ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat POLAT

MATRİSLERİN İSTATİSTİK ALANINDA KULLANIMI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Murat POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 14/01/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

İmza…….....…… İmza….....

Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR

DANIŞMAN ÜYE

İmza…….....……

Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATRİSLERİN İSTATİSTİK ALANINDA KULLANIMI

Murat POLAT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
Yıl: 2013, Sayfa:79
Jüri : Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Bilimsel araştırmalarda elde edilen verilerin analizinde ve yorumlanmasında çeşitli istatistiksel yöntemler kullanılmaktadır. Yapılan bu çalışmalarda, lineer cebirin bir parçası olan matris kavramı önemli bir yere sahiptir. İstatistikte ise matrisler genel olarak, regresyon analizi, varyans analizi ve lineer modeller gibi alanlarda kullanılmaktadır. Bir matris formu olan Sweep operatör ise istatistikte kullanılan çok yönlü bir operatördür. Sweep operatörü; normal denklemlerin bir çözümü, kareler toplamı, hata kareler toplamı, matris determinantı, Cholesky ayrışım matrisi, Doolittle matrisi, genelleştirilmiş tersler gibi ifadeleri oluşturmak için kullanılabilir. Bu çalışmada, istatistiğin çeşitli alanlarında kullanılan bazı özel matrisler ve Sweep operatörü incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matrisler, İdempotent matrisler, ANOVA, Sweep operatör,

ABSTRACT

MSc THESIS

USAGE OF MATRICES IN STATISTICS

Murat POLAT

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
Year: 2013, Sayfa: 74
Jury : Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Various statistical methods are used in the analysis and interpretation of the data which is obtained from the scientific researches**.** The concept of matrix which is a part of linear algebra has an important role in these studies. The matrices in statistics are used in regression analysis, analysis of variance and linear models. Sweep operator, which is a form of matrix, is a versatile operator used in the statistics. Sweep operator can be used to generate some of expressions such as, the solution of the normal equations, the sum of squares,the sum of squares error determinant of a matrix, Cholesky decomposition matrix, Doolittle matrix and generalized inverse. In this study, some special matrices used in various fields of statistics and Sweep operator are investigated.

Keywords: Matrices, idempotent matrices, ANOVA, Sweep operator.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana destek olan ve hiçbir zaman yardımlarını, desteğini esirgemeyen danışman hocam sayın Prof.Dr.Sadullah SAKALLIOĞLU'na teşekkür ederim. Ayrıca, tez çalışmamda karşılaştığım problem ve sıkıntılarımda bana yardımcı olan bölüm başkanımız sayın Prof.Dr.Selahattin KAÇIRANLAR'a ve Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nün diğer öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca, maddi, manevi desteklerini benden esirgemeyen Aileme ve bu süreçte hep yanımda olan arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I

ABSTRACT II

TEŞEKKÜR III

İÇİNDEKİLER SAYFA IV

ÇİZELGELER DİZİNİ VI

SİMGELER ve KISALTMALAR VII

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 13

2.1. Kavramsal Açıdan Matrisler 13

2.2. Matrislerin Kullanım Avantajları 17

3. MATRİSLERİN İSTATİSTİKTE BAZI KULLANIM ALANLARI 19

3.1. Lineer Denklem Sistemlerinde Matrislerin Kullanımı 19

3.2. Regresyon Analizinde Matrislerin Kullanımı 21

3.2.1. Lineer (Doğrusal) Regresyon Modeli 22

3.2.2. Doğrusal Regresyon Modelinin Varsayımları 26

3.3. Parametrelerin EKK Tahmini 26

3.4. Şapka Matrisi 29

3.5. Hataların Tahmini ve Varyans-kovaryans Matrisi 30

3.6. İdempotent Matrislerin ANOVA Üzerine Etkisi 32

4. İSTATİSTİKTE KULLANILAN BAZI ÖZEL MATRİS YÖNTEMLERİ 49

4.1. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi 50

4.2. Adjust Operatörünün Diğer Kullanımları 54

4.3. Forward Doolittle Matrisi 55

4.3.1. Forward Doolittle Matrisinin Bir Simetrik p.d. Matrise Etkisi 56

4.4. Simetrik p.d. Matrisin Determinantı 56

4.5. Adjust Operatörü Yardımıyla Bir Matrisin Tersinin Bulunması 57

4.6. Regresyon Katsayılarının, Hata Kareler Toplamının ve $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ in Tersinin Elde Edilişi 58
4.7. Sweep Operatör 65
4.8. Genelleştirilmiş İnvers Hesaplanması 67
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 73
KAYNAKÇA 74
ÖZGEÇMİŞ 79

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 3.1. Tek Yönlü ANOVA Tablosu.....34
Çizelge 3.2. Tek Yönlü ANOVA Tablosu.....41
Çizelge 3.3. İki Yönlü ANOVA Tablosu 43
Çizelge 3.4. İki Yönlü ANOVA Tablosu 47
Çizelge 4.1. Normal From 60
Çizelge 4.2. Sabit terimi bulmak için X0 modele dahil edilir ise.....60
Çizelge 4.3. X1 değişkeni modele dahil edilir ise 60
Çizelge 4.4. X1 ve X2 değişkenleri modele dahil edilir ise 61
Çizelge 4.5. X1, X2 ve X3 değişkenleri modele dahil edilir ise 61
Çizelge 4.6. Tüm değişkenler modele dahil edilerek tam model oluşturulur ise.....61
Çizelge 4.7. Tam modelden X2 değişkeni çıkarılır ise.....62
Çizelge 4.8. Tam modelden X1 değişkeni çıkarılır ise.....62
Çizelge 4.9. Tam modelden X3 değişkeni çıkarılır ise.....62
Çizelge 4.10. Tam modelden X2 ve X4 değişkenleri çıkarılır ise.....62
Çizelge 4.11. Tam modelden X1 ve X2 değişkenleri çıkarılır ise.....63
Çizelge 4.12. Tam modelden X1 ve X4 değişkenleri çıkarılır ise.....63
Çizelge 4.13. Tam modelden X1 ve X3 değişkenleri çıkarılır ise.....63
Çizelge 4.14. Tam modelden X2 ve X3 değişkenleri çıkarılır ise.....63
Çizelge 4.15. Tam modelden X1, X2 ve X3 değişkenleri çıkarılır ise.....64
Çizelge 4.16. Y bağımlı değişkeni için hesaplanan regresyon modelleri.....64

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\lvert A \rvert$	: A Matrisin Determinantı
$rank(A)$	: A Matrisinin Rankı
$tr(A)$	: A Matrisinin İzi (Trace)
A'	: A Matrisinin Transpozu
A^{-1}	: A Matrisinin Tersi
A^{+}	: A Matrisinin g-inversi
A^{c}	: A Matrisinin c-inversi (koşullu invers)
I_{n}	: nxn tipinde birim matris
$\mathbf{j_n}$	: nx1 tipinde tüm elemanları bir olan vektörü
$\mathbf{J_n}$	: nxn tipinde tüm elemanları bir olan matrisi
$E(X)$	: X değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: X değişkeninin varyansı
$Cov(X,Y)$	: X ve Y değişkeninin kovaryansı
ε_i	: i. Tahminin hatası
$\varepsilon_{n\times 1}$	: Hataların vektörü
β	: Model katsayılarının vektörü
H	: Şapka matrisi
CSS_k	: Düzeltilmiş kareler toplamı
R	: Korelasyon katsayısı
$p.d.$	: Pozitif tanımlı
SSE	: Hata kareler toplamı
SSR	: Regresyon kareleri toplamı
SST	: Genel kareler toplamı
MSE	: Hata kareleri ortalaması
MSR	: Regresyon kareleri ortalaması
SS	: Kareler toplamı
CP	: Karşılıklı çarpımlar

EKK	: En küçük kareler
Σ	: Varyans –kovaryans matrisi
H_0	: Yokluk hipotezi
H_1	: Alternatif hipotez
F	: F testi
t	: t testi
σ^2	: Varyans
μ	: Kitle ortalaması
χ^2	: Ki-kare dağılımı
$s.d.$	: Serbestlik derecesi
$N(0,1)$	: Standart normal dağılım
$N(\mu,\sigma^2)$	: Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan normal dağılım
$\forall$	: Her
$\exists$	: En az biri
$\sum$	: Toplam

1. GİRİŞ

Gerek fen, gerekse sosyal bilimlerde yapılan bilimsel araştırmalarda elde edilen verilerin çözümlenmesinde ve bulguların yorumlanmasında çeşitli istatistik yöntemler yoğun olarak kullanılmaktadır. Yapılan bu çalışmalarda matris kavramı oldukça önemli bir yere sahiptir. Matris ve matrislerle ilgili matris determinantı, matris tersi, matris ayrışımı gibi kavramlar, istatistiksel analiz yöntemlerinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Genelde matrisler çoklu regresyon analizinde, büyük boyutlu verilerin analizinde ve denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır (Kutner ve Neter, 2005).

İstatistikteki uygulamaların ve teorik kısmın büyük bir bölümünü kapsayan varyans bileşenleri, en küçük kareler (EKK) yöntemi, regresyon, korelasyon, varyans analizi(ANOVA) ve deneysel tasarım gibi konularda da matris işlemleri önemli bir yer tutmaktadır (Graybill, 1983).

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde matrislerle ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde kavramsal olarak matrislerin niçin kullanıldığına yönelik bilgi ve önceki çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise çeşitli alanlarda karşımıza çıkan lineer denklem sistemlerinin çözülmesinde ve yorumlanmasında yardımcı olan matris gösterimlerinin önemine yer verilmiştir. Ayrıca regresyon analizinde kullanılan matris yapıları incelenmiş ve özel bir matris yapısı olan idempotentliğin ANOVA'daki kullanımı incelenmeye çalışılmıştır. Son bölümde ise Gauss-Jordan eliminasyonunun ileri bir modifikasyonu olan Sweep operatör matrisinin istatistikte her zaman ihtiyaç duyulan EKK, regresyon analizi gibi yapılar üzerine etkisi incelenmiştir.

Bu çalışmanın giriş kısmında, matrislerle ilgili temel kavramlar ve özellikler açıklanırken ihtiyaç duyulan teoremler Graybill (1983)'den alınmıştır.

Matris: Satır ve sütunlardan oluşan, reel sayıların düzenli bir dizisine reel matris denir. Matris büyük harfle, elemanları ise küçük harfle temsil edilir. n satır ve m sütundan oluşan bir *A* matrisinin genel formu ise;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} = \left[a_{ij} \right]_{n\times m} \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilir. (1.1) eşitliğinde $n=m$ ise *A* matrisine kare matris denir.

Matrisin Transpozu: (1.1) eşitliğinde verilen $A=\left[a_{ij} \right]_{n\times m}$ matrisinin satır ve sütun elemanlarının yer değiştirilmesiyle oluşan A', matrisine A nin transpozu denir ve aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = \left[a_{ji} \right]_{m\times n} \tag{1.3}$$

Transpozun özellikleri ile ilgili teoremler;

c bir skaler ve A $n\times m$ ile B $n\times m$ aynı boyutta matrisler olsun.

Teorem 1.1: $\left(A'\right)'=A$

Teorem 1.2: $\left(A\mp B\right)'=A'\mp B'$

Teorem 1.3: $\left(cA\right)'=cA'$, $c\in\mathbb{R}$

Teorem 1.4: A $n\times m$ ve B $m\times n$ tipinde matrisler ise $\left(AB\right)'=B'A'$ dır.

Sıfır matrisi: Tüm elemanları 0 olan $n\times m$ tipindeki matrise sıfır matrisi denir ve $\mathbf{0}_{\mathbf{nm}}$ şeklinde gösterilir

Birlerin vektörü: Tüm elemanları 1 olan $n\times 1$ tipindeki vektöre birlerin vektörü denir ve $\mathbf{1_n}$ ya da $\mathbf{j_n}$ şeklinde gösterilir.

Birlerin matrisi: Tüm elemanları 1 olan $n\times m$ tipindeki matrise birlerin matrisi denir ve $\mathbf{J_{nm}}$ şeklinde gösterilir. $\mathbf{J_{nm}}$ ve $\mathbf{J_{mk}}$ şeklindeki birlerin matrisinin çarpımı, $\mathbf{J_{nm}J_{mk}} = m\mathbf{J_{nk}}$ dir.

Üçgensel matris: $A=\left[a_{ij}\right]$ $n\times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere;

$\forall$ $j<i$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine Alt Üçgensel matris denir.

$\forall$ $j>i$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine Üst Üçgensel matris denir.

Köşegen matris: $D=\left[d_{ij}\right]$ $n\times n$ tipinde bir kare matris olsun. $\forall$ $i\neq j$ için $d_{ij}=0$ ise D matrisine köşegen (diagonal) matris denir.

Skaler matris: $D=\left[d_{ij}\right]$ $n\times n$ tipinde bir köşegen matris ve k $\in\mathbb{R}$ olsun. $\forall$ $i=j$ için $d_{ii}=k$ ise D matrisine skaler matris denir.

Birim matris: Bir köşegen matriste, köşegen elemanları 1 ise bu matrise birim matris denir. n–inci mertebeden birim matris I_n şeklinde gösterilir.

Tekil olmayan matris: A $n\times n$ tipinde bir matris olsun. $|A|\neq 0$ ise A matrisine tekil olmayan matris denir.

Satır eşelon form: A $n\times m$ tipinde bir matris olsun.

i) Eğer matrisin bir satırındaki elemanların hepsi sıfır ise bunlar matrisin en alt satırında bulunmalıdır.

ii) Matrisin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı 1 olmalıdır. Bu elemana esas eleman adı verilir.

iii) Sıfırdan farklı her bir satırda esas eleman, bir önceki satıra göre sağa doğru kaymak suretiyle yazılır.

iv) Eğer bir matrisin sütununun birisi esas elemanı içeriyorsa, o sütundaki diğer elemanların hepsi sıfırdır.

Eğer A matrisi yukarıdaki tanımda yer alan (i), (ii), (iii) ve (iv) şıklarındaki özellikleri sağlıyor ise, bu matris satır eşelon formdadır denir.

Bir matrisin tersi: A $n\times n$ ve B $n\times n$ kare matrisler olsun. $AB = BA = I$ ise B matrisine A matrisinin tersi denir. $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.5: A tekil olmayan bir matris ise tersi var ve tektir.

Teorem 1.6: Bir A matrisinin tersi A^{-1} ise A^{-1} 'inde tersi var olup kendisine eşittir. Yani $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ dır.

Teorem 1.7: A ve B tekil olmayan matrisler ise AB 'nin de tersi vardır ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir. Sonlu sayıda tekil olmayan $A_1, A_2, ..., A_n$ matrisleri için;

$$\left(A_1 A_2 \dots A_n\right)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$$

dir.

Teorem 1.8: $k \neq 0$ bir reel sayı ve A tekil olmayan bir matris olmak üzere $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ dir.

Simetrik matris: A bir kare matris olsun, $A = A'$ ise A 'ya simetrik matris denir.

Ters simetrik matris: A bir kare matris olsun, $A = -A'$ ise A'ya ters simetrik matris denir.

Teorem 1.9: A, bir matris olsun, $A'A$ ve AA' matrisleri simetriktir.

Teorem 1.10: A, tekil olmayan bir matris ise $\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$ dir.

Ortogonal matris: P $n\times n$ tipinde bir kare matris olsun. Eğer $P^{-1} = P'$ ise P matrisine ortogonal matris denir.

Teorem 1.11: B $m\times m$ tipinde bir matrisi olsun. B ortogonal bir matris ise tekil değildir.

Teorem 1.12: P $n\times n$ tipinde kare matris olsun. P'nin bir parçalanışı $\left[p_1, p_2, \dots, p_n\right]$ olup, P'nin i – inci kolondaki elemanlardan oluşan, p_i 'ler $n\times 1$ tipinde bir vektör olarak gösterilsin. P 'nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul;

i) $p_i' p_i = 1$ için $(i = 1, 2, \ldots, n)$

ii) $p_i' p_j = 0$ için $(i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n \; ; \; i \neq j)$ dir.

Teorem 1.13: P $n \times n$ tipinde ortogonal bir matris olabilmesi için gerek ve yeter koşul $P'P = PP' = I_n$ dir.

