ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Semih CAN

BAZI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL TEKNİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL TEKNİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

Semih CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 14/01/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

İmza…….....……
Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
DANIŞMAN

İmza….....
Prof. Dr. Hamza EROL
ÜYE

İmza…….....……
Yrd. Doç. Dr. Gülsen KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL TEKNİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ VE UYGULAMALARI

Semih CAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman :Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Yıl: 2011, Sayfa: 119
Jüri :Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
:Prof. Dr. Hamza EROL
:Yrd. Doç. Dr. Gülsen KIRAL

Çok değişkenli istatistiksel yöntemler veri kümelerinin analizinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu metotlardan regresyon analizinin bir değişken kümesinin diğer değişken kümesi ile bağımlılığını araştırması, temel bileşenler analizinin bir veri kümesindeki değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemesi, kanonik korelasyon analizinin ise iki veya daha fazla değişken kümesi arasındaki ilişkiyi incelemesi nedeniyle bu çalışmada, bu yöntemler ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Çoklu iç ilişki olması durumunda çok değişkenli çoklu regresyonda ridge ve temel bileşenler regresyon tahmin ediciler ele alınmıştır. Bu teorik çalışmalar Büyük Şehir Belediyesi gelir ve giderler arasındaki ilişki ile örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Analizi, Kanonik Korelasyon Analizi, Ridge Tahmin Edici, Temel Bileşenler Tahmin Edici

ABSTRACT

MSc THESIS

ANALYZING THE RELATIONSHIP BETWEEN SOME OF THE MULTIVARIATE STATISTICAL TECHNIQUES AND APPLICATIONS

Semih CAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Year: 2011, Pages: 119
Jury :Assoc. Prof. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
:Assoc. Prof. Dr. Hamza EROL
:Asst. Prof. Dr. Gülsen KIRAL

Multivariate statistical methods are widely used in the analysis of data set. Since regression analysis examines the dependency of one variable set on the other variable set, principal components analysis considers the internal connection of variables within a data set, canonical corelation analysis considers relationships between two or more data sets, these methods and the relationships between these methods are examined in this study. Ridge and principal components regression estimators are considered in the multivariate multiple regression in the presence of multicollinearity. These theoric studies are illustrated by the relationship between the income and expense of metropolitan municipality.

Keywords: Multivariate Multiple Regression Analysis, Canonical Correlation Analysis, Ridge Estimator, Principal Components Regression Estimator

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana destek olan ve hiçbir zaman yardımlarını, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Doç.Dr. M. Revan ÖZKALE' ye, İstatistik bölümü öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER ..... ….IV
TABLOLAR DİZİNİ VI
ŞEKİLLER DİZİNİ VII
SİMGELER VE KISALTMALAR X
1. GİRİŞ 1
2. ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON ANALİZİ 3
2.1. Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelin Matematiksel Gösterimi 3
2.2. Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelin Varsayımları 6
2.3. Çok Değişkenli Regresyon Modelde En Küçük Kareler Tahmini 6
2.4. Σ İçin Tahmin Edici 8
2.5. Likelihood Tahmin Edici 8
2.5.1. Wishart Dağılımı 10
2.6. Çok Değişkenli Regresyon Parametrelerinin Önem Testi 11
2.6.1. Wilk's Lambda Test İstatistiği 12
2.6.2.Hotelling T^2 - Lawley İz İstatistiği 13
2.6.3.Roy En Büyük Kök İstatistiği 14
2.6.4.Pillai Test İstatistiği 14
2.6.5. X Değişkenlerinin Alt Kümesi Üzerinde Önem Testi 15
2.7. X ve Y Arasındaki Uyumun Ölçüsü 17
2.7.1. RV Katsayısı 18
2.8. En İyi Modelin Seçimi 20
2.8.1. Forward (İleri Doğru) Seçim Süreci 20
2.8.2. Backward (Geriye Doğru) Eleme Süreci 23
2.8.3. Stepwise Süreci 24
2.9. Y Değişkenlerinin Bir Alt Kümesinin Seçimi 24
2.10. Tüm Olası Alt Kümeler 25

2.10.1. Çoklu Belirleyicilik Katsayısı....26
2.10.2 Hata Kareler Ortalaması....27
2.10.3. C_p Kriteri....27
3. KANONİK KORELASYON ANALİZİ....32
3.1. Kanonik Korelasyon Analizine Giriş....32
3.2. Kanonik Korelasyon Analizinin Amacı....32
3.3. Kanonik Değişkenler ve Kanonik Korelasyonlar....33
3.4. Kanonik Korelasyon Katsayılarının Önem Testi....38
4. TEMEL BİLEŞEN ANALİZİ....42
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ TEKNİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİ....44
5.1. EKK ile Kanonik Korelasyon Analizi Arasındaki İlişki....44
5.2. EKK ile Temel Bileşenler Analizi Arasındaki İlişki....47
6. ÇOKLU İÇ İLİŞKİ....50
6.1. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi....50
6.1.1. Korelasyon Matrisinin İncelenmesi....50
6.1.2. Varyans Şişirme Faktörü....50
6.1.3. $X'X$ Matrisinin Özdeğerlerinin Analizi....51
6.2. Ridge Regresyon....52
6.2.1. K Değerinin Bulunması....54
6.3. Temel Bileşenler Regresyon....56
7. UYGULAMA....58
8. SONUÇLAR....98
KAYNAKLAR....99
ÖZGEÇMİŞ....103
EKLER....104

TABLOLAR DİZİNİ **SAYFA**

Tablo 2.1. Wilk's Lambda Değerlerinin F İstatistiği Değerlerine Dönüştürme 22
Tablo 7.1. Gider Bütçesi 60
Tablo 7.2. Gelir Bütçesi 61
Tablo 7.3.2006–2009 Aylık TÜFE Değerleri 62

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 7.1. Y Değerlerinin Saçılım Grafiği…… 78
Şekil 7.2. X Değerlerinin Saçılım Grafiği …… ...79
Şekil 7.3. X ve Y Değerlerinin Saçılım Grafiği ……..80
Şekil.7.4. Birinci Model için k Grafiği……..……92
Şekil.7.5. İkinci Model için k Grafiği .....……93
Şekil.7.6. Üçüncü Model için k Grafiği…… ..…94

SİMGELER VE KISALTMALAR

HKT	Hata Kareler Toplamı
YKT	Yanlılık Kareler Toplamı
HKO	Hata Kareler Ortalaması
EKK	En Küçük Kareler
TBR	Temel Bileşen Regresyon

1.GİRİŞ

Bu tez de yer alan konular olan çok değişkenli çoklu regresyon, kanonik korelasyon analizi, temel bileşenler analizi, çoklu içilişki ve ridge regresyon için önceden yapılan çalışmalar aşağıda belirtilmiştir.

Baloğlu (1996), gelir ve hane halkı kişi sayısıyla et ve sebze tüketimi arasındaki ilişkiyi çok değişkenli regresyon analizi ile açıklamıştır. Çalışmasında 1994 yılının tek bir ayına ait verileri kullanmış Wilk's Lamda istatistiğinden yararlanarak bağımsızlık testine de yer verilmiştir. Analiz sonucunda et sebze tüketiminin ekonomi ile ilgili olduğu sonucuna varmakla beraber enflasyonunda tüketimi ve geliri etkileyeceğini ve enflasyonunda dikkate alınması gerektiğini vurgulamıştır.

Al-Subaihi (2002), 25 tane tütün yaprağının temel bileşenleri yani tütünün temel içerikleri üzerine çok değişkenli çoklu regresyon analizi uygulamış olup, 3 tane yanıt değişken ve 6 tane açıklayıcı değişken kullanmıştır. Forward, Backward ve Stepwise seçim yöntemleriyle değişkenler seçilmiştir. Bunun yanı sıra en iyi küme seçiminde diğer kriterler olan çoklu belirleyicilik katsayısı R^2, hata kare ortalaması S^2 ve son olarak Mallow's C_p seçim kriterlerini kullanmıştır.

Burdick (1982), Wilk's Lambda istatistiği ve R^2 çoklu belirleyicilik katsayısını kullanarak bir şirketin lastik kemerden sonra çelik kemer ile ilgili ticari reklamın katılımcılar tarafından izlenme verisini incelemiştir. Bu amaç için katılımcıların yaşları, eğitim düzeyleri, aile kişi sayısı ve yıllık gelirleri açıklayıcı değişkenler, reklamın inandırıcılığı ve kemer tercihi yanıt değişkenler olarak alınmıştır.

Çankaya (2005), toplam 86 baş Alman Alacası Kıl melez keçilerine ait özellikleri incelemiştir. Bu çalışmada temel kanonik korelasyon özellikleri uygulanmıştır. Verilerden iki tane değişken kümesi oluşturularak bunların arasındaki kanonik korelasyon değişkenleri, aralarındaki kanonik korelasyon ve önem testi incelenmiştir.

Khuri (1986), 1935–1954 yılları arasında General Electric, IBM ve Westinghouse şirketlerinin brüt yatırımlarını içeren veri grubu incelenmiştir. Alınan veri grubunda çoklu iç ilişkinin varlığı $X'X$ matrisinin özdeğerleri ve koşul sayısı metodu yardımıyla ispatlanmıştır. Yine bu çalışmada ilgili çok değişkenli çoklu regresyon için testler ve çoklu iç ilişkinin etkisi incelemiştir.

Lipovetsky, Tishler ve Conklin (2002), X ve Y değişlerine ait lineer kombinasyonları ve kovaryans matrisi yardımıyla EKK'ler ve temel bileşen analizi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Kanonik korelasyon mantığından faydalanarak temel bileşen analizinde elde edilen özvektörlere göre değişkenlerin önem sırası belirlenmiştir.

Breiman ve Friedman (1997), Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen yöntem ile çoklu iç ilişkinin varlığında ridge regresyon kullanarak çoklu iç ilişkinin regresyon katsayıları üzerindeki etkisini azaltmıştır. Çoklu iç ilişkili verilerin standartlaştırılmasıyla elde edilen yanıt değişkenlerin korelasyon matrisi yardımıyla yüksek ilişkili değişkenler belirlenmiş, ridge regresyonu uygulayarak ekk tahminleri ve ridge regresyon tahminleri karşılaştırılmıştır.

Cannon (2009), çok değişkenli çoklu regresyon modelinde varyansın (aşırı büyük) şişmesi durumunu incelemiş ve Brown ve Zidek (1980) tarafından önerilen çok değişkenli çoklu regresyon için ridge regresyonu kullanarak $X'X$ matrisinin olumsuz etkilerini indirgemiştir.

Büyükşehir belediyesi verisi gelir ve gider arasındaki ilişkiyi analiz etmek için çok değişkenli çoklu regresyonda katsayılar önem testi uygulanıp alt küme seçim kriterleri ile en iyi model belirlenmiştir. Kanonik korelasyon ve temel bileşenler analizi ile EKK arasındaki ilişki incelenmiş olup açıklayıcı ve yanıt değişkenlerin önemli olanları belirlenmiştir.

Endüstrinin aynı iş kolunda bulunan 3 şirketin piyasa verilerinin çoklu içilişki durumundayken, ridge regresyon ve temel bileşenler regresyon yardımıyla çoklu içilişkinin katsayılar üzerindeki olumsuz etkisi azaltılmıştır.

2. ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOKLU REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizi, aralarında sebep-sonuç ilişkisi bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi, o konu ile ilgili tahminler yada kestirimler yapabilmek amacıyla regresyon modeli olarak adlandırılan matematiksel bir model ile karakterize eden bir istatistiksel analiz tekniğidir (Şahinler, 2000).

Regresyon analizinde yanıt değişkenler ve açıklayıcı değişkenlerin sayısına göre modeli adlandırabiliriz.

Tek bir yanıt değişken ve tek bir açıklayıcı değişken durumunda oluşturulacak regresyon modeline basit doğrusal regresyon adı verilir ve

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i,\ i = 1,2,\mathbf{K},n$$

şeklinde yazılabilir. Çoklu regresyon modeli ise bir yanıt değişken ve birden fazla açıklayıcı değişken durumundaki regresyon modeline denir ve

$$Y_i = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \mathbf{K} + b_p X_p + e_i\ ,\ i = 1,2,.....,n$$

şeklinde yazılabilir. Birden fazla yanıt değişken olması durumunda ise regresyon analizleri çok değişkenli çoklu regresyon analizi ile yapılır.

Çok değişkenli istatistiksel analiz, tek değişkenli istatistiksel analiz yöntemlerinin yeterli sonuç vermediği durumlarda kullanılan yöntemlerin genel adıdır (Küçükönder, Efe ve Akyol, 2004). Çok değişkenli çoklu regresyon analizi ise açıklayıcı ve yanıt değişkenlerinin analizini çok değişkenli yaklaşımla çözümlemeye yönelik olarak geliştirilmiş bir analiz yöntemidir (Keskin, Boysan ve Göktaş, 2007).

2.1. Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelinin Matematiksel Gösterimi

Çok değişkenli çoklu lineer regresyon modeli

$$\underset{n\times p}{Y} = \underset{n\times(q+1)}{X}.\underset{(q+1)\times p}{\mathrm{B}} + \underset{n\times p}{\Xi} \tag{2.1}$$

olarak yazılabilir. Burada Y yanıt değişkenlerin, X açıklayıcı değişkenlerin, B regresyon katsayıların ve Ξ hataların matrisi olarak yazılabilir. Model açık biçimde

$$\begin{aligned} Y_1 &= b_{01} + b_{11}X_1 + \mathbf{K} + b_{q1}X_q + e^{(1)} \\ Y_2 &= b_{02} + b_{12}X_1 + \mathbf{K} + b_{q2}X_q + e^{(2)} \\ &\mathrm{M} \\ Y_p &= b_{0p} + b_{1p}X_1 + \mathbf{K} + b_{qp}X_q + e^{(p)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak ifade edilebilir. (2.1) eşitliğinde verilen modeldeki Y, X, B ve Ξ matrisleri açık biçimde yazılacak olursa; X veri matrisi:

$$\underset{n\times(q+1)}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \mathbf{L} & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \mathbf{K} & x_{2q} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \mathbf{K} & x_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \mathbf{K} & X_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{'} \\ X_2^{'} \\ \mathrm{M} \\ X_n^{'} \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Bu gösterimde 1, $n\times 1$ boyutlu birlerden oluşan vektör, $X_1, \mathbf{K}, X_q$ lar ise $n\times 1$ boyutlu açıklayıcı değişkenler vektörüdür. $X_1^{'}, \mathbf{K}, X_n^{'}$ lar $1\times(1+q)$ boyutlu gözlemlerin vektörleridir.

Y yanıt değişkenlerinin matris gösterimi:

$$\underset{n\times p}{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \mathbf{K} & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \mathbf{K} & y_{2p} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ y_{n1} & y_{n2} & \mathbf{K} & y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{'} \\ y_2^{'} \\ \mathrm{M} \\ y_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \mathbf{K} & Y_p \end{pmatrix}$$

şeklinde olup bu gösterimde Y_i ($i=1,\mathbf{K},p$) $n\times 1$ boyutlu vektörleri Y matrisinin sütunlarını ve $y_j^{'}$ ($j=1,\mathbf{K},n$) $1\times p$ boyutlu vektörleri Y matrisinin satırlarını göstermektedir. B katsayılar matrisi ise $(q+1)\times p$ boyutlu olup

$$\underset{(q+1)\times p}{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} b_{01} & \mathbf{L} & b_{0p} \\ \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ b_{q1} & \mathbf{L} & b_{qp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^{(1)} & b^{(2)} & \mathbf{K} & b^{(p)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \\ \mathrm{M} \\ b_{q+1}^{'} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ξ , $n\times p$ boyutlu hata matrisi ise

$$\underset{n\times p}{\Xi}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \mathbf{K} & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \mathbf{K} & e_{2p} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ e_{n1} & e_{n2} & \mathbf{K} & e_{np} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ \mathrm{M} \\ e_n^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} & \mathbf{K} & e^{(p)} \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Bu gösterimlerle birlikte (2.2) ile verilen denklem sistemi $Y_i=Xb^{(i)}+e^{(i)}$, $i=1,\mathbf{K},p$ olarak veya matris gösterimi ile

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \mathbf{K} & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \mathbf{K} & y_{2p} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ y_{n1} & y_{n2} & \mathbf{K} & y_{np} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \mathbf{L} & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \mathbf{K} & x_{2q} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \mathbf{K} & x_{nq} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \mathbf{K} & b_{0p} \\ b_{11} & b_{12} & \mathbf{K} & b_{1p} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ b_{q1} & b_{q2} & \mathbf{K} & b_{qp} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \mathbf{K} & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \mathbf{K} & e_{2p} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ e_{n1} & e_{n2} & \mathbf{K} & e_{np} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Çok Değişkenli Çoklu Regresyon Modelin Varsayımları

Çok değişkenli çoklu regresyon analizinde aşağıdaki varsayımlar geçerlidir:

1. Ξ hata matrisinin beklenen değeri 0 yani $\mathrm{E}(\Xi)=0$ dır. Denk olarak $E(Y)=XB$ olarak da yazılabilir. Bu varsayım lineer modelin doğru olduğunu belirtir.

