Örnek 6.3 (SUR Model): Bu örnek hata teriminin normal dağıldığı varsayımı altında bir SUR modelindeki UZE'nin C_3 sınıfına ait olduğunu gösterir. SUR model burada aşağıdaki gibi verilir

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} : n \times 1, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_p \end{pmatrix} : n \times k$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} : n \times 1, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \sum \otimes I_m \; ve \; \sum = (\sigma_{ij}) \in S(p) \tag{6.48.}$$

$$y_j : m \times 1, X_j : m \times k_j, \; n = pm \; ve \; k = \sum_{j=1}^{p} k_j$$

şeklinde tanımlanır.

ε hata teriminin normal dağıldığı varsayılır.

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = N_n(0, \sum \otimes I_m)$$

UZE, $\widehat{\Omega} = \widehat{\sum} \otimes I_m$ ve $\widehat{\sum} = S$ ile bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ dır. S matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S = Y' N_* Y = U' N_* U \tag{6.49.}$$

burada,

$$Y = (y_1, \dots, y_p): m \times p,$$
$$U = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p): m \times p,$$
$$N_* = I_m - X_*(X_*'X_*)^+X_*': m \times m,$$
$$X_* = (X_1, \dots, X_p): m \times k. \qquad (6.50.)$$

Tekrar hatırlamak için şunu ifade edelim:

$$\mathcal{L}(S) = W_p(\sum, q) \text{ ile } q = m - rankX_* \qquad (6.51.)$$

$W_p(\sum, q)$, q serbestlik dereceli ve $q\sum$ ortalamalı Wishart dağılımını gösterir.

UZE'nin koşullu beklenen değerini hesaplamak için ilk önce

$$X_j'N_* = 0 \text{ herhangi bir } j = 1, \dots, p \text{ için} \qquad (6.52.)$$

olduğunu hatırlatalım ve böylece S istatistiği problem (6.2.2) deki $X_i'\varepsilon_j'$ lerden bağımsızdır. Bundan dolayı örnek 6.2. dekine benzer yolla

$$E(X'\widehat{\Omega}^{-1}\varepsilon \mid \widehat{\Omega}) = E[X'(S^{-1} \otimes I_m)\varepsilon \mid S]$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} s^{1j}\, E\left(X_1'\varepsilon_j \mid s\right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} s^{pj}\, E(X_p'\varepsilon_j \mid s) \end{pmatrix} \text{ ile } S^{-1} = (s^{ij})$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} s^{1j}\, E\left(X_1'\varepsilon_j\right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} s^{pj}\, E(X_p'\varepsilon_j) \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.53.)$$

elde edilir. UZE'nin koşullu yansızlığı elde edilirken, ilk eşitlikte $\widehat{\Omega}$ ve S arasında bire-bir karşılık gelme ve üçüncü $X_i'\varepsilon_j'$ ler ve S arasındaki bağımsızlık kullanılır.

Benzer şekilde

$$E[(X'(S^{-1} \otimes I_m))\varepsilon\varepsilon'(S^{-1} \otimes I_m)X \mid S] = X'(S^{-1}\sum S^{-1} \otimes I_m)X \qquad (6.54.)$$

yazılabilir. Bu şu anlama gelir:

$$Cov(\, b(S \otimes I_m) \mid S\,) = H(S \otimes I_m, \sum \otimes I_m) \qquad (6.55.)$$

Böylece UZE de C_3 sınıfındandır ve

$$C_3 = \{b(\widehat{\Omega}) \in C_1 \mid E[\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,] = \beta \text{ ve } Cov(\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,) = H(\widehat{\Omega}, \Omega)\} \qquad (6.56.)$$

dır.

(6.45.) ve (6.46.) daki iki eşitsizlik sırasıyla

$$Cov(b(\sum \otimes I_m)) = (X'(\sum^{-1} \otimes I_m)X)^{-1} = H(\sum \otimes I_m, \sum \otimes I_m)$$
$$\leq H(S \otimes I_m, \sum \otimes I_m) = Cov(b(S \otimes I_m) \mid S) \qquad (6.57.)$$

ve

$$Cov(b(\sum \otimes I_m)) \leq Cov(b(S \otimes I_m)) \qquad (6.58.)$$

şeklinde verilir ve yine UZE'nin koşullu dağılımının normal olduğu görülür. Yani

$$\mathcal{L}(\, b(S \otimes I_m) \mid S\,) = N_k(\beta, H(S \otimes I_m, \sum \otimes I_m)) \qquad (6.59.)$$

dir.

6.3. Bir Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicisinin Kovaryans Matrisi için Üst Sınır

Bu bölüm, C_3 sınıfında genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ için

$$Cov(b(\widehat{\Omega})) \leq \alpha(b(\widehat{\Omega}))Cov(b(\Omega)) \tag{6.60.}$$

formundan etkili bir üst sınır elde etmeye ayrılmıştır.

Başlangıç için

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{6.61.}$$

ile

$$\mathcal{L}(\varepsilon) \in \mathcal{P}_n(0,\Omega) \text{ ve } \Omega = \Omega(\theta) \in \mathcal{S}(n)$$

sabit modeli kullanılır. $y: n \times 1$ ve $X: n \times k$ bilinen tam ranklı matristir. Genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega}) \in C_3$, (5.60.) gibi üst sınır elde etmenin bir yolu aşağıda verilen koşullu kovaryans matris için üst sınır elde etmektir.

$$Cov(\, b(\widehat{\Omega}) \mid \widehat{\Omega}\,) = H(\widehat{\Omega}, \Omega)$$

GME b (Ω) nın kovaryans matrisi ile ilişkili olarak

$$Cov(b(\Omega)) = H(\Omega,\Omega) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

dir.

$\widehat{\Omega}$ nın gerçek değerli rasgele bir fonksiyonunun

$$L(\widehat{\Omega}, \Omega) : \mathcal{S}(n) \times \mathcal{S}(n) \to [0, \infty)$$

şeklinde olduğu varsayılsın. $\widehat{\Omega}$ ve Ω ile aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$H(\widehat{\Omega}, \Omega) \leq L(\widehat{\Omega}, \Omega) H(\Omega, \Omega) \tag{6.62.}$$

(6.62.) yi sağlayan herhangi bir L için, $L(\widehat{\Omega}, \Omega)$ nın beklenen değeri (6.60.) daki üst sınırlardan biridir. (6.62.) nin her iki tarafının beklenen değeri alınırsa

$$\alpha\left(b(\widehat{\Omega})\right) = E\{L(\widehat{\Omega}, \Omega)\}$$

olmak üzere

$$Cov(b(\widehat{\Omega})) \leq \alpha(b(\widehat{\Omega}))Cov(b(\Omega))$$

elde edilir. Böylece elde edilen $\alpha(b(\widehat{\Omega}))$ nın bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\Omega})$ ile ilişkili rasgele olmayan pozitif fonksiyon olduğu açıktır. Böylece problem, (6.62.) yi gerçekleştiren $L(\widehat{\Omega}, \Omega)$ üst sınırların arasından etkin birini bulmaya dönüşür.