Teorem 1.14: Ortogonal bir matrisin determinantı 1 ya da -1 dir.

Teorem 1.15: Sonlu sayıda ortogonal matrislerin çarpımları da yine bir ortogonal matristir.

Teorem 1.16: Ortogonal bir matrisin terside ortogonaldir.

Teorem 1.17: A $n \times n$ bir kare matris ve P $n \times n$ tipinde ortogonal bir matris olmak üzere $\det(A) = \det(P'AP)$ dır.

Teorem 1.18: A $n \times n$ simetrik bir matris olsun. $P'AP = D$ olacak şekilde ortogonal bir P matrisi vardır ve D, A 'nın karakteristik köklerinden oluşan köşegen bir matristir.

İdempotent matris: A $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $A^2 = A$ ise A matrisine İdempotent matris denir.

Bir matrisin determinantı: A $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin determinantı, det(A) veya $|A|$ ile gösterilir ve bir skaler dir.

A $n \times n$ matrisinin M_{ij} minörü, A'nın i. satırı ve j. kolonun çıkarılmasıyla oluşan $(n-1) \times (n-1)$ alt matrisin determinantıdır. A $n \times n$ matrisinin işaretli minörü ise $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dir.

A matrisinin determinantı, sütuna göre açılımı $j = 1, 2, ..., n$ için;

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

veya satıra göre açılımı $i = 1, 2, ..., n$ için;

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir matrisin rankı: A $n \times m$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin tekil olmayan en büyük kare alt matrisi, $r \times r$ boyutunda ise A matrisinin rankı r dir. ve $rank(A) = r$ olarak gösterilir.

Sütun rankı: A $n \times m$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin lineer bağımsız sütunlarının sayısına A 'nın sütun rankı denir.

Satır rankı: A $n \times m$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin lineer bağımsız satırlarının sayısına A 'nın satır rankı denir.

Teorem 1.19: Herhangi bir A matrisinin satır rankı, sütun (kolon) rankına eşittir.

Teorem 1.20: A $n \times n$ tipinde bir matris ve $rank(A) < n$ ise A tekil olup, A matrisinin tersi yoktur.

Teorem 1.21: Bir A matrisinin soldan ve sağdan elementer matrisler ile çarpılmasıyla A matrisinin boyutu ve rankı değişmez.

Teorem 1.22: A ve B tekil olmayan matrisler ise herhangi bir C matrisi için C, AC, CB ve ACB matrislerinin her biri aynı ranklıdır.

Teorem 1.23: A $n \times m$ tipinde bir matris ve $rank(A) = r \le m, n$ ise öyle bir P ve Q matrisleri vardır ki PAQ matrisi rankı r'ye bağlı olarak

$m = n = r$ ise I_r

$n = r < m$ ise $\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$

$m = r < n$ ise $\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$

$n > r, m > r$ ise $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

matrislerinden herhangi birine eşit olur.

Matrislerin kronecker (Direkt) çarpımı: A $n \times m$ ve B $p \times q$ tiplerinde iki matris olsun. A ile B matrisinin kronecker çarpımı $A \otimes B$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1q} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{p1} & Ab_{p2} & \cdots & Ab_{pq} \end{bmatrix}_{np \times mq}$$

Teorem 1.24: A $n \times m$ ve B $p \times q$ tiplerinde farklı iki matris ise genellikle $A \otimes B \neq B \otimes A$ dır.

Teorem 1.25: I_n bir birim matris ve A $n \times m$ şeklinde bir matris ise;

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n \times m}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix}_{nn \times nm} = diag(A)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kronecker çarpımının bazı özellikleri;

i) A ile B herhangi iki matris ve k bir skaler olmak üzere;

$$(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$$

şeklinde ifade edilebilir.

ii) A, B ve C matrislerinin kronecker çarpımlarının birleşme özelliği vardır. Yani

$$\mathbf{A}\otimes\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}\right)=\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)\otimes\mathbf{C}$$

şeklinde yazılabilir.

iii) A $n\times n$ ve B $m\times m$ matrisleri için aşağıdaki eşitlikler kullanılabilir.

1) $\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)'=\mathbf{A}'\otimes\mathbf{B}'$

2) $\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}$

3) $\det\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)=\det\left(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{A}\right)=1$

4) $\det\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)=\det\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}\right)=\left|A\right|^{n}\left|B\right|^{m}$

iv) A, B, C, D $n\times n$ tipindeki birbirinden farklı matrisler için aşağıdaki eşitlikler kullanılabilir.

1) $\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}\right)=\left(\mathbf{AC}\right)\otimes\left(\mathbf{BD}\right)$

2) $\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}^{-1}\right)=\mathbf{I}\otimes\left(\mathbf{ABA}^{-1}\right)$

3) $\mathbf{A}\otimes\left(\mathbf{B}\mp\mathbf{C}\right)=\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)\mp\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}\right)$

Bir matrisin izi (trace): A $n\times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın köşegen elemanlarının toplamına A matrisinin izi (trace) denir ve $tr\left(A\right)$ şeklinde gösterilir.

$$tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.26: A ve B $n\times n$ tipinde bir matris olsun ve $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$ dir.

Teorem 1.27: A $n\times n$ tipinde herhangi bir matris ve P de, $n\times n$ tipinde tekil olmayan matrisi ise $tr\left(A\right)=tr\left(P^{-1}AP\right)$ dir. Eğer P ortogonal matris ise

$$tr\left(A\right)=tr\left(P'AP\right)$$

olarak ifade edilebilir.

Teorem 1.28: A $n\times n$ tipinde, karakteristik kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olan bir matris ise $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ dir.

Teorem 1.29: A $n\times n$ tipinde, karakteristik kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olan bir matris ve $k\in Z^+$ olmak üzere, $tr(A^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$ dır.

Teorem 1.30: A $n\times n$ tipinde matris olmak üzere $tr(A)=tr(A')$ dır.

Teorem 1.31: A ve B $n\times n$ tipinde matrisler olsun. a ve *b* skaler olmak üzere

$$tr(aA+bB)=atr(A)+btr(B)$$

dır.

Teorem 1.32: A $n\times m$ tipindeki bir matrisin rankı *r* olsun.

$$tr\left[I-A(A'A)^{-1}A'\right]=n-r$$

dir.

Teorem 1.33: A $n\times m$ tipinde bir matrisi olsun.

$$tr(A'A)=tr(AA')=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^2$$

dir.

Teorem 1.34: A $n\times n$ tipinde ve B $m\times m$ tipinde matrisler olsun. $A\otimes B$ direkt çarpımının izi;

$$tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=tr(A)tr(B)$$

dir.

Koşullu invers : A $n\times m$ tipindeki matris olsun. $AA^cA=A$ koşulunu sağlayan A^c matrisine A'nın koşullu inversi (c-inversi) denir.

Teorem 1.35: Her matrisin koşullu inversi vardır ve tek olmayabilir.

Teorem 1.36: A $n\times m$ tipindeki matris ve A nın koşullu inversi A^c $m\times n$ tipinde bir matris olsun. AA^c ve A^cA idempotent matrislerdir.

Genelleştirilmiş invers: A $n\times m$ tipindeki matrisi için aşağıdaki koşulları sağlayan A^+ matrisine A matrisinin genelleştirilmiş inversi (g-inversi) denir.

i) AA^+ simetriktir.

ii) A^+A simetriktir.

iii) $AA^+A=A$

iv) $A^+AA^+=A^+$

Bir A matrisinin g- inversi varsa tektir.

Teorem 1.37: A $n\times m$ tipindeki matrisinin g- inversi $m\times n$ tipindedir.

Teorem 1.38: A $n\times m$ tipindeki sıfırlardan oluşan matrisinin $m\times n$ tipindeki g-inversi de sıfırlardan oluşan bir matristir.

Teorem 1.39: Eğer A $n\times m$ tipindeki bir matris ise

i) $\left(A^+\right)^+=A$

ii) $\left(A'\right)^+=\left(A^+\right)'$

iii) $\left(AA^+\right)^+=AA^+$ ve $\left(A^+A\right)^+=A^+A$

iv) $\left(A^TA\right)^+=A^+\left(A^T\right)^+$

dir.

Teorem 1.40: A $n\times n$ tipinde simetrik ve idempotent bir matris ise A matrisinin g-inversi kendisine eşittir. Yani $A = A' = A^2$ ise $A^+ = A$'dır.

Teorem 1.41: AA^+, A^+A, $I - AA^+$, $I - A^+A$ matrisleri simetrik ve idempotent dir.

Teorem 1.42: A ve B matrislerinin rankları r ve sırayla $n\times r$ ile $r\times m$ tipinde matrisler ise $(AB)^+ = B^+A^+$ dır.

Teorem 1.43: P $n\times n$ tipinde Q $m\times m$ tipinde ortagonal matrisler ve A $n\times m$ tipinde bir matris ise $(PAQ)^+ = Q'A^+P'$ dır.

Teorem 1.44: A $n\times n$ tipinde tekil olmayan bir matris ise $A^+ = A^{-1}$ dir.

Teorem 1.45: A $n\times m$ tipinde bir matris olsun. $rank(A) = rank(A^+)$ dır.

Permütasyon matrisi: I $n\times n$ tipinde birim matris olmak üzere, birim matrisinin satırlarının yada sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşan P $n\times n$ tipindeki matrise permütasyon matrisi denir.

Teorem 1.46: P $n\times n$ tipinde bir permütasyon matrisi olsun. P matrisi ortogonal bir matris olması için gerek ve yeter koşul $P'P = PP' = I$ olmasıdır.

Teorem 1.47: P $n\times n$ tipinde bir permütasyon matrisi ise $k\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere P^k'da bir permütasyon matrisidir.

Karesel form: A $n\times n$ tipinde simetrik matris ve $y\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $y'Ay$ ifadesine karesel (quadratic) form denir.

Teorem 1.48: (Cochran Teoremi) y $n\times 1$ tipinde $N(\mu, I)$ normal dağılıma sahip rasgele bir vektör ve $y'A_1y$, $y'A_2y$, ..., $y'A_ky$ karesel formlarının toplamı $y'y$ olsun. Bu durumda $y'A_iy$, $i = 1, 2, ..., k$ karesel formlarının;

i) $rank(A_i)$ serbestlik derecesi ve $\lambda_i = \mu'A_i\mu$ merkezi olmama parametres χ^2 dağılımına sahiptir.

ii) Bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{k} rank(A_i) = n$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Şenoğlu ve Acıtaş, 2011).

Pozitif tanımlı matris (p.d.): A $n\times n$ tipinde simetrik matris olsun. A matrisi $y\in\mathbb{R}^n$, $y\neq 0$ için $y'Ay>0$ olma koşulunu sağlıyor ise A matrisine p.d. matris denir.

Teorem 1.49: A $n\times n$ tipinde simetrik matris ve köşegen elemanları a_{ii} olsun. Eğer A p.d. matris ise $\forall$ $i=1,2,...,n$ için $a_{ii}>0$ dır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Kavramsal Açıdan Matrisler

Matris kavramının kullanımının uzun bir geçmişi vardır. Doğrusal denklem sistemlerinin, matris yardımı ile çözülmesi, M.Ö. 300 yıllar ve M.S 200 yılları arasın da (Jiu Zhang Suan Shu) tarafından Çince yazılmış olan "Matematik Sanatı" adlı eserin dokuzuncu bölümünde eşanlı denklemlerin çözümlerinde kullanıldığı ve determinant fikrini içerdiği fark edilmiştir (Shen ve ark., 1999). Daha sonraları matris kavramı, 1683'de Japon matematikçi "Seki Kova", Batı Avrupa da ise Alman Matematikçi "Leibniz" tarafından ortaya atılmıştır. Doğrusal denklem sistemlerinin determinant kullanarak pratik çözümü ise 1750'de Gabriel Cramer tarafından bulunmuş ve bu yöntem Cramer kuralı adını almıştır.

Batı Avrupa da matris teorisinin gelişimi ise daha çok determinant yönünde olmuştur. 1858'de Arthur Cayley tarafından determinanttan bağımsız olarak matris matematiğinin geliştirilmesi "*Memoire on the theory of matrices"* adlı eseriyle başlamıştır. Matris terimi isim olarak ilk kez İngiliz matematikçi J.J.Syvester tarafından 1850 de kullanılmıştır. Syvester, determinantları açıp sayısal değerlerini hesaplamak için sütun ve satırları silerek daha küçük determinant (minor) elde ederek bu sonucu bulma üzerinde uğraşı göstermiş. Ana determinanttan gittikçe küçülen "çocuk" determinantların oluşmasından ilham alarak Latince kökenli *mater* (anne) sözcüğünden çıkardığı kavrama *matrix* (matris) adını vermiştir (Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut, 1987).

Matrisler, istatistik teorisi ve veri analizinin gelişimi için katkıda bulunmuş önemli matematik yapılarından biridir.

İstatistik alanında son yıllarda görülmüştür ki karmaşık istatistik analizlerinin kullanılmasında, anlaşılmasında, matris yöntemleri önemli bir rol oynamaktadır (Schott, 1997). İstatistiğin birçok alanında, sonuçların doğrulanması ve türetilerek ifade edilmesinde matrisler yaygın olarak kullanılmaktadır (Harville, 1997).

Matrisler lineer modeller ve çok değişkenli istatistik konularında da aktif bir kullanım alanına sahiptir. Varyans analizi, deneysel tasarım, varyans bileşenleri,

regresyon, korelasyon gibi istatistiğin önemli alanlarında ise matris kavramı önemli bir rol oynar (Graybill, 1983).

Matris teorisi, çok değişkenli istatistiği sunmak için güzel bir dildir. Matrisler uzun bir süredir kullanılıyor olmasına rağmen çok değişkenli analizin sistematik işlemleri sayesinde özellikle son 30 yılda gelişmiştir. Matris ile çok değişkenli analiz arasında karşılıklı bir ilişki vardır. Diğer taraftan ise çok değişkenli istatistik analizi matris cebirindeki birçok konunun gelişmesinde başlangıç noktası olmuştur (Kollo, Von Rosen, 2005).

Rohde (1965)'deki çalışmasında parçalanmış matrislerin genelleştirilmiş inversleri incelenmiştir.

Langenhop (1967)'deki çalışmasında matrislerin genelleştirilmiş inversi ve moore-penrose inversi incelenmiştir.

Healy (1968)'deki çalışmasında tekil matrisler ile çoklu regresyona etkisi incelenmiştir.

Carl ve Meyer (1973)'deki çalışmalarında blok matrislerin rankları ve genelleştirilmiş inversleri incelenmiştir.

Healy (1986)'da "Matrices for statistics" çalışmasında istatistikte kullanılan matrisler ile kullanım şekilleri incelenmiştir.

Hoaglin ve Welsch (1978)'deki çalışmasında şapka matrisinin temel özellikleri açıklanmıştır. Ayrıca, şapka matrisinin regresyon ve varyans analizinde kullanımı incelenmiştir.

Searle (1982)'deki "Matrix algebra useful for statistics" çalışmasında matris özellikleri açıklanmıştır. Regresyon analizi ve lineer modellerdeki kullanımı incelenmiştir.

Graybill (1983)'deki "Matrices with applications in statistics" çalışmasında matrislerin özellikleri ve istatistikteki kullanımı incelenmiştir.

Bronson (1989)'daki "Matrix operations" çalışmasında maris işlemleri örneklerle açıklanmış ve lineer cebirdeki uygulamaları incelenmiştir.

Sakallıoğlu (1989)'daki çalışmasında genelleştirilmiş invers hesaplama yöntemleri açıklanmış ve lineer modellerde tek ve çift yönlü sınıflandırma modellerinde X katsayı matrisi kronecker çarpımı ile ifade edilmiştir. Ayrıca bu

çalışmada kronecker çarpımı kullanılarak genelleştirilmiş inversler yardımı ile parametre tahminleri incelenmiştir.

Piegorsch ve Casella (1989), en küçük kare problemlerindeki matris tersini hesabını kolaylaştırmak için köşegen artışlar incelenmiştir.

Kaçıranlar (1991)'deki çalışmasında matris sıralamaları ve lineer modellerdeki uygulamaları incelenmiştir.