2. Ξ matrisinin satırlarının ilişkisiz olduğu varsayılır. Yani, $E(e_i e_j')=0,\ i\neq j$ $i,j=1,\mathbf{K},n$ dir. e_i'nin kovaryans matrisi Σ ile gösterilir ve bilinmediği varsayılır. e_i'lerin ortalamaları sıfır olduğundan $Cov(y_i)=Cov(e_i)=E(e_i e_i')=\Sigma=(s_{ij})$ dır. Ayrıca $E(e^{(i)})=0$ olduğundan

$$Cov(e^{(i)},e^{(j)})=E(e^{(i)}e^{(j)\prime})$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}e_{1i}\\ \mathrm{M}\\ e_{ni}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{1j} & \mathbf{K} & e_{nj}\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\begin{pmatrix}e_{1i}e_{1j} & e_{1i}e_{2j} & e_{1i}e_{nj}\\ e_{2i}e_{1j} & e_{2i}e_{2j} & e_{2i}e_{nj}\\ & & \\ e_{ni}e_{1j} & e_{ni}e_{2j} & e_{ni}e_{nj}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}s_{ij} & 0 & \mathbf{K} & 0\\ 0 & s_{ij} & \mathbf{K} & 0\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{K} & s_{ij}\end{pmatrix}=s_{ij}I=Cov(Y_i,Y_j)$$

dır (Srivastava, 1979). Aynı gözlem vektöründeki i-inci ve j-inci bileşenler ilişkili iken farklı gözlem vektörlerindeki bileşenler ilişkisizdir.

3. Ξ hataları çok değişkenli normal dağılıma sahiptir (Srivastava, 1979).

2.3. Çok Değişkenli Regresyon Modelde En Küçük Kareler Tahmini

$S(\mathrm{B})=\Xi'\Xi=\left(Y-X\mathrm{B}\right)'\left(Y-X\mathrm{B}\right)$ eşitliğinin B 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesi ile B 'nin en küçük kareler tahmin edicisi bulunur:

$$\frac{\partial S(\mathrm{B})}{\partial \mathrm{B}} = -2X'Y + 2X'X\mathrm{B} = 0$$
$$X'X\mathrm{B} = X'Y$$
$$\hat{\mathrm{B}} = \left(X'X\right)^{-1}X'Y$$

$\hat{\mathrm{B}}$ en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi $tr\left[\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)'\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\hat{e}_{ij}^{2}$ ve $\left|\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)'\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)\right|$ niceliklerini de minimum yapar (Rencher, 2002). (2.2) modeli için Y matrisinin her bir kolonuna B nin bir kolonu karşılık gelir. Bu nedenle Brown ve Zidek (1980) ve Scolve (1970), $i = 1,2,\mathbf{K},p$ için Y_i 'nin her biri $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ ile ayrı ayrı tahmin edilebileceğini belirtmiştir. Y 'nin kolonları $Y_1, Y_2, \mathbf{K}, Y_p$ ile gösterildiğinden

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{B}} = \left(X'X\right)^{-1}X'Y &= \left(X'X\right)^{-1}X'\left(Y_1, Y_2, ..., Y_p\right)\\ &= \left[\left(X'X\right)^{-1}X'Y_1, \left(X'X\right)^{-1}X'Y_2, ..., \left(X'X\right)^{-1}X'Y_p\right]\\ &= \left(\hat{b}^{(1)} \quad \hat{b}^{(2)} \quad \mathbf{K} \quad \hat{b}^{(p)}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir.

EKK'nın özellikleri;

1. $\hat{\mathrm{B}}$, B 'nın yansız tahmin edicisidir.

2. $\hat{\mathrm{B}}$ daki b_{jk} 'ların EKK tahmin edicileri tüm lineer yansız tahmin ediciler arasında minimum varyansa sahiptir. Bu sonuç ise Gauss – Markov teoremi olarak bilinir.

3. $\hat{\mathrm{B}}$ daki tüm $\hat{b}_{jk}$ 'lar birbirleriyle ilişkilidir. Bunun nedeni X değişkenleri arasındaki ve Y değişkenleri arasındaki ilişkidir. $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ birbiri ile ilişkili olduğundan $\hat{\mathrm{B}}$ nın verilen bir kolonundaki $\hat{b}$ 'lar ilişkilidir. $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ ortagonal ise $\hat{\mathrm{B}}$ nın her bir kolonundaki $\hat{b}$ 'lar ilişkisizdir. Dolayısıyla X 'ler arasındaki ilişki

her kolondaki $\hat{b}$ 'ların birbiri ile ilişkisini etkiler. Ayrıca $Y_1, Y_2, \mathbf{K}, Y_p$ 'ler ilişkili olduğundan her kolondaki $\hat{b}$ 'lar diğer kolondaki $\hat{b}$ 'lar ile ilişkilidir.

4. $\hat{\mathrm{B}}$ çok değişkenli normal dağılıma sahiptir.

2.4. $\sum$ İçin Tahmin Edici

$Cov(y_i) = \sum$ nin yansız tahmin edicisi;

$$S_e = \frac{E}{n-q-1} = \frac{\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)'\left(Y - X\hat{\mathrm{B}}\right)}{n-q-1} = \frac{Y'Y - \hat{\mathrm{B}}'X'Y}{n-q-1}$$

ile verilir: $E(S_e) = \sum$.

2.5. Likelihood Tahmin Edici

Çok değişkenli çoklu regresyon modelinde hatalar normal dağılıma sahip iken parametrelerin tahminleri genellikle likelihood tahmin metoduyla bulunur. $p \geq 2$ boyutlu çok değişkenli normal dağılım, tek değişkenli normal dağılımın genelleştirilmişidir (Johnson ve Wichern, 2002).

$Y_i \ (i = 1, 2, \mathbf{K}\ p)$ $Xb^{(i)}$ ortalamaya sahip, $s_{ii}I$ varyanslı normal dağılıma sahip rasgele örneklem ise Y_i 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2p\, s_{ii}^{\ 2}}} e^{-\frac{(Y_i - m)^2}{2 s_{ii}^{\ 2}}}, \quad -\infty < Y_i < \infty$$

ve likelihood fonksiyonu;

$$L(B,s^2;Y_i)=\left(\frac{1}{2ps_{ii}^2}\right)^{n/2}\exp-\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-Xb^{(i)}\right)^2}{2s_{ii}^2}\right]$$

$$L(B,s^2;Y)=\frac{1}{s_{ii}^n(2p)^{n/2}}\exp-\frac{(Y-XB)'(Y-XB)}{2s_{ii}^2} \qquad (2.3)$$

şeklindedir. (2.3) eşitliği Σ çok değişkenli çoklu regresyon analizinde yazılacak olursa

$$L(\mathrm{B},\Sigma)=\frac{1}{(2p)^{n/2}}\cdot\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\exp-\frac{1}{2}\left[(Y-XB)'\Sigma^{-1}(Y-XB)\right]$$

buradan da;

$$InL(\mathrm{B},\Sigma)=-\frac{1}{2}n\ln(2p)-\frac{1}{2}In(|\Sigma|)-\frac{1}{2}tr\left[(Y-XB)'\Sigma^{-1}(Y-XB)\right] \qquad (2.4)$$

olarak yazılabilir. (2.4) eşitliğinin B ve Σ 'na göre türevlerini alıp sıfıra eşitlersek;

$$\frac{\partial InL(.)}{\partial B}=-X'Y-X'Y+2X'XB=0$$

$$-2X'XB=-2X'Y$$

$$X'XB=X'Y$$

$$\hat{\mathrm{B}}=(X'X)^{-1}X'Y$$

ve Σ ya göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\hat{\Sigma}=\frac{\left(Y-X\hat{B}\right)\left(Y-X\hat{B}\right)'}{n}$$

elde edilir. Burada $n\Sigma$ Wishart dağılımına sahiptir (Johnson ve Wichern, 2002)

2.5.1. Wishart Dağılımı

Wishart (1928) tarafından ortaya konulmuş bir dağılım olup genellikle Ki–Kare dağılımının uzantısı olarak çok değişkenli durumda yer alır (Kollo ve Von Rosen, 2005). Wishart dağılımı kovaryans matrisi tahmininin analizinde önemli rol oynar (Hardle ve Simar, 2003).

$X \sim N_q(m,\Sigma)$ olup $\Sigma \geq 0$ ve $m = 0$ olmak üzere $q \times q$ tipinde bir A matrisi bazı X matrisleri için $A = XX'$ olarak yazılabiliyorsa Wishart dağılımına sahiptir. $q = 1$, $m = 0$ ve $\Sigma = I$ ise Wishart matrisi n serbestlik dereceli Ki–Kare dağılımının genelleştirilmiş halidir (Kollo ve Von Rosen, 2005

$X_i \sim N(0,\Sigma)$ ve X_i, X_j 'den bağımsız olmak üzere $X = (X_1, \mathbf{K}, X_q)$ olsun. A rasgele değişkeni $A = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i'$ toplamına dönüştürülür yani rassal vektörlerinin çarpımları olarak yazılabilir.

Burada X vektörü Wishart dağılımına sahip ise dağılımın yoğunluk fonksiyonu,

$$W_n(A;\Sigma) = \begin{cases} \dfrac{|A|^{(n-q-1)/2} e^{-tr\left[A\Sigma^{-1}\right]/2}}{2^{nq/2} p^{q(q-1)/4} |\Sigma|^{n/2} \prod_{i=1}^{q} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} & , \quad A > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

n serbestlik dereceli olarak yazılabilir.

2.6. Çok Değişkenli Regresyon Parametrelerinin Önem Testi

B parametre matrisi aşağıdaki şekilde parçalanabilir:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_0' \\ -- \\ \mathrm{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{01} & \mathbf{K} & b_{0p} \\ - & - & - \\ b_{11} & \mathbf{K} & b_{1p} \\ \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ b_{q1} & \mathbf{K} & b_{qp} \end{pmatrix}$$

X değişkenlerinin hiç birinin Y değişkenlerinin herhangi birini tahmin etmediği (predict) hipotezi $\mathrm{H}_0:\mathrm{B}_1=0$ hipotezine karşı $\mathrm{H}_1:\mathrm{B}_1\neq 0$ ile verilir. Genel kareler toplamı $Y'Y$, $Y'Y=\left(YY-\hat{\mathrm{B}}'X'Y\right)+\hat{\mathrm{B}}'X'Y$ olarak yazılabilir (Rencher, 2002).

Eşitliğin her iki tarafından $n\overline{yy}'$ çıkartılırsa:

$$\begin{aligned} Y'Y-n\overline{yy}' &= \left(YY-\hat{\mathrm{B}}'X'Y\right)+\left(\hat{\mathrm{B}}'X'Y-n\overline{yy}'\right) \\ &= \mathrm{E}+\mathrm{H} \end{aligned}$$

bulunur. $\mathrm{E}=Y'Y-\hat{\mathrm{B}}'X'Y$ hata kareler toplam matrisi ve $\mathrm{H}=\hat{\mathrm{B}}'X'Y-n\overline{yy}'$ çapraz üretim matrisidir (Timm, 2002). Bu matrisler, H_0 hipotezini test için kullanılır.

H_0 hipotezinin test edilmesi için kullanılan test istatistikleri (Timm, 2002) ise

Wilk's Lamda $\Lambda=\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{1+l_i}=\frac{|\mathrm{E}|}{|\mathrm{E}+\mathrm{H}|}$

Hotelling – Lawley $U^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}l_i=tr\left[\mathrm{E}^{-1}\mathrm{H}\right]$

Pillai İzi $V^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{l_i}{1+l_i}=tr\left[\mathrm{H}(\mathrm{H}+\mathrm{E})^{-1}\right]$

Roy en büyük kök testi $q = \dfrac{l_1}{1+l_1}$

şeklindedir.

2.6.1. Wilk's Lambda Test İstatistiği

l_i değerleri $\mathrm{E}^{-1}\mathrm{H}$ matrisinin özdeğerleri ve $s = \min(p,q)$ olmak üzere, Wilk's Lambda test istatistiği;

$$\Lambda = \frac{\left|\mathrm{E}\right|}{\left|\mathrm{E}+\mathrm{H}\right|} = \frac{\left|Y'Y - \hat{\mathrm{B}}'X'Y\right|}{\left|Y'Y - n\overline{yy}'\right|} = \prod_{i=1}^{s}\frac{1}{1+l_i} \tag{2.5}$$

yazılabilir. (2.5) ile verilen test istatistiği likelihood oran yaklaşımı ile de test edilebilir. Λ, 0 – 1 arasında değerler alır (Pham-Gia, 2008).

$H_0 : B_1 = 0$ hipotezi altında Λ, $\Lambda_{p,q,n-q-1}$ dağılımına sahiptir. $v_{\mathrm{E}} = n-q-1$ ve $v_{\mathrm{H}} = q$ olmak üzere $\Lambda \le \Lambda_{a,p,v_{\mathrm{H}},v_{\mathrm{E}}}$ ise a önem düzeyinde H_0 red edilir. Λ değeri sıfıra yakınsadıkça hipotez red edilirken 1'e yakınlaştıkça kabul edilir (Biçkici, 2007). $\Lambda_{a,p,v_{\mathrm{H}},v_{\mathrm{E}}}$ değerleri Tablo Ek 1 de verilmiştir.

Wilk's Lambda test istatistiği genellikle çok değişkenli analizde çeşitli istatistiksel testler için kullanılır ve tek değişkenli analizde *F* dağılımı ile aynı rolü oynar (Pham-Gia, 2008).

S matrisi $S = \begin{pmatrix} S_{yy} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{xx} \end{pmatrix}$ olarak parçalanmak üzere Wilk's Lambda test istatistiği kovaryans matris yardımlıyla

$$\Lambda = \frac{\left|S\right|}{\left|S_{xx}\right|\left|S_{yy}\right|} = \frac{\left|S_{yy} - S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}\right|}{\left|S_{yy}\right|} \tag{2.6}$$

olarak da ifade edebilir.

Wilk's Lamda istatistiği c^2 istatistiğine de dönüştürebilir. Bu dönüşüm;

$$c^2 = -\left[v_{\mathrm{E}} - \frac{1}{2}(p - v_{\mathrm{H}} + 1)\right]\ln\Lambda$$

şeklinde yazılabilir.

2.6.2. Hotelling T^2- Lawley İz İstatistiği

Hotelling T^2 testi çok değişkenli normal dağılım varsayımına göre kurulan çok değişkenli hipotezlerin test edilmesini amaçlayan bir yöntemdir. Hotelling (1931), Student t'nin çok değişkenli genellemesi olan T^2 istatistiğinin önemliliğini değerlendirmek için bir dağılım ortaya koymuştur ve bu dağılım çok değişkenli hipotezlerin test edilmesinde kullanılmaktadır. T^2 test istatistiği tek değişkenli hipotezlerin test edilmesinde yararlanılan *t* testinin çok değişkenli hipotezleri için genelleşmiş biçimidir(Özdamar, 1999).

l_i değerleri $\mathrm{E}^{-1}\mathrm{H}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere Hotelling T^2- Lawley istatistiği

$$U^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} l_i = tr\left[\mathrm{E}^{-1}\mathrm{H}\right]$$

olarak tanımlanır. $\frac{v_E}{v_H}U^{(s)}$ test istatistiğinin üst yüzdelik noktaları Tablo Ek 2 de verilmiştir. $\frac{v_E}{v_H}U^{(s)} > U_a$ ise hipotez red edilir.

2.6.3. Roy En Büyük Kök İstatistiği

H_0 hipotezini test için Birleşim - Kesişim testi Roy'un en büyük kök test istatistiğini kullanır. l_1, $E^{-1}H$ matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere Roy en büyük kök test istatistiği,

$$q = \frac{l_1}{1 + l_1}$$

olarak tanımlanır. $s = \min(p, q)$, $m = \frac{1}{2}(|q - p| - 1)$ ve $N = \frac{1}{2}(n - q - p - 2)$ olup olmak üzere $q > q_{a,s,m,N}$ ise hipotez red edilir. q için kritik değerler Tablo Ek 3 de verilmiştir.

H_0 hipotezinin alternatifi olan H_1 hipotezi birleşim testi olarak tanımlandığından dolayı Birleşim – Kesişim testinde hipotezin test edilmesi için red bölgelerinin birleşimi alınır (Levine ve Ohman, 1997). Red bölgelerinin birleşiminin alınmasından dolayı $E^{-1}H$ matrisinin en büyük özdeğeri alınmalıdır.

2.6.4. Pillai Test İstatistiği

Pillai test istatistiğini;

$$V^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i}{1 + l_i} = tr\left[H(H + E)^{-1}\right]$$

olarak ifade edilebilir. Roy en büyük kök istatistiği yöntemi ile *s, m ve N* parametreleri benzerlik gösterir. $V > V_a$ ise hipotez red edilir. Test için kritik değerler Tablo Ek 4'te verilmiştir.