Böyle bir L fonksiyonu her zaman vardır. L'nin en uygun seçimi aşağıda verilen matrisin en büyük gizli köküdür.

$$H(\Omega, \Omega)^{-1/2} H(\widehat{\Omega}, \Omega) H(\Omega, \Omega)^{-1/2} \tag{6.63.}$$

Çünkü (6.62) eşitsizliği

$$H(\Omega, \Omega)^{-1/2} H(\widehat{\Omega}, \Omega) H(\Omega, \Omega)^{-1/2} \leq L(\widehat{\Omega}, \Omega) I_k \tag{6.64.}$$

eşitsizliğine denktir. Bu, L'nin bu doğal seçimi olmasına rağmen, genelde bu karmaşık bir yolla X açıklayıcı değişken matrisine dayandığından kullanılmaz.

Böylece genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin etkinliğinin işlenebilir bir ölçümü olamaz.

Değişkenlerin Azaltılması: Bu zorluğu önlemek için, önce değişkenleri aşağıdaki gibi azaltırız.

$$A = X'\Omega^{-1}X \in \mathcal{S}(k),$$
$$\bar{X}=\Omega^{-1/2}XA^{-1/2}: n \times k,$$
$$P = P\left(\widehat{\Omega}, \Omega\right) = \Omega^{-1/2}\widehat{\Omega}\Omega^{-1/2} \in \mathcal{S}(n). \quad (6.65.)$$

Burada X açıklayıcı değişken matrisi $\bar{X}$ $n \times k$ matrisine dönüştürülür. Sorudaki $H(\Omega, \Omega)$ ve $H\left(\widehat{\Omega}, \Omega\right)$ matrisleri $\bar{X}, A$ ve P açısından

$$H(\Omega, \Omega) = A^{-1} \quad (6.66.)$$

$$H\left(\widehat{\Omega}, \Omega\right) = A^{-1/2}(\bar{X}'P^{-1}\bar{X})^{-1}\bar{X}'P^{-2}\bar{X}(\bar{X}'P^{-1}\bar{X})^{-1}A^{-1/2} \quad (6.67.)$$

sırasıyla yeniden yazılır. Böylece (6.65.) eşitsizliğinin sol tarafı

$$\Phi(\bar{X}, P) = (\bar{X}'P^{-1}\bar{X})^{-1}\bar{X}'P^{-2}\bar{X}(\bar{X}'P^{-1}\bar{X})^{-1} \quad (6.68.)$$

olur. İşlenebilir bir üst sınır olarak, bir fonksiyon türetmeyi amaçlıyoruz.

$$I_0(P) : \mathcal{S}(n) \to [0, \infty)$$

sadece P ye bağlıdır ve

$\Phi(\bar{X}, P) \leq I_0(P)I_k$ herhangi bir $\bar{X}$ için (6.69.)

eşitsizliğini gerçekleştirir. $I_0(P)$, hem $\bar{X}$ den hem de X ten bağımsız olduğundan basit bir formda olması beklenir. Uygunluk için, $I_0(P)$ fonksiyonunu $\widehat{\Omega}$ ve Ω nın fonksiyonu olarak yazarız.

$$I_0(P)=L_0\left(\widehat{\Omega},\Omega\right) \tag{6.70.}$$

(6.71) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$H\left(\widehat{\Omega},\Omega\right) \leq L_0\left(\widehat{\Omega},\Omega\right)H(\Omega,\Omega) \tag{6.71.}$$

bu tam ranklı herhangi bir X: $n \times k$ için sağlanır. Bundan

$$Cov(b\left(\widehat{\Omega}\right)) \leq \alpha_0(b\left(\widehat{\Omega}\right))Cov(b(\Omega)) \tag{6.72.}$$

ile

$$\alpha_0\left(b\left(\widehat{\Omega}\right)\right) = E[L_0\left(\widehat{\Omega},\Omega\right)]= E[I_0(P)] \tag{6.73.}$$

elde ederiz. Böylece (6.72.) de tanımlandığı gibi $L_0\left(\widehat{\Omega},\Omega\right) = I_0(P)$ elde etmenin bir yolu olarak formüle edilir.

6.4. Bir SUR Modeldeki UZE için Üst Sınır Problemi

Bu bölümde SUR model ele alınacak ve UZE ve alışılmış EKK tahmin ediciyi bulunduran genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin çeşitli kovaryans matrisleri için üst sınırlar incelenecektir. Aşağıda iki önemli pratik problem üzerinde durulacaktır.

(1) UZE'nin alışılmış EKK tahmin edicisinden daha fazla etkin olduğu koşulunu açıklamak

(2) UZE'nin üst sınırından daha küçük olan bir üst sınıra ait genelleştirilmiş EKK tahmin edici elde etmek

Ön Şartlar: Bu bölümde düşünülen SUR model örnek 6.3. te verilenlerden biridir. UZE

$$b(S \otimes I_m) = (X'(S^{-1} \otimes I_m)X)^{-1}X'(S^{-1} \otimes I_m)y$$

6.49. da gösterildiği gibi tanımlanır ve 6.56.'daki C_3 sınıfına aittir. İki problemi ele almak için yukarıdaki paragraf tanımlandı. Biz ilk önce aşağıdaki sonuçları inceleyeceğiz.

Öneri 5.1: Aşağıdaki formun herhangi bir genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi için

$$b(\widehat{\sum} \otimes I_m) = (X'(\widehat{\sum}^{-1} \otimes I_m)X)^{-1}X'(\widehat{\sum}^{-1} \otimes I_m)y$$

Eğer $\widehat{\sum}$, S matrisinin ölçülebilir fonksiyonu ise

$$\widehat{\sum} = \widehat{\sum}(S) \qquad (6.74.)$$

olduğu söylenebilir. Böylece genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\sum} \otimes I_m)$, C_3 sınıfına aittir.

UZE ve alışılmış EKK tahmin edicisi sırasıyla $\widehat{\sum} = \widehat{\sum}(S)$ ve $\widehat{\sum}(S) = I_p$ yazılarak elde edilen durumlardır. Böylece önceki iki bölümdeki sonuçlar genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\sum} \otimes I_m)$ için uygulanabilirdir.

Üst Sınır Türetme: C_3te genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $b(\widehat{\sum} \otimes I_m)$ için

$$P = P(\widehat{\sum} \otimes I_m, \sum \otimes I_m) = \sum^{-1/2}\widehat{\sum}\sum^{-1/2} \otimes I_m \qquad (6.75.)$$

olsun ve $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_p$, $\sum^{-1/2}\widehat{\sum}\sum^{-1/2}$ matrisinin gizli kökleri olsun. Böylece P'nin gizli kökleri $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$ ile verilir. Böylece $\alpha_0(b(\widehat{\sum} \otimes I_m))$ üst sınır (T. Kariya and H. Kurata, 2004 s. 113) Teorem (5.4.) ile aşağıdaki gibi

$$\alpha_0(b(\widehat{\sum} \otimes I_m)) = E\{L_0(\widehat{\sum}, \sum)\} \qquad (6.76.)$$

ve

$$L_0(\widehat{\sum}, \sum) = l_0(\sum^{-1/2}\widehat{\sum}\sum^{-1/2}) = \frac{(\pi_1+\pi_p)^2}{4\pi_1\pi_p} \tag{6.77.}$$

elde edilir.