Akdeniz ve Öztürk (1996)'daki çalışmalarında matris kavramı ve özellikleri incelenmiş ve lineer modellerdeki kullanımı ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Harville (1997)'deki "Matrix algebra from a statistician's perspective" çalışmasında matrisleri temel özellikleri ve istatistik üzerine uygulamaları incelenmiştir.

Schott (1997)'deki "Matrix analysis for statistics" çalışmasında temel matris kavramları ve istatistikte kullanılan özel matris operatörleri incelenmiştir.

Recher (2000)'deki "Lineer models in statistics" çalışmasında matrisler ve matrislerin lineer modeller üzerine etkisi incelenmiştir.

Kolman ve Hill (2002)'deki "Uygulamalı lineer cebir" çalışmalarında lineer cebirin bir alt dalı olan matrisler ve lineer cebir işlemlerinin matlab uygulamaları incelenmiştir.

Schott (2003)'deki çalışmasında kronecker çarpımın, permütasyon matrisler ve normal dağılımın moment matrisleri üzerine etkisi incelenmiştir.

Şenoğlu ve Acıtaş (2011), "İstatiksel deney tasarımı ve sabit etkili modeller" çalışmaların da varyans analizi yöntemleri ve kovaryans analizi incelenmiştir.

Idempotent matrislerin genel lineer hipotez teorisinde önemli bir rol oynadığı uzun zaman önce fark edilmiş fakat tam olarak kullanılmamıştır(Graybill ve Marsaglia, 1957). Graybill ve Marsaglia (1957), idempotent matrislerin lineer hipotez teorisi lehine nasıl kullanılabileceğini göstermiş ve idempotent matrislerin ki-kare değişkenlerinin ayrışımında önemli bir rol oynadığını bazı teoremlerle incelemiştir.

Banerjee (1964)'de yapmış olduğu çalışmasında Graybill ve Marsaglia (1957)'de ispatlamış oldukları teoremleri matris izi(trace) özelliğini kullanarak başka bir açıdan doğruluğu incelenmiştir.

Baksalary ve Baksalary (2000)'de P_1, P_2 gibi sıfır olmayan iki idempotent matrisin bir lineer kombinasyonunun da idempotent olduğu durumlar incelenmiştir.

Baksalary ve Ark. (2002)'de bir tripotent matris ve bir idempotent matrisin lineer kombinasyonununda idempotent olduğu durumlar incelenmiştir.

Özdemir ve Özban (2004)'de P_1, P_2; gibi birbirinden farklı sıfır olmayan iki idempotent matrisin bir lineer kombinasyonun da idempotent olduğunu ve P_1, P_2 , P_3 gibi sıfırdan farklı üç idempotent matrisin lineer kombinasyonlarının idempotent olduğu durumlar incelenmiştir. Ayrıca idempotent olan karesel formların ki-kare dağılımına sahip olup olmadığı incelenmiştir.

Baksalary ve Benitez (2007)'de P_1, P_2 , P_3 gibi sıfırdan ve birbirinden farklı üç idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliğini inceleyerek bu idempotent matrisin T_1 ve T_2 gibi iki idempotent matrise parçalanabileceği koşullar $T_1T_2 = 0 = T_2T_1$ şeklinde açıklanmıştır. Ayrıca burada T_1 ve T_2'nin idempotent olabilmesi için $T_1T_2 = T_2T_1$ değişmeli olma koşulu incelenmiştir.

Deniz (2006) tarafından yapılan çalışmada idempotent matrisler ve idempotent matrislerin lineer kombinasyonlarının tekil olamama durumu incelenmiştir.

Beaton (1964)'deki çalışmasında büyük istatiksel analizleri daha kolay yapabilmek için bilgisayarlar üzerine etkili ve basitçe uygulanabilen bazı operatörler incelenmiştir. Bunlar Çapraz çarpım operatörü, Sweep operatör, Çapraz çarpım matris dönüşüm operatörü, standartlaştırma operatörü, Çoklu standartlaştırma operatörü ve Köşegenleştirme operatörüdür. Bu operatörler kullanılarak farklı istatistik teknikleri incelenmiştir.

Goodnight (1979), tarafından yapılan çalışmada Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile Forward Doolittle, Cholesky ayrışımı ve Sweep operatörü arasındaki ilişki açıklanmıştır. Sweep operatörü kullanılarak model katsayılarının, hata kareler toplamının ve $X'X$ matrisinin tersinin nasıl hesaplanacağı verilmiştir. Ayrıca, Sweep operatörün sadece normal denklemlerinin çözümünde değil, aynı zamanda en küçük kareler yönteminin anlaşılmasında da önemli bir rol oynadığı vurgulanmıştır.

Grier (1992)'de lineer modellerde değişken seçimi için Backward eliminasyon ile stepwise regresyon incelenmiş. Sweep operatör algoritması açıklanmıştır.

Wemuth ve Cox (2000)'de üçgensel matrisler üzerine Sweep operatörü yardımı ile stepwise regresyon yöntemi incelenmiştir. Simetrik matrislerin terslerinin hesabında Sweep operatörünün özellikleri incelenmiştir.

Monahan (2006)'da ortalama vektörü ve kovaryans matrisinin hesaplanması için bazı özel algoritmalar incelenmiştir. Koşullu normal dağılıma sahip değişkenlerin, kovaryans matrisi ve ortalama vektörünün hesaplanması probleminde Sweep operatörü basit genel yaklaşımlarla farklı şekillerde düzenlenmiştir.

2.2. Matrislerin Kullanım Avantajları

Matrisler genel olarak, matris veri analizi diyagramı ya da tablosu adı altında, çok değişkenli analiz tekniğinin bir parçası olarak büyük miktardaki bilgilere netlik vermek, etkin parametreleri bulmak ve karmaşık verilerin belirli bir düzene konulması ile sadeleştirilmesinde kullanılır.

Ticaret, sağlık, istihdam, tarım, ekonomi vs. gibi büyük veri değişkenlerine sahip olan çalışma alanlarında, verilerin organizasyonunu ve araştırılan karakteristik özellikleri pratik bir biçimde sunmaya yardımcı olur.

Matrisler istatistikte ise analiz edilecek değişken yada faktörlerin karmaşık yapılarının düzenlenmesi, hesaplanması, doğru ve kolay kararlar alınmasında önemli bir rol oynar. Araştırıcının elinde bulunan büyük miktardaki veri grubunu, sembollere indirgeyerek kullanılabilir hale getirmesini ve işlem kabiliyetini kolaylaştırır. Dahası büyük miktardaki verileri kapsayan çalışmalarda verilerin uyumlulukları veya uyumsuzlukları öngörüsünde kullanılarak, verilerin karakteristik özelliklerine göre sistematik bir yapıda sınıflandırılmasını amaçlar.

Matrislerin yaygın olarak kullanıldığı bir diğer konu ise lineer denklem sistemlerinin çözümüdür. Lineer denklem sistemlerinin çözümünde, var olan çözüm kümesinin diğer yöntemlere göre daha pratik ve etkili bir biçimde ifade edilerek yapısal olarak genelleştirilmesine imkân tanır.

3. MATRİSLERİN İSTATİSTİKTE BAZI KULLANIM ALANLARI

3.1. Lineer Denklem Sistemlerinde Matrislerin Kullanımı

a_{11}, a_{12}, …, a_{nm}, b bilinen birer reel sayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_m$ bilinmeyenler olsun. Bu durumda $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$ şeklindeki denklemlere m bilinmeyenli bir lineer denklem denir. Daha genel olarak, m bilinmeyenli, n tane lineer denklemden oluşan sisteme, lineer denklem sistemi denir. Genel olarak;

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir. (3.1) deki lineer denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \cdots, x_m$ değerlerine denklemin ortak çözümü denir. Bu denklem sisteminin matris gösterimi ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = B \tag{3.2}$$

dir. Burada A n x m tipinde bir matris X ve b ise sırasıyla m x 1 ve n x 1 tipinde birer vektördür. (3.2)'de ki lineer denklem sistemin de b, sıfır vektörü ise bu sisteme homojen sistem denir. $x_1 = x_2 = \cdots x_m = 0$, homojen denklem sistemi için aşikâr bir çözümdür. Homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip ise bu

çözüme aşikar olmayan çözüm denir. Bir lineer denklem sistemi bir çözüme sahip ise tutarlı aksi halde tutarsızdır denir.

Teorem 3.1: A matrisi n x n tipinde ve tekil olmayan bir matris ise $AX = b$ lineer denklem sistemi $X = A^{-1}b$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 3.2: $AX = b$, lineer denklem sisteminde $C = [A, b]$ genişletilmiş matris olsun. $AX = b$ lineer denklem sisteminin bir çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul $rank(A) = rank(C)$ olmasıdır.

Teorem 3.3: $AX = b$ denklem sisteminin bir çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul B vektörünün, A'nın kolon uzayında olmasıdır.

Teorem 3.4: A n x m tipinde bir matris olsun. $AX = 0$ lineer denklem sisteminin aşikar çözümden farklı bir çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul $rank(A) < m$ olmasıdır.

Teorem 3.5: $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminde A n x m tipinde bir matris ve $rank(A) = r$ olsun. $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminin her bir çözümü, r tane lineer bağımsız çözümün bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Teorem 3.6: $AX = b$ lineer denklem sistemi tutarlı olsun. A n x m tipinde ve b $n \times 1$ tipinde sıfırdan farklı bir vektör olsun. $rank(A) = r$ ise $AX = b$ lineer denklem sistemini sağlayan lineer bağımsız vektörlerin sayısı $m - r + 1$'dir.

Teorem 3.7: A n x m tipinde bir matris ve A^c, A'nın herhangi bir koşullu inversi olsun. $AX = b$ lineer denklem sisteminin bir çözümünün var olduğunu kabul edelim. h n x 1tipinde bir vektör olmak üzere;

$$x_0 = A^c b + \left(I - A^c A\right)h$$

denklem sisteminin bir çözümüdür.

3.2. Regresyon Analizinde Matrislerin Kullanımı

Matris işlemleri regresyon analizinde yaygın bir kullanıma sahiptir. Regresyon analizi, iki ya da daha çok değişken arasındaki ilişkiyi ölçmek için kullanılan bir analiz yöntemidir. Eğer tek bir değişken kullanılarak analiz yapılıyorsa buna tek değişkenli regresyon, birden çok değişken kullanılıyorsa çok değişkenli regresyon analizi olarak adlandırılır. Regresyon terimi Türkçede Bağlanım olarak ta kullanılmaktadır. Regresyon Analizinin ilk formu en küçük kareler yöntemi olarak Adrien Marie Legendre tarafından 1805 de ileri sürülmüştür (Legendre 1805). 1809 yılında C.F. Gauss aynı yöntemi açıklamıştır (Gauss 1809). EKK terimi Legendre tarafından *Moindres Carrés* olarak adlandırılmış, ancak Gauss aynı yöntemi 1795 den beri kullandığını iddia etmiştir. Legendre ve Gauss bu yöntemi astronomik gözlemlerden, uyduların güneş etrafındaki yörüngelerini tesbit etmek için kullanırken ortaya çıkartmışlardır. 1748 yılında Eüler'in aynı problem üzerinde uğraştığı, fakat başarı sağlayamadığı bilinmektedir. En küçük kareler yönteminden sonraki gelişme ise Gauss'un 1821'de yayınladığı bir makelede ortaya çıkartılmıştır. Bu yayında Gauss sonradan kendi adı verilen Gauss-Markov teoremini ifade etmiştir (Gauss 1821-1823).

Regresyon terimi 19. yüzyılda İngiliz istatistikçisi Francis Galton tarafından bir biyolojik inceleme için ortaya atılmıştır. Bu incelemenin konusu kalıtım olup, aile içinde baba ve annenin boyu ile çocukların boyu arasındaki bağlantıyı araştırmakta ve çocukların boylarının bir nesil içinde eski ata nesillerinin ortalamasına geri döndüklerini yani bir nesil içinde *ortalamaya geri dönüş* olduğunu incelemiştir. Galton "*geri dönüş"* terimi için ilk yazısında İngilizce olarak "*reversion"* terimi kullanmışsa da sonradan aynı anlamda olan "*regression"* sözcüğünü kullanmıştır(Galton 1877-1885). Bu çalışmalarında Galton istatistiksel 'regresyon' kavramını ve yöntemini de geliştirmiştir. G. Udny Yule ve Karl Pearson bu yöntemi daha genel istatistiksel alanlara uygulayıp geliştirmişlerdir(Yule 1897-Pearson, Yule, Lee 1903). Bu çalışmalarda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin normal dağılım gösterdiği varsayılmaktadır. Bu kısıtlayıcı varsayım R.A. Fisher 1922 ve sonraki

yıllardaki yayınları ile sadece bağımlı değişkenin koşullu dağılımının normal olduğu hallere uygulanmak üzere daha genişletilmiştir. Bu kavramları ve yöntemleri genel olarak, kalıtım konusu dışında "ortalamaya geri dönüş" ile hiçbir ilgisi olmayan konularda, kullanan istatistikçiler *regresyon* terimini kullanmakta devam etmişlerdir. Günümüzde, *regresyon* terimi doğrusal bağlantı ve eğri uydurma gibi anlamlara sahipken Galton'un konusu ile ilişkisi yok olmuştur.

3.2.1. Lineer (Doğrusal) Regresyon Modeli

Regresyon analizi, aralarında sebep-sonuç ilişkisi bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi, o konu ile ilgili tahminler ya da kestirimler yapabilmek amacıyla regresyon modeli olarak adlandırılan matematiksel bir model ile karakterize eden bir istatistiksel analiz tekniğidir (Şahinler, 2000).

Regresyon analizinde, bağımsız değişken sayısı bir olduğunda Basit Regresyon modelinden, iki veya daha fazla olduğunda ise çoklu regresyon modelinden söz edilir. Diğer taraftan değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olup olmadığı da önemlidir. Regresyon analizinde bağımlı değişkenler ve bağımsız değişkenlerin sayısına göre modeli adlandırabiliriz.

Tek bir bağımlı değişken ve tek bir bağımsız değişken durumunda oluşturulacak regresyon modeline basit regresyon adı verilir ve

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n\ ) \tag{3.4}$$

şeklinde gösterilir. Burada;

x : bağımsız değişken

y : bağımlı değişken

β_0: modeldeki sabit terim

β_1: regresyon katsayısı

ε_i : hata terimi

Daha açık bir şekilde yazmak istersek;

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

ve matris notasyonu ile

$$
Y' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix},\ \beta' = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix},\ \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3.5)
$$

$$
Y = X\,\beta + \varepsilon
$$

şeklinde ifade edilir. Burada $Y_{n\times 1}$, gözlenen değerlerin bir vektörü , $X_{n\times 2}$ değişkenler matrisi , $\varepsilon_{n\times 1}$ de hataların vektörü ve $\beta_{2\times 1}$ ise regresyon katsayılarının vektörüdür.

$X\beta$, y_i lerin beklenen değerinin bir vektörüdür. Yani

$$
E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (3.6)
$$

olmak üzere;

$$
E(Y) = X\beta \quad (3.7)
$$

dir. Regresyon modelinde hata koşulları ifade edilirken hataların beklenen değeri 0, varyansı ise σ^2 olarak varsayılır. Hataların birbirinden bağımsız normal dağılıma sahip olduğu düşünülür. Bu durumda;

$$E(\varepsilon_i) = 0_{n\times 1} \quad , \quad \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{3.8}$$

dır. Diğer bir varsayım ise $\forall\ i \neq j,\ \sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, ve $\forall\ i = j,\ \sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2$ olmasıdır. Böylece hata teriminin varyans-kovaryans matrisi;

$$\sigma^2(\varepsilon) = \sigma^2 \underset{n\times n}{\mathrm{I}} \tag{3.9}$$

dir.

Çoklu regresyon ise ekonomi, işletme, ziraat, gibi alanlarda bağımlı değişkenin tek bağımsız değişkenle açıklamanın yetersiz olduğu durumlarda kullanılır. Birden fazla bağımsız değişkenli analize Çoklu Regresyon Analizi adı verilmektedir. Birçok değişken bir araya gelerek bir değişkeni etkileyebildikleri gibi, kendi aralarında da birbirlerini etkileyebilmektedir.