H_0 doğru iken tanımlanan dört test istatistiğinin tamamı aynı I. Tip hatayı verir. H_0 yanlış ise testlerin güç sıralaması özdeğerlerinin konumuna (biçimine) bağlıdır. Özdeğerler eşit veya yaklaşık eşit ise testlerin gücünün sıralaması $V^{(s)} \geq \Lambda \geq U^{(s)} \geq q$ şeklindedir. Sadece bir tek özdeğer sıfırdan farklı ise $q \geq U^{(s)} \geq \Lambda \geq V^{(s)}$ dir (Kladopoulos ve Ramsey, 2005).

2.6.5. X Değişkenlerinin Alt Kümesi Üzerinde Önem Testi

Regresyon katsayıları için yapılan önem testi ile katsayıların önemli olanları seçilebilir. Başka bir değişle modeldeki q tane X açıklayıcı değişkenlerinin model için önemli olanları seçilebilir. Y 'lerin ($Y_1, \mathbf{K}, Y_p$), X 'in son h değişkenine, $X_{q-h+1}, X_{q-h+2}, \mathbf{K}, X_q$ bağlı olmadığı hipotezi incelenebilir. B matrisi B_d , h satır içermek üzere $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_r \\ \mathrm{B}_d \end{pmatrix}$ olarak parçalanabilir. Hipotez $\mathrm{H}_0 : \mathrm{B}_d = 0$ olarak yazılabilir. X_r , X 'in B_r 'ye karşılık gelen kolonları ise indirgenmiş model, $Y = X_r \mathrm{B}_r + \Xi$ şeklinde ifade edilebilir (Rencher, 2002).

Tam model ile indirgenmiş modeli karşılaştırmak için $\hat{\mathrm{B}}' X' Y$ tam model ve $\hat{\mathrm{B}}_r' X_r' Y$ indirgenmiş model için regresyon kareler toplamı ve çapraz üretim matrisleri arasındaki fark kullanılır: $\mathrm{H} = \hat{\mathrm{B}}' X' Y - \hat{\mathrm{B}}_r' X_r' Y$. Bu durumda $\mathrm{H}_0 : \mathrm{B}_d = 0$ hipotezini test, tam ve indirgenmiş modelin $X_{q-h+1}, X_{q-h+2}, \mathbf{K}, X_q$ ve $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ değişkenlerinin önemliliğini testtir. Yapılan test için tam modeldeki $\mathrm{E} = Y'Y - \hat{\mathrm{B}}' X' Y$ hata kareler toplam matrisi kullanılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{E} + \mathrm{H} &= \left(Y'Y - \hat{\mathrm{B}}' X' Y \right) + \left(\hat{\mathrm{B}}' X' Y - \hat{\mathrm{B}}_r' X_r' Y \right) \\ &= Y'Y - \hat{\mathrm{B}}_r' X_r' Y \end{aligned}$$

olacaktır. Buradan Wilk's Lambda istatistiği

$$\Lambda\left(X_{q-h+1},X_{q-h+2},\mathbf{K},X_q / X_1,X_2,\mathbf{K},X_{q-h}\right)=\frac{\left|\mathrm{E}\right|}{\left|\mathrm{E}+\mathrm{H}\right|}=\frac{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}'X'Y\right|}{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}_r'X_r'Y\right|} \tag{2.7}$$

ile verilir. $\Lambda\left(X_{q-h+1},X_{q-h+2},\mathbf{K},X_q / X_1,X_2,\mathbf{K},X_{q-h}\right)$ gösteriminde, Wilk's lamda tam ve indirgenmiş model testini sağlar. (2.7) ifadesi tam ve indirgenmiş model için Λ 'nın terimleri cinsinden ifade edilebilir. $Y'Y-\hat{\mathrm{B}}_r'X_r'Y$, indirgenmiş model $Y=X_r\mathrm{B}_r+\Xi$ için hata matrisidir. Bu hata matrisi, indirgenmiş model için regresyonun önemliliğini test kullanılabilir. (2.5) dekine denk olarak yazılacak olursa Λ_r değeri

$$\Lambda_r=\frac{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}_r'X_r'Y\right|}{\left|Y'Y-n\overline{y}\overline{y}'\right|}$$

şeklinde gösterilir.

(2.7) ifadesi tam ve indirgenmiş modeller için Wilk's Λ 'ların oranı olarak yazılabilir:

$$\Lambda\left(X_{q-h+1},X_{q-h+2},\mathbf{K},X_q / X_1,X_2,\mathbf{K},X_{q-h}\right)=\frac{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}'X'Y\right|}{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}_r'X_r'Y\right|}=\frac{\dfrac{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}'X'Y\right|}{\left|Y'Y-n\overline{y}\overline{y}'\right|}}{\dfrac{\left|Y'Y-\hat{\mathrm{B}}_r'X_r'Y\right|}{\left|Y'Y-n\overline{y}\overline{y}'\right|}}=\frac{\Lambda_f}{\Lambda_r}$$

Tam model ve indirgenmiş model için Λ değerleri bulunarak oranlanır. Bu şekilde hesaplanan test istatistiği Λ_{a,p,v_H,v_E} tablo değerinden küçük veya eşit ise ise a önem düzeyinde H_0 red edilir.

2.7. X ve Y Arasındaki Uyumun Ölçüsü

İki değişken kümesi arasındaki uyum ölçüsü kanonik korelasyonlar kullanılarak belirlenebilir (Bölüm 3.3). Burada belirleyicilik katsayı oranı incelenecektir.

Regresyon modeli tarafından açıklanabilen değişimin toplam değişim içindeki payı olan belirleyicilik katsayısı, yanıt değişkendeki değişimin yüzde kaçının açıklayıcı değişken tarafından açıklanabildiğini belirtir (Alpar, 2003).

Y 'nin tek değişkenli olduğu durumda belirleyicilik katsayısı;

$$R^2 = \frac{S_{yx}^{'} S_{xx}^{-1} S_{yx}}{S_{yy}}$$

olarak ifade edilebilir. R^2, 0 ve 1 arasında değişir. İki değişken arasında doğrusal bir ilişki varken R^2 değerinin 1'e yakınsaması yanıt değişkendeki değişimin büyük bir bölümünün açıklayıcı değişkenler tarafından açıklandığını ve varsayımlar sağlandığında modelin uygun olduğunu gösterir (Alpar, 2003).

Çok değişkenli durumda $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ ve $X_1, X_2, ..., X_q$ arasındaki uyumun R^2 benzeri ölçüsü

$$R_M{}^2 = \frac{\left| S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{yx} \right|}{\left| S_{yy} \right|} \qquad (2.8)$$

olarak tanımlanabilir. Burada S_{yx} , S_{xy} , S_{xx} ve S_{yy} , $S=\begin{pmatrix} S_{yy} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{xx} \end{pmatrix}$ matrisinden elde edilir.

2.7.1. RV Katsayısı

(2.8) eşitliğinin haricinde Robert ve Escoufier (1976) tarafından önerilen diğer bir yöntem,

$$RV=\frac{tr\left(S_{xy}S_{yx}\right)}{\sqrt{tr\left(S_{xx}^{2}\right)tr\left(S_{yy}^{2}\right)}}$$

dir. RV katsayısı değişkenlerin iki kümesi arasındaki ilişkiyle ilgilenir (Josse, Pages ve Husson, 2008). Aynı durum Hotelling (1936) tarafından öne sürülen kanonik korelasyon analizinde de değişkenlerin iki kümesi arasındaki lineer bağımlılığın tanımlanmasıyla ilgili referanstır. Birinci grubun değişkenlerinin lineer kombinasyonlarıyla ikinci grubun değişkenlerinin lineer korelasyonu araştırılır. Kanonik korelasyon analiziyle kanonik korelasyon katsayıları elde edilir. RV katsayısı iki değişken kümesi arasındaki ilişkiyle korelasyon katsayısı değerlerini belirlemede önemlidir (Josse, Pages ve Husson, 2008). RV katsayısı, maksimum kanonik korelasyon analizindeki kanonik korelasyon katsayısıyla ilgilendiği şekilde ilgilenir. Yani, RV katsayısının maksimum değeriyle ilgilenilir.

Robert ve Escoufier (1976) tarafından önerildiği şekilde; X ve Y değişkenleri arasındaki uzaklık kullanılarak RV katsayısı tanımı yapılabilir. Tüm değişkenlerin sıfır ortalamaya sahip merkezileştirilmiş olduğu varsayılmak üzere X ve Y değişkenlerinin sırasıyla korelasyon matrisleri $S\left(X\right)=X^{'}X$ ve $S\left(Y\right)=Y^{'}Y$ olarak tanımlansın. Bir A karesel matrisinin normunun $\left\|A\right\|=\left[tr\left(A^{'}A\right)\right]^{1/2}$ ile verilen

tanımdan hareketle $\left\| S(X) \Big/ \left\{ trS(X)^2 \right\}^{1/2} \right\| = 1$ olarak yazılabilir. X ve Y değişkenleri için bir gösterim olarak $C(X)$ ve $C(Y)$ arasındaki uzaklık ölçümü;

$$dist\{C(X),C(Y)\} = \left\| S(X) \Big/ \left\{ trS(X)^2 \right\}^{1/2} - S(Y) \Big/ \left\{ trS(Y)^2 \right\}^{1/2} \right\|$$

$$A = \frac{S(X)\left\{ trS(Y)^2 \right\}^{1/2} - S(Y)\left\{ trS(X)^2 \right\}^{1/2}}{\left\{ trS(X)^2 \right\}^{1/2}\left\{ trS(Y)^2 \right\}^{1/2}}$$

$$A'A = A^2 = \frac{S(X)^2\left\{ trS(Y)^2 \right\} + S(Y)^2\left\{ trS(X)^2 \right\} - 2S(X)S(Y)\left\{ trS(X)^2\, trS(Y)^2 \right\}^{1/2}}{trS(X)^2\, trS(Y)^2}$$

$$trA'A = \frac{trS(X)^2\, trS(Y)^2 + trS(Y)^2\, trS(X)^2 - 2tr\{S(X)S(Y)\}\left\{ trS(X)^2\, trS(Y)^2 \right\}^{1/2}}{trS(X)^2\, trS(Y)^2}$$

$$= 2 - 2\frac{tr\{S(X)S(Y)\}}{\sqrt{trS(X)^2\, trS(Y)^2}}$$

$$dist\{C(X),C(Y)\} = \sqrt{2}\left[1 - tr\{S(X)S(Y)\} \Big/ trS(X)^2\, trS(Y)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\left[1 - RV(X,Y) \right]^{1/2}$$

$$RV(X,Y) = \left\{ tr\left(X'X.Y'Y \right) \right\} \Big/ \left\{ tr\left(X'X \right)^2 tr\left(Y'Y \right)^2 \right\}$$

$$= \left\{ tr\left(XY'YX' \right) \right\} \Big/ \left\{ tr\left(XX' \right)^2 tr\left(Y'Y \right)^2 \right\}$$

olarak da yazılabilir. RV katsayısı $[0,1]$ kapalı aralığında değerler alır ve bu değer 1'e yaklaştıkça modelin daha iyi sonuçlar vereceğini gösterir (Robert ve Escoufier, 1976).

RV katsayısının özellikleri;

1. $p = q = 1$ ise $RV = r^2$ (basit korelasyon katsayısının karesi)

2. $p=1$ ve $q>1$ ise bazı koşullar altında belirleme katsayısı RV'nin özel durumudur. Yani $RV=R^2$ olacaktır.

3. $0 \le RV \le 1$

4. $RV=0$ ise burada iki değişken kümesi ilişkisizdir (Josse, Pages ve Husson, 2008).

2.8. En İyi Modelin Seçimi

Çok değişkenli regresyon çözümlemesinde, modeli oluşturan açıklayıcı değişkenlerden veya yanıt değişkenlerden bazılarının modele katkısı önemsiz olabilir. Bu nedenle, yanıt değişkeni "en uygun" şekilde açıklayacak açıklayıcı değişkenlerin belirlenmesi ve önemsiz değişkenlerin modelden çıkartılması gerekir. Bu sürece, "değişken seçimi" denir (Alpar, 2003).

Modeldeki değişkenleri seçmek için forward seçim süreci, backward eleme süreci ve stepwise süreci kullanılır. Çok değişkenli çoklu regresyon analizinde açıklayıcı değişkenler X'ler için yapılan seçim yöntemleri yanıt değişkenler Y'ler içinde aynı şekilde geçerlidir.

Forward, Backward ve Stepwise seçim süreçlerinin yanı sıra R^2 çoklu belirleyicilik katsayısı, S_p^2 hata kare ortalaması ve Mallow's C_p kriteri de kullanılarak model seçimi yapılabilmektedir.

2.8.1. Forward (İleri Doğru) Seçim Süreci

Forward seçim süreci, Wilk's Λ temelinde ele alınır. İlk adımda her X_j üzerinde tüm p tane Y yanıt değişkenin regresyonu test edilir**.**

X_j ye ve sabit terime karşılık gelen satırı içerecek şekilde $\hat{\mathrm{B}}$ matrisi iki satırlıdır:

$$\hat{\mathrm{B}}_j = \begin{pmatrix} \hat{b}_{01} & \hat{b}_{02} & \mathbf{L} & \hat{b}_{0p} \\ \hat{b}_{j1} & \hat{b}_{j2} & \mathbf{L} & \hat{b}_{jp} \end{pmatrix}.$$

Değişken seçim sürecinde kullanılacak olan test istatistiği;

$$\Lambda\left(X_j\right)=\frac{\left|Y'Y-\hat{b}_j' X_j'Y\right|}{\left|Y'Y-n\bar{y}\bar{y}'\right|}$$

olarak yazılabilir. Burada $\Lambda\left(X_j\right)$ değeri $\Lambda_{p,1,n-2}$ dağılımına sahiptir. Her j için X_j'nin $\Lambda\left(X_j\right)$ değeri hesaplandıktan sonra minimum $\Lambda\left(X_j\right)$ değerini veren X_j değişkeni seçilir. İlk olarak, diğer değişkenlerin varlığı durumunda her değişken test edilmez; p tane Y değişkenini tek başına en iyi tahmin eden X_j değişkeni araştırılır.

Birinci adımda modele dahil edilen değişken (X_1 değişkeni olsun) için düzeltilen her X için

$$\Lambda\left(X_j / X_1\right)=\frac{\Lambda\left(X_1, X_j\right)}{\Lambda\left(X_1\right)} \tag{2.9}$$

olarak verilen kısmi Λ hesaplanır. Her $X_j \neq X_1$ için $\Lambda\left(X_j, X_1\right)$ hesaplanır ve $\Lambda\left(X_j, X_1\right)$'in minimum değeri seçilir.

İkinci adımda X_2 değişkeni modele dahil edilsin. Üçüncü adımda

$$\Lambda\left(X_j / X_1, X_2\right)=\frac{\Lambda\left(X_1, X_2, X_j\right)}{\Lambda\left(X_1, X_2\right)} \tag{2.10}$$

ifadesini minimum yapan X_j araştırılır. (2.10) eşitliğini minimum yapan değer araştırılır. Diğer değişkenler için tek tek prosedür tekrarlanır.

m tane değişken modele alındıktan sonra kısmi Λ bir sonraki adım için

$$\Lambda\left(X_j / X_1, X_2, \mathbf{K}, X_m\right) = \frac{\Lambda\left(X_1, X_2, \mathbf{K}, X_m, X_j\right)}{\Lambda\left(X_1, X_2, \mathbf{K}, X_m\right)} \tag{2.11}$$

olur. Burada $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_m$ modele alınan ilk m değişkeni ve X_j modele alınabilecek kalan $q-m$ değişken içerisinden aday değişkendir. (2.11)'i minimum yapan X_j modele alınır. (2.11) ile verilen kısmi Wilk's lamda Λ , $\Lambda_{p,1,n-m-1}$ dağılımına sahiptir (Rencher, 2002).

Forward seçim tekniğine modeli en iyi açıklayan değişken ile başlanır. En küçük kısmi Λ değeri önceden belirlenmiş eşik değeri geçene kadar prosedüre devam edilir. Aksi takdirde, forward yöntemi modele değişken eklemeye devam eder (Al-Subaihi, 2002).

Her adımda modele giren değişken kısmi F ile sınanabilir. Tablo 2.1 deki eşitliklerin yardımıyla p ve v_{H} değerlerine göre ve her X_j için hesaplanan Wilk's Lambda değerleriyle F istatistiği hesaplanabilir (Rencher, 2002). Eğer $F_{Hesap} > F_{Tablo}$ ise X_j değişkeni modele dahil edilir.