Burada aşağıdaki eşitlik kullanıldı.

$$L_0 = (\widehat{\sum} \otimes I_m, \sum \otimes I_m) = l_0(\sum^{-1/2}\widehat{\sum}\sum^{-1/2} \otimes I_m) = \frac{(\pi_1+\pi_p)^2}{4\pi_1\pi_p}$$
$$= l_0(\sum^{-1/2}\widehat{\sum}\sum^{-1/2}) = L_0(\widehat{\sum}, \sum) \tag{6.78.}$$

Yukarıda verilen sonuçları aşağıdaki gibi özetlenir: Herhangi bir $b(\widehat{\sum} \otimes I_m) \in C_3$ için

$$Cov(b(\sum \otimes I_m)) \leq Cov(b(\widehat{\sum} \otimes I_m))$$
$$\leq \alpha_0(b(\widehat{\sum} \otimes I_m))\, Cov(b(\sum \otimes I_m))$$
$$\leq \alpha_1(b(\widehat{\sum} \otimes I_m))\, Cov(b(\sum \otimes I_m)) \tag{6.79.}$$

şeklinde tanımlanır.

7. HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE EKK TAHMİN EDİCİLERİNİN ELDE EDİLMESİ

7.1. Householder Dönüşüm Yöntemi

Householder dönüşümü ilk olarak 1958 yılında Alston Scott Householder tarafından öne sürülmüştür (Householder, 1958). Householder vektörü $u \in \mathbb{R}^m$ sıfır olmamak koşuluyla, $x \in \mathbb{R}^m$ sütun vektörünü $Hx = (a, 0, \dots, 0)^T$ $(a \neq 0)$ şekline getiren H matrisine Householder dönüşümü (Householder matrisi veya Householder yansıması) adı verilir ve şu şekilde hesaplanabilir:

$$H = I_m - 2\frac{uu^T}{u^Tu} = I_m - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} \tag{7.1.}$$

Burada yapılması gereken şey u Householder vektörünü elde etmektir. Sonuçta elde edilecek H Householder matrisi simetrik $(H^T = H)$ ve ortogonaldir $(H^{-1} = H^T)$. Householder dönüşümü bir vektörün veya matrisin belirli elemanlarını yok etmek ya da diğer bir ifadeyle sıfır yapmak için kullanılır.

$x \neq 0$ vektörü için Hx dönüşümü $e_1 = \mathrm{I}_m(:,1)$ şeklinde birim matrisin birinci sütun vektörü olarak ifade edilirse;

$$Hx = \left(I_m - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\frac{u^T\mathrm{x}}{u^Tu}u \tag{7.2.}$$

burada u vektörü e_1 cinsinden $u = x + \alpha e_1$ şeklinde belirlenir ve gereken hesaplamalar incelenir. Buna göre;

$$u^Tx = (x + \alpha e_1)^Tx = x^Tx + \alpha x_1$$

ve

$$u^Tu = (x + \alpha e_1)^T(x + \alpha e_1) = x^Tx + 2\alpha x_1 + \alpha^2$$

elde edilir ve buradan da,

$$Hx=\left(1-2\frac{x^Tx+\alpha x_1}{x^Tx+2\alpha x_1+\alpha^2}\right)x\text{-}2\alpha\frac{u^Tx}{u^Tu}e_1$$

elde edilir. İstenilen sonuca ulaşmak için *x*'in katsayısının sıfır olması gerekmektedir. Dolayısıyla;

$$1-2\frac{x^Tx+\alpha x_1}{x^Tx+2\alpha x_1+\alpha^2}=0\Rightarrow\ \alpha=\pm\|x\|_2$$

olarak elde edilir ki buna göre Householder vektörü;

$$u=x\pm\|x_1\|_2e_1 \qquad (7.3.)$$

olarak belirlenir. Sonuçta,

$$Hx=\left(I_m-2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)x=\pm\|x\|_2e_1$$

olarak alındığında $x\in\mathbb{R}^m$ sütun vektörünün ilk elemanı sıfırdan farklı diğer elemanları sıfır olacak şekilde bir vektör elde edilmiş olur (Gloub ve Van Loan, 1996).

Bir $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ (m $\geq$ n) matrisi için Householder dönüşüm yöntemi ile QR ayrışımı elde edilmek istendiğinde yukarıda belirtilen adımlar matrisin her bir sütun vektörü için tekrarlanmak suretiyle (toplam n defa) ve her bir adımda ele alınan sütun vektörünün boyutu üstten bir birim atılmak suretiyle küçültülerek yapılır. Sonuçta elde edilen *n* adet Householder matrisinin çarpımı ortogonal

$$H_1H_2\dots H_n=Q\in\mathbb{R}^{mxm} \qquad (7.4.)$$

matrisini verirken bu matrisin transpozunun *A* matrisi ile soldan çarpımı da

$$Q^T A = R \in \mathbb{R}^{mxn} \tag{7.5.}$$

üst üçgensel matrisini verecektir. Burada,

$$H_i = I_m - 2\frac{h_i {h_i}^T}{{h_i}^T h_i} \text{ ve } h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1,2,\dots,n) \tag{7.6.}$$

şeklindedir.

Şimdi bu dönüşüm bir örnek üzerinde incelenecektir.

Örnek 7.1.:

Householder uygulaması için Longley J. W. (1967) orijinal veri seti kullanılmıştır. Veriye ait bağımlı ve bağımsız değişkenler Çizelge 1'deki gibi tanımlanmıştır.

Çizelge 7.1. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin bulunduğu tanımlamalar

Değişken	**Tanım**
Y	İstihdam edilen kişi sayısı
X_1	Zımmi fiyat deflatörü
X_2	Gayri Safi Milli Hasıla (GSMH)
X_3	İşsizlik
X_4	Askeri kuvvetlerin büyüklüğü
X_5	14 yaş ve üzeri nüfus
X_6	Yıl

Çizelge 2. Longley Verisi (Longley J. W. (1967))

Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
60323	83	234289	2356	1590	107608	1947
61122	88,5	259426	2325	1456	108632	1948
60171	88,2	258054	3682	1616	109773	1949
61187	89,5	284599	3351	1650	110929	1950
63221	96,2	328975	2099	3099	112075	1951
63639	98,1	346999	1932	3594	113270	1952
64989	99	365385	1870	3547	115094	1953
63761	100	363112	3578	3350	116219	1954
66019	101,2	397469	2904	3048	117388	1955
67857	104,6	419180	2822	2857	118734	1956
68169	108,4	442769	2936	2798	120445	1957
66513	110,8	444546	4681	2637	121950	1958
68655	112,6	482704	3813	2552	123366	1959
69564	114,2	502601	3931	2514	125368	1960
69331	115,7	518173	4806	2572	127852	1961
70551	116,9	554894	4007	2827	130081	1962

$$H = I - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

Householder matrisini elde etmek için

$$u=x \pm \|x_1\|_2 e_1$$

her bir Householder vektörü u_i aşağıdaki gibi hesaplanır.