Çoklu regresyon modeli;

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \varepsilon_i \ , \ \text{i=1, 2, ..., n}$$

dir. Basit regresyon modellerinde geçerli olan tüm kavramlar, çoklu regresyon modellerinde de geçerlidir.

Matris formunda ise;

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times(k+1)} \beta_{(k+1)\times 1} + \varepsilon_{n\times 1} \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Y bağımlı değişkenin, β regresyon katsayıların ve ε hataların vektörü olarak ve X bağımsız değişkenlerin matrisi şeklinde yazılabilir. Model açık biçimde

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \ldots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \ldots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \ldots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak ifade edilir. (3.10) eşitliğinde verilen modeldeki Y, X, β, ε matris ve vektörleri açık biçimde yazılacak olursa, X veri matrisi;

$$X_{n\times(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

olarak ifade edilebilir.

Y bağımlı değişkenin $n\times 1$ tipindeki vektör gösterimi:

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklindedir. β katsayılar vektörü ise $(k+1)\times 1$ tipinde olup

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_k \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. ε $n\times 1$ tipinde hata matrisi ise

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

olarak ifade edilebilir. Bu gösterimlerle birlikte eşitlik (3.10) ile verilen denklem matris gösterimi ile

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılır.

3.2.2. Doğrusal Regresyon Modelinin Varsayımları

Regresyon analizinde bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi gösteren parametrelerin kestirimleri yapılırken bazı varsayımlar göz önünde bulundurulmalıdır. Bu varsayımları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.
Hata teriminin varsayımları;

i) Hataların ortalaması sıfıra eşittir($E(\varepsilon_i) = 0$).

ii)Hata terimi ε_i , değerleri arasında bir ilişki yoktur $\left(\forall\ i \neq j,\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0\right)$

.

3.3. Parametrelerin EKK Tahmini

Basit doğrusal regresyon modelimizdeki parametreleri en küçük kareler yöntemi ile hesaplamadan önce model yardımı ile normal denklemleri elde edelim. (3.4) ifadesindeki regresyon modelinin tahmini, $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ dir. i'nin *n* değeri için taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.17}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ toplamı ise;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. Matris notasyonu ile gösterimi ise;

$$X'X\beta = X'Y \tag{3.19}$$

şeklindedir. Burada, β regresyon katsayılarının bir vektörü olup

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

dir. Böylece normal denklemler;

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} n\beta_0 + \beta_1 \sum x_i \\ \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

şeklinde ifade edilebilir. Matris yardımı ile regresyon katsayılarının tahminini elde etmemiz için $X'X$ matrisinin tersini hesaplamamız gerekir. $X'X$ matrisinin tersinin olduğunu varsayalım.

Böylece eşitlik (3.19) deki normal denklemi soldan $(X'X)^{-1}$ matrisi ile çarparak $\hat{\beta}$ vektörünü aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$X'X\beta = X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \tag{3.23}$$

Böylece $\hat{\beta}$'daki β_0 ve β_1 tahmin edicileri bulunur. β_0 ve β_1 değerlerini, aşağıdaki gibi ifade edilen θ fonksiyonunu minimum yapan $\hat{\beta}$ vektörünü bularak da elde edebiliriz.

$$\theta = \sum \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \right]^2$$

$$\min \theta = \min \sum \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \right]^2$$

$$\theta = (Y - X\beta)' (Y - X\beta)$$

$$\theta = Y'Y - \beta' X'Y - Y'X\beta + \beta' X'X\beta$$

$(Y'X\beta)' = \beta' X'Y$ olup $Y'X\beta$ ile $\beta' X'Y$ eşit olup böylece;

$$\theta = Y'Y - 2\beta' X'Y + \beta' X'X\beta \tag{3.24}$$

θ değerini minimum yapan $\hat{\beta}$ değerini bulmak için β ya göre türev sıfıra eşitlenir ise;

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial\beta_0} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\beta_1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\theta) = -2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

ve buradan

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

elde edilir. Burada bulunan $\hat{\beta}$, EKK'nın matris formudur. Eğer $X'X$ matrisinin sütunları lineer bağımlı ise β_0 ve β_1 için tek bir çözüm elde edilemeyebilir. $X'X$ lineer bağımsız ise β_0 ve β_1 in tek çözümü vardır.

3.4. Şapka Matrisi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad , (i = 1, 2, ..., n) \tag{3.25}$$

Modelindeki EKK 'ya göre parametre tahmini olan $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ matris eşitliği, X ile soldan çarpılırsa;

$$X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1} X'Y$$

matrisi elde edilir. Bu eşitliğin sağındaki $X\left(X'X\right)^{-1}X'$ matrisine ise şapka matrisi denir. $H_{n\times n}$ ile gösterilir. $\hat{Y}$ tahmin değerlerinin vektörü ise;

$$\hat{Y}' = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \cdots & \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ olduğundan $\hat{Y} = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y$ dir. Kısaca y_i değerlerinin tahmininin matris biçiminde gösterimi ise $\hat{Y} = HY$ şeklinde ifade edilir.

Böylece bağımlı değişkenlerin tahmini $\hat{Y}$, H matrisi ile bağımlı değişkenlerin vektörü olan Y 'nin bir lineer kombinasyonudur.

H matrisi ise sadece X değişkenin tahmin üzerindeki etkisini içerir ve regresyon analizinde önemli bir rol oynar.

H matrisinin bazı özellikleri ise aşağıdaki gibidir.

i) H matrisi kareseldir.

ii) Simetrik ve idempotent bir matristir.

3.5. Hataların Tahmini ve Varyans-kovaryans Matrisi

y_i bağımlı değişkenlerin tahmini ile oluşan hatalar $i = 1, 2, ..., n$, ε_i için ile gösterilsin. ε_i ise,

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dir. Hataların vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir. $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ olmak üzere;

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{bmatrix} = Y - \hat{Y}$$

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - HY = (I - H)Y$$

dir. Burada $(I - H)$ matrisi, H matrisi gibi simetrik ve idempotent olduğundan hataların varyans-kovaryans matrisi de $(I - H)$ matrisini içerir.

$$\varepsilon = (I - H)Y$$

$$Var(\varepsilon) = (I - H)Var(Y)(I - H)'$$

$$Var(Y) = Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

olup yerine yazılırsa;

$$Var(\varepsilon) = (I - H)\sigma^2 I (I - H)'$$

$$Var(\varepsilon) = \sigma^2 (I - H)^2 = \sigma^2 (I - H)$$

dır. Böylece $Var(\varepsilon) = \sigma^2 (I - H)$ olduğunda örneklemin hata varyansı ise $MSE(I - H)$ ile tahmin edilir (Hoaglin, Welsch, 1978).

Tahminin varyansı ise;

$$Var(\hat{Y}) = Var(HY) = HVar(Y)H' = H(\sigma^2 I)H' = \sigma^2 H$$

dir.

3.6. İdempotent Matrislerin ANOVA Üzerine Etkisi

Karesel formlar ve pozitif tanımlı idempotent matrisler istatistik de yoğun olarak kullanılmakta ve deneysel tasarım, varyans analizinde etkili bir rol oynamaktadır.

Eğer A $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris ve x $n \times 1$ tipinde çok değişkenli normal dağılıma sahip bir vektör ise $x'Ax$ karesel formunun χ^2 dağılımına sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul A matrisinin idempotent bir matris olmasıdır(MATHAI, J. J., ve ark, 1992) ve (RAO, C. R., Mitra, S. K., 1971).

χ^2 dağılımına sahip simetrik ve idempotent karesel formların, lineer kombinasyonlarının da bir χ^2 dağılımına sahip olduğu incelenecektir.

3.6.1 Tek Yönlü Varyans Analizi

İki değişken içeren varyans analizi modelidir. Bunlardan birisi kategorik özellik gösteren bağımsız değişkendir. Diğeri ise metrik özellik gösteren bağımlı değişkendir. Bağımsız değişken içerisinde iki ya da daha fazla grup olabilir. Tek yönlü ANOVA, bu gruplara göre, bağımlı değişkendeki ortalamalar arasında fark olup olmadığını test eder. Tek yönü ANOVA modelini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad , i = 1, 2, \ldots , \text{n} , \quad j = 1, 2, \ldots, c$$

Burada y_{ij}, i. işlemdeki j. gözlemin etkisi, α_i i. işlemin etkisi, μ işlem ortalaması, ε_{ij} i. işlemdeki j. gözlemin hatasıdır.

Tek yönlü ANOVA da iki temel varsayım vardır;

i) Her bir grup normal dağılıma sahiptir.

ii) Grupların varyansları homojendir.

Tek yönlü ANOVA tablosunu oluşturabilmemiz için gerekli olan ifadeler;

$$SST = \sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}$$

şeklinde ifade edilir. Aynı eşitliği matris notasyonu;

$$Y'Y = \sum Y_i^{\,2} \;,\; \frac{\sum Y_i^{\,2}}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) Y'JY$$

olduğu göz önüne alınır ise genel kareler toplamı;

$$SST = Y'Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y'JY$$

olarak yazılır. Hata kareler toplamı ise;

$$SSE = \sum \varepsilon_i^{\,2} = \sum \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

dir. Hata kareler toplamını matris ile gösterirsek;

$$SSE = \varepsilon'\varepsilon = \left(Y - X\beta\right)' \left(Y - X\beta\right)$$

$$SSE = Y'Y - \beta' X'Y$$

şeklindedir. Regresyon kareler toplamı (işlem kareler toplamı) ise tüm kareler toplamından, hata kareler toplamı çıkarılarak hesaplanır. Yine matris ile regresyon kareler toplamını ifade etmek istersek;

$$SSR = SST - SSE = Y'Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y'JY - \left(Y'Y - \beta' X'Y\right)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece;

$$SSR = \beta' X' Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y' J Y$$

dir. Bu ifadelere göre Tek yönlü varyans analizi tablosu Çizelge 3.1 de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Çizelge 3.1. Tek Yönlü ANOVA Tablosu

Değişim kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F değeri
SSR	k-1	$\beta' X' Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y' J Y$	$MSR = \frac{\beta' X' Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y' J Y}{k-1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
SSE	n-k	$Y' Y - \beta' X' Y$	$MSE = \frac{Y' Y - \beta' X' Y}{n-k}$	
SST	n-1	$Y' Y - \left(\frac{1}{n}\right) Y' J Y$		

3.6.2. Tek Yönlü Sınıflandırma Modelleri

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

modelinde X matrisi sadece 0 ile 1'lerden oluştuğunda modele tasarım modeli denir. Bu model, belli bir kitlenin ortalaması veya bir grubun ağırlıklı ortalaması μ ve $y_1, y_2, ..., y_n$, n birimlik örneklem olmak üzere,

$y_i = \mu + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, ..., n$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$, ε_i ler bağımsız (ilişkisiz)

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} , \; X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} , \; \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

gösterimi ile,

$$Y = X\mu + \varepsilon \ , E(\varepsilon) = 0 \ , \ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

yazılabilir. Örneğin iki grup ortalamaları karşılaştırılmak istensin. Birinci grubun kitle ortalaması μ_1, diğer grubun ise μ_2 olsun. $y_{11},..., y_{1n}$ birinci kitleden n birimlik örneklem, $y_{21},..., y_{2m}$ ikinci kitleden m birimlik örneklem olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m} \end{bmatrix}$$

gibi bir lineer model düşünülebilir. Hata vektörü için kitle varyanslarının eşit olması durumunda,

$$E(\varepsilon) = 0 \ , Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I_{n+m}$$

gibi bir varsayım düşünülür. Farklı olması durumunda ise;

$$E(\varepsilon) = 0 \ , Cov(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_n & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_m \end{bmatrix}$$

gibi bir varsayım söz konusu olacaktır.

Her iki grubun ortalama üzerindeki etkisini görmek istediğimizde;

Birinci grubun ortalama üzerine etkisi, $\mu + \alpha_1$

İkinci grubun ortalama üzerine etkisi ise, $\mu+\alpha_2$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir model düşünülebilir. Bu durumda tasarım matrisi X aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{j_n} & \mathbf{j_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{j_m} & \mathbf{0} & \mathbf{j_m} \end{bmatrix}$$

Her hücrede eşit sayıda gözlem olmak üzere tek yönlü sınıflandırma modelimizi

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad , i = 1, 2, \ldots , \text{n} \quad , \; j = 1, 2, \ldots, c \; ,$$

şeklinde genelleyebiliriz. Bu durumda X tasarım matrisi;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{j_c} \otimes \mathbf{j_n}, \mathbf{j_c} \otimes \mathbf{I_n} \right]_{nc \times (n+1)}$$

olur. Burada X matrisi $nc \times (n+1)$ tipinde olup $rank(X) = n$ dir.

y_{ij} bağımlı değişkenlerin vektörü ise;

$$Y' = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{nc} \end{bmatrix}_{1 \times nc}$$

şeklinde ifade edilir. Tek yönlü model için varyans analizi tablosunun oluşturulması istenirse;

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{c} \left(y_{ij} - y.. \right)^2$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{c} y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{c} y_{ij} \right)^2}{nc}$$

$$Y'\mathbf{J_{nc}}Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{nc} \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \right)^2$$

olduğundan SST'yi düzenlediğimizde;

$$SST = Y'\mathbf{I_{nc}}Y - Y'\left(\frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} \right)Y$$

$$SST = Y'\left(\mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c}\right)Y - Y'\left(\frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \right)Y$$

$$SST = Y'\left(\mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \right)Y$$

olur. SST matris ifadesi karesel formda olup, Y' ile Y matrisi arasında bulunan matrisi P ile adlandıralım. Öyle ise P ;

$$P = \mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c} = \mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}}$$

olup idempotent bir matristir. Bunu göstermek için $P^2 = P$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$P^2 = \left(\mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} \right)' \left(\mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} \right) = \left(\mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J'_{nc}} \right)\left(\mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} \right)$$

$$= \mathbf{I_{nc}}\mathbf{I_{nc}} - \mathbf{I_{nc}}\frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} - \mathbf{I_{nc}}\frac{1}{nc}\mathbf{J'_{nc}} + \frac{1}{n^2c^2}\mathbf{j_{nc}}\mathbf{j'_{nc}}\mathbf{j_{nc}}\mathbf{j'_{nc}} = \mathbf{I_{nc}} - \frac{1}{nc}\mathbf{J_{nc}} = P$$

dir. P matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$P = \mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c} = \mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \mathbf{I_c} + \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terimi P_1, son iki terimi P_2 ile gösterirsek;

$$P_1 = \mathbf{I_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \mathbf{I_c} = \left(\mathbf{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\right) \otimes \mathbf{I_c}$$

$$P_2 = \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c} = \frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)$$

olacaktır. İki idempotent matrisin, lineer kombinasyonunun da idempotent olduğu tüm durumlar (Baksalary, J. K., Baksalary O. M., 2000)'de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu çalışmadaki teoremin ifadesi ve sonucu aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1: P_1 ve P_2 sıfırdan farklı iki idempotent matris ve c_1 , c_2 sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$P = c_1P_1 + c_2P_2$$

şeklinde P , P_1 ve P_2'nin bir lineer kombinasyonu olsun. P aşağıdaki dört durumdan herhangi birini sağlıyor ise P idempotent bir matristir.

a) $P_1P_2 = P_2P_1$ olduğu durumlarda;

i. $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $P_1P_2 = 0$

ii. $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $P_1P_2 = P_2$

iii. $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $P_1P_2 = P_1$

b) $P_1P_2 \neq P_2P_1$ ise $c_1 \in \mathbb{R}$, $(c_1 \neq 0$, $c_1 \neq 1)$, $c_2 = 1 - c_1$ koşulları altında $(P_1 - P_2)^2 = 0$ dır.

Sonuç olarak; Teorem 3.1'in varsayımları altında $P = c_1P_1 + c_2P_2$ lineer kombinasyonu şeklinde yazılan P matrisinin idempotent olması için P_1P_2 çarpımının sıfır olmasıdır.

Bu teorem ifadesi ve sonucundan yararlanarak idempotent iki matrisin lineer kombinasyonu olan, P matrisinin idempotent olduğunu gösterelim.