Tablo 2.1 Wilk's Lambda Değerlerinin F İstatistiği Değerlerine Dönüştürme

Parametreler $\left(p, v_{\mathrm{H}}\right)$	F İstatistiği Değeri	Serbestlik Dereceleri
Herhangi p değeri, $v_{\mathrm{H}} = 1$	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\frac{v_{\mathrm{E}}-p+1}{p}$	$p, v_{\mathrm{E}}-p+1$
Herhangi p değeri, $v_{\mathrm{H}} = 2$	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{v_{\mathrm{E}}-p+1}{p}$	$2p, 2\left(v_{\mathrm{E}}-p+1\right)$
Herhangi v_{H} değeri, $p = 1$	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\frac{v_{\mathrm{H}}}{v_{\mathrm{E}}}$	$v_{\mathrm{H}}, v_{\mathrm{E}}$
Herhangi v_{H} değeri, $p = 2$	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{v_{\mathrm{E}}-1}{v_{\mathrm{H}}}$	$2v_{\mathrm{H}}, 2\left(v_{\mathrm{E}}-1\right)$

Bu dönüşüm serbestlik derecelerinin genel şekline göre aşağıdaki gibi dönüştürülebilir.

$$df_1 = pv_{\mathrm{H}} \quad , \quad df_2 = wt - \frac{1}{2}\left(pv_{\mathrm{H}} - 2\right)$$

$$w = v_{\mathrm{E}} + v_{\mathrm{H}} - \frac{1}{2}\left(p + v_{\mathrm{H}} + 1\right) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{p^2 v_{\mathrm{H}}^2 - 4}{p^2 + v_{\mathrm{H}}^2 - 5}}$$

$$F = \frac{1 - \Lambda^{1/t}}{\Lambda^{1/t}} \frac{df_1}{df_2}$$

2.8.2. Backward (Geriye Doğru) Eleme Süreci

Geriye doğru eleme işlemi, ileriye doğru seçim işleminin tersine, tüm değişkenlerin modelde bulunduğu regresyon denkleminden değişkenlerin tek tek çıkartıldığı seçim yöntemidir. Bu yöntemde, değişkenlerin modele girmesine ilişkin seçim kriterleri yerine, değişkenlerin modelden çıkartılmasına yönelik seçim kriterleri uygulanır.

Backward eleme süreci, modeldeki tüm X ler ile başlar ve kısmi Λ kullanılarak her seferinde biri silinir. İlk adımda, her X_j için kısmi Λ

$$\Lambda\left(X_j / X_1, X_2, \mathbf{K}, X_{j-1}, X_{j+1}, \mathbf{K}, X_q\right) = \frac{\Lambda\left(X_1, \mathbf{K}, X_q\right)}{\Lambda\left(X_1, X_2, \mathbf{K}, X_{j-1}, X_{j+1}, \mathbf{K}, X_q\right)}$$

$\Lambda_{p,1,n-q-1}$ dağılımına sahiptir (Rencher, 2002). En büyük kısmi Λ 'ya sahip değişken modelden atılır. İkinci adımda, kısmi Wilk's Λ geriye kalan her $q-1$ değişken için hesaplanır. Diğerlerinin var olduğu durumda en az öneme sahip değişken elenir. Bu süreç önemli olan en büyük kısmi Λ 'ya varıncaya kadar devam eder. Bir başka deyişle önceden belirlenmiş eşik değerden büyük olmadığında süreç sonlandırılır (Al-Subaihi, 2002).

Tablo 2.1 deki eşitliklerin yardımıyla p ve v_{H} değerlerine göre ve her X_j için hesaplanan Wilk's lamda değerleriyle F istatistiği hesaplanabilir. Denklemdeki

tüm değişkenler için kısmi F değerleri bulunur. F değerlerinden en küçük değere sahip olan değişken önemsiz ise modelden çıkartılır (Koçak, 2006).

2.8.3. Stepwise Süreci (Adımsal Süreç)

Stepwise regresyon, p sayıda belirleyici değişken içinden yanıt değişkeni açıklama niteliğine sahip uygun belirleyici değişkenlerin alt kümesini seçmeyi sağlayan bir yöntemdir. Stepwise regresyon ile k değişken kümesinden $(p-k)<p$ değişkenden oluşan bir model oluşturulur. Stepwise regresyon da değişkenlerin, yanıt değişkeni açıklamaktaki güçlerine göre modele alınması söz konusudur (Özdamar, 1999).

2.9. Y Değişkenlerinin Bir Alt Kümesinin Seçimi

X değişkenleri için Bölüm 2.8.1–2.8.3 deki seçim süreci ile yapılan yöntemler Y değişkenlerinin seçimi içinde aynı şekilde yapılır. Kullanılan bilgisayar programında X değişkenleri yanıt ve Y değişkenleri açıklayıcı değişkenler gibi listelenir (Rencher, 2002).

X değişkenlerinin alt kümesinin bulunmasından sonra bazı Y değişkenler herhangi X değişkenine bağlı değilse modelden silinebilir. Alt kümeler için Wilk's lamda tam ve indirgenmiş modelde Y değişkenleri için hesaplanır. Kısmi Wilk's lamda değerlerine göre Y değişkenlerini ekleyip silebiliriz.

Forward seçim sürecinde Y değişkeninin modele eklenmesinde (2.9), (2.10) ve (2.11) eşitliklerinde verilen kısmi Λ istatistikleri tanımlanır. Örneğin, ilk iki değişken Y_1 ve Y_2 modelde iken hesaplanan Wilk's lamda istatistiği,

$$\Lambda\left(Y_j / Y_1, Y_2\right) = \frac{\Lambda\left(Y_j, Y_1, Y_2\right)}{\Lambda\left(Y_1, Y_2\right)}$$

şeklindedir. Her $Y_j \neq Y_1, Y_2$ için minimum $\Lambda\left(Y_j / Y_1, Y_2\right)$ seçilir. Benzer şekilde Y_1, Y_2 ve Y_3 modelde iken kısmi Wilk's Λ istatistiği

$$\Lambda\left(Y_j / Y_1, Y_2, Y_3\right) = \frac{\Lambda\left(Y_j, Y_1, Y_2, Y_3\right)}{\Lambda\left(Y_1, Y_2, Y_3\right)}$$

şeklinde olup $\Lambda_{1,q,n-q-4}$ dağılımlıdır. q modeldeki X değişkenlerinin sayısı ve 4 modeldeki Y değişkenlerinin sayısını gösterir. $p=1$ iken $\Lambda_{1,q,n-q-4}$ dağılımı $F_{q,n-q-4}$ dağılımına dönüştürülebilir.

Bakcward eleme sürecinde, ilk adımda $\Lambda_{1,q,n-q-p}$ dağılımına sahip

$$\Lambda\left(Y_j / Y_1, Y_2, \mathbf{K}, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \mathbf{K}, Y_p\right) = \frac{\Lambda\left(Y_1, \mathbf{K}, Y_p\right)}{\Lambda\left(Y_1, \mathbf{K}, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \mathbf{K}, Y_p\right)}$$

değerini maksimum yapan Y_j değişkeni modelden atılır.

Stepwise süreci Forward sürecinin değiştirilmiş bir hali olarak tasarlanabilir. Tüm süreç X değişkenlerinin seçim süreçlerine benzer bir şekilde yapılabilmektedir.

2.10. Tüm Olası Alt Kümeler

Tüm olası regresyon yöntemi potansiyel tahmin edicilerin kitlesinin tüm olası alt kümelerinin belirlenmesi olarak adlandırılır. Alt küme seçiminde sıkça kullanılan yöntemlerden biriside mümkün olan tüm altküme denklemlerini incelemektir. Regresyon modeli karşılaştırmak için çeşitli kriterler ile tüm olası regresyon seçim süreci kullanılabilir (Al-Subaihi, 2002), (Koçak, 2006).

R_p^2, S_p^2 ve C_p kriterleri, çoklu regresyondaki tek değişkenli Y değişkenini tahmin için X'in olası alt kümlerini karşılaştırmak için kullanılır, burada $p-1$, $k-1$ tane mevcut bağımsız değişkenlerden seçilen alt kümelerdeki X lerin sayısını

göstermektedir. Bu üç kriter R_p^2 , S_p^2 ve C_p benzer şekilde matris gösterimine genişletilebilir. Bunlar determinant ya da iz kullanılarak skaler forma indirgenebilir (Rencher, 2002).

Değişken sayısı az olduğunda en iyi alt kümeyi bulmak için değişkenlerin tüm olası alt kümeleri incelenir. *k* sayıda değişken olduğunda bu değişkenlerin tüm kombinasyonlarına karşılık gelen $2^k - 1$ tane olası alt küme vardır (Koçak, 2006).

2.10.1. Çoklu Belirleyicilik Katsayısı

R_p^2 ifadesi Y 'nin tek değişkenli durumunda ve $(p-1)$ tane X değişkenine sahip model için çoklu belirleyicilik katsayısı olarak tanımlansın:

$$R_p^2 = \frac{\hat{b}_p^{'} X_p^{'} y - n\bar{y}^2}{y^{'} y - n\bar{y}^2}.$$

R_p^2 'nin çok değişkenli matris gösterimi

$$R_p^2 = \left(Y^{'}Y - n\overline{yy}^{'}\right)^{-1}\left(\hat{\mathrm{B}}_p^{'} X_p^{'} Y - n\overline{yy}^{'}\right)$$

olarak da ifade edilebilir. m , y lerin sayısı ve $p-1$, $k-1$ tane mevcut açıklayıcı değişkenden seçilenlerin sayısı olmak üzere R_p^2 yi skaler forma dönüştürmek için $\frac{tr\left(R_p^2\right)}{m}$ kullanılır (Rencher, 2002). Böylece $0 \le \frac{tr\left(R_p^2\right)}{m} \le 1$ olur. Tek değişkenlide olduğu gibi $\frac{tr\left(R_p^2\right)}{m}$ yi maksimum yapan $p = 2,3,\mathbf{K},k$ belirlenir. Formülde $tr\left(R_p^2\right)$ yerine $\left|R_p^2\right|$ de kullanılabilmektedir (Timm, 2002).

2.10.2. Hata Kareler Ortalaması

Tek değişkenli durumda

$$S_p^2 = HKO_p = \frac{HKT_p}{n-p}$$

olarak tanımlanan hata kareler ortalaması çok değişkenli durum için

$$S_p = \frac{\mathrm{E}_p}{n-p} \tag{2.12}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $E_p = Y'Y - \hat{B}_p^{'} X_p^{'} Y$ dir. Skaler bir değere dönüştürmek için $tr(S_p)$ ya da $|S_p|$ kullanılabilir ve tek değişkenlideki S_p^2 ile aynı amaçlı kullanılır. $tr(S_p)$'nin minimum değerine sahip alt model yada $tr(S_p) < tr(S_k)$ olacak şekildeki en küçük p değerine sahip alt model seçilir. Benzer bir uygulama $|S_p|$ için de yapılabilir (Rencher, 2002).

2.10.3. C_p Kriteri

Model seçimi için Mallow's kriteri çoklu regresyon modeli için

$$\Gamma_p = s^{-2}\mathrm{E}\left(\hat{Y}_p - Xb\right)^{'} \mathrm{E}\left(\hat{Y}_p - Xb\right) + p$$

olarak önerilir (Mallows, 1973). X_p, p tane değişkenin seçilmiş olduğu matris, $\hat{Y}_p = X_p \hat{b}_P$ ve $\hat{b}_P$ ifadesi b_p'nin en küçük kareler tahmin edicisi olsun.

$YKT = \mathrm{E}\left(\hat{Y}_p - Xb\right)' \mathrm{E}\left(\hat{Y}_p - Xb\right)$ tanımlanırsa $\Gamma_p = s^{-2} YKT + p$ yazılabilir. Γ_p, (p) model derecesi ve YKT modelin yanlılığı arasındaki ilişkinin ölçüsüdür. Genellikle, p küçük ise YKT büyüktür. Bundan dolayı en iyi model için tek bir minimum Γ_p seçilir (Baek ve ark., 2005).

Γ_p bilinmiyorken Mallow's (1973) aşağıdaki tahmini önerir,

$$C_p = \hat{s}^{-2} HKT_p - (n - 2p) \tag{2.13}$$

$$HKT_p = \left(Y - X_p \hat{b}_p\right)' \left(Y - X_p \hat{b}_p\right),\ \hat{s}^2 = HKT / (n-k)$$

$HKT = \left(Y - X\hat{b}\right)' \left(Y - X\hat{b}\right)$ ve $\hat{b}$, b 'nın en küçük kareler tahmin edicisidir. p tane değişkenin bulunduğu regresyon model veriyi yeterince açıklıyorsa, yanlılık önemsiz olur, yani $YKT \cong 0$ dır. Bu durumda $HKT_p / (n-p)$ ve $\hat{s}^2$ tahmini birbirine yakın değerler aldığında s^2 tahmini için her iki ifade de aynı değere sahip olur (Baek ve ark., 2005). Bundan dolayı;

$$C_p = \hat{s}^{-2} HKT_p - (n - 2p) \cong p$$

olur. Burada, $\mathrm{A} = X_p \left(X_p' X_p\right)^{-1} X_p'$, $\mathrm{E}\left(HKT_p\right) = n s^2 + b' X' X b - \mathrm{E}\left(Y' A Y\right)$ ve

$\mathrm{E}\left(Y' A Y\right) = b' X' \mathrm{A} X b + tr\left[\mathrm{AE}\left(ee'\right)\right] = b' X' \mathrm{A} X b + s^2 p$

dir. Dolayısıyla , $\mathrm{E}\left(HKT_p\right) = (n-p) s^2 + b' X' \left(I_n - A\right) X b = (n-p) s^2 + YKT$ ve $C_p \cong s^{-2} \mathrm{E}\left(HKT_p\right) - (n - 2p) = s^{-2} YKT + p = \Gamma_p$ olur. Bu durumda, değişkenlerin en iyi kümesinin seçimi C_p 'nin en küçük değerlerinin ortaya çıktığı tespit edilen bu kümeleri içerir ve (2.12) eşitliği ışığında, C_p değerleri seçimi p'ye yakındır. Diğer taraftan, $p = k$ ise $HKT_p = (n-k)\hat{s}^2$ ve $C_p = k$ dır (Baek ve ark., 2005).

Yukarıdaki belirtilen tanımlamaların ışığında C_p kriterinin çok değişkenli çoklu regresyon analizindeki değeri $|C_p| = |E_k^{-1} E_p|$ eşitliğinden bulanabilir. Açıklayıcı değişkenlerden $p-1$ tanesi alt modelde olmak üzere alt model $Y = X_p B_p + \mathrm{E}$ olarak ifade edilebilir. Bu model yardımıyla yanıt değişkenler $\hat{Y} = X_p \hat{B}_p$ olarak tahmin edilir. Gözlem vektörlerinin tahmin edilmiş değerleri ile ilgilenildiğinden $\hat{Y}$ nın satırları olarak verilen $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \mathbf{K}, \hat{y}_n$ ile ilgilenilir:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1' \\ \hat{y}_2' \\ \mathrm{M} \\ \hat{y}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p1}' \\ x_{p2}' \\ \mathrm{M} \\ x_{pn}' \end{pmatrix} \hat{B}_p = \begin{pmatrix} x_{p1}' \hat{B}_p \\ x_{p2}' \hat{B}_p \\ \mathrm{M} \\ x_{pn}' \hat{B}_p \end{pmatrix}.$$

Genel olarak doğru modelde $\hat{y}_i$ tahmin edilmiş vektörler $E(y_i)$ nin yanlı tahmin edicileridir. Bu durumda

$$\begin{aligned} E\left[\left(\hat{y}_i - E(y_i)\right)\left(\hat{y}_i - E(y_i)\right)'\right] &= E\left[\left(\hat{y}_i - E(\hat{y}_i) + E(\hat{y}_i) - E(y_i)\right)\left(\hat{y}_i - E(\hat{y}_i) + E(\hat{y}_i) - E(y_i)\right)'\right] \\ &= E\left[\left(\hat{y}_i - E(\hat{y}_i)\right)\left(\hat{y}_i - E(\hat{y}_i)\right)' + \left(E(\hat{y}_i) - E(y_i)\right)\left(E(\hat{y}_i) - E(y_i)\right)'\right] \\ &= Cov(\hat{y}_i) + [Bias(\hat{y}_i)][Bias(\hat{y}_i)]' \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklindedir. Bu formüldeki $Cov(\hat{y}_i')$, $\hat{B} = \left(\hat{b}_{(1)} \quad \hat{b}_{(2)} \quad \mathbf{K} \quad \hat{b}_{(m)}\right)$ olmak üzere

$$Cov\left(\hat{y}_i'\right) = Cov\left(x_{pi}' \hat{b}_p\right) = Cov\left(x_{pi}' \hat{b}_{p(1)}, x_{pi}' \hat{b}_{p(2)}, \mathbf{K}, x_{pi}' \hat{b}_{p(m)}\right)$$

olarak yazılır. Burada m, yanıt değişkenlerin sayısıdır. $Cov(y_i) = \Sigma$ olduğundan

$$Cov\left(\hat{y}_i^{'}\right)=\begin{pmatrix} s_{11}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi} & \mathbf{L} & s_{1m}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi} \\ \mathbb{M} & \mathbf{O} & \mathbb{M} \\ s_{m1}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi} & \mathbf{L} & s_{mm}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi} \end{pmatrix}$$
$$=\left(x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi}\right)\Sigma$$

dir. *n* gözlemin üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{i=1}^{n}Cov\left(\hat{y}_i^{'}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_p\right)^{-1}x_{pi}\Sigma$$
$$=\Sigma\sum_{i=1}^{n}x_{pi}^{'}\left(X_p^{'}X_P\right)^{-1}x_{pi}=p\Sigma$$

olur.