$u_1 = 83 +$	$\sqrt{83^2 + 88{,}5^2 + 88{,}2^2 + \cdots + 116{,}9^2}$	1
88,5		0
88,2		0
89,5		0
96,2		0
98,1		0
99		0
100		0
101,2		0
104,6		0
108,4		0
110,8		0
112,6		0
114,2		0
115,7		0
116,9		0

u_1
491,86
88,5
88,2
89,5
96,2
98,1
99
100
101,2
104,6
108,4
110,8
112,6
114,2
115,7
116,9

u_1 vektörünün yardımı ile H_1 şu şekilde hesaplanır:

$$H_1 = I_{20} - 2\frac{u_1 {u_1}^T}{{u_1}^T u_1}$$

H_1 = Kolon 1-7

-0,203000	-0,216452	-0,215718	-0,218898	-0,235284	-0,239931	-0,242133
-0,216452	0,961055	-0,038813	-0,039386	-0,042334	-0,043170	-0,043566
-0,215718	-0,038813	0,961318	-0,039252	-0,042190	-0,043024	-0,043418
-0,218898	-0,039386	-0,039252	0,960169	-0,042812	-0,043658	-0,044058
-0,235284	-0,042334	-0,042190	-0,042812	0,953983	-0,046926	-0,047357
-0,239931	-0,043170	-0,043024	-0,043658	-0,046926	0,952147	-0,048292
-0,242133	-0,043566	-0,043418	-0,044058	-0,047357	-0,048292	0,951265
-0,244578	-0,044006	-0,043857	-0,044503	-0,047835	-0,048780	-0,049227
-0,247513	-0,044534	-0,044383	-0,045037	-0,048409	-0,049365	-0,049818
-0,255829	-0,046030	-0,045874	-0,046551	-0,050035	-0,051024	-0,051492
-0,265123	-0,047703	-0,047541	-0,048242	-0,051853	-0,052877	-0,053362
-0,270993	-0,048759	-0,048594	-0,049310	-0,053001	-0,054048	-0,054544
-0,275395	-0,049551	-0,049383	-0,050111	-0,053862	-0,054926	-0,055430
-0,279309	-0,050255	-0,050085	-0,050823	-0,054628	-0,055706	-0,056218
-0,282977	-0,050915	-0,050743	-0,051490	-0,055345	-0,056438	-0,056956
-0,285912	-0,051443	-0,051269	-0,052025	-0,055919	-0,057024	-0,057547

Kolon 8-14

-0,244578	-0,247513	-0,255829	-0,265123	-0,270993	-0,275395	-0,279309
-0,044006	-0,044534	-0,046030	-0,047703	-0,048759	-0,049551	-0,050255
-0,043857	-0,044383	-0,045874	-0,047541	-0,048594	-0,049383	-0,050085
-0,044503	-0,045037	-0,046551	-0,048242	-0,049310	-0,050111	-0,050823
-0,047835	-0,048409	-0,050035	-0,051853	-0,053001	-0,053862	-0,054628
-0,048780	-0,049365	-0,051024	-0,052877	-0,054048	-0,054926	-0,055706
-0,049227	-0,049818	-0,051492	-0,053362	-0,054544	-0,055430	-0,056218
0,950275	-0,050321	-0,052012	-0,053901	-0,055095	-0,055990	-0,056785
-0,050321	0,949075	-0,052636	-0,054548	-0,055756	-0,056662	-0,057467
-0,052012	-0,052636	0,945596	-0,056381	-0,057629	-0,058565	-0,059398
-0,053901	-0,054548	-0,056381	0,941571	-0,059723	-0,060693	-0,061555
-0,055095	-0,055756	-0,057629	-0,059723	0,938955	-0,062037	-0,062918
-0,055990	-0,056662	-0,058565	-0,060693	-0,062037	0,936955	-0,063940
-0,056785	-0,057467	-0,059398	-0,061555	-0,062918	-0,063940	0,935151
-0,057531	-0,058222	-0,060178	-0,062364	-0,063745	-0,064780	-0,065701
-0,058128	-0,058826	-0,060802	-0,063011	-0,064406	-0,065452	-0,066382

Kolon 15-16

-0,282977	-0,28591
-0,050915	-0,05144
-0,050743	-0,05127
-0,05149	-0,05203
-0,055345	-0,05592
-0,056438	-0,05702
-0,056956	-0,05755
-0,057531	-0,05813
-0,058222	-0,05883
-0,060178	-0,0608
-0,062364	-0,06301
-0,063745	-0,06441
-0,06478	-0,06545
-0,065701	-0,06638
0,933436	-0,06725
-0,067254	0,932048

Elde edilen H_1 matrisi simetrik ve ortogonaldir. Yani, $H_1 {H_1}^T = I_{16}$ dır.

$$H_1 {H_1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{[1]}=H_1{}^T X$$

$$X^{[1]} = \begin{bmatrix} -408{,}867 & -1581690 & -12935{,}9 & -10500{,}2 & -469932 & -7778{,}91 \\ 0{,}000 & -67317 & -426{,}4 & -719{,}3 & 4717 & 198{,}05 \\ 0{,}000 & -67582 & 939{,}9 & -552{,}0 & 6210 & 204{,}98 \\ 0{,}000 & -45836 & 568{,}5 & -549{,}9 & 5840 & 180{,}28 \\ 0{,}000 & -26197 & -891{,}8 & 734{,}4 & -881 & 48{,}79 \\ 0{,}000 & -15187 & -1117{,}9 & 1182{,}7 & -1917 & 12{,}22 \\ 0{,}000 & -124 & -1207{,}9 & 1113{,}6 & -1150 & -4{,}57 \\ 0{,}000 & -6089 & 469{,}0 & 892{,}0 & -1199 & -23{,}35 \\ 0{,}000 & 23887 & -242{,}3 & 560{,}5 & -1439 & -46{,}07 \\ 0{,}000 & 32995 & -430{,}0 & 285{,}9 & -4085 & -112{,}30 \\ 0{,}000 & 42555 & -434{,}1 & 133{,}5 & -6836 & -186{,}44 \\ 0{,}000 & 35471 & 1236{,}3 & -86{,}5 & -8149 & -232{,}9 \\ 0{,}000 & 66983 & 312{,}3 & -215{,}7 & -8847 & -267{,}49 \\ 0{,}000 & 80973 & 380{,}6 & -293{,}1 & -8723 & -298{,}13 \\ 0{,}000 & 91007 & 1208{,}9 & -271{,}9 & -8001 & -326{,}79 \\ 0{,}000 & 123298 & 372{,}6 & -46{,}4 & -7181 & -349{,}52 \end{bmatrix}$$