$P = P_1 + P_2$ olduğundan $c_1 = c_2 = 1$ olup $P_1P_2 = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$P_1P_2 = \left[\left(\mathbf{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\right) \otimes \mathbf{I_c}\right]\left[\frac{1}{n}\mathbf{J_n} \otimes \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\mathbf{I_n}\mathbf{J_n} - \frac{1}{n^2}\mathbf{J_n}\mathbf{J_n}\right) \otimes \left(\mathbf{I_c}\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{I_c}\mathbf{J_c}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\mathbf{I_n}\mathbf{J_n} - \frac{1}{n^2}\mathbf{j_n}\mathbf{j_n'}\mathbf{j_n}\mathbf{j_n'}\right) \otimes \left(\mathbf{I_c}\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{I_c}\mathbf{J_c}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\mathbf{J_n} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\right) \otimes \left(\mathbf{I_c}\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{I_c}\mathbf{J_c}\right)$$

$$= \mathbf{0_n} \otimes \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)$$

$$= \mathbf{0_{nc}}$$

Böylece $P_1P_2 = 0$ olduğundan P 'nin parçalanışı da idempotent bir matristir. Bunun sonucunda varyans analizi tablosundaki genel kareler toplamını aşağıdaki gibi parçalayabiliriz.

$$SST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right) + \left(y_{ij} - \bar{y}_{.j}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - \bar{y}_{.j}\right)^2$$

$$= SSR + SSE$$

Burada SSR işlemler(denemeler) arası kareler toplamı iken SSE ise hata kareleri toplamıdır.

$$SST = Y'\left(\mathbf{I_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)Y = Y'PY = Y'\left(P_2 + P_1\right)Y = Y'P_2Y + Y'P_1Y$$

Bu parçalarda $Y'P_2Y$, SSR ye karşılık gelirken, $Y'P_1Y$ ye SSE karşılık gelmektedir. Tek yönlü ANOVA tablosu Çizelge 3.2 'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Tek Yönlü ANOVA Tablosu

DK.	sd	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F değeri
SSR	c-1	$Y'\left(\frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)Y$	$MSR = \frac{Y'\left(\frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)Y}{c-1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
SSE	nc-c	$Y'\left(\mathbf{I_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\mathbf{I_c}\right)Y$	$MSE = \frac{Y'\left(\mathbf{I_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\mathbf{I_c}\right)Y}{nc-c}$	
SST	nc-1	$Y'\left(\mathbf{I_n}\otimes\mathbf{I_c} - \frac{1}{n}\mathbf{J_n}\otimes\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)Y$		

Hata kareler ortalamasının beklenen değeri alındığında σ_ε^2'nun yansız bir tahmin edicisi elde edilir.

MSE ve MSR karesel formları bağımsızdırlar. Cochran teoremine göre, H_0 hipotezi doğru iken, $\frac{MSR}{\sigma_\varepsilon^2}$ ve $\frac{MSE}{\sigma_\varepsilon^2}$ bağımsız χ^2 dağılımına sahiptirler. Yani;

$$\frac{MSR}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{c-1}$$

$$\frac{MSE}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{nc-c}$$

dağılımlarına sahiptir.

3.6.2 İki Yönlü Sınıflandırma Modelleri

Etkileşimin olmadığı ve her hücrede tek gözlemin olduğu iki yönlü sınıflandırma modeli ;

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad , i = 1, 2, ..., r \, , \; j = 1, 2, ..., c$$

şeklinde ifade edilir. Burada α_i , i. işlemin etkisi, β_j j. blok etkisi, y_{ij} j. bloktaki i. denemeye ait gözlem değeri, μ genel ortalamayı ve ε_{ij} ise hata terimini göstermektedir. İki yönlü ANOVA tablosunun bileşenleri ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - y_{..}\right)^2$$

$$= c\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..}\right)^2 + r\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - \bar{y}_{.i} - \bar{y}_{j.} + \bar{y}_{..}\right)^2$$

$$= SSA + SSB + SSE$$

dır. İki yönlü ANOVA tablosu Çizelge 3.3 ‘de verilmiştir.

Çizelge 3.3. İki Yönlü ANOVA Tablosu

D. K.	sd	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F değeri
Deneme	r-1	$SSA = c\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..}\right)^2$	$MSA = \frac{SSA}{r-1}$	$F_{Deneme} = \frac{MSA}{MSE}$
Blok	c-1	$SSB = r\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{..}\right)^2$	$MSB = \frac{SSB}{c-1}$	$F_{Blok} = \frac{MSB}{MSE}$
Hata	(rc-r-c+1)	$SSE = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - \bar{y}_{.i} - \bar{y}_{j.} + \bar{y}_{..}\right)^2$	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	
Genel	rc-1	$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(y_{ij} - y..\right)^2$		

İki yönlü modelimizi karesel formda matrisler yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} y_{ij}\right)^2}{rc}$$

$$= Y'I_{rc}Y - Y'\left(\frac{1}{rc}J_{rc}\right)Y$$

$$= Y'\left(\mathbf{I_r} \otimes \mathbf{I_c}\right)Y - Y'\left(\frac{1}{r}\mathbf{J_r} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)Y$$

$$= Y'\left(\mathbf{I}_{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{c}} - \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \right) Y$$

SST karesel formunun matrisine P diyelim.

$$P = \mathbf{I}_{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{c}} - \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} = \mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}}$$

idempotent bir matristir. $P^2 = P$ olduğunu gösterelim.

$$P^2 = \left(\mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}} \right)' \left(\mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}} \right) = \left(\mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}'_{\mathbf{rc}} \right) \left(\mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}} \right)$$

$$= \mathbf{I}_{\mathbf{rc}}\mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{I}_{\mathbf{rc}}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{I}_{\mathbf{rc}}\mathbf{J}'_{\mathbf{rc}} + \frac{1}{r^2c^2}\mathbf{j}_{\mathbf{rc}}\mathbf{j}'_{\mathbf{rc}}\mathbf{j}_{\mathbf{rc}}\mathbf{j}'_{\mathbf{rc}} = \mathbf{I}_{\mathbf{rc}} - \frac{1}{rc}\mathbf{J}_{\mathbf{rc}} = P$$

Tek yönlü sınıflandırma modelinde olduğu gibi P matrisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$P = \mathbf{I}_{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{c}} - \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} \otimes \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}}$$

$$= \mathbf{I}_{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{r}} - \mathbf{I}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{r}} + \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} + \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} + \mathbf{I}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}}$$

ve

$$P_1 = \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} = \frac{1}{c}\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \otimes \left(\mathbf{I}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\mathbf{J}_{\mathbf{r}} \right),$$

$$P_2 = \mathbf{I_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} = \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{r}\mathbf{J_c}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} \ ,$$

$$P_3 = \mathbf{I_c} \otimes \mathbf{I_r} - \mathbf{I_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \mathbf{I_r} + \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} = \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)$$

olsun. Böylece;

$$P_1 + P_2 + P_3 = P = \mathbf{I_c} \otimes \mathbf{I_r} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r}$$

olur. Üç idempotent matrisin lineer kombinasyonunun da idempotent matris olduğunu gösteren teorem ve sonuçları (Özdemir ve Özban), 2004 yılında ayrıntılı olarak incelenmiştir. (Baksalary ve Benitez)'in 2007 yılında benzer çalışmaları görülmektedir. 2004 yılında (Özdemir ve Özban) tarafından yapılan bu çalışmadaki teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2: P_1, P_2, P_3, ve $P_i \neq P_j$, $i, j = 1, 2, 3$ için idempotent matrisler ve c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı reel sayılardır. P matrisi P_1, P_2, P_3 matrislerinin lineer kombinasyonu olacak şekilde aşağıdaki gibi verilsin.

$$P = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3$$

P matrisi aşağıdaki durumlardan herhangi birini sağlıyor ise idempotentdir.

i) $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $P_iP_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$

ii) $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, için $P_1P_2 = P_1$, $P_1P_3 = P_1$, $P_2P_3 = P_3$ ya da

$P_1P_2 = P_2$, $P_1P_3 = P_3$, $P_2P_3 = P_2$

iii) $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = 1$, için $P_1P_2 = P_1$, $P_1P_3 = P_3$, $P_2P_3 = P_3$ ya da

$P_1P_2 = P_2$, $P_1P_3 = P_1$, $P_2P_3 = P_2$

iv) $c_1 = c_3 = 1,\ c_2 = -1$, için $P_1P_2 = P_1$, $P_1P_3 = P_1$, $P_2P_3 = P_2$ ya da

$P_1P_2 = P_2$, $P_1P_3 = P_3$, $P_2P_3 = P_3$

v) $P_1P_2 = P_1$, $P_1P_3 = P_3$, $P_2P_3 = P_2$ ya da $P_1P_2 = P_2$, $P_1P_3 = P_1$, $P_2P_3 = P_3$ olacak şekilde $P_1,\ P_2,\ P_3$ matrisleri yoktur.

Teorem 3.2'in varsayımları altında $P = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3$ lineer kombinasyonu şeklinde yazılan P matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşul $c_1 = c_2 = c_3 = 1,$ için $P_iP_j = 0$, $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ olmasıdır.

Böylece $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ için $P = P_1 + P_2 + P_3$ olup $P_1P_2 = 0$, $P_1P_3 = 0$ ve $P_2P_3 = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Kronecker çarpımın özelliklerinden $P_1,\ P_2,\ P_3$ matrislerini aşağıdaki gibi yazarsak $P_1P_2 = 0$, $P_1P_3 = 0$, $P_2P_3 = 0$ olduklarını daha kolay görebiliriz.

$$P_1 = \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \mathbf{I_r} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} = \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)$$

$$P_2 = \mathbf{I_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} = \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r}$$

$$P_3 = \mathbf{I_c} \otimes \mathbf{I_r} - \mathbf{I_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \mathbf{I_r} + \frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r} = \left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)$$

$$P_1P_2 = \left[\frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]\left[\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right] = \mathbf{0_{rc}}$$

$$P_1P_3=\left[\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\otimes\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]\left[\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]=\mathbf{0_c}\otimes\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)=\mathbf{0_{rc}}$$

$$P_2P_3=\left[\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right]\left[\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]$$

$$=\left[\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\left(\mathbf{I_r}-\frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right]=\left(\mathbf{I_c}-\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right)\otimes\mathbf{0_r}=\mathbf{0_{rc}}$$

Böylece P idempotent matrisinin belirli koşullar altında parçalanışının da idempotent matrislere sahip olduğu Teorem 3.2 yardımıyla görülür. Bu parçalanış iki yönlü ANOVA tablosunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Çizelge 3.4. İki Yönlü ANOVA Tablosu

D. K.	sd	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F değeri
Deneme	r-1	$SSA=Y'P_1Y$	$MSA=\frac{Y'P_1Y}{r-1}$	$F_{Deneme}=\frac{MSA}{MSE}$
Blok	c-1	$SSB=Y'P_2Y$	$MSB=\frac{Y'P_2Y}{c-1}$	$F_{Blok}=\frac{MSB}{MSE}$
Hata	(rc-r-c+1)	$SSE=Y'P_3Y$	$MSE=\frac{Y'P_3Y}{(r-1)(c-1)}$	
Genel	rc-1	$SST=Y'PY$		

Teorem 3.3: A $n\times n$ tipinde simetrik ve idempotent bir matris ise $rank(A)=tr(A)$ dır.

P_1, P_2, P_3 matrislerinin rankları ise deneme, blok ve hata kareler toplamlarının serbestlik dercesine eşit olduğu Teorem 3.3 yardımıyla aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$rank(P_1) = rank\left(\frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right) = tr\left(\frac{1}{c}\mathbf{J_c} \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right)$$

$$= tr\left(\frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) tr\left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right) = r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = r - 1$$

$$rank(P_2) = rank\left(\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right) = tr\left(\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)$$

$$= tr\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) tr\left(\frac{1}{r}\mathbf{J}\right) = c\left(1 - \frac{1}{c}\right) = c - 1$$

$$rank(P_3) = rank\left(\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right) = tr\left(\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) \otimes \left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right)\right)$$

$$= tr\left(\mathbf{I_c} - \frac{1}{c}\mathbf{J_c}\right) tr\left(\mathbf{I_r} - \frac{1}{r}\mathbf{J_r}\right) = c\left(1 - \frac{1}{c}\right) r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = cr - c - r + 1$$

MSA, MSB, MSE karesel formları bağımsızdırlar. Cochran teoremine göre, H_0 hipotezi doğru iken, bağımsız χ^2 dağılımına sahiptirler.

$$\frac{MSA}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{r-1}$$

$$\frac{MSB}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{c-1}$$

$$\frac{MSE}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{rc-r-c+1}$$

dağılımlarına sahiptirler.

4. İSTATİSTİKTE KULLANILAN BAZI ÖZEL MATRİS YÖNTEMLERİ

Bu bölümde James H. Goodnigh ‘ın (1979), “A Tutorial on the Sweep Operator” makalesinden faydalanılarak Gauss-Jordan eliminasyonu yardımıyla Forward Doolittle, Cholesky Decomposition, Sweep operatör arasındaki ilişki ve Sweep matrisinin her bir bileşeninin önemi incelenmiştir.

Sweep operatör istatistikte önemli kavramlar olan; normal denklemlerin çözümü, kareler toplamı, hata kareler toplamı, matris determinantı, Hermit Kanonik matrisi, Cholesky ayrışım matrisi, Doolittle matrisi genelleştirilmiş tersler gibi ifadeleri oluşturmak için kullanılabilir.

Sweep operatör istatistikte kullanılan çok yönlü bir operatördür. Aşağıdaki gibi alanlarda da kullanılabilir.

i) Regresyon modellerinde EKK tahmini

ii) Çok değişkenli ANOVA

iii) Stepwise regresyon

Sweep operatörün en önemli yönü, yapısal bir araç olan matrislerin her bir elemanını kolayca tanımlayabilir olmasıdır(Goodnight, 1979).

Bu bölümde genel lineer model;

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (4.1)$$

olarak kullanılacak, Y $n\times 1$, X $n\times k$ ve β $k\times 1$ tipinde bir matris olarak düşünülecek ve hataların normal dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır $\left(\varepsilon \sim N\left(0,\sigma^2\right)\right)$.

4.1. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi doğrudan normal denklemleri çözmek için kullanılabilir. (4.1) denklem yardımı ile

$$X'X\beta = X'Y \tag{4.2}$$

elde edilebilir. Gauss-Jordan eliminasyonu sadece iki operatör içerir, bunlardan biri denklemi herhangi bir sabit ile çarpmak, diğeri ise bir sabit ile çarpıp başka bir denkleme eklemektir.

Böylece tam ranklı regresyon denklemlerinin çözümü için Ek matris formu

$$\left[X'X \mid X'Y\right] \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Satır işlemleri yardımlarıyla oluşturulan ek matrisle sol taraf birim matrise dönüşürken sağ tarafındaki aranan çözüm olacaktır. Yani ;

$$\left[X'X \mid X'Y\right] \xrightarrow[\text{işlemleri}]{\text{satır}} \left[I \mid \hat{\beta}\right] \tag{4.4}$$

olacaktır. Tüm bu süreçte normal denklemin çözümü için bir bilgisayar hesabından yararlanılabilir ve $\left(X'X\right)^{-1}$ matrisinin hesaplanmasına ihtiyaç yoktur. (4.2) denklemi soldan $\left(X'X\right)^{-1}$ matrisinin çarpılmasıyla da (4.4) eşitliği oluşturabilir. $\hat{\beta}$ değeri hesaplanırken aynı zamanda Ek matris formu ile (4.3) eşitliğinden, hata kareleri toplamı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\left[\begin{array}{c|c} X'X & X'Y \\ \hline Y'X & Y'Y \end{array}\right] \tag{4.5}$$

Eğer (4.5) eşitliği sol taraftan;

$$\left[\begin{array}{c|c} (X'X)^{-1} & 0 \\ \hline -Y'X(X'X)^{-1} & I \end{array}\right] \tag{4.6}$$

matrisi ile çarpılırsa;

$$\begin{bmatrix} (X'X)^{-1} & 0 \\ -Y'X(X'X)^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & (X'X)^{-1}X'Y \\ 0 & Y'Y-Y'X(X'X)^{-1}X'Y \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

elde edilir. Aynı zamanda (4.7) eşitliği (4.5) eşitliği üzerinde satır işlemlerinin uygulanması ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

1. satırın $(X'X)^{-1}$ ile çarpılıp daha sonra 1. satırın $(Y'X)$ katı alınıp 2. satırdan çıkarılarak

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{işlemleri}]{\text{satır}}\begin{bmatrix} I & (X'X)^{-1}X'Y \\ 0 & Y'Y-Y'X(X'X)^{-1}X'Y \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilebilir.