Yanlılığın toplamı ise S_p (2.12) de tanımlanmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}[Bias(\hat{y}_i)][Bias(\hat{y}_i)]'=(n-p)E\left(S_p-\Sigma\right)$$

olarak yazılabilir. (2.14) eşitliği Σ^{-1} ile çarpılıp tüm gözlemler üzerinden toplamı alınırsa

$$\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(\hat{y}_i-E\left(y_i\right)\right)\left(\hat{y}_i-E\left(y_i\right)\right)^{'}\right]=\Sigma^{-1}\left[tr\left(p\Sigma+(n-p)E\left(S_p-\Sigma\right)\right)\right]$$
$$=pI+(n-p)\Sigma^{-1}E\left(S_p-\Sigma\right)$$

elde edilir. $E_k=Y^{'}Y-\hat{\mathrm{B}}_k^{'}X_k^{'}Y$ olmak üzere tüm $k-1$ değişkene dayalı örneklem kovaryans matrisi $E_k=(n-k)S_k$ olup S_k, Σ'nın bir tahmini

$$C_p = pI + (n-p)S_k^{-1}(S_p - S_k)$$
$$= S_k^{-1}E_p + (2p-n)I$$

olarak elde edilir. Bu ise Rencher'in (2002) belirttiği gibi Mallows'un (1973) önerdiği formdadır. Bir skaler değere dönüştürmek için $tr(C_p)$ veya $|C_p|$ kullanılır. Fakat $2p-n$ negatif ise $|C_p|$ de negatif olabilir ve Sparks, Coutsourides ve Troskie (1983) $|C_p|$ nin bir uyarlaması olarak $E_p = Y'Y - \hat{B}'_p X'_p Y$ olmak üzere her zaman pozitif olan $|C_p| = |E_k^{-1}E_p|$ 'yi önermişlerdir.

Tüm $2^k - 1$ olası alt kümeler için C_p değerleri hesaplanır. En küçük C_p değerini veren alt modeller en iyi alt model olarak alınır (Koçak, 2006).

3. KANONİK KORELASYON ANALİZİ

3.1. Kanonik Korelasyon Analizine Giriş

Kanonik korelasyon analizi, her birinde iki yada daha fazla değişken bulunan, iki değişken kümesi arasındaki ilişki yapısının irdelenmesinde kullanılan çok değişkenli analiz tekniğidir. Bu analiz diğer bir çok çok değişkenli istatistiksel analiz tekniklerinin özelliklerini taşır ve genellikle çok değişkenli regresyon analizinin tamamlayıcısıdır. İşlem aşamalarının uzun oluşu, gerekli hesaplamalardaki ve elde edilen sonuçların yorumlanmasındaki güçlüklerden dolayı, araştırıcılar kanonik korelasyon analizini kullanmayı pek fazla tercih etmeyip, bunun yerine daha basit yöntemleri kullanmaktadır. Ancak, iki değişken kümesi arasındaki ilişki yapısını bozmadan ortaya koyabilme ve basit yöntemlere göre daha fazla bilgi edinebilme bakımından bu analiz tekniğinin önemi göz ardı edilemez. Analizde, her iki değişken kümesi içinde kümelerde yer alan değişkenlerin kombinasyonlarından yeni değişkenler elde edilir ve bu yeni değişkenler arasındaki korelasyonun maksimum olması amaçlanmaktadır (Keskin ve ark., 2005).

Kanonik korelasyon analizi, bir kümedeki değişkenlerin lineer kombinasyonları ve diğer kümedeki değişkenlerin lineer kombinasyonları arasındaki korelasyon üzerinde odaklanır. İlk olarak; en büyük korelasyona sahip lineer kombinasyon çifti belirlenir. Sonra başlangıçta seçilen çift ile tüm korelasyonsuz çiftler arasında en büyük korelasyona sahip lineer kombinasyon çifti belirlenir ve buna benzer şekilde devam eder. Lineer kombinasyon çiftleri kanonik değişken olarak ve kanonik değişkenlerin korelasyonları kanonik korelasyon olarak adlandırılır (Johnson ve Wichern, 2002).

3.2. Kanonik Korelasyon Analinin Amacı

Kanonik korelasyon analizinin amaçları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Aynı bireyden elde edilen iki değişkenler kümesinin birbirinden bağımsız olup olmadığının test edilmesi

2. Kümeler arası korelasyona en fazla katkıda bulunan her iki kümedeki değişkenlerin saptanması
3. Yanıt değişken ve açıklayıcı değişkenlere ait kümeler arasındaki korelasyonu maksimum yapan lineer kombinasyonların belirlenmesi

3.3. Kanonik Değişkenler Ve Kanonik Korelasyonlar

Aynı örnekleme birimi üzerinde ölçülmüş $X' = \left[X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q \right]$ ve $Y' = \left[Y_1, Y_2, \mathbf{K}, Y_p \right]$ $(q \le p)$ değişken kümelerinin olduğu varsayılsın. Bu iki değişken kümesinin doğrusal kombinasyonları arasındaki korelasyon hesaplanır. Bu şekilde hesaplanan korelasyonlara kanonik korelasyon, değişkenlerin doğrusal kombinasyonlarından oluşan yeni değişkenlere de kanonik değişkenler adı verilir (Keskin ve ark., 2005). Bu hesaplanan kanonik korelasyonların içerisinde en büyük korelasyona ilk kanonik korelasyon adı verilir. Maksimum korelasyonun hesaplandığı değişken kümesinin doğrusal kombinasyonuna ise ilk kanonik değişken adı verilir (Çankaya, 2005).

Y değişken kümesi $(p \times 1)$ boyutlu m_Y ortalama vektörüne, X değişken kümesi $(q \times 1)$ boyutlu m_X ortalama vektörüne sahip olsun. Bu değişken kümelerine ait ortalama ve kovaryans matrisleri

$$m = \begin{bmatrix} m_Y \\ m_X \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YX} \\ \Sigma_{XY} & \Sigma_{XX} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. $Y; X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ arasındaki örneklem kovaryansları ve korelasyonları

$$S = \begin{pmatrix} s_y^2 & s_{yx}' \\ s_{yx} & s_{xx} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{yx}' \\ r_{yx} & R_{xx} \end{pmatrix}$$

matrisleri ile özetlenebilir. S veya R parçalanmış matrisleri yardımıyla X ve Y arasındaki karesel çoklu korelasyon $R^2 = \frac{s_{yx}^{'} S_{xx}^{-1} s_{xy}}{s_y^2} = r_{yx}{}' R_{xx}^{-1} r_{yx}$ şeklinde hesaplanabilir. Çoklu korelasyon R , X 'lerin bir lineer kombinasyonu ve y arasındaki maksimum korelasyon olarak da yani $R = \max_a r_{y,a'x}$ olarak da tanımlanabilir.

Birden fazla Y ve birden fazla X olması durumu ele alınırsa, Bölüm 2.7 de verilen $S = \begin{pmatrix} S_{yy} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{xx} \end{pmatrix}$ parçalanışı incelenebilir. X ve Y arasındaki ilişki çok değişkenli çoklu regresyon analizinde $R_M^2 = \frac{\left| S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy} \right|}{\left| S_{yy} \right|}$ değeri ile ölçülmüştü. R_M^2 değeri

$$R_M^2 = \left| S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy} \right| = \prod_{i=1}^{s} r_i^2$$

olarak yazılabilir. Burada $s = \min(p,q)$ ve $r_1^2, r_2^2, \mathbf{K}, r_s^2$ değerleri $S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$ matrisinin özdeğerleridir. r_i^2 değerleri 0–1 arasında değerler aldığından aradaki ilişkiyi değerlendirmek için iyi bir ölçü olmayacaktır. Fakat bu özdeğerler tek başlarına aradaki ilişkinin iyi bir ölçüsü olacaktır. $r_1^2, r_2^2, \mathbf{K}, r_s^2$ 'lerin kare köklerine kanonik korelasyon denir (Rencher, 2002).

X değişkenlerinin lineer kombinasyonu $U = a^{'} X$ ve Y değişkenlerinin lineer kombinasyonu $V = b^{'} Y$ arasındaki korelasyon $r_1 = \max_{a,b} r_{a_i^{'} x, b_i^{'} y}$ olmak üzere r_1^2 en büyük korelasyonun karesidir. En büyük korelasyonu veren katsayı vektörleri a_1 ve b_1 olarak gösterilsin. Bu durumda r_1 , $U_1 = a_1^{'} X$ ve $V_1 = b_1^{'} Y$ arasındaki korelasyon olup, a_1 ve b_1 katsayı vektörleri özvektörler olarak bulunur. U_1 ve V_1 lineer

fonksiyonlarına birinci kanonik değişkenler denir (Rencher, 2002). Diğer $r_2, r_3, \mathbf{K}, r_s$ özdeğerlerine karşılık gelen kanonik değişkenler $U_i = a_i^{'} X$ ve $V_i = b_i^{'} Y$ şeklindedir.

$S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$ matrisi $\mathrm{A} = S_{yy}^{-1} S_{yx}$ ve $\mathrm{B} = S_{xx}^{-1} S_{xy}$ olmak üzere AB olarak yazılabilir. AB ve BA matrisleri kare matrisler oldukları sürece AB ve BA nın sıfırdan farklı özdeğerleri aynıdır fakat özvektörleri aynı değildir. Bu durumda $r_1^2, r_2^2, \mathbf{K}, r_s^2$ özdeğerleri $AB = S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$ ve $BA = S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$ den bulunabilir. Yani özdeğerler

$$\left| S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy} - r^2 I \right| = 0$$
$$\left| S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} - r^2 I \right| = 0$$

karakteristik denklemlerinden elde edilebilir. $U_i = a_i^{'} X$ ve $V_i = b_i^{'} Y$ kanonik değişkenlerindeki a_i ve b_i katsayı vektörleri aynı iki matrisin özvektörleridir:

$$\begin{aligned} \left(S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy} - r^2 I \right) a = 0 \\ \left(S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} - r^2 I \right) b = 0 \end{aligned} . \qquad (3.1)$$

$S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$ ve $S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$ matrisleri aynı sıfır olmayan öz değerlere fakat farklı özvektörlere sahiptirler. $S_{yy}^{-1} S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$ matrisi $p \times p$ ve $S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$ matrisi $q \times q$ boyutludur. Dolayısıyla a_i , $p \times 1$ ve b_i , $q \times 1$ boyutludur. $p < q$ iken $S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$ 'nin rankı p dur. Bu durumda p tane özdeğer sıfırdan farklıdır. Genelde $U_i = a_i^{'} X$ ve $V_i = b_i^{'} Y$ kanonik değişken çiftlerine karşılık gelen $s = \min(p, q)$ tane r_i^2 karesel kanonik korelasyon değerleri vardır. s tane kanonik korelasyon çiftine karşılık gelen kanonik korelasyonlar

$r_1 \quad U_1 = a_1' X \qquad V_1 = b_1' Y$

$r_2 \quad U_2 = a_2' X \qquad V_2 = b_2' Y$

M

$r_s \quad U_s = a_s' X \qquad V_s = b_s' Y$

şeklinde gösterilebilir. Burada $r_i \ (i = 1,2,\mathbf{K},s)$ U_i ve V_i arasındaki örneklem korelasyonu $r_i = r_{U_i,V_i}$ dir.

X ve Y matrisindeki veriler standartlaştırıldıktan sonra; U ve V kanonik değişken çiftleri arasındaki kanonik korelasyonlar birbirinden bağımsız olacak şekilde hesaplanır. Kanonik korelasyon analizinin yapılabilmesi için veri kümesinde bazı varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bu varsayımlar; değişkenler çok değişkenli normal dağılıma sahip olmalıdır (Keskin ve ark., 2005).

U ve V kanonik değişkenlerinin varyans ve kovaryansları aşağıdaki gibi olup birim varyansa sahiptirler (Timm, 2002):

$$Var(U) = a' S_{xx} a = 1$$
$$Var(V) = b' S_{yy} b = 1$$
$$Cov(U,V) = a' S_{xy} b$$

U ve V kanonik değişkenleri arasındaki korelasyon

$$r(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{a' S_{xy} b}{\sqrt{a' S_{xx} a b' S_{yy} b}}$$

şeklinde hesaplanır. U ve V kanonik değişkenleri arasındaki korelasyonu en büyük yapmak için a ve b katsayılarının en büyük olduğu korelasyon katsayısını bulmak gerekir. U ve V vektörlerinde yer alan ve birim varyansa sahip olan kanonik değişken çifti (U_i, V_i) ($i = 1,2,.....,k$) korelasyonu en büyük yapan değerlerdir (Saraçlı, 2006):

$$\max_{a,b} Corr(U,V) = r_1. \tag{3.2}$$

Burada (3.2) ifadesini en büyük yapmak gerekir. Bundan dolayı katsayıların maksimizasyon problemini çözmek için l_1 ve l_2, Lagrange çarpanları olmak üzere Lagrange fonksiyonu

$$L = a' S_{xy} b - \frac{1}{2} l_1 \left(a' S_{xx} a - 1\right) - \frac{1}{2} l_2 \left(b' S_{yy} b - 1\right)$$

şeklinde yazılabilir (Anderson, 1958). Lagrange fonksiyonunun l_1, l_2, a ve b 'ye göre kısmi türev alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial L}{\partial a} = S_{xy} b - l_1 S_{xx} a = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = S_{yx} a - l_2 S_{yy} b = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_1} = a' S_{xx} a - 1 = 0$$

$$a' S_{xx} a = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_2} = b' S_{yy} b - 1 = 0$$

$$b' S_{yy} b = 1$$

eşitlikleri elde edilir. (3.3) eşitliği soldan a' ve (3.4) eşitliği soldan b' ile çarpılırsa iki eşitlik aşağıdaki gibi olur:

$$a' S_{xy} b - l_1 \left(a' S_{xx} a\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$b' S_{yx} a - l_2 \left(b' S_{yy} b\right) = 0 \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6) eşitliğinden faydalanılarak

$$l_1 = a' S_{xy} b \qquad l_2 = b' S_{yx} a$$

eşitlikleri elde edilebilir. Buradan da $a' S_{xy} b = l_1 = l_2 = r$ eşitliği bulunabilir.

(3.3) ve (3.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} S_{xy} b - l_1 S_{xx} a = 0 \\ S_{yx} a - l_2 S_{yy} b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{bmatrix} -r S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & -r S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

yazılabilir (Anderson, 1958). Buradan

$$\begin{aligned} \left| r^2 S_{xx} S_{yy} - S_{xy} S_{yx} \right| &= 0 \\ \left| r^2 S_{xx} - S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} \right| &= 0 \\ \left| S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} - r^2 S_{xx} \right| &= 0 \\ \left| S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} - r^2 \right| &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve denklemin çözülmesi ile $r_1 = l_1$, $r_2 = l_2$ öz değerleri bulunur.

3.4. Kanonik Korelasyon Katsayılarının Önem Testi

Kanonik korelasyon analizi, boyut indirgeme için de kullanılabileceğinden; orjinal değişken kümeleri arasındaki korelasyonun, elde edilen yeni değişken çiftlerinden kaç tanesi ile büyük ölçüde açıklanabileceğinin, diğer bir ifade ile *p* adet kanonik korelasyondan kaç tanesinin istatistiksel olarak önemli olduğunun belirlenmesi gerekir. Bunun için birkaç test yöntemi geliştirilmiştir. En yaygın olarak kullanılan Wilk's lamda yada Barlett test istatistiğidir (Keskin ve ark., 2005).

Hipotezi;

$$H_0 : r_1 = r_2 = ... = r_p = 0$$
$$H_1 : r_i \neq 0, \ \exists \ i \ için$$

olarak yazılabilir. H_0 hipotezi altında tüm X 'ler ve tüm Y 'ler ilişkisizdir. H_0 hipotezi tüm kanonik korelasyonlar $r_1, r_2, \mathbf{K}, r_s$ nin önemsiz olduğu durumuna denktir. Ayrıca H_0 hipotezi Bölüm 2.6 daki genel regresyon hipotezine eşdeğerdir. Genel regresyonda $H_0 : B_1 = 0$ hipotezi tüm X 'leri ve tüm Y 'leri ilişkilendirir (eşitlik 2.6 Wilk's lamda). Tüm kanonik korelasyonların ($r_1, r_2, \mathbf{K}, r_s$) önemliliği

$$\Lambda_1 = \frac{|S|}{|S_{xx}||S_{yy}|} = \frac{|R|}{|R_{yy}||R_{xx}|}$$

ile teste edilir. $\Lambda_1 \leq \Lambda_{a,p,q,n-q-1}$ ise H_0 red edilir. Λ_1, $\Lambda_1 = \prod_{i=1}^{s}\left(1 - r_i^2\right)$ olarak da yazılabilir. Bu eşitlik gösteriyor ki bir veya daha fazla r_i^2 çok büyük iken Λ_1 küçülecektir. Sonraki işlemlerde Λ_2 için r_2, Λ_3 için r_3 devam edilirse, Λ_i için r_i önem testi için kullanılacaktır.