Benzer yöntem ile H_2 Householder matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

H_2 = Kolon 1-8

1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,00000	0,000000
0	-0,960764	0,086579	0,058720	0,033561	0,019456	0,00016	0,007801
0	0,086579	0,996177	-0,002593	-0,001482	-0,000859	-0,00001	-0,000344
0	0,058720	-0,002593	0,998241	-0,001005	-0,000583	-0,00000	-0,000234
0	0,033561	-0,001482	-0,001005	0,999426	-0,000333	-0,00000	-0,000134
0	0,019456	-0,000859	-0,000583	-0,000333	0,999807	-0,00000	-0,000077
0	0,000159	-0,000007	-0,000005	-0,000003	-0,000002	1,00000	-0,000001
0	0,007801	-0,000344	-0,000234	-0,000134	-0,000077	-0,00000	0,999969
0	-0,030537	0,001348	0,000915	0,000523	0,000303	0,00000	0,000121
0	-0,042270	0,001866	0,001266	0,000723	0,000419	0,00000	0,000168
0	-0,054517	0,002407	0,001633	0,000933	0,000541	0,00000	0,000217
0	-0,045442	0,002007	0,001361	0,000778	0,000451	0,00000	0,000181
0	-0,085811	0,003789	0,002570	0,001469	0,000851	0,00001	0,000341
0	-0,103734	0,004580	0,003107	0,001776	0,001029	0,00001	0,000413
0	-0,116588	0,005148	0,003492	0,001996	0,001157	0,00001	0,000464
0	-0,157956	0,006975	0,004730	0,002704	0,001567	0,00001	0,000628

Kolon 9-15

0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-0,030537	-0,042270	-0,054517	-0,045442	-0,085811	-0,103734	-0,116588
0,001348	0,001866	0,002407	0,002007	0,003789	0,004580	0,005148
0,000915	0,001266	0,001633	0,001361	0,002570	0,003107	0,003492
0,000523	0,000723	0,000933	0,000778	0,001469	0,001776	0,001996
0,000303	0,000419	0,000541	0,000451	0,000851	0,001029	0,001157
0,000002	0,000003	0,000004	0,000004	0,000007	0,000008	0,000009
0,000121	0,000168	0,000217	0,000181	0,000341	0,000413	0,000464
0,999524	-0,000658	-0,000849	-0,000708	-0,001336	-0,001616	-0,001816
-0,000658	0,999089	-0,001175	-0,000980	-0,001850	-0,002236	-0,002513
-0,000849	-0,001175	0,998484	-0,001263	-0,002386	-0,002884	-0,003242
-0,000708	-0,000980	-0,001263	0,998947	-0,001989	-0,002404	-0,002702
-0,001336	-0,001850	-0,002386	-0,001989	0,996245	-0,004540	-0,005102
-0,001616	-0,002236	-0,002884	-0,002404	-0,004540	0,994512	-0,006168
-0,001816	-0,002513	-0,003242	-0,002702	-0,005102	-0,006168	0,993068
-0,002460	-0,003405	-0,004392	-0,003661	-0,006913	-0,008357	-0,009392

Kolon 16

0
-0,157956
0,006975
0,004730
0,002704
0,001567
0,000013
0,000628
-0,002460
-0,003405
-0,004392
-0,003661
-0,006913
-0,008357
-0,009392
0,987275

$$X^{[2]}=H_2{}^T X$$

$$X^{[2]} = \begin{bmatrix} 83{,}000 & 234289 & 2356{,}00 & 1590{,}00 & 107608 & 1947{,}00 \\ -138{,}122 & -505327 & -4090{,}95 & -2673{,}84 & -161218 & -2717{,}32 \\ 98{,}207 & 291822 & 3965{,}30 & 1798{,}36 & 121688 & 2155{,}00 \\ 96{,}287 & 307501 & 3543{,}14 & 1773{,}68 & 119010 & 2089{,}72 \\ 100{,}079 & 342065 & 2208{,}82 & 3169{,}69 & 116694 & 2030{,}85 \\ 100{,}349 & 354587 & 1995{,}66 & 3634{,}98 & 115948 & 1998{,}29 \\ 99{,}018 & 365447 & 1870{,}52 & 3547{,}33 & 115116 & 1953{,}38 \\ 100{,}902 & 366154 & 3603{,}52 & 3366{,}43 & 117293 & 1972{,}56 \\ 97{,}671 & 385559 & 2804{,}08 & 2983{,}68 & 113185 & 1882{,}34 \\ 99{,}715 & 402694 & 2683{,}69 & 2767{,}97 & 112917 & 1855{,}43 \\ 102{,}099 & 421506 & 2757{,}61 & 2683{,}17 & 112942 & 1827{,}29 \\ 105{,}548 & 426823 & 4532{,}31 & 2541{,}29 & 115696 & 1849{,}88 \\ 102{,}682 & 449235 & 3532{,}21 & 2371{,}26 & 111556 & 1754{,}83 \\ 102{,}211 & 462142 & 3591{,}57 & 2295{,}51 & 111092 & 1713{,}18 \\ 102{,}225 & 472700 & 4424{,}50 & 2326{,}44 & 111807 & 1683{,}60 \\ 98{,}644 & 493287 & 3490{,}14 & 2494{,}31 & 108342 & 1586{,}17 \end{bmatrix}$$

Benzer yöntem ile $X^{[2]}$ matrisi kullanılarak H_3 Householder matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

H_3 = Kolon 1-8

1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,365140	-0,280539	-0,174890	-0,158013	-0,148104	-0,285320
0	0	-0,280539	0,942349	-0,035940	-0,032472	-0,030436	-0,058634
0	0	-0,174890	-0,035940	0,977595	-0,020243	-0,018974	-0,036553
0	0	-0,158013	-0,032472	-0,020243	0,981710	-0,017143	-0,033025
0	0	-0,148104	-0,030436	-0,018974	-0,017143	0,983932	-0,030954
0	0	-0,285320	-0,058634	-0,036553	-0,033025	-0,030954	0,940367
0	0	-0,222022	-0,045626	-0,028444	-0,025699	-0,024087	-0,046403
0	0	-0,212489	-0,043667	-0,027222	-0,024595	-0,023053	-0,044411
0	0	-0,218342	-0,044870	-0,027972	-0,025273	-0,023688	-0,045634
0	0	-0,358860	-0,073746	-0,045974	-0,041537	-0,038933	-0,075003
0	0	-0,279674	-0,057474	-0,035829	-0,032372	-0,030342	-0,058453
0	0	-0,284374	-0,058439	-0,036432	-0,032916	-0,030852	-0,059435
0	0	-0,350324	-0,071992	-0,044880	-0,040549	-0,038007	-0,073219
0	0	-0,276343	-0,056789	-0,035403	-0,031986	-0,029980	-0,057757