$X'X$ pozitif tanımlı bir matris olduğu için, (4.4) ve (4.8) de satır işlemleri kullanılarak, $X'X$ matrisinin köşegeni üzerindeki pivot elemanların sadece bir bölümü oluşur.

Bir köşegen eleman pivotlandığın da matrisin kalan elamanları da köşegen elemanları ile ilişkili olarak düzenlenmiş olur. Adjust operatör olarak adlandırılan bu işlemi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Bir Adjust(k) operatörü bir A matrisinin pivot elemanı olan a_{kk} için aşağıdaki gibi çalışır.

1. Adım; $B = a_{kk}$

2. Adım; satır k , B ye bölünür.

3. Adım; $\forall\ i \neq j$ için $B = a_{ik}$ olsun ve i. satırdan k. satırın B katı çıkarılarak elde edilir.

Bir örnek üzerinde adjust operatörü ile elde edebileceğimiz istatistiksel bilginin miktarını görelim.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Regresyon modeli için (4.5) eşitliğindeki genişletilmiş A matrisini

$$A = \left[\begin{array}{cccc} N & \sum X_1 & \sum X_2 & \sum Y \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_1 Y \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2 Y \\ \hline \sum Y & \sum X_1 Y & \sum X_2 Y & \sum Y^2 \end{array}\right]$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer A matrisi üzerinde Adjust(1) operatörü uygulanırsa;

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \overline{Y} \\ \hline 0 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_1 y \\ 0 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 & \sum x_2 y \\ 0 & \sum x_1 y & \sum x_2 y & \sum y^2 \end{array}\right]$$

biçimine dönüşür. A_1 matrisi incelendiğinde, sağ altta 3×3 tipindeki parçası düzeltilmiş kareler toplamı ve çapraz çarpımı verir (SS &CP) . Ayrıca bu parçanın köşegen elemanları yazılacak olan alt modellerin hata kareleri toplamına karşılık gelir. Sağ üstte 1×3 tipindeki parçası ise β değerlerini içeren alt matristir. Bu β değerleri için alt modeller ise;

$$X_1 = \beta_0' + \varepsilon'$$

$$X_2 = \beta_0'' + \varepsilon''$$

$$Y = \beta_0''' + \varepsilon'''$$

şeklinde yazılabilir. Eğer A_1 matrisi üzerinde Adjust(2) operatörü uygulanırsa;

$$A_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \beta_0' & \beta_0'' \\ 0 & 1 & \beta_1' & \beta_1'' \\ \hline 0 & 0 & \sum x_2^2.1 & \sum x_2 y.1 \\ 0 & 0 & \sum x_2 y.1 & \sum y^2.1 \end{array}\right]$$

şeklinde olur. A_2 matrisi incelendiğinde sağ üstte 2×2 tipindeki parçası β değerlerini içeren alt matrisi verir. Bu değerlere karşılık gelen alt modeller ise;

$$X_2 = \beta_0' + \beta_1' X_1 + \varepsilon'$$

$$Y = \beta_0'' + \beta_1'' X_2 + \varepsilon''$$

şeklindedir. Sağ altta 2×2 tipindeki parçası ise bu iki model için SS & CP'yi verir. Eğer A_2 matrisi üzerinde de Adjust(3) operatörü uygulanırsa;

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta_0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sum y^2.1,2 \end{array}\right]$$

elde edilir. Bu son düzeltme ile A_3 matrisinin sağ üstteki 3×1 tipindeki parçası normal denklemin çözümünü, sağ alt taraftaki parçası ise hata kareler toplamını verir. Her değişken için I Tip SS, adjust operatörünün önemli bir sonucudur (Barr, Goodnight, Sall, and Helwig 1976).

$k+1=p$ olsun. Eğer A matrisi (4.5) eşitliğindeki gibi $p \times p$ tipinde genişletilmiş bir matris ise her adjust(k) operatörü uygulandığında, $Y'Y$ değeri olan a_{pp}, $\frac{\left(a_{kp}\right)^2}{a_{kk}}$ kadar azalır. Adjust operatörünün her kullanımından önce I Tip SS 'ni akılda tutmak için yardımcı bir vektör kullanılabilir. Daha önceden de belirtildiği gibi adjust operatörünün her kullanımından sonra bağımsız değişkenler arasındaki alt modeller için hata kareleri toplamı, henüz düzenlenmemiş köşegenleri ifade eder. (4.5) eşitliğindeki gibi bir A matrisi üzerinde $i=1,2,....,k-1$ için adjust(i) operatörü uygulanmış olsun. O zaman a_{kk}, $X_k = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_{k-1} X_{k-1} + e$ modeli için hata kareler toplamıdır.

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi kullanılarak, regresyon çözümlerinin elde edilmesinde çok sayıda makale yazılmıştır. Bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişki olması durumunda regresyon katsayılarını tahmin etmek doğru olmaz.

4.2. Adjust Operatörünün Diğer Kullanımları

Aynı bağımsız değişkenler kümesine sahip farklı bağımlı değişkenlerden oluşan çok değişkenli lineer modeller için β değerleri ve SS, CP aynı anda hesaplanabilir. (4.5) eşitliğin de $X'X$ in sütunları üzerinde adjust operatörü uygulanır ise;

$$\left[\begin{array}{c|c} X'X & X'Y \\ \hline Y'X & Y'Y \end{array}\right] \xrightarrow{adjust\ opretaion} \left[\begin{array}{c|c} I & \left(X'X\right)^{-1} X'Y \\ \hline 0 & Y'Y - Y'X\left(X'X\right)^{-1} X'Y \end{array}\right] \qquad (4.9)$$

elde edilir. Burada Y 'nin boyutu $N \times 1$ yerine, $N \times p$ boyutuna sahip olması dışında tek değişkenli olur. X_1 $N \times p$ ve X_2 $N \times q$ iki değişken kümesi için kısmi korelasyon katsayısı adjust operatörü kullanılarak elde edilebilir. Eğer X_1 için düzeltme yapıldıktan sonra X_2'ler arasında korelasyon varsa o zaman süreç aşağıdaki gibi olur. X_1'in, ilk sütunu 1'lerden oluşan bir sütun olsun.

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ \hline X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{array}\right] \xrightarrow{adjust\ opretaion} \left[\begin{array}{c|c} I & \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'X_2 \\ \hline 0 & X_2'X_2 - X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'X_2 \end{array}\right] \qquad (4.10)$$

sonra , $X_2'X_2 - X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'X_2$ in her bir elemanı ilişkili olan iki köşegen elemanlarının kare köküne bölünerek kısmi korelasyon elde edilir.

4.3. Forward Doolittle Matrisi

Temel Doolittle metodu, bir mühendis olan Doolittle tarafından 1878 de tanıtılmıştır(Steel ve Torrie 1960).

Doolittle yöntemi istatistikçilerin ihtiyaçlarına uygun olarak Gauss-eliminasyonu ile yeniden yapılandırılmıştır. Yöntemin kısa adı Doolittle şeklinde adlandırılmıştır. Yöntem iki kısımdan oluşur.

1. kısım Forward Doolittle; Bir üst üçgensel matris içerisinde matris elemanlarının çarpımını ve kareler toplamını oluşturur.

2. kısım Backward Doolittle; Regresyon katsayılarını ve matris tersini hesaplatır.

Simgesel olarak, Forward Doolittle, üst üçgensel bir A matrisi içerisine herhangi bir simetrik pozitif tanımlı (p.d) matrisi eşleştirmek için kullanılır.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{Satır\ işlemleri} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22.1} & C_{23.1} \\ 0 & 0 & C_{33.12} \end{bmatrix} = A$$

Forward Doolittle matrisi, 1. satırın belli bir katının ana köşegen elemanlarının altında kalan satır elemanlarını sıfır yapacak biçimde diğer satırlara eklenmesiyle oluşur. Eğer düzeltmeler sıra ile yapılmış ve C matrisine uygulanmış ise o zaman önce k. satır düzeltilir. (k=1,2,3,…) böylece C'nin k. satırı Anın k. satırına eşit olur. Sadece SS ve CP ye ihtiyaç duyulduğun da (4.9) ve (4.10) deki ifadeler Forward Doolittle yöntemi ile Adjust operatöründen daha hızlı hesaplanır.

4.3.1. Forward Doolittle Matrisinin Bir Simetrik p.d. Matrise Etkisi

Eğer C matrisi simetrik p.d. bir matris ise;

$$C \xrightarrow{Forward\ Doolittle} A$$

şeklinde eşlenebilir.

Eğer A'nın her bir satırı, köşegen elemanlarına bölünerek bir B matrisi üretilirse o zaman $B'A = C$ olur.

Eğer A'nın her bir satırı köşegen elemanlarının karekköküne bölünerek bir U matrisi üretilirse , $U'U = C$ dir.

U , matrisine C, matrisinin Cholesky ayrışımı denir(Isaacson ve Keller 1966).

4.4. Simetrik p.d. Matrisin Determinantı

C Simetrik p.d. matrisi , A matrisine Forward Doolittle metodu ile eşlensin. Böylece

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{Satır\ işlemleri} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22.1} & C_{23.1} \\ 0 & 0 & C_{33.12} \end{bmatrix} = A$$

ve A'nın köşegen elemanlarının her bir satıra bölünmesiyle oluşan B matrisi;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. C simetrik p.d. bir matris olduğundan $B'A = C$ dir. Yani ;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{12} & 1 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

dir. C matrisinin determinantı ise;

$$|C| = |B'||A|$$

olup. B' ve A matrisleri üçgensel matris olduklarından determinantı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir. Böylece C matrisinin determinantı

$$|C| = |B'||A| = \prod a_{ii}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece C matrisinin determinant Forward Doolittle ve Adjust operatörün çarpımı olarak kolayca bulunur.

4.5. Adjust Operatörü Yardımıyla Bir Matrisin Tersinin Bulunması

Simetrik p.d. bir A matrisinin tersi , A matrisinin sağına bir birim matris eklenerek, A'nın köşegen elemanları üzerine adjust operatörü uygulanarak bulunabilir. Bu işlemler sembolik olarak ;

$$[A \mid I] \xrightarrow{Adjust\ Opretaion} [I \mid A^{-1}] \qquad (4.11)$$

şeklinde gösterilir. Adjust operatörünün tekrarlanan kullanımı, aynı matrisin sol tarafının tersi ile çarpımına eşit olduğundan ;

$$A^{-1}\left[A \mid I\right]=\left[I \mid A^{-1}\right] \tag{4.12}$$

(4.11) eşitliği, (4.12) eşitliğine eşittir. Kısacası, A matrisinin yanına birim matris eklenmesiyle, Ek matris formunda olan yeni matrisin sol tarafı orijinal birim matrise dönüştürülürken uygulanan satır işlemleri, sağ taraftaki birim matrise de aynı anda uygulanarak tersi bulunur. Bu süreç aynı zamanda geri dönüştürülebilir.

$$A\left[I \mid A^{-1}\right]=\left[A \mid I\right] \tag{4.13}$$

$$\left[I \mid A^{-1}\right] \xrightarrow{\text{Adjust Opretaion}} \left[A \mid I\right]$$

şeklinde tekrardan yazılabilir.

4.6. Regresyon Katsayılarının, Hata Kareler Toplamının ve X′X in Tersinin Elde Edilişi

Aşağıdaki gibi bir matrisin, $X'X$ in sütunlarına adjust operatörü uygulanarak, regresyon katsayıları , SSE ve $X'X$ matrisinin tersi aynı anda hesaplanır.

$$\left[\begin{array}{c|c:c} X'X & X'Y & I \\ \hline Y'X & Y'Y & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Adjust Opretaion}]{X'X} \left[\begin{array}{c|c:c} I & \hat{\beta} & \left(X'X\right)^{-1} \\ \hline 0 & SSE & -\hat{\beta}' \end{array}\right] \tag{4.14}$$

Bu işlem;

$$\left[\begin{array}{c|c} \left(X'X\right)^{-1} & 0 \\ \hline -Y'X\left(X'X\right)^{-1} & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c:c} X'X & X'Y & I \\ \hline Y'X & Y'Y & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c:c} I & \hat{\beta} & \left(X'X\right)^{-1} \\ \hline 0 & SSE & -\hat{\beta}' \end{array}\right] \tag{4.15}$$

matris çarpımına denktir. Hesaplanan sonucun, $(X'X)^{-1}$ sütununa adjust operatörü uygulanırsa aşağıdaki gibi matris ilk formuna geri dönüşecektir.

$$\left[\begin{array}{c|c:c} I & \hat{\beta} & (X'X)^{-1} \\ \hline 0 & SSE & -\hat{\beta}' \end{array}\right] \xrightarrow[Adjust\,Opretaion]{(X'X)^{-1}} \left[\begin{array}{c|c:c} X'X & X'Y & I \\ \hline Y'X & Y'Y & 0 \end{array}\right] \qquad (4.16)$$

(4.14) eşitliğinde herhangi bir $X'X$ sütununa Adjust operatörü uyguladığımızda değişken modele dahil edilmiş olur. (4.16) ifadesinde $(X'X)^{-1}$ sütununa Adjust operatörü uyguladığımızda ise değişken modelden çıkarılır.

Hald veri üzerine bir uygulama çalışması ile regresyon modellerinin oluşumunu daha rahat bir şekilde görebiliriz. Veriler, Montgomery ve Ark., (2001), çalışmasından alınmıştır. Veride dört açıklayıcı değişken bulunmaktadır. Bu veri için

$$X'X = \begin{bmatrix} 13 & 97 & 626 & 153 & 390 \\ 97 & 1139 & 4922 & 769 & 2620 \\ 626 & 4922 & 33050 & 7201 & 15739 \\ 153 & 769 & 7201 & 2293 & 4628 \\ 390 & 2620 & 15739 & 4628 & 15062 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1240,5 \\ 10032 \\ 62027,8 \\ 13981,5 \\ 34733 \end{bmatrix}, \quad Y'Y = \begin{bmatrix} 121088,1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\left[\begin{array}{c|c:c} X'X & X'Y & I \\ \hline Y'X & Y'Y & 0 \end{array}\right]$ genişletilmiş ek matrisi çizelge 1.'de verilmiştir. Bu matris üzerinde (14.14) 'deki işlemler uygulanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 4.1. Normal form

13	97	626	153	390	1240,5	1	0	0	0	0
97	1139	4922	769	2620	10032	0	1	0	0	0
626	4922	33050	7201	15739	62027,8	0	0	1	0	0
153	769	7201	2293	4628	13981,5	0	0	0	1	0
390	2620	15739	4628	15062	34733,3	0	0	0	0	1
1241	10032	62027,8	13981,5	34733,3	121088	0	0	0	0	0

Çizelge 4.2. Sabit terimi bulmak için X0 modele dahil edilir ise

X0	X1	X2	X3	X4	β_0					
1,00	7,46	48,15	11,77	30,00	95,42	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	415,23	251,08	-372,62	-290,00	775,96	-7,46	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	251,08	2905,69	-166,54	-3041,00	2292,95	-48,15	0,00	1,00	0,00	0,00
0,00	-372,62	-166,54	492,31	38,00	-618,23	-11,77	0,00	0,00	1,00	0,00
0,00	-290,00	-3041,00	38,00	3362,00	-2481,70	-30,00	0,00	0,00	0,00	1,00
0,00	775,96	2292,95	-618,23	-2481,70	2715,76	-95,42	0,00	0,00	0,00	0,00