Alternatif olarak c^2 yaklaşımı da kullanılır ve r_1 için

$$c^2 = -\left[n - \frac{1}{2}(p + q + 3)\right] \ln \Lambda_1$$

olarak verilir ve pq serbestlik dereceli c^2 dağılımına sahip olup, $c^2 \geq c_a^2$ ise H_0 hipotezi red edilir. H_0 hipotezinin red edilmesi durumunda en büyük olan kanonik korelasyon katsayısı hipotezden çıkarılarak işlemleri H_0 hipotezi red edilmeyinceye kadar tekrarlanır. İşlem sırasında çıkarılan her kanonik korelasyon için değişken sayıları 1 eksiltilerek serbestlik derecesi hesaplanır (Çankaya, 2005). Birinci kanonik

korelasyon çıkarıldıktan sonra hesaplanan test istatistiği $(p-1)(q-1)$ serbestlik derecelidir (Cooley ve Lohnes, 1971).

c^2 test istatistiğine alternatif olarak F yaklaşım da kullanılmaktadır. $s=\min(p,q)$, $df_1=pq$, $df_2=wt-\frac{1}{2}pq+1$, $w=n-\frac{1}{2}(p+q+3)$, $t=\sqrt{\frac{p^2q^2-4}{p^2+q^2-5}}$ olmak üzere

$$F=\frac{1-\Lambda_1^{1/t}}{\Lambda_1^{1/t}}\frac{df_1}{df_2}$$

yaklaşımı kullanılabilir. $F>F_a$ ise H_0 red edilir.

Tüm s kanonik korelasyon üzerindeki Λ_1 ile verilen test red edilirse birinci kanonik korelasyon dışındakilerin önemliliğinden emin olunmaz. Λ_1 den r_1 atılarak $r_2,\mathbf{K},r_s$ 'nin önem testi için

$$\Lambda_2=\prod_{i=2}^{s}\left(1-r_i^2\right)$$

hesaplanır. $\Lambda_2\le\Lambda_a$ ise H_0 hipotezi red edilir. En azından r_2 sıfırdan önemli derecede farklı olacaktır. Bu şekilde devam edilerek her r_i test edilir. $k-ıncı$ adımda test istatistiği

$$\Lambda_k=\prod_{i=k}^{s}\left(1-r_i^2\right)$$

olarak yazılır. Burada Λ_k , $\Lambda_{p-k+1,q-k+1,n-k-q}$ dağılımına sahiptir ve $r_k,r_{k+1},\mathbf{K},r_s$ için önem testi yapılır. Hipotez red edilmeyene kadar devam edilir.

Genel c^2 ve F yaklaşımları Λ_k için de uygulayabilir. c^2 yaklaşımı

$$c^2 = -\left[n - \frac{1}{2}(p+q+3) \right] \ln \Lambda_k$$

olarak yazılır ve c^2, $(p-k+1)(q-k+1)$ serbestlik derecesine sahiptir. F yaklaşımı ise $df_1 = (p-k+1)(q-k+1)$, $df_2 = wt - \frac{1}{2}[(p-k+1)(q-k+1)]+1$, $w = n - \frac{1}{2}(p-q+3)$ ve $t = \sqrt{\frac{(p-k+1)^2(q-k+1)^2 - 4}{(p-k+1)^2 + (q-k+1)^2 - 5}}$ olmak üzere

$$F = \frac{1-\Lambda_k^{1/t}}{\Lambda_k^{1/t}} \frac{df_2}{df_1}$$

ile verilir.

4. TEMEL BİLEŞEN ANALİZİ

Temel bileşenler analizinin tekniği ilk defa Karl Pearson (1901) tarafından tanımlanmıştır. Temel bileşen analizinde, değişkenlerin lineer kombinasyonlarının maksimum varyansı aranır.

Regresyonda, yanıt değişken(leri) en iyi açıklayan açıklayıcı değişkenlerin lineer kombinasyonu ile ilgilenilir. Kanonik korelasyonda, değişkenlerin herhangi bir alt kümesinin lineer kombinasyonu ile maksimum ilişkili, değişkenlerin bir alt kümesinin lineer kombinasyonları araştırılır (Rencher, 2002). Temel bileşenler analizi ise regresyon ve kanonik korelasyon analizlerinde olduğu gibi değişkenleri iki gruba ayırmaz, bir veri grubuna uygulanan yöntemdir.

Temel bileşenler analizi değişkenlerin lineer kombinasyonları yardımıyla değişken kümesinin varyans–kovaryans yapısını açıklamakla ilgilenir. $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_q$ gibi q tane açıklayıcı değişkenlerin lineer kombinasyonlarıyla ilgilenilsin. Varyans-kovaryans matrisi Σ ve $l_1 \geq l_2 \geq \mathbf{K} \geq l_q \geq 0$ bu matrisinin özdeğerleri ise lineer kombinasyonlar

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1^{'} X = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \mathbf{K}\, a_{1q}X_q \\ Y_2 &= a_2^{'} X = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \mathbf{K}\, a_{2q}X_q \\ \mathbf{M} \quad & \quad \mathbf{M} \qquad\qquad \mathbf{M} \\ Y_q &= a_q^{'} X = a_{q1}X_1 + a_{q2}X_2 + \mathbf{K}\, a_{qq}X_q \end{aligned} \tag{4.1}$$

olarak yazılır. a_i , $i = 1, \mathbf{K}, q$ 'ler özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. a_{ij} $j = 1, \mathbf{K}, q$ elemanlarına sahip a_i, $i = 1, \mathbf{K}, q$ özvektörleri

$$a_i' a_i = a_{i1}^2 + \mathbf{K} + a_{iq}^2 = 1 \tag{4.2}$$

kısıtlarına yani

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \mathbf{K} + a_{1q}^2 = 1$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + \mathbf{K} + a_{2q}^2 = 1$$
$$\mathbf{M}$$
$$a_{q1}^2 + a_{q2}^2 + \mathbf{K} + a_{qq}^2 = 1$$

kısıtlarına sahiptirler.

(4.2) de verilen Y_1 birinci temel bileşen olup maksimum varyansa sahip lineer kombinasyondur. $Var(Y_1) = a_1' \Sigma a_1$ maksimum olup, $a_1' a_1 = 1$ kısıtı altında $Var(Y_1) = a_1' \Sigma a_1 = l_1$ olarak bulunur. Y_2 ikinci temel bileşen olup ikinci büyük varyansa sahip lineer kombinasyondur. $Var(Y_2) = a_2' \Sigma a_2$ olup $a_2' a_2 = 1$ kısıtı altında $Var(Y_2) = a_2' \Sigma a_2 = l_2$ olacaktır ve bu durum diğer değişkenler için varyansların büyüklüğüne göre yazılabilir. Genel olarak düşünüldüğünde; Σ varyans-kovaryans matrisi $(l_1, a_1), (l_2, a_2), \mathbf{K}, (l_q, a_q)$ özdeğer–özvektör çiftlerine sahip ve temel bileşenleri genel olarak

$$Y_i = a_i' X = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \mathbf{K} + a_{iq} X_q$$

şeklinde olup, $Var(Y_i) = a_i' \Sigma a_i = l_i$, $Cov(Y_i, Y_k) = a_i' \Sigma a_k = 0$ olarak tanımlanabilir.

s_{ii}^2, X_i'nin varyansı ve l_i, Y_i'nin varyansı olmak üzere temel bileşenlerin varyansının toplamı orjinal değişkenlerin varyansının toplamına eşittir. Yani, X_j $j = 1, \mathbf{K}, q$ lerin varyanslarının toplamı özdeğerlerin toplamına eşittir:

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + \mathbf{K} + s_{qq}^2 = l_1 + l_2 + \mathbf{K} + l_q$$

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ TEKNİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Lipovetsky, Tishler ve Conklin (2002), iki veri kümesi arasındaki bağlantının tahmini için çok değişkenli EKK yöntemini incelenmiş ve büyük veri kümeslerini analiz etmek için kullanılan diğer çok değişkenli tekniklerle ilişkisinin nasıl olduğunu göstermiştir. Bu bölümde EKK metodunun kanonik korelasyon ve temel bileşenler analizlerine eşit veya benzer olduğu gösterilecektir.

5.1. Ekk İle Kanonik Korelasyon Analizi Arasındaki İlişki

İki veri kümesi olarak $X:(n\times q)$ ve $Y:(n\times p)$ ele alınsın. Sırasıyla q ve p, X ve Y kümelerindeki değişken sayısı ve n gözlem sayısıdır. Tüm değişkenler merkezileştirilsin ve standart sapmaları ile normalleştirilsin, $a:(q\times 1)$ ve $b:(p\times 1)$ bilinmeyen parametrelerin vektörleri olmak üzere

$$U = Xa \quad , \quad V = Yb \tag{5.1}$$

skorları tanımlansın. Bu durumda $U:(n\times 1)$ ve $V:(n\times 1)$ tipinde vektörler olup karşılık gelen değişkenlerin ağırlıklı ortalamaları olarak yorumlanabilir. (5.1) yardımıyla X ve Y arasındaki ilişki belirlenmek istensin yani (5.1) deki skorlar benzer ise X ve Y yakından ilişkili olacaktır. Bu benzerlik skorlar arasındaki fark

$$e = U - V \tag{5.2}$$

ile tanımlanır. İki küme arasındaki uzaklığın ölçümü (5.2)'deki vektörün normunun karesi olarak tanımlanabilir. Bu ise ekk amacına benzeyecektir. $X'X = S_{xx}$, $Y'Y = S_{yy}$, $X'Y = S_{xy}$, $Y'X = S_{yx}$ varyans-kovaryans matrisleri olmak üzere

$$\begin{aligned} EKK = \|e\|^2 &= (U-V)'(U-V) \\ &= (a'X' - b'Y')(Xa - Yb) \\ &= a'S_{xx}a - 2a'S_{xy}b + b'S_{yy}b \end{aligned} \tag{5.3}$$

tanımlansın. (5.3)'ü minimum yapan a ve b vektörleri araştırılır. Ancak (5.3) a ve b 'nin homojen fonksiyonu olduğundan dolayı, bilinmeyen parametrelerin belirlenebilmesi için bazı normallik koşullarına ihtiyaç duyulur. (5.3)'un uygun analizi için

$$U'U = 1 \quad , \quad V'V = 1 \tag{5.4a}$$

normallik koşulları yada diğer bir gösterimle

$$a'S_{xx}a = 1 \ , \ b'S_{yy}b = 1 \tag{5.4b}$$

koşulları tanımlansın. (5.3) ve (5.4) kullanılarak Lagrange fonksiyonu,

$$L = EKK - g\left(a'S_{xx}a - 1\right) - j\left(b'S_{xx}b - 1\right) \tag{5.5}$$

şeklinde gösterilir. Burada g ve j Lagrange çarpanlarıdır. Daha sonra (5.5) eşitliğinin a ve b 'ye göre türevleri alınıp denklem sıfıra eşitlenirse, denklem sistemi

$$S_{xy}b = l\,S_{xx}a \ , \ S_{yx}a = h\,S_{yy}b \tag{5.6}$$

olur. Burada $l = 1 - g$ ve $h = 1 - j$ şeklindedir.

(5.6) eşitliğinde birinci denklemi a' ve ikinci denklemi b' ile çarparak ve (5.4) denklemi kullanımıyla $l = h = a'S_{xy}b$ elde edilir. (5.6) eşitliğinin birinci denklemi a için çözülür ve ikinci denklemde yazılırsa ve benzer şekilde (5.6) eşitliğinin ikinci denklemi b için çözülür ve birinci denklemde yazılırsa

$$\begin{aligned} S_{xy}b &= l\,S_{xx}a & S_{yx}a &= h\,S_{yy}b \\ S_{xx}^{-1}S_{xy}b &= l\,a & S_{yy}^{-1}S_{yx}a &= hb \\ S_{xx}^{-1}S_{xy}hb &= h\,l\,a & S_{yy}^{-1}S_{yx}\,l\,a &= l\,hb \\ \left(S_{xx}^{-1}S_{xy}S_{yy}^{-1}S_{yx}\right)a &= l^{2}a & \left(S_{yy}^{-1}S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}\right)b &= h^{2}b \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.7) ile verilen eşitlikler kanonik korelasyon analizinin (3.1) eşitlikleri ile benzerdir (Lipovetsky, Tishler ve Conklin, 2002).

Kanonik korelasyon analizi iki veri kümesi arasındaki ilişkinin ölçümü olarak kullanılmakta olup kanonik korelasyon

$$r = \frac{Cov(U,V)}{\left[Var(U)Var(V)\right]^{1/2}} = \frac{U'V}{\left[\left(U'U\right)\left(V'V\right)\right]^{1/2}} = \frac{a'S_{xx}b}{\left[\left(a'S_{xx}a\right)\left(b'S_{yy}b\right)\right]^{1/2}} \tag{5.8}$$

olarak tanımlandığı (3.1) de belirtilmişti. Kanonik korelasyon analizi (5.8) ile verilen korelasyonu maksimum yapan a ve b vektörlerinin tahmini ile ilgilenir (eşitlik 3.2 de belirtildiği gibi). (5.8)'i maksimum yapan a ve b parametreleri için

$$L = U'V - \frac{l}{2}\left(U'U-1\right) - \frac{h}{2}\left(V'V-1\right) = a'S_{xy}b - \frac{l}{2}\left(a'S_{xy}a-1\right) - \frac{h}{2}\left(b'S_{yy}b-1\right) \tag{5.9}$$

Lagrange fonksiyonu tanımlansın, burada l ve h Lagrange çarpanlarıdır. (5.9)'i maksimum yapan a ve b çözümleri (5.7)'deki çözümü verir. (5.3) ile verilen fonksiyonun minimum değeri $EKK_{\min} = 2g_{\min}$ dir. (5.8) deki kanonik korelasyonun maksimum değeri $r_{\max} = l_{\max}$ dır. $g = 1 - l$ eşitliğinden dolayı $g_{\min}$, $l_{\max}$ a karşılık gelir. Böylece, (5.3)'ün çözümü $l_{\max}^{2}$ maksimum özdeğere ve (5.7) ile verilen a ve b temel özvektörlere karşılık gelir. Bu çözüm ise (5.8) ile verilen kanonik korelasyonu maksimum yapar (Lipovetsky, Tishler ve Conklin, 2002). Yani EKK yi minimum yapan çözüm kanonik korelasyonu maksimum yapar.

Çok değişkenli çoklu regresyon ve kanonik korelasyon arasında şu gibi farklılıklar vardır. Çok değişkenli çoklu regresyon yanıt değişken ve açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi model kurarak araştırırken, kanonik korelasyon analizi iki kümenin nasıl ilişkilendiğini inceler. Kanonik korelasyon analizinde iki veri kümesinin rolü değişebilir yani simetriktir. Bir başka deyişle, veri kümesinin her ikisi de eşanlı olarak yanıt ve açıklayıcı değişkenler olarak davranabilir. Fakat çok değişkenli çoklu regresyon asimetriktir. Yani yanıt ve açıklayıcı değişkenlerin rolleri değiştiğinde elde edilen model parametreleri farklı olacaktır.

5.2. Ekk İle Temel Bileşenler Analizi Arasındaki İlişki

(5.3) ile verilen fonksiyon

$$a'a = 1 \quad , \quad b'b = 1 \tag{5.10}$$

kısıtlamaları altında ele alınsın ((5.10) ile verilen kısıtlamalar (4.2) ile verilen kısıtlamalara denktir). Bu kısıtlamalar altında Langrange fonksiyonu,

$$L = LS - l\left(a'a - 1\right) - h\left(b'b - 1\right) \tag{5.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.11) ifadesini minimum yapan eşitlikler

$$\begin{aligned} S_{xx}a - S_{xy}b &= l\,a \\ S_{yy}b - S_{yx}a &= h\,b \end{aligned} \tag{5.12}$$

olarak yazılabilir. (5.12)'deki ilk eşitlik a', ikinci eşitlik ise b' ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} l &= a'S_{xx}a - a'S_{xy}b \\ h &= b'S_{yy}b - b'S_{yx}a \end{aligned}$$

elde edilir. Burada l ve h Lagranj çarpanlarıdır. l ve h terimlerinin $g = l + h$ lineer kombinasyonları yazılırsa bu ifade (5.3) ile verilen fonksiyona denk olur. $g = l - h = a' S_{xx} a - b' S_{yy} b$ ise iki karesel formun farklarına eşittir. Bu durumda $l = \frac{g+g}{2}$ ve $h = \frac{g-g}{2}$ olur böylece (5.12), genelleştirilmiş lineer olmayan

$$\begin{pmatrix} S_{xx} - \frac{g}{2} I_q & -S_{xy} \\ -S_{xy} & S_{yy} + \frac{g}{2} I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

özdeğer problemini gösterir (Lipovetsky, Tishler ve Conklin, 2002). (5.14) eşitliği iteratif yöntemle çözülür. Her iterasyonda $\frac{g}{2}$ minimum özdeğerine karşılık gelen özvektör kullanılır. Lipovetsky, Tishler ve Conklin (2002) ilk birkaç iteryonda yakınsamanın olduğunu belirtmişlerdir. $g = 0$ iken (5.14) ile verilen lineer olmayan problem basit özdeğer bulma problemine dönüşür. $l = \frac{g}{2}$ alınarak (5.14) problemi

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & -S_{xy} \\ -S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

özdeğer problemine dönüşür. (5.3) fonksiyonunun minimum değeri (5.15) in minimum özdeğerine karşılık gelir.