Kolon 9-15

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0,222022	-0,212489	-0,218342	-0,358860	-0,279674	-0,284374	-0,350324
-0,045626	-0,043667	-0,044870	-0,073746	-0,057474	-0,058439	-0,071992
-0,028444	-0,027222	-0,027972	-0,045974	-0,035829	-0,036432	-0,044880
-0,025699	-0,024595	-0,025273	-0,041537	-0,032372	-0,032916	-0,040549
-0,024087	-0,023053	-0,023688	-0,038933	-0,030342	-0,030852	-0,038007
-0,046403	-0,044411	-0,045634	-0,075003	-0,058453	-0,059435	-0,073219
0,963891	-0,034559	-0,035510	-0,058364	-0,045485	-0,046250	-0,056975
-0,034559	0,966925	-0,033986	-0,055858	-0,043532	-0,044264	-0,054529
-0,035510	-0,033986	0,965078	-0,057397	-0,044731	-0,045483	-0,056031
-0,058364	-0,055858	-0,057397	0,905665	-0,073519	-0,074754	-0,092091
-0,045485	-0,043532	-0,044731	-0,073519	0,942704	-0,058259	-0,071770
-0,046250	-0,044264	-0,045483	-0,074754	-0,058259	0,940762	-0,072976
-0,056975	-0,054529	-0,056031	-0,092091	-0,071770	-0,072976	0,910100
-0,044943	-0,043014	-0,044199	-0,072643	-0,056614	-0,057565	-0,070915

Kolon 16

0
0
-0,276343
-0,056789
-0,035403
-0,031986
-0,029980
-0,057757
-0,044943
-0,043014
-0,044199
-0,072643
-0,056614
-0,057565
-0,070915
0,944060

7.2. β ve σ^2 nin Yansız Tahmin Edicileri ve Sayısal Hesaplanması

y: $(n \times 1)$ gözlemler vektörü

X: $(n \times p)$ bilinenler matrisi

β: $(p \times 1)$ parametre vektörü

ε: $(n \times 1)$ hatalar vektörü

olmak üzere çoklu standart lineer regresyon modeli

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0, \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$$

dikkate alınarak $Q_1'X = U$ $(p \times p)$ üst üçgensel matris ve $Q_2'X = 0$ $((n-p) \times p)$ sıfır matris olmak üzere ilk p kolonu ve kalan *(n-p)* kolonu olarak parçalanmış $Q = [Q_1\ Q_2]$ $(n \times n)$ ortonormal matrisinin transpozu bu matrise uygulanır (Draper ve Smith (1981)).

$$y = X\beta + \varepsilon$$
$$Q'y = Q'X\beta + Q'\varepsilon$$

$v = Q_1'y$, $\eta = Q_1'\varepsilon$ $(p \times 1)$ boyutlu vektörler ve $t = Q_2'y$, $\zeta = Q_2'\varepsilon$ $(n-p) \times 1$ boyutlu vektörler olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{7.7.}$$

modeli elde edilir.

$$\xi = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{bmatrix} = Q'\varepsilon \tag{7.8.}$$

dir ayrıca

$$E(\xi) = E(Q'\varepsilon) = Q'E(\varepsilon) = Q'.0 = 0 \tag{7.9.}$$

ve

$$E(\xi\xi') = E(Q'\varepsilon\varepsilon'Q) = Q'E(\varepsilon\varepsilon')Q$$
$$= Q'(\sigma^2 I_n)Q = \sigma^2 Q'Q = \sigma^2 I_n \tag{7.10.}$$

elde edilir. Böylece

$$E\begin{bmatrix}\eta\\ \zeta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \text{ ve } E\left\{\begin{bmatrix}\eta\\ \zeta\end{bmatrix}[\eta'\ \zeta']\right\} = \begin{bmatrix}\sigma^2 I & 0\\ 0 & \sigma^2 I_{n-p}\end{bmatrix}$$

ya da

$$v = U\beta + \eta, \quad E(\eta) = 0, \quad E(\eta\eta') = \sigma^2 I_p$$

ve

$$t = \zeta, \qquad E(\zeta) = 0, \quad E(\zeta\zeta') = \sigma^2 I_{n-p}$$

olmak üzere standart lineer modelin kanonik formu

$$\begin{bmatrix}v\\ t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}U\\ 0\end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix}\eta\\ \zeta\end{bmatrix} \tag{7.11.}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca bu modelde β

$$\hat{\beta} = U^{-1}\mathrm{v}$$

ile tahmin edilir.

$v=U\beta+\eta$

olduğundan

$$\hat{\beta} = U^{-1}(U\beta+\eta) = U^{-1}U\beta+U^{-1}\eta$$

$$\hat{\beta} = \beta+U^{-1}\eta \qquad (7.12.)$$

bulunur. Böylece $\hat{\beta}$ nın beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta+U^{-1}\eta) = \beta+E(U^{-1}\eta)$$

$$= \beta+U^{-1}E(\eta)$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \qquad (7.13.)$$

dır ve varyansı

$$Var(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)']$$

$$= E[(U^{-1}\eta)(U^{-1}\eta)']$$

$$= E[U^{-1}\eta\eta'(U^{-1})'] = U^{-1}E(\eta\eta')(U^{-1})'$$

$$= U^{-1}\sigma^2 I_p\,(U^{-1})'$$

$$= \sigma^2 U^{-1}(U^{-1})'$$

$$= \sigma^2(U'U)^{-1}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(U'U)^{-1} \qquad (7.14.)$$

dir. σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{t\prime t}{n-p} \qquad (7.15.)$$

ile tahmin edilir. $t=\zeta$ olduğundan

$$E(\zeta\zeta') = E[tr(\zeta\zeta')] = E[tr(\zeta'\zeta)]$$
$$= tr[E(\zeta'\zeta)] = \sigma^2 I_{n-p}$$
$$E(\zeta\zeta') = (n-p)\sigma^2 \qquad (7.16.)$$

elde edilir.

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n-p}E(t't) = \frac{1}{n-p}E(\zeta'\zeta)$$
$$= \frac{1}{(n-p)}(n-p)\sigma^2$$
$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \qquad (7.17.)$$

$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ olduğundan $\hat{\sigma}^2$, σ^2 nin yansız tahmin edicisidir.