Çizelge 4.3. X1 değişkeni modele dahil edilir ise

X0	X1	X2	X3	X4	β_0				
1,00	0,00	43,64	18,46	35,21	81,48	0,21	-0,02	0,00	0,00	0,00
0,00	1,00	0,60	-0,90	-0,70	1,87	-0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	2753,87	58,77	-2865,65	1823,75	-43,64	-0,60	1,00	0,00	0,00
0,00	0,00	58,77	157,93	-222,24	78,09	-18,46	0,90	0,00	1,00	0,00
0,00	0,00	-2865,65	-222,24	3159,46	-1939,76	-35,21	0,70	0,00	0,00	1,00
0,00	0,00	1823,75	78,09	-1939,76	1265,69	-81,48	-1,87	0,00	0,00	0,00

Çizelge 4.4. X1 ve X2 değişkenleri modele dahil edilir ise

X0	X1	X2	X3	X4	β_0				
1,00	0,00	0,00	17,53	80,62	52,58	0,90	-0,01	-0,02	0,00	0,00
0,00	1,00	0,00	-0,91	-0,07	1,47	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	1,00	0,02	-1,04	0,66	-0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	156,68	-161,08	39,17	-17,53	0,91	-0,02	1,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-161,08	177,51	-41,99	-80,62	0,07	1,04	0,00	1,00
0,00	0,00	0,00	39,17	-41,99	57,90	-52,58	-1,47	-0,66	0,00	0,00

Çizelge 4.5. X1, X2, X3 değişkenleri modele dahil edilir ise

X0	X1	X2	X3	X4	β_0					
1,00	0,00	0,00	0,00	98,65	48,19	2,86	-0,11	-0,01	-0,11	0,00
0,00	1,00	0,00	0,00	-1,01	1,70	-0,11	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	1,00	0,00	-1,02	0,66	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	1,00	-1,03	0,25	-0,11	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	11,90	-1,71	-98,65	1,01	1,02	1,03	1,00
0,00	0,00	0,00	0,00	-1,71	48,11	-48,19	-1,70	-0,66	-0,25	0,00

Çizelge 4.6. Tüm değişkenler modele dahil edilerek tam model oluşturulur ise

X0	X1	X2	X3	X4	β_0	$(X'X)^{-1}$				
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	62,41	820,65	-8,44	-8,46	-8,63	-8,29
0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,55	-8,44	0,09	0,09	0,09	0,08
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,51	-8,46	0,09	0,09	0,09	0,09
0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,10	-8,63	0,09	0,09	0,10	0,09
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,14	-8,29	0,08	0,09	0,09	0,08
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	47,86	-62,41	-1,55	-0,51	-0,10	0,14

Çizelge 4.7. Tam modelden X2 değişkeni çıkarılır ise

1,00	0,00	96,59	0,00	0,00	111,68	3,69	-0,17	0,00	-0,15	-0,02
0,00	1,00	-0,98	0,00	0,00	1,05	-0,17	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	11,42	0,00	0,00	5,83	-96,59	0,98	1,00	1,00	0,98
0,00	0,00	-1,00	1,00	0,00	-0,41	-0,15	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	-0,98	0,00	1,00	-0,64	-0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	5,83	0,00	0,00	50,84	-111,68	-1,05	0,00	0,41	0,64

Çizelge 4.8. Tam modelden X1 değişkeni çıkarılır ise

1,00	91,06	0,00	0,00	0,00	203,64	51,98	0,00	-0,66	-0,20	-0,60
0,00	10,79	0,00	0,00	0,00	16,73	-91,06	1,00	0,92	1,00	0,91
0,00	-0,92	1,00	0,00	0,00	-0,92	-0,66	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	-1,00	0,00	1,00	0,00	-1,45	-0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-0,91	0,00	0,00	1,00	-1,56	-0,60	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	16,73	0,00	0,00	0,00	73,81	-203,64	0,00	0,92	1,45	1,56

Çizelge 4.9. Tam modelden X3 değişkeni çıkarılır ise

1,00	0,00	0,00	90,70	0,00	71,65	37,52	-0,04	-0,49	0,00	-0,45
0,00	1,00	0,00	-0,97	0,00	1,45	-0,04	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	1,00	-0,92	0,00	0,42	-0,49	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	0,00	0,00	10,50	0,00	1,07	-90,70	0,97	0,92	1,00	0,91
0,00	0,00	0,00	-0,91	1,00	-0,24	-0,45	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	0,00	0,00	1,07	0,00	47,97	-71,65	-1,45	-0,42	0,00	0,24

Çizelge 4.10. Tam modelden X2 ve X4 değişkenleri çıkarılır ise

1,00	0,00	36,77	0,00	61,19	72,35	2,37	-0,12	0,00	-0,12	0,00
0,00	1,00	0,94	0,00	-1,96	2,31	-0,12	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	2732,00	0,00	-2782,95	1794,69	-36,77	-0,94	1,00	-0,37	0,00
0,00	0,00	0,37	1,00	-1,41	0,49	-0,12	0,01	0,00	0,01	0,00
0,00	0,00	-2782,95	0,00	2846,74	-1829,87	-61,19	1,96	0,00	1,41	1,00
0,00	0,00	1794,69	0,00	-1829,87	1227,07	-72,35	-2,31	0,00	-0,49	0,00

Çizelge 4.11. Tam modelden X1 ve X2 değişkenleri çıkarılır ise

1,00	18,63	78,36	0,00	0,00	131,28	0,61	0,00	0,00	-0,02	-0,01
0,00	112,89	-110,47	0,00	0,00	118,74	-18,63	1,00	0,00	0,75	0,08
0,00	-110,47	119,53	0,00	0,00	-110,38	-78,36	0,00	1,00	0,27	0,90
0,00	-0,75	-0,27	1,00	0,00	-1,20	-0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-0,08	-0,90	0,00	1,00	-0,72	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	118,74	-110,38	0,00	0,00	175,74	-131,28	0,00	0,00	1,20	0,72

Çizelge 4.12. Tam modelden X1 ve X4 değişkenleri çıkarılır ise

1,00	14,08	0,00	0,00	84,50	72,07	1,31	0,00	-0,02	-0,03	0,00
0,00	127,72	0,00	0,00	-128,37	216,60	-14,08	1,00	-0,04	0,74	0,00
0,00	0,04	1,00	0,00	-1,06	0,73	-0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-0,74	0,00	1,00	-0,28	-1,01	-0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-128,37	0,00	0,00	140,91	-219,41	-84,50	0,00	1,06	0,28	1,00
0,00	216,60	0,00	0,00	-219,41	415,44	-72,07	0,00	-0,73	1,01	0,00

Çizelge 4.13. Tam modelden X1 ve X3 değişkenleri çıkarılır ise

1,00	15,50	0,00	75,61	0,00	94,16	36,91	0,00	-0,49	0,00	-0,45
0,00	389,40	0,00	-378,91	0,00	565,39	-15,50	1,00	0,07	0,00	0,15
0,00	-0,07	1,00	-0,85	0,00	0,31	-0,49	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	-378,91	0,00	379,21	0,00	-549,09	-75,61	0,00	0,85	1,00	0,76
0,00	-0,15	0,00	-0,76	1,00	-0,46	-0,45	0,00	0,01	0,00	0,01
0,00	565,39	0,00	-549,09	0,00	868,88	-94,16	0,00	-0,31	0,00	0,46

Çizelge 4.14. Tam modelden X_2 ve X_3 değişkenleri modelden çıkarılır ise

1,00	0,00	75,58	20,94	0,00	103,10	0,60	-0,03	0,00	0,00	-0,01
0,00	1,00	-0,03	-0,95	0,00	1,44	-0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	154,72	-142,80	0,00	64,38	-75,58	0,03	1,00	0,00	0,91
0,00	0,00	-142,80	142,30	0,00	-58,35	-20,94	0,95	0,00	1,00	0,07
0,00	0,00	-0,91	-0,07	1,00	-0,61	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	64,38	-58,35	0,00	74,76	-103,10	-1,44	0,00	0,00	0,61

Çizelge 4.15. Tam modelden X_1 , X_2 ve X_3 değişkenleri çıkarılır ise

1,00	10,05	75,29	11,43	0,00	117,57	0,34	0,00	0,00	0,00	-0,01
0,00	390,22	-11,23	-369,34	0,00	561,89	-10,05	1,00	0,00	0,00	0,09
0,00	-11,23	155,04	-132,17	0,00	48,20	-75,29	0,00	1,00	0,00	0,90
0,00	-369,34	-132,17	491,88	0,00	-590,18	-11,43	0,00	0,00	1,00	-0,01
0,00	-0,09	-0,90	0,01	1,00	-0,74	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	561,89	48,20	-590,18	0,00	883,87	-117,57	0,00	0,00	0,00	0,74

Bu sonuçlara göre ilgili regresyon modelleri, $\hat{\beta}$ değerleri ve hata kareler toplamları aşağıdaki Çizelge 4.16. açık bir şekilde ifade edilmiştir.

Çizelge 4.16. Y Bağımlı değişkenleri için hesaplanan regresyon modelleri

Çizelge	Model	$\hat{\beta}$ değeri	SSE
1	$Y = 0$	0	121088
2	$Y = \beta_0$	95.42	2715.76
3	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1$	81.48, 1.87	1265.69
4	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$	52.58 , 1.47, 0.66	57.9
5	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$	48.19, 1.70, 0.66, 0.25	48.11
6	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$	62.41, 1.55, 0.51, 0.10, -0.14	47.86
7	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$	111.68, 1.05, -0.41, -0.64	50.84
8	$Y = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$	203.64, -0.92, -1.45, -1.56	73.81
9	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_4$	71.65, 1.45, 1.07	47.97
10	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_3 X_3$	72.35, 2.31, 0.49	1227.07
11	$Y = \beta_0 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$	131.28, -1.20, -0.72	175.74
12	$Y = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$	72.07, 0.73, -1.01	415.44
13	$Y = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_4$	94.16, 0.31, -0.46	868.88
14	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_4 X_4$	103.10, 1.44 , -0.61	74.76
15	$Y = \beta_0 + \beta_4 X_4$	117.57 , -0.74	883.87

Verilen sayısal örnekteki Çizelge 4.2' den Çizelge 4.15 kadar yapılan işlemlere bakıldığında, bir değişken modelde iken birim matrisin sütunları, $X'X$ matrisinin sütunları ile ilişkili, değişken modelde yok iken orijinal birim matriste kalan ilişkili sütunlar değişmez. Sweep operatörün bu özelliklerinden yararlanılarak belirli bir değişken için tablo düzenlendikten sonra orijinal birim matrisin sütunları tarafından oluşturulan matrisi Sweep operatör düzenlemiş olur. Çizelge 4.6. 'da görüldüğü gibi tam modelde SSE, $\hat{\beta}$ ve $(X'X)^{-1}$ değerleri hesaplanmıştır.

4.7. Sweep Operatör

Sweep operatör $(X'X)^{-1}$, SSE ve $\hat{\beta}$ değerlerini hesaplamak için gerekli işlem miktarını azaltan, adjust operatörünün bir modifikasyonudur.

Adjust operatörü ek matris yardımı ile;

$$\left[\begin{array}{c|c:c} X'X & X'Y & I \\ \hline Y'X & Y'Y & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{Adjust\,Opretaion} \left[\begin{array}{c|c:c} I & \hat{\beta} & (X'X)^{-1} \\ \hline 0 & SSE & -\hat{\beta}' \end{array}\right]$$

şeklinde bir eşleştirme oluşturur. Sweep operatör ise aynı sonuçları ;

$$\left[\begin{array}{c|c} X'X & X'Y \\ \hline Y'X & Y'Y \end{array}\right] \xrightarrow{Sweep\,Opretaion} \left[\begin{array}{c|c} (X'X)^{-1} & \hat{\beta} \\ \hline -\hat{\beta}' & SSE \end{array}\right]$$

şeklinde oluşturur. Sweep operatör yöntemini ilk bulan Ralston (1960) , fakat Sweep operatör yönteminin koşulları Beaton (1964), tarafından belirlenmiştir. Verilen sayısal örnekteki Çizelge 4.2 'den Çizelge 4.15 kadar yapılan işlemlere bakıldığında, bir değişken modelde iken birim matrisin sütunları, $X'X$ matrisinin sütunları ile ilişkili, değişken modelde yok iken orijinal birim matriste kalan ilişkili sütunlar değişmez. Sweep operatörün bu özelliklerinden yararlanılarak belirli bir değişken

için tablo düzenlendikten sonra orijinal birim matrisin sütunları tarafından oluşturulan matrisi Sweep operatör düzenlemiş olur.

X_i değişkeni modele dahil edildiğinde, i. birimin sütununun nasıl değiştiğini gözlemlemek için adjust operatörü Sweep operatörüne göre düzenlenir.

X_k değişkeni girildiğinde, k. satır $\frac{1}{a_{kk}}$ tarafından çarpılır. Böylece birim sütunun k. satırı da $\frac{1}{a_{kk}}$ olacaktır. $(i \neq k)$ için k. satırın $-a_{ik}$ katı diğer tüm satırlara eklendiğinde, k. sütun dışındaki kalan elemanlar sıfır olur. Birim sütun k. satır dışındaki tüm elemanları sıfır olduğundan, birim sütunun i. satırı $\frac{-a_{ik}}{a_{kk}}$ olur. Bu düşünce ile Sweep operatörü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Sweep(k) operatörü;

A simetrik p.d. bir matris olsun. A matrisi Sweep(k) operatörü ile aşağıdaki gibi düzenlenir.

1. Adım; $D = a_{kk}$

2. Adım; k. satırı D ye bölünür.

3. Adım; $\forall\ , i \neq k$ için $B = a_{ik}$ seçilir ve i. satırdan k. satırın B katı çıkarılır ve $a_{ik} = \frac{-B}{D}$ elde edilir.

4. Adım; $a_{kk} = \frac{1}{D}$ belirlenir.

Adjust operatörün açık bir düzenlemesi olan Sweep operatör tersine çevrilebilirdir. Çizelge 4.1 deki ifadenin sol taraf bulunan 5×5 tipindeki alt matris üzerinde Sweep operatör kullanılarak düzenlenmiştir. Çizelge 4.2'den Çizelge 4.15 kadar yapılan hesaplamalar Sweep operatör ile ilişkilidir. Sweep operatör kullanarak regresyon katsayıları, SS ve $(X'X)^{-1}$ in hesaplanmasında gerekli işlem miktarı azaltılmasına rağmen bulunan sonuçlarda bilgi kaybı olmaz. I. Tip SS, II. Tip SS ve $X'X$ in determinantı yine hesaplanabilir ve tekillik kontrolü yapılabilir. Ayrıca yine tüm alt modeller oluşturulabilir. Bu ifadeyi bir örnek ile açıklarsak;

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'Y \\ \hline X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'Y \\ \hline Y'X_1 & Y'X_2 & Y'Y \end{array}\right]$$

matrisi verilsin. A matrisi üzerine Sweep operatörü uygulanırsa;

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'Y \\ \hline X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'Y \\ \hline Y'X_1 & Y'X_2 & Y'Y \end{array}\right] \xrightarrow[oprt.]{sweep} \left[\begin{array}{c|c|c} \left(X_1'X_1\right)^{-1} & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2 & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \\ \hline -X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & X_2'M_1X_2 & X_2'M_1Y \\ \hline -Y'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & Y'M_1X_2 & Y'M_1Y \end{array}\right] \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada $M_1 = I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'$ dir. $X_2 = X_1$ ve $Y = X_1$ alt modelleri için regresyon katsayıları açıkça görülebilir. ilk model için $X_2'M_1X_2$, SSE & CP dir. $Y'M_1Y$ ise ikinci model için SSE ve & CP dir. Böylece simetrik özellikleri ile adjust operatörü ve Forward doolittle matrisi, sadece üst üçgensel matrisler üzerine işlemler yaparak programlanır. Sweep operatörde matrisin sadece üst üçgensel kısmı için düzenlenebilir.

$\left(X'X\right)^{-1}$, β değerleri ve SSE hesaplamak için gereken zaman miktarı, Sweep operatörünü kullanarak SS ve CP 'yi oluşturmak için gereken sürenin sadece bir bölümüdür.

4.8. Genelleştirilmiş İnvers Hesaplanması

Lineer modellerin büyük bir ailesi (4.1) eşitliğinde parametreler üzerine karakterize edilmiştir. X matrisinin sütunları arasında lineer bağımlılığın var olduğu bilinmektedir. Adjust operatörü, Forward doolittle ve Sweep operatörü X matrisinin sütunları arasındaki lineer bağımlılığı belirleyebilir.