(5.10) ile verilen koşullar yerine

$$a' a + b' b = 1 \tag{5.16}$$

koşulu kullanılarak (5.15) problemi için (a, b) vektör çifti bulunabilir. Bu durumda (5.11) eşitliği yerine

$$L = LS - l\left(a'a + b'b - 1\right) \tag{5.17}$$

Lagrange fonksiyonu yazılabilir. (5.17) eşitliğini minimum yapan a ve b (5.12) ile verilen çözümde $h = l$ alınmasına denktir. Böylece (5.10) ve (5.16) kısıtlamaları altında (5.3) fonksiyonu aynı sonucu verir (Lipovetsky, Tishler ve Conklin, 2002).

(5.16) kısıtlaması altında (5.3) fonksiyonu blok matris formunda temel bileşenler analizine indirgenebilir. (5.15) eşitliği

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

olarak da yazılabilir. (5.18) ise temel bileşenler analizi,

$$Sc = lc$$

olarak yazılabilir. S , X ve Y veri kümelerindeki $q + p$ değişken için korelasyonların matrisi ve c, $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ vektörüdür. (5.18) deki $-b$ yi kullanmak (5.1) deki V yi ters işaretli almaya denktir. Böylece (5.2) deki e vektörü $e = U + V$ olur. Bu e 'nun varyansını maksimum yapmak (5.3) deki karesel formun değerini maksimum yapmaya denktir. Böylece, (5.17)'yi minimum yapmak temel bileşenler analizindeki varyansı maksimum yapmak aynı (5.18) problemine karşılık gelir (Lipovetsky, Tishler ve Conklin, 2002).

6. ÇOKLU İÇ İLİŞKİ

Çoklu lineer regresyon modellerinin EKK ile yorumlanması açıklayıcı değişkenlerin birbiriyle ilişkisiz olduğu varsayımına dayanır. Açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağımlılık olabilir. Bu durumda çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkar. Çoklu iç ilişki regresyonda parametrelerin EKK tahminlerinde problemler yaratmaktadır.

6.1. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi

Çoklu lineer regresyon analizinde çoklu iç ilişkinin belirlenmesi için yöntemler şu şekilde sıralanabilir (Montomery, Peck ve Vining, 2001).

6.1.1. Korelasyon Matrisinin İncelenmesi

Çoklu iç ilişkinin bir ölçümü, standartlaşmış durumda çalışırken $X'X$ matrisindeki köşegen dışı r_{ij} elemanlarının incelenmesi ile mümkündür. X_i ve X_j lineer bağımlılığa yakın iken r_{ij} 1 yakındır. Ancak ikiden fazla açıklayıcı değişken arasındaki lineer bağımlılık varsa r_{ij}'ler uygun ölçü olmayabilir.

6.1.2. Varyans Şişirme Faktörü

$C = \left(X'X\right)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanları çoklu iç ilişkiyi belirlemede kullanılan diğer bir yöntemdir. C_{jj}, C'nin j–inci köşegen elemanı $C_{jj} = \left(1 - R_j^2\right)^{-1}$ olarak yazılabilir. Varyans şişirme faktörü, $VIF_j = C_{jj} = \left(1 - R_j^2\right)^{-1}$ olarak yazılabilir. Uygulamada herhangi bir VIF değeri 10'u aşarsa, çoklu iç ilişki problemi vardır.

6.1.3. X'X Matrisinin Özdeğerlerinin Analizi

$X'X$ matrisinin özdeğerleri $l_1, l_2, \mathbf{K}, l_q$ verideki çoklu iç ilişkiyi belirlemede kullanılmaktadır. Bir ya da daha fazla özdeğerler küçük ise X 'in kolonları arasında bağımlılık vardır.

$X'X$ matrisinin en büyük l_{mak} ve en küçük $l_{\min}$ özdeğerleri olarak gösterilmek üzere koşul sayısı,

$$k = \frac{l_{mak}}{l_{\min}}$$

şeklinde tanımlanabilir. $k < 100$ ise çoklu iç ilişki yoktur, $100 < k < 1000$ ise çoklu iç ilişki orta şiddetlidir, $1000 < k$ ise çoklu iç ilişki şiddetlidir şeklinde yorumlanır.

Çoklu lineer regresyonda çoklu iç ilişki problemi çözümü için Hoerl ve Kennard (1970) ridge regresyonu ve Hotelling (1933) temel bileşenler regresyonu önemiştir.

Çok değişkenli çoklu regresyon analizinde de $X'X$ matrisinin bazı özdeğerleri sıfıra yakın olması durumunda kolonlar arasında lineer bağımlılık olduğu sonucuna varılır. Koşul sayısının bulunması ise Khuri (1986) tarafından $K(X) = \left(\frac{l_{\max}}{l_{\min}} \right)^{1/2}$ şeklinde önermiştir. $K(X)$ 'in büyük değere sahip olması X 'in kolonlarında güçlü çoklu iç ilişkinin olduğunu gösterir. Khuri (1986), çoklu lineer regresyon da koşul sayısının yorumuna benzer olarak Belsley, Kuh ve Welch (1980) un önerisine paralel olarak $K(X) < 10$ ise zayıf çoklu iç ilişki, $K(X) > 30$ *veya* 100 ise güçlü bir çoklu iç ilişkinin mevcut olduğunu belirtmiştir.

6.2. Ridge Regresyon

$\hat{B} = \left(\hat{b}^{(1)} \quad \mathbf{K} \quad \hat{b}^{(p)}\right)$ gösterimi dikkate alınırsa çoklu iç ilişki mevcut iken $X'X$ matrisinin özdeğerlerinin bazılarında çok küçük kararsızlık yaratır;

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)}\right) &= E\left(tr\hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)}\right) = E\left(tr\hat{b}^{(i)}\hat{b}^{(i)'}\right) = trE\left(\hat{b}^{(i)}\hat{b}^{(i)'}\right) \\
&= tr\left[Cov\left(\hat{b}^{(i)}\right) + \hat{b}^{(i)}\hat{b}^{(i)'}\right] \\
&= tr\left[\left(X'X\right)^{-1}X'Cov(y)X\left(X'X\right)^{-1} + \hat{b}^{(i)}\hat{b}^{(i)'}\right] \\
&= tr\left[s_{ij}^{2}\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1} + \hat{b}^{(i)}\hat{b}^{(i)'}\right] \\
&= s_{ij}^{2}tr\left(X'X\right)^{-1} + \hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)} \\
&= s_{ij}^{2}\sum_{i=1}^{p}a_i + \hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)}
\end{aligned}$$

burada a_i 'ler $\left(X'X\right)^{-1}$ matrisinin özdeğerleri olup $a_1 \geq a_2 \geq \mathbf{K} \geq a_q$ dir. $b^{(i)}$ nın ridge tahmini

$$\begin{aligned}
S(b,k) &= \left(Y_i - X\hat{b}^{(i)}\right)'\left(Y_i - X\hat{b}^{(i)}\right) + k\left(\hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)} - m\right) \\
&= Y_i'Y_i - 2\hat{b}^{(i)'}X'Y_i + \hat{b}^{(i)'}X'X\hat{b}^{(i)} + k\left(\hat{b}^{(i)'}\hat{b}^{(i)} - m\right)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

fonksiyonunun minimum yapılması ile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(b,k)}{\partial b} &= -2X'y + 2X'Xb' + 2kb = 0 \\
-X'y + X'Xb + kb &= 0 \\
-X'y + \left(X'X + kI_{q+1}\right)b &= 0 \\
\hat{b} &= \left(X'X + kI_{q+1}\right)^{-1}X'y
\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Srivastava, 1979).

(2.1) ile verilen çok değişkenli çoklu regresyon modeli için B regresyon katsayılarının EKK tahmini $\hat{\mathrm{B}} = \left(X'X\right)^{-1}X'Y$ olarak bulunmuştu. $X_1, X_2, \mathbf{K}\, X_q$ değişkenleri yüksek korelasyonlu iken $X'X$ tekilliğe yakın olur ve $\hat{\mathrm{B}}$ regresyon katsayılarının en küçük kareler tahminleri yanıltıcı (istikrarsız) ve kötü tahmin edilir (Srivastava ve Kubokawa, 2005).

Hastie ve ark. (2001) ridge tahmin ediciyi

$$g(B) = \left\|Y - XB\right\|^2 + k\left\|B\right\|^2$$

fonksiyonunu minimum yapan çözüm olarak önermişlerdir (Kiers ve Smilde, 2007):

$$\hat{B}(k) = (X'X + kI)^{-1}X'Y\,. \tag{6.2}$$

Brown ve Zidek (1980) ise p değişken arasındaki ilişkiyi dikkate alarak EKK tahmin için verilen $\hat{B} = \left(\hat{b}^{(1)}, \mathbf{K}, \hat{b}^{(p)}\right)$ ifadesine benzer düşünce ile çok değişkenli ridge regresyon tahmin ediciyi

$$\hat{B}^*(K) = (I_{q+1} \otimes X'X + K \otimes I_p)^{-1}(I_q \otimes X')Y^*$$

veya denk olarak

$$\hat{B}^*(K) = (X'X \otimes I_{q+1} + I_p \otimes K)^{-1}(X'X \otimes I_{q+1})\hat{\mathrm{B}}$$

şeklinde önermiştir. Burada $\otimes$ kronecker matris çarpımıdır. $K \otimes \mathrm{I}_p$ matrisi $\left((q+1)p \times (q+1)p\right)$ tipinde $K \otimes \mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} k_{11}\mathrm{I}_p & \mathbf{L} & k_{1(q+1)}\mathrm{I}_p \\ \mathbb{M} & \mathbf{O} & \mathbb{M} \\ k_{(q+1)1}\mathrm{I}_p & \mathbf{L} & k_{(q+1)(q+1)}\mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ blok matrisidir.

$(q+1)\times(q+1)$ tipindeki K matrisi ridge parametrelerin matrisidir. $Y=\left(Y_1 \quad \mathbf{K} \quad Y_p\right)$ olmak üzere $Y^*=vec(Y)$, $np\times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü ve $\hat{B}^*(K)$, $p(q+1)\times 1$ tipinde regresyon katsayıları için tahmin ediciler vektörüdür. $K=0$ iken çok değişkenli ridge tahmin edici EKK tahmin ediciye indirgenir. Özel olarak K köşegen $K=diag(k_1,\mathbf{K},k_{q+1})$ formunda iken çoklu her biri $Y_1,\mathbf{K},Y_p$ yanıt değişkenli lineer regresyonda ridge tahmin edici elde edilir. Bu durum Breiman ve Friedman (1997) tarafından önerilen yönteme de denktir.

Breiman ve Friedman (1997) p yanıt değişken için $\hat{b}^{(i)}$ parametrelerini Hoerl ve Kennard'ın (1970) önerdiği $k_i>0$ olmak üzere $\hat{b}^{(i)}=(X'X+k_iI_{q+1})^{-1}X'Y_i$, $i=1,\mathbf{K},p$ şeklindeki ridge regresyon ile tahmin etmeyi önermiştir yani her p tane yanıt değişken için uygulamada ayrı ayrı ridge regresyon tahmini yapılır. K köşegen elemanları k_i 'lerden oluşan köşegen matris olmak üzere

$$\hat{\mathrm{B}}=\left(X^{'}X+K\mathrm{I}_{q+1}\right)^{-1}X^{'}Y$$

şeklinde de uygulanabilir.

6.2.1. k Değerinin Bulunması

Çoklu lineer regresyonda ridge parametreleri pozitif olmasına rağmen Hua ve Gunst (1983) çok değişkenli çoklu lineer regresyonda negatif ridge parametrelerinin kullanılabileceğini de belirtmiştir. Cannon (2009) ise simülasyon çalışması yaparak negatif ridge parametrelerinin etkilerini incelemiştir. Yaptığı simülasyon çalışmasında pozitif ridge parametreleri varyansı düşürürken, negatif ridge parametrelerinin varyansı şişirdiğini görmüştür.

Cannon (2009), K matrisinin seçimini

$$COV = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left(\operatorname{cov}\left(Y_i, Y_j\right) - \operatorname{cov}\left(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j\right)\right)^2$$

ile verilen fonksiyonu minimum yaparak bulmayı önermiştir. K nın elemanları pozitif veya negatif değerler alabilmektedir.

k 'nın (eşitlik (6.1)) değerinin elde edilmesi için bir diğer yöntem çapraz geçerlilik yöntemidir. Bu metot da $Y_{(i)}$ 'nin tahmin değeri modelde i -inci gözlem olmaksızın, $\hat{\mathrm{B}}_i(k)$ ridge regresyon tahmini kullanılarak her gözlem için $\hat{Y}_{(i)}$ tahmin değeri ile Y_i gözlem değeri arasındaki farkın karesinden elde edilir (Srivastava, 1979). k 'nın seçilen değerleri için

$$\sum_{i=1}^{p}\left(Y_i - \hat{Y}_{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(Y_i - X_i\hat{b}^{(i)}(k)\right)^2$$

kareler toplamı hesaplanır, minimum değeri veren k seçilir. a önceden seçilen çok küçük pozitif bir sayı olmak üzere (6.3) yardımıyla bulunan $\hat{k}$ için Srivastava (1979)

$$\hat{k} = \begin{cases} \hat{k} & , \hat{k} \geq 0 \\ -\hat{k} & , -a \leq \hat{k} < 0 \\ a & , \hat{k} < -a \end{cases}$$

şeklinde seçmeyi önermiştir.

Diğer bir yöntem Kubokowa ve Srivastava (2001) tarafından

$$\hat{K}^{-1} = \frac{\left(\frac{n-q-3}{n-q-1}\right)\left(\frac{\hat{\mathrm{B}}'X'X\hat{\mathrm{B}}}{S^2} - q\right)}{tr\left(X'X\right)} \qquad (6.3)$$

$$S^2 = (n-q-1)^{-1}(Y - X\mathrm{B})'(Y - X\mathrm{B})$$

olarak önerilmiştir. $\hat{K}^{-1}$ pozitif yada negatif değer alabilir.

6.3. Temel Bileşenler Regresyon

Temel bileşenler analizinde, değişkenlerin lineer kombinasyonlarının maksimum varyansı aranır. Tüm lineer kombinasyonlar öncelikle veri yapısı ya da diğer değişkenlerle ilişkiyi belirlemektedir.

Regresyon analizinde temel bileşenler analizinin kullanılmasının iki durumda avantajlıdır: (Rencher, 2002):

1. Açıklayıcı değişkenlerin sayısı gözlemlerin sayısından büyük iken test yapmak imkansızlaştığında
2. Açıklayıcı değişkenler yüksek ilişkili ise, regresyon katsayılarının tahmini hatalı olduğunda

Bu gibi durumda, temel bileşenler yöntemi açıklayıcı değişkenlerin sayısını daha küçüğe indirgeyebilir ve regresyon katsayıları tahminini daha doğru tahminler haline getirilebilir (Rencher, 2002).

$X'X$ matrisinin özdeğerleri $l_1 \geq l_2 \geq \mathbf{K} \geq l_q \geq 0$ olmak üzere ve açıklayıcı değişkenler ilişkili ise, özdeğerlerin bazıları çok küçük ve sıfıra yakın olacaktır. $X'X$ matrisi $X'X = \begin{pmatrix} T_{(r)} & T_{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{(r)} & 0 \\ 0 & D_{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'_{(r)} \\ T'_{(s)} \end{pmatrix}$ olarak yazılsın. Bu gösterimde $T = \begin{pmatrix} T_{(r)} & T_{(s)} \end{pmatrix}$ özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin matrisi, $D_{(q)} = \begin{pmatrix} D_{(r)} & 0 \\ 0 & D_{(s)} \end{pmatrix} = diag(l_1, \mathbf{K}, l_q) \quad (q = r+s)$ özdeğerlerin matrisidir. Burada $D_{(r)}$ göreceli olarak büyük özdeğerlere sahip ve $D_{(s)}$ ise küçük özdeğerlere sahip olsun. $\hat{\mathrm{B}}_{(q)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{B}}_{(r)} \\ \hat{\mathrm{B}}_{(s)} \end{pmatrix}$ olmak üzere, $D_{(s)}^{-1}$ nin köşegen elemanları çok büyük

olduğundan $\hat{B}_{(s)}$ 'nin tahminlerinde büyük kararsızlık oluşturacaktır (Srivastava, 1979). Bu yüzden EKK'ler tahmin edicide $D_{(r)}^{-1}$ kullanımı tercih edilir.