Örneğe bakılırsa,

Q=Kolon 1-7

-0,203000	0,337818	0,889243	0,164488	0,054361	0,099710	-0,046454
-0,216452	-0,899982	0,282683	-0,006899	0,190475	0,029168	-0,020232
-0,215718	0,147155	-0,211101	0,570363	0,676377	-0,037117	0,045243
-0,218898	0,120189	-0,122407	-0,547387	0,483933	0,507872	-0,213883
-0,235284	0,099632	-0,003071	-0,175769	-0,305945	0,304682	-0,055627
-0,239931	0,086832	0,018124	-0,287875	0,101692	-0,754147	-0,373057
-0,242133	0,068153	0,030867	-0,297589	0,098530	-0,181194	0,891495
-0,244578	0,076481	-0,105019	-0,021814	-0,029854	-0,061241	-0,048086
-0,247513	0,038967	-0,037152	-0,083514	-0,029098	-0,074269	-0,059326
-0,255829	0,029570	-0,020739	-0,067538	-0,052527	-0,058192	-0,054801
-0,265123	0,019933	-0,018955	-0,046303	-0,068468	-0,041862	-0,049768
-0,270993	0,030657	-0,155702	0,229786	-0,194978	0,078775	0,010479
-0,275395	-0,008477	-0,070736	0,103946	-0,152010	0,035515	-0,015656
-0,279308	-0,025301	-0,071422	0,118796	-0,164634	0,049721	-0,011606
-0,282977	-0,037125	-0,133855	0,225875	-0,207988	0,100495	0,011894
-0,285912	-0,077668	-0,055117	0,052232	-0,121509	0,032538	-0,025842

Kolon 8-14

0,038364	-0,002170	-0,017141	-0,020127	0,063740	0,015476	0,019063
0,035903	-0,015865	-0,027645	-0,037391	0,020011	-0,043205	-0,058060
-0,101597	-0,037697	-0,030453	-0,035760	-0,185371	-0,099633	-0,101302
-0,024123	-0,050468	-0,033427	-0,018199	0,169332	0,091743	0,103932
-0,201391	-0,180904	-0,198572	-0,216401	-0,363036	-0,305715	-0,319673
-0,166228	-0,196424	-0,176892	-0,156467	0,049609	-0,032650	-0,014470
-0,039877	-0,051428	-0,047128	-0,042181	0,025647	-0,002902	0,002125
0,943844	-0,051477	-0,052104	-0,053498	-0,062451	-0,056870	-0,056719
-0,049808	0,949297	-0,051105	-0,051574	-0,042827	-0,046449	-0,045766
-0,049254	-0,050289	0,948500	-0,052591	-0,047780	-0,050296	-0,050127
-0,049890	-0,050338	-0,052264	0,945960	-0,054893	-0,055337	-0,055717
-0,066350	-0,050512	-0,057365	-0,065484	0,856860	-0,109399	-0,114633
-0,057313	-0,050313	-0,055570	-0,061218	-0,103606	0,913375	-0,090117
-0,057860	-0,050462	-0,056287	-0,062517	-0,109490	-0,090948	0,905040
-0,064992	-0,051133	-0,058892	-0,067720	-0,145377	-0,113345	-0,119408
-0,055301	-0,051959	-0,056821	-0,061959	-0,092141	-0,081790	-0,085153

Kolon 15-16

0,064716	0,027881
-0,049516	-0,117861
-0,164239	-0,074496
0,173340	0,051342
-0,378253	-0,290198
0,068735	-0,054762
0,029474	-0,011721
-0,059785	-0,053654
-0,041904	-0,047132
-0,047747	-0,050584
-0,055576	-0,055038
-0,144889	-0,096968
-0,106566	-0,080911
-0,113333	-0,085146
0,849876	-0,103377
-0,097410	0,919359

$$R=Q^T A$$

$$R = \begin{bmatrix} -408{,}867 & -1581690 & -12935{,}9 & -10500{,}2 & -469932 & -7778{,}91 \\ 0 & 4623 & 203{,}2 & 721{,}2 & 963 & 13{,}84 \\ 0 & 0 & -1090{,}2 & -400{,}6 & 12645 & 412{,}02 \\ 0 & 0 & 0 & -1116{,}5 & -2240 & -131{,}80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16105 & 532{,}39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59{,}00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = {Q_1}^T X = \begin{bmatrix} -408{,}867 & -1581689 & -12935{,}9 & -10500{,}2 & -469932 & -7778{,}91 \\ 0 & 4623 & 203{,}2 & 721{,}2 & 963 & 13{,}84 \\ 0 & 0 & -1090{,}2 & -400{,}6 & 12644 & 412{,}02 \\ 0 & 0 & 0 & -1116{,}5 & -2240 & -131{,}80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16105 & 532{,}39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59{,}00 \end{bmatrix}$$

$$v = {Q_1}^T y = \begin{bmatrix} -261249 \\ 290 \\ 8495 \\ -3060 \\ 8857 \\ 922 \end{bmatrix}$$

$$t = {Q_2}' y = \begin{bmatrix} -1{,}52 \\ 385{,}74 \\ 1274{,}05 \\ 990{,}08 \\ -1017{,}81 \\ -1963{,}22 \\ -2084{,}67 \\ -2104{,}96 \\ -2416{,}49 \\ -3406{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -261249 \\ 290 \\ 8495 \\ -3060 \\ 8857 \\ 922 \\ -1{,}52 \\ 385{,}74 \\ 1274{,}05 \\ 990{,}08 \\ -1017{,}81 \\ -1963{,}22 \\ -2084{,}67 \\ -2104{,}96 \\ -2416{,}49 \\ -3406{,}62 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -408{,}867 & -1581690 & -12935{,}9 & -10500{,}2 & -469932 & -7778{,}91 \\ 0 & 4623 & 203{,}2 & 721{,}2 & 963 & 13{,}84 \\ 0 & 0 & -1090{,}2 & -400{,}6 & 12645 & 412{,}02 \\ 0 & 0 & 0 & -1116{,}5 & -2240 & -131{,}80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16105 & 532{,}39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59{,}00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \beta$$

$\hat{\beta} = U^{-1}\mathrm{v} = \begin{bmatrix} 497{,}870 \\ -0{,}041 \\ -1{,}804 \\ 0{,}829 \\ 0{,}033 \\ 15{,}627 \end{bmatrix}$ elde edilir.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{t\prime t}{n-p}$ =3386366,72437 dir.

Householder dönüşümü ile genelleştirilmiş EKK tahmin edicileri $\hat{\beta}$ ve $\hat{\sigma}^2$ elde edildi.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1. Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada en küçük kareler yöntemine değinilerek genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisinin etkinliği AR(1), SUR ve Heteroscedastic modellerle uygulamalara yer verildi.

1 Genel lineer regresyon modelinde Householder dönüşümleriyle genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi elde edilip lineer ve lineer olmayan en küçük kareler problemleri için ardışık çözüm yöntemleri verilmiştir.
2 Genelleştirilmiş EKK tahmin edicisinin kovaryans matrisi için üst sınır araştırılarak, SUR modelde kısıtlamasız Zellner tahmini (UZE) için üst sınır problemi elde edilmiştir.
3 Householder dönüşümü, Longley verisine uygulanarak genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi elde edilmiştir.