Bu bölümde Sweep operatörler, genelleştirilmiş inverslerin hesabı ve bağımlılıkla karşılaşıldığında özel çözümün üretilmesi için modifiye edilmiştir.

Genelleştirilmiş invers için ek referanslar (Pringle ve Rayner), 1971 ve (Ben-İsrail ve Greville), 1974 makalelerinde bulunabilir. İlk olarak X matrisini öyle parçalayabiliriz ki X_1 'in sütunları lineer bağımsız ve X_2 'nin her bir sütunu X_1 'in sütunlarının bir lineer kombinasyonu olsun. Böylece X matrisi

$$X = \left[X_1 \mid X_2 \right]$$

şeklinde parçalansın. X_2 'nin sütunları , X_1 'in sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan

$$X_2 = X_1 L$$

dir. Bu durumda

$$L = \left(X_1' X_1 \right)^{-1} X_1' X_2 \quad (X_2\text{'nin } X_1 \text{ üzerine dönüşümü})$$

$$X_2' X_2 - X_2' X_1 \left(X_1' X_1 \right)^{-1} X_1' X_2 = 0 \quad , \quad (SSE \ \&\text{CP})$$

olur. $X'X$ matrisi Sweep operatörün kullanılmasıyla kolayca oluşturulmuş iki özel genelleştirilmiş inverse sahiptir. Birincisi $X'X$ için c_1 ,$\left(AA^{c_1} A = A \right)$ inversdir.

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1' X_1 & X_1' X_2 \\ \hline X_2' X_1 & X_2' X_2 \end{array} \right] \xrightarrow{Sweep\ Oprt.} \left[\begin{array}{c|c} \left(X_1' X_1 \right)^{-1} & \left(X_1' X_1 \right)^{-1} X_1' X_2 \\ \hline -X_2' X_1 \left(X_1' X_1 \right)^{-1} & 0 \end{array} \right]$$

Bu matris $X_1' X_1$ ile ilişkili sütunlarının üzerine Sweep operatörün uygulanmasının bir sonucudur. Eğer tam genişletilmiş bir matris ise;

$$\left[\begin{array}{cc|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'Y \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'Y \\ \hline Y'X_1 & Y'X_2 & Y'Y \end{array}\right] \tag{4.18}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'Y \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'Y \\ \hline Y'X_1 & Y'X_2 & Y'Y \end{array}\right] \xrightarrow[oprt.]{Sweep} \left[\begin{array}{cc|c} \left(X_1'X_1\right)^{-1} & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2 & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \\ -X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \hline -Y'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 & Y'Y - Y'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \end{array}\right] \tag{4.19}$$

şeklindedir. Böylece $X_1'X_1$ in sütunları üzerine uygulanan Sweep operatör c_1 inversini ve $Y'Y$ 'nin gerekli düzeltmesini verir. β değerleri ise $\beta_1 = \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y$ ve $\beta_2 = 0$ dır. Ancak c_1 inversi kullanarak hesaplanan β değerlerine karşılık gelmezler.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(X_1'X_1\right)^{-1} & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2 \\ -X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y + \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2X_2'Y$$

$$= \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y + LX_2'Y$$

$$\beta_2 = -X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y$$

$$= -L'X_1'Y$$

$$= -X_2'Y$$

dır. $\beta_1 = \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'Y$ ve $\beta_2 = 0$ normal denklemin bir çözümü olmasına rağmen bu çözüm $\left(X'X\right)^{c_1} X'Y$ eşit değildir. Başka bir dezavantajda c_1 inversi hesaplanırken ek olarak özel çözümün varyansının da hesaplanması gerekir.

$$\mathrm{Var}\left(\left(\mathrm{X'X}\right)^{c_1} \mathrm{X'Y}\right) = \left(\mathrm{X'X}\right)^{c_1} \mathrm{X'X}\left(\mathrm{X'X}\right)^{c_1} \sigma^2$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{bmatrix} \left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin $X'X$ in bir c_2 inversi olduğu kolayca görülebilir. $X'X$ 'in c_2 inversinin $\left(AA^{c_2}A = A,\ A^{c_2}AA^{c_2} = A^{c_2}\right)$ sahip olduğu özellikten dolayı;

$$Var\left(\left(X'X\right)^{c_2} X'Y\right) = \left(X'X\right)^{c_2} \sigma^2$$

dir. Eğer genişletilmiş (4.18) eşitliğinde $X_1'X_1$ ile ilişkili sütunlar üzerine Sweep operatörü uygulanırsa, (4.19) eşitliği elde edilir. (4.26) eşitliğinde $\left(X_1'X\right)^{-1}$ in sağındaki ve altındaki matrisler yerine sıfır yazılırsa;

$$\left[\begin{array}{cc|c} \left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 & \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -Y'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} & 0 & Y'Y - YX\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \end{array}\right] \qquad (4.20)$$

elde edilir. Bu matris $\left(X'X\right)^{c_2}$ inversini ve $Y'Y$ 'nin düzeltmelerini içerir. β değerleri ise $\left(X'X\right)^{c_2}X'Y$ için $\beta_1 = \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y$ ve $\beta_2 = 0$ dır. Böylece $Var(\beta) = \left(X'X\right)^{c_2}\sigma^2$ dir. Eğer c_2 inversi (4.27) de kullanılırsa o zaman β_1 ve β_2 'nin beklenen değeri;

$$E(\beta_1) = E\left(\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y\right) = \beta_1 + \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2\beta_2$$

$$E(\beta_2) = 0$$

olur. $X_1'X_1$ 'in sütunları üzerine Sweep operatör uygulandıktan sonra eğer alt matris $\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2$ 'yi içeriyor ise bu matris Z keyfi vektörü için;

$$\beta^* = \left(X'X\right)^{c_2}X'Y + \left(I - \left(X'X\right)^{c_2}X'X\right)Z$$

$$= \begin{bmatrix} \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \qquad (4.21)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece;

$$\beta_1^* = \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'Y - \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'X_2Z_2 = \beta_1 - LZ_2$$

$$\beta_2^* = Z_2$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İstatistik, günümüzde birçok bilim dalı üzerinde önemli etkilere sahip olan bir bilim dalıdır. Lineer cebirin bir alt dalı olan matrislerin ise istatistik biliminin teori ve uygulama alanında gelişmesinde büyük önemi vardır.

Bu çalışmada lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan matrisler üzerinde durulmuştur. Tek yönlü ve iki yönlü sınıflandırma modellerinde ANOVA tablosundaki kareler toplamı oluşturulurken Kronecker çarpım kullanılmış ve idempotent matrise sahip olan karesel form şeklinde ifade edilmiştir.

Son bölümde ise Sweep operatör matrisinin stepwise regresyonda, model seçimi üzerine nasıl bir etki ettiği incelenmiştir. Ayrıca istatistik alanında önemli olan; normal denklemlerin bir çözümü, kareler toplamı, hata kareler toplamı, matris determinantı, Cholesky ayrışım matrisi, Doolittle matrisi genelleştirilmiş tersler gibi ifadeleri oluşturmak için kullanılmıştır.

İleriki çalışmalarda Sweep operatörün bilinen yanlı tahmin edicilerden Ridge regresyon, Liu gibi tahmin edicilerin ve bunlarla ilgili *SSE* 'lerin elde edilmesinde nasıl kullanılabileceği üzerinde çalışılabilir. Diğer bir ifade ile Sweep operatörün yanlı tahmin edicilerin elde edilmesinde kullanıldığında ne gibi sonuçların ortaya çıkacağı incelenebilir.

KAYNAKÇA

AKDENİZ, F., ÖZTÜRK, F., 1996. Lineer Modeller, A.Ü.F.F. Döner Sermaye Yayınları, No: 38.

BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., 2000, Idempotency of Linear Combinations of Two Idempotent Matrices, Elsevier, Linear Algebra And Its Applications, 321, 3-7.

BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., STYAN, G. P. H., 2002, Idempotency of Linear Combinations an Idempotent Matrix and a Tripotent Matrix, Elsevier, Linear Algebra And Its Applications, 354, 21-34.

BAKSALARY, O. M., BENITEZ, J., 2007, Idempotency of Linear Combinations of Three Idempotent Matrices, Two of Whcih are Commuting, Linear Algebra and its Applications, 424, 320-337

BANERJEE, K. S., 1964, A Note on Idempotent Matrices, the Annals of Mathematical Statistics, 35, 2, 880-882.

BARR, A. J., GOODNIGHT, J. H., SALL, J. P., HELWING, J. T., 1976, A User's Guide to SAS 76, Raleigh, N. C., SAS Institute.

BEATON, A. E., 1964, The Use of Special Matrix Operators in Statistical Calculus. Research Bulletin RB-64-51, Educatinal Testing Service, Princeton, New Jersey.

BEN-ISRAEL, A., GREVILLE, T. N. E., 1974, Generalized Inverses Theory and Application, John Willey&Son, New York.

BRONSON, R., 1989, Çvr. Ed.: HACISALİHOĞLU H. H., Matris İşlemleri, Nobel Yayın Dağıtım Ltd.Şti, Ankara.

CARL, D., MEYER, J. R., 1973, Generalized Inverses and Ranks of Block Matrices, SIAM Journal on Applied Mathematics, 25, 4, 597-602.

DENİZ, A., 2006, Idempotent Matrisler ve Idempotent Matrislerin Lineer Kombinasyonlarının Nonsingülerliği, T.C. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Sakarya.

FISHER, R. A. ,1922, The Goodness of Fit of Regression Formulae, and the Distribution of Regression Coefficients, J. Royal Statist. Soc. (Blackwell Publishing) 85 (4): 597–612. Doi:10.2307/2341124. JSTOR 2341124.

GALTON, F., 1877, Typical Laws Of Heredity, Nature 15 492-495, 512-514, 532-533. (Galton uses the term "reversion" in this paper, which discusses the size of peas.), http://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis.

GALTON, F., 1885, Presidential address, Section H, Anthropology, (Galton uses the term "regression" in this paper, which discusses the height of humans.), http://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis.

GAUSS ,C. F., 1809, Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientum, http://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis.

GAUSS ,C. F., 1821-1823,Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, http://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis.

GOODNIGHT, J. H., 1979, A Tutorial on The Sweep Operator, The American statistician, 33, 3 , 149-158.

GRAYBILL, F. A., MARSAGLIA, G., 1957, Idempotent Matrices and Quadratic Forms in the General Linear Hypothesis, IMS The Annals of Mathematical Statistics, 28, 3, 678-686.

GRAYBILL, F. A., 1983, Matrices with Applications in Statistics, Wad Worth Group.

GRIER, D. A., 1992, An Extended Sweep Operator for The Cross Validation of Variable Selection in Lineer Regression. Journal Statist. Comput., 43, 117-126.

HALD, A., 1952, Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, New York.

HARVILLE, D. A., 1997, Matrix Algebra from a Statistician’s Perspective, Springer.

HEALY, M. J. R., 1968 Multiple Regression with a Singular Matrix, Journal of the Royal Statistical Society. Series C, 17, 2, 110-117.

HEALY, M. J. R., 1986, Matrices For Statistics, Clarendon Pres Oxford.

HOAGLIN, C. D., WELSCH, R. E., 1978, The Hat Matrix in Regression and ANOVA, The American Statisticion, 32, 1, 17-22.

ISAACSON, E., KELLER, H. B., 1996, Analysis of Numerical Methods, New York: John Wiley & Sons.

KAÇIRANLAR, S., 1991, Matris Sıralamaları ve İstatistikteki Uygulamaları, Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Adana.

KALAYCI, Ş., 2010, SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri, Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Ankara.

KOLMAN, B., HILL, D. R., 2002, Çvr. Ed.: Prof. Dr. Ömer Akın, Uygulamalı Lineer Cebir, Palme Yayıncılık, Ankara.

KOLLO, T., VON ROSEN, D., 2005, Advanced Multivariate Statistics with Matrices, Springer.

KUTNER, M. H., NACHTSHIM, C. J., NETER, J., LI, W., 2005, (1974), Applied Linear Statistical Models, McGraw-Hill Irwin.

LANGENHOP, C. E., 1967, On Generalized Inverses of Matrices, SIAM Journal on Applied Mathematics, 15, 5, 1239 – 1246.

LEGENDRE , A. M., 1805, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Firmin Didot, ,. "Sur la Méthode des moindres quarrés" appears as an appendix. Paris.

MATHAI, A. M., PROVOST, S. B., 1992, Quadratic Froms in Random Varables: Theory and Applications, Dekker, New York.

MEHRA, JAGDISH; RECHENBERG, HELMUT, 1987, The Historical Development of Quantum Theory (1st ed.), Berlin, DE; New York, NY: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-96284-9.

MONAHAN, J. F., 2006, Some Algorithms for the Consitional Mean Vector and Covariance Matrix, Journal of Statistical Software, 16, 18.

MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A., VINING, G. G., 2001, Introduction To Linear Regression Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, New York.

ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A. Y., 2004, On Idempotency of Linear Combinations of Idempotent Matrices, Applied Mathematics and Computation, 159, 439-448.

PEARSON, K., YULE, G. U., Blanchard, Norman; LEE, A. , 1903, The Law of Ancestral Heredity. Biometrika (Biometrika Trust) **2** (2): 211–236. doi:10.1093/biomet/2.2.211. JSTOR 2331683.

PIEGORSCH, W. W., CASELLA, G., 1989, The Early Use of Matrix Diagonal Increments in Statistical Problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, 31, 3, 428-434.

PRINGLE, R. M., RAYNER, A. A., 1971, Generalized Inverse Matrices with Applications to Statistics, Hafner Press, New York.

RALSTON, A., 1960, Mathematical Methods for Digital Computers, New York: John Wiley & Sons.

RAO, C. R., MITRA, S. K., 1971, Generalized Inverse of Matrices and its Applications, Wiley, New York

RENCHER, A. C., 2000, Linear Models in Statistics, John Wiley&Sons, Inc.

ROHDE, C. A., 1965, Generalized Inverses of Partitioned Matrices, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 13, 4, 1033-1035.

SAKALLIOĞLU, S., 1989, Genelleştirilmiş İnvers Hesaplama Yöntemleri ve İstatistikteki Uygulamaları, Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Adana.

SEARLE, S. R., 1982, Matrix Algebra Useful Forstatistics, John Wiley&Sons.

SCHOTT, J. R., 1997, Matrix Analysis for Statistics, John Wiley&Son.

SCHOTT, J. R., 2003, Kronecker Product Permutation Matrices and Thei Application to Moment Matrices of the Normal Distribution, Journal of Multivariate Analysis, 87, 177-190.

SHEN, KANGSHEN; CROSSLEY, JOHN N.; LUN, ANTHONY W., 1999, Nine Chapters of the Mathematical Art, Companion and Commentary (2nd ed.), Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853936-0

STEEL, R. G. D., TORRIE, J. H., 1960, Principles and Procedures of Statistics, New York:McGraw-Hill Book Co.

ŞAHİNLER, S., 2000, En Kareler Yöntemi ile Doğrusal Regresyon Modeli Oluşturmanın Temel Prensipleri, Mustafa Kemal Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi , 5, 57 -73.

ŞENOĞLU, B., ACITAŞ, Ş., 2011, İstatiksel Deney Tasarımı: Sabit Etkili Modeller, Nobel Yayınları.

WERMUTH, N., COX, D. R., 2000, A Sweep Algorithm for Triangular Matrices and its Statistical Applications, ISSN 1437-4110.

YULE, G. U., 1897, On the Theory of Correlation, J. Royal Statist. Soc. (Blackwell Publishing) 60 ,4: 812–54. doi:10.2307/2979746, JSTOR 2979746.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta okulu DSİ Baraj İlköğretim okulunda tamamladı. 2002 yılında Hacı Ahmet Atıl Lisesini bitirdi. 2006 yılında Kahraman Maraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimini tamamladı. 2009 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2013 yılında Matrislerin İstatistik Alanında Kullanımı başlıklı yüksek lisans tez çalışmasını Prof.Dr.Sadullah SAKALLIOĞLU danışmanlığında tamamladı.