Bu çalışmada inceleyemediğimiz eliptik simetri altında genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin etkinliği ve genelleştirilmiş EKK tahmin edicilerinin dağılımının dejenerasyonu konuları da incelenerek farklı teorik ve uygulamalı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

ALİ, MM. and PONNAPALİ, R., 1990. An Optimality of the Gauss-Markov Estimator., Journal of Multivariate Analysis, 32, 171-176.

ANDREWS, DWK., 1986. A note on the Unbiasedness of Feasible GLS, Quasi-Maximum Likelihood. Econometrica 54, 687-690.

BJÖRK, A., 1967. Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions I, BIT 7, pp.257-278.

BJÖRK, A., 1968. Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions II, BIT 8, pp.8-30.

BJÖRK, A. and GOLUB, G.H., 1967. Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions by Householder Transformatios, BIT 7, pp.322-337.

BUSE, A., 1973. Goodness of Fit in Generalized Least Squares Estimation, American Statistician, 27(3), 106-108.

CHEN, J. and SHAO, J., 1993. Iterative Weihted Least Squares Estimators, The Annals of Statistics, Vol.21,No.2,1071-1092.

DRAPER, N.R. and SMITH, H., 1981. Applied Regression Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto.

FAREBROTHER, R. W., 1988. Linear Least Squares Computations, Marecel Deccer Inc. New York.

FLETCHER, R. H., 1975. On the Iterative Refinement of Least Squares Solutions, JASA 70, 109-112.

GLOUB, G. H., VAN LOAN, C. F. 1996. Matrix Computations, Johns Hopkins University Pres Baltimore, Maryland, 3rd Edition.

GOLDBERGER, AS., 1962. Best Linear Unbiased Prediction in the Generalized Linear Regression Model. Journal of American Statistical Association 57, 369-375.

GROB, J. and PUNTANEN, S., 2000. Remark On Pseudo-Generalized Least Squares 19(1), 131-133.

HOUSEHOLDER, A. S., 1958. Unitary Triangularization of a Nonsymetric Matrix Journal ACM, 5(4) 339-342.

KURA-TA, H., 1999. On the Efficiencies of Several Generalized Least Squares Estimators in a Seemingly Unrelated Regression Model and a Heteroscedastic model. Journal of Multivariate Analysis 70, 86-94.

KURATA, H., 2001. A Note on an Upper Bound for the Covariance Matrix of a Generalized Least Squares Estimator in a Heteroscedastic Model. Scientic Mathematicae Japonicae 53, 65-74.

KURATA, H. and KARİYA T., 1996. Least Upper Bound for the Covariance Matrix of a Generalized Least Squares Estimator in Regression with Applications to a Seemingly Unrelated Regression Model and a Heteroscedastic Model. Annal of Statistics 24, 1547-1559.

KURATA, H. and KARİYA T., 2004. Generalized Least Squares, Wiley.

LONGLEY, J. W., 1967. An Appraisal of Least Squares Programs for the Electronic Computer from Point of View of the User, Journal of the American Statistical Association 62, 819-841.

OUELLETTE, D. V., 1981. Schur Complements and Statistics, Linear Algebra and Its Applications, 36,187-295.

PAİGE, C. C., 1979b. Fast Numerically Stable Computations for Generalized Linear Least Squares Problems, SIAM J. Num. Anal. 16, pp.165-171.

PLACKETT, R. L., 1950. Some Theorems in Least Squares, Biometrika 37, 149-157.

PLACKETT, R. L., 1972. The Discovery of the Method and Least Squares Biometrika 59, 237-239.

PUNTANEN, S. and STYAN, GPH., 1989. The Equality of the Ordinary Least Squares Estimator and the Best Linear Unbiased Estimator. American Statistician, 43, 153-161.

STEWART, G. W., 1973. Introduction to Matrix Computations, Academic Press, New York.

TÜMER, G., 2010. Regresyon Modellerinde En Küçük Kareler Tahmin Edicileri, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Adana.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Gaziantep'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. 2005 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu ve 2009 yılında aynı bölümde yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen burada devam etmektedir. Evli.

EKLER

H1 KODU

```
copy u1 m1
print m1
trans m1 m2
print m2
copy c14-c29 m3
print m3
multy m1 m2 m4
print m4
multy m2 m1 m5
print m5
multy 4,97245E-06 m4 m6
print m6
subt m6 m3 m7
print m7
trans m7 m8
print m8
multy m7 m8 m9
print m9
copy c2-c7 m10
print m10
multy m8 m10 m11
print m11
```

H2 KODU

```
copy u2 m12
print m12
trans m12 m13
print m13
copy c14-c29 m3
print m3
multy m12 m13 m14
print m14
multy m13 m12 m15
print m15
multy 8,37019E-13 m14 m16
print m16
subt m16 m3 m17
print m17
trans m17 m18
print m18
multy m17 m18 m19
print m19
copy c2-c7 m10
print m10
multy m18 m10 m20
print m20
```

H3 KODU

```
copy u3 m21
print m21
trans m21 m22
print m22
copy c14-c29 m3
print m3
multy m21 m22 m23
print m23
multy m22 m21 m24
print m24
multy 4,59233E-09 m23 m25
print m25
subt m25 m3 m26
print m26
trans m26 m27
print m27
multy m26 m27 m28
print m28
copy c2-c7 m10
print m10
multy m27 m10 m29
print m29
```

H4 KODU

```
copy u4 m30
print m30
trans m30 m31
print m31
copy c14-c29 m3
print m3
multy m30 m31 m32
print m32
multy m31 m30 m33
print m33
multy 1,6509E-08 m32 m34
print m34
subt m34 m3 m35
print m35
trans m35 m36
print m36
multy m35 m36 m37
print m37
copy c2-c7 m10
print m10
multy m36 m10 m38
print m38
```

H5 KODU

```
copy u5 m39
print m39
trans m39 m40
print m40
copy c14-c29 m3
print m3
multy m39 m40 m41
print m41
multy m40 m39 m42
print m42
multy 5,45405E-12 m41 m43
print m43
subt m43 m3 m44
print m44
trans m44 m45
print m45
multy m44 m45 m46
print m46
copy c2-c7 m10
print m10
multy m45 m10 m47
print m47
```

H6 KODU

copy u6 m48

print m48

trans m48 m49

print m49

copy c14-c29 m3

print m3

multy m48 m49 m50

print m50

multy m49 m48 m51

print m51

multy 2,13082E-08 m50 m52

print m52

subt m52 m3 m53

print m53

trans m53 m54

print m54

multy m53 m54 m55

print m55

copy c2-c7 m10

print m10

multy m54 m10 m56

print m56

H1.H2.H3.H4.H5.H6

multy m7 m17 m57

print m57

multy m57 m26 m58

print m58

multy m58 m35 m59

print m59

multy m59 m44 m60

print m60

multy m60 m53 m61

print m61

trans m61 m62

print m62

multy m62 m10 m63

print m63

m63=R

trans m61 m62

print m62

multy m61 m62 m63

print m63

multy m62 m61 m64

print m64

trans m61 m62

print m62

copy c1 m65

print m65

multy m62 m65 m66

print m66