Ekk tahmin edici,

$$\hat{B} = T(T'X'XT)^{-1}T'X'Y$$
$$= TD_{(q)}{}^{-1}T'X'Y$$

olarak yazılabilir ve $D_{(q)}$ matrisinin indirgenmesiyle EKK'ler tahmin edici

$$\hat{B}_{(r)} = T_{(r)}(T_{(r)}'X'XT_{(r)})^{-1}T_{(r)}'X'Y$$
$$= T_{(r)}D_{(r)}{}^{-1}T_{(r)}'X'Y$$

olarak gösterilir.

7. UYGULAMA: BÜYÜKŞEHİR BELEDİYE BÜTÇESİ

Belediyeler, belde sakinlerinin yerel nitelikteki ihtiyaçlarını karşılamak üzere kurulan ve karar organı seçmenler tarafından seçilerek oluşturulan, idari ve mali özerkliğe sahip kamu tüzel kişisidir (5393 sayılı Belediye Kanunu).

Büyükşehir belediyeleri Türk belediyeciliğine 1984 yılında girmiş olan üst kademe belediyeleridir. Bu belediyeler 1982 anayasasının 127. maddesindeki "büyük yerleşim yerlerinde özel yönetim biçimleri oluşturulabilir " hükmüne dayanılarak 1984 yılında kurulmağa başlanmıştır. Büyükşehir belediyeciliğinde ise, büyükşehir hizmet alanı içinde birden çok ilçe veya birinci kademe belediyesi vardır. Dolayısıyla, belediye hizmeti aynı zamanda hem büyükşehir, hem de ilçe belediyesi eliyle yürütülür.

Büyükşehir belediyesinin yapacağı hizmetler için belirli bir bütçe olması gerekmektedir. Bu bütçede gelirler ve giderler var olacaktır. Bu gelir ve giderleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Belediye bütçesi 5018 sayılı Kamu Mali Yönetim ve Kontrol Kanununun 3–üncü maddesinde; belirli bir dönemdeki gelir ve gider tahminleri ile bunların uygulamasına ilişkin hususları gösteren ve usulüne uygun olarak yürürlüğe konulan belge olarak tarif edilmiştir.

Belediye giderleri sıralanacak olduğunda:

Personel Giderleri: Bordroya dayalı olarak kamu personeline yapılan ödemeler olarak tanımlanır. Personel giderleri ise memurlar, temel maaşlar, zamlar ve tazminatlar, sosyal haklar, ek çalışma karşılıkları, sözleşmeli personel, işçilerin ücretleri, işçilerin sosyal hakları ve geçici personel olarak alt başlıklarda toplanır.

Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devler Prim Giderleri: devletin işveren sıfatıyla ödediği sosyal güvenlik katkı paylarıdır. Memurlar, işçiler ve sözleşmeli personel olarak üç alt başlıkta toplanır.

Mal ve Hizmet Alımları: faturalı olarak alınan mal ve hizmet bedelleridir. Bu ödenen bedelleri, üretime yönelik mal ve malzeme alımı (hammadde alımı), tüketime yönelik mal ve malzeme alımı (kırtasiye, büro malzemesi ve benzeri),

yolluklar (yurtiçi geçici görev yollukları), görev giderleri, hizmet alımları, yol bakım ve onarım giderleri ve tedavi ve cenaze giderleri alt başlıklarında toplanılabilir.

Faiz Giderleri: Kurumun borçlarına ilişkin faiz ödemeleridir. Diğer iç borç faiz giderleridir.

Sermaye Giderleri: Kurumun mal varlığını artıran ödemelerdir. Sermaye giderleri, gayrimenkul alımları ve kamulaştırma, gayrimenkul sermaye üretim giderleri, malzeme gideri, taşıma gideri, iş makinesi kiralama ve menkul malların büyük onarım giderleri olarak alt başlıklarda toplanır.

Borç Verme: Bir mali varlık karşılığında yapılan ödemelerdir.

Belediye gelirleri ise;

Vergi Gelirleri: Genel bütçe vergi gelirlerinden pay verilir. Toplanan vergiler iller bankası aracılığıyla belediyelere dağıtılır. Belediye sınırları içerisinde, mülkiyet üzerinden alınan vergiler, dahilde alınan mal ve hizmet vergileri ve harçlar alınır. Bu vergileri bina vergisi, arsa vergisi, arazi vergisi, eğlence vergisi, yangın sigortası, ilan ve reklam vergisi, bina inşaat harcı, işgal harcı, işyeri açma izni harcı, toptancı hali resmi harcı ve ölçü ve tartı aletleri muayene harcı olarak alt başlıklarda toplanır.

Teşebbüs ve Mülkiyet Gelirleri: Bu geliri mal ve hizmet satış gelirleri, çevre kirliliğini önleme geliri, ulaştırma hizmetleri, kurumlar hasılatı, mahalli idareler kurumlar hasılatı, kira gelirleri ve diğer teşebbüs ve mülkiyet gelirleri olarak alt başlıklarda toplanır.

Diğer Gelirler: Faiz gelirleri, kişi ve kurumlardan alınan paylar, vergi ve harç gelirlerinden alınan paylar, merkezi idare vergi gelirlerinden alınan paylar, çevre ve temizlik vergisi, para cezaları, idari para cezaları ve diğer çeşitli gelirler olarak alt başlıklarda toplanır.

Sermaye Gelirleri: Taşınmaz satış gelirleri ve arsa satışı olarak belirlenir.

Alınan Bağış ve Yardımlar: Kişi ve kurumlardan alınan bağış veya yardımlardır.

Tablo 7.1 Gider Bütçesi

YIL	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
2006 OCAK	4403445.59	771735.45	1365984.07	35606.95	97464.53	3219279.61	.00
2006 ŞUBAT	3787062.60	587164.02	4459916.02	.00	54404.84	870491.07	1837500.00
2006 MART	3130446.39	599923.99	5448731.59	3637590.80	1621942.47	2244903.77	.00
2006 NİSAN	3253116.49	634395.61	5611134.48	.00	87234.82	1723871.46	.00
2006 MAYIS	5817139.48	991783.92	6022366.49	231398.39	1503678.24	2611452.96	.00
2006 HAZİRAN	4326224.93	742650.30	6722644.90	1127792.30	309887.56	7472728.49	.00
2006 TEMMUZ	4738898.84	830433.11	6617187.24	523193.35	51286.95	2062286.82	.00
2006 AĞUSTOS	3924439.90	701604.42	11624234.14	498369.00	1599489.09	3326482.07	.00
2006 EYLÜL	3860563.24	757341.31	6456733.80	512722.38	27907.59	3206840.60	5512500.00
2006 EKİM	7907543.37	979018.00	8078021.01	4592973.69	780286.77	26008710.71	.00
2006 KASIM	4726548.61	924634.61	6749214.23	441304.06	178486.32	3661995.30	.00
2006 ARALIK	6483185.18	1199786.00	8768697.55	645644.55	1565250.38	8371174.85	.00
2007 OCAK	3189585.37	537167.41	6071301.81	1118166.34	1920927.13	4702892.45	10969100.00
2007 ŞUBAT	4110688.05	758467.03	5863726.36	1143239.55	799759.75	26026495.45	.00
2007 MART	4037541.71	749806.97	5320715.26	4821363.14	777908.47	4847082.42	.00
2007 NİSAN	4227808.22	836228.57	6766318.13	563998.34	501397.23	6694283.75	99400.00
2007 MAYIS	5974432.83	1034269.52	8868582.87	1365853.46	1291164.77	10333457.60	.00
2007 HAZİRAN	5535381.41	1017737.17	7959043.34	2633936.82	385841.48	23582902.34	.00
2007 TEMMUZ	4985248.11	938460.84	8512522.43	2378176.85	283506.69	15015332.90	.00
2007 AĞUSTOS	4266189.25	804537.66	8325731.02	283699.32	409646.34	22400248.58	.00
2007 EYLÜL	4823314.52	935689.81	6638645.55	502999.54	770262.46	14873280.64	.00
2007 EKİM	7528262.30	909736.77	6133461.86	3423559.14	741063.21	15994870.43	.00
2007 KASIM	4560667.22	899345.31	8215372.75	578252.28	695690.27	24263201.66	600.00
2007 ARALIK	8926729.74	1497898.14	9409367.41	1548464.54	1197288.01	27465983.26	.00
2008 OCAK	2093920.04	390937.57	6217577.66	490259.67	127842.09	16700024.43	.00
2008 ŞUBAT	4918186.62	783089.71	6759708.63	2916010.81	21640.14	47950923.55	.00
2008 MART	4979376.29	938355.33	7463902.09	728182.53	991770.57	10083642.93	400000.00
2008 NİSAN	5086914.79	983692.11	8313742.65	3696465.65	1702908.97	23043355.71	1496850.00
2008 MAYIS	6420373.50	1110299.52	10573609.21	584294.30	747245.62	20418506.79	.00
2008 HAZİRAN	5738584.30	969984.39	9205222.73	1121322.77	2575579.82	23512121.77	.00
2008 TEMMUZ	4389451.08	833142.66	12749424.22	725471.18	814753.34	18327009.33	1994000.00
2008 AĞUSTOS	7877087.83	1310892.82	7512995.13	3590405.71	694756.01	14461285.08	.00
2008 EYLÜL	7094495.52	1065290.82	9691296.69	302299.42	704316.56	31722298.56	8000000.00
2008 EKİM	7077304.24	1181847.07	7423399.71	2620001.35	865953.40	13822048.97	.00
2008 KASIM	7666031.42	1218270.75	11882098.20	247211.61	863940.28	15037853.32	.00
2008 ARALIK	5243939.12	1007066.95	19705423.76	1510498.49	1626067.77	28065972.66	.00
2009 OCAK	5912714.71	1113983.93	5010239.55	568708.31	1392201.74	33576188.33	.00
2009 ŞUBAT	5617262.14	1029896.71	10782691.78	473263.25	1829215.16	7939552.07	.00
2009 MART	5283849.70	993998.88	11061288.21	2266839.65	4100212.20	16861845.72	.00
2009 NİSAN	5656881.38	1102235.76	8896509.03	2943776.46	1705642.88	2808003.62	.00
2009 MAYIS	7364626.29	1282077.95	11721079.79	640351.26	2728556.21	3290166.28	.00
2009 HAZİRAN	6885719.31	1258835.70	12517700.32	1137283.46	117051.23	3050423.87	.00
2009 TEMMUZ	5116551.46	985006.01	10772961.23	503467.33	175587.74	15692458.90	.00
2009 AĞUSTOS	6418063.74	1200080.66	9801468.53	3546176.92	202271.77	7495355.92	.00
2009 EYLÜL	7013248.36	1141112.10	9915289.62	382365.62	131316.52	4711660.22	.00
2009 EKİM	8165932.11	1305724.13	12387396.03	1408588.70	669177.25	11011699.17	.00
2009 KASIM	8226212.24	1313184.69	11639723.01	220683.38	453071.12	7459345.84	.00
2009 ARALIK	8516389.88	1766132.58	17890958.77	2529775.02	7029659.50	11340812.78	810000.00

Tablo 7.1 de Y_1, personel giderleri; Y_2, sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri; Y_3, mal ve hizmet alım giderleri; Y_4, faiz giderleri; Y_5, cari transferler; Y_6, sermaye giderleri; Y_7, borç verme olarak tanımlanır. Tablo 7.1'de veriler "ham veri" olarak görülmektedir.

Tablo 7.2 Gelir Bütçesi

YIL	X1	X2	X3	X4	X5
2006 OCAK	10509771.63	2900160.22	.00	122747.70	.00
2006 ŞUBAT	9090389.68	3250846.30	.00	2499623.68	.00
2006 MART	16872120.98	3921051.54	.00	92487.62	.00
2006 NİSAN	13254990.82	3676147.14	.00	43078.50	.00
2006 MAYIS	11479093.14	4114248.74	.00	10623.50	.00
2006 HAZİRAN	13717905.98	5790278.21	.00	1107761.00	.00
2006 TEMMUZ	11329413.67	3584559.04	.00	778958.10	.00
2006 AĞUSTOS	12613707.71	19307283.31	.00	3165715.42	.00
2006 EYLÜL	14071380.59	3929276.76	.00	1042579.50	.00
2006 EKİM	11588774.46	3913017.43	.00	251772.00	.00
2006 KASIM	10530183.59	3957167.59	.00	1104603.69	300000
2006 ARALIK	16812650.84	67125123.57	.00	10562902.86	300000
2007 OCAK	1218173.11	3948860.23	11986968.31	282113.10	.00
2007 ŞUBAT	1575316.44	6060763.76	10645870.11	1103400.50	.00
2007 MART	1372428.19	4539909.41	12969204.53	1693782.50	.00
2007 NİSAN	1708446.38	3748580.48	12696741.83	266172.38	25
2007 MAYIS	722152.46	4436550.10	12129098.64	12766530.06	.00
2007 HAZİRAN	733040.61	31276430.86	14226056.75	844672.84	.00
2007 TEMMUZ	856239.40	3602469.86	13015974.84	285849.50	200000
2007 AĞUSTOS	637853.04	3476928.34	9429661.72	360417.40	.00
2007 EYLÜL	399871.00	3810085.73	14774023.13	15847082.37	510000
2007 EKİM	485635.98	3556933.23	15787336.43	438341.87	.00
2007 KASIM	460302.97	4287964.74	12283206.98	1200047.50	.00
2007 ARALIK	1190197.32	3205696.35	17161712.01	6462119.50	.00
2008 OCAK	1819136.45	4200239.44	4081973.84	244583.41	.00
2008 ŞUBAT	2072178.60	11026683.47	19731044.08	1175514.85	.00
2008 MART	1753972.71	5512359.57	20071730.35	4111341.20	.00
2008 NİSAN	1906259.84	4895927.51	16617861.54	746079.99	.00
2008 MAYIS	1506527.74	5802343.44	12047943.99	18018906.80	.00
2008 HAZİRAN	1076164.23	11282932.85	16237903.92	5701248.92	.00
2008 TEMMUZ	1198534.44	12742724.68	17166536.51	3081145.99	500000
2008 AĞUSTOS	682573.79	4212382.02	16137457.03	2976333.10	.00
2008 EYLÜL	499784.17	4964658.30	21500755.73	606196.46	.00
2008 EKİM	504352.93	5176852.93	15690859.74	5088513.20	.00
2008 KASIM	429568.84	5538203.93	14163644.10	904089.50	.00
2008 ARALIK	1151162.06	8076394.92	18842075.32	354466.00	.00
2009 OCAK	2920481.42	7709129.49	6092490.92	295042.01	.00
2009 ŞUBAT	3351277.06	4985224.37	25137472.44	367742.08	.00
2009 MART	3272522.36	7252228.38	14996003.47	13431737.55	15084.54
2009 NİSAN	2673162.48	6731107.87	13797828.32	141307.50	.00
2009 MAYIS	2807431.94	5985375.62	14940699.26	163890.86	.00
2009 HAZİRAN	1393939.23	6813760.05	19422501.12	131965.33	.00
2009 TEMMUZ	770346.33	8963852.61	15755310.21	91038.82	250000
2009 AĞUSTOS	442338.94	6064765.97	19716668.16	2677295.37	27290.09
2009 EYLÜL	643862.82	6113782.30	14787441.56	153147.83	.00
2009 EKİM	605259.84	6979656.54	16915312.88	154266.00	150000
2009 KASIM	450022.49	5144078.14	13706271.51	104262.00	.00
2009 ARALIK	820073.07	43245911.96	25409146.15	579267.25	584912.50

Tablo 7.2 de X_1, vergi gelirleri; X_2, teşebbüs ve mülkiyet gelirleri; X_3, diğer gelirler; X_4, sermaye gelirleri; X_5, alınan bağış ve yardımlar ile özel gelirler olarak gösterilmektedir. Tablo 7.2'de veriler "ham veri" olarak görülmektedir. Bu veriler daha sonra reelleştirme yapılarak, yani enflasyonun TL üzerindeki değerini belirlemek ve yapılacak analizde olumsuz etkileri azaltmak amacıyla "reelleştirme" yapılmıştır. Reelleştirme Tablo 7.3 de verilen 2006–2009 yılları arasındaki TÜFE değerleri kullanılarak yapılmıştır (TÜFE değerleri TÜİK den elde edilmiştir).

Ham veriler aylık veri olduğundan her yılın ilgili ayına ait TÜFE değerleri kullanılarak reelleştirme yapılacaktır. Yani; 2006 Ocak ayındaki 1 TL'nin değerinin 2008 yılındaki değeri hesaplanırken, 2008 yılındaki Ocak ayının TÜFE oranı dikkate alınacaktır. Bu durumu aşağıdaki formül ile hesaplanabilir.

$$\text{Yüzdelik Değişim} = \left(\frac{SonYılınTÜFESİ - İlkYılınTÜFESİ}{İlkYılınTÜFESİ} \right) \times 100$$

Bulunan yüzdelik değişim değerini her yılın ilgili ayı için tek tek hesaplayarak o yılki değer ile çarpıldığında 2009 yılındaki ilgili ay için değeri bulunabilir. Örneğin; 2006 Mart ayındaki 100 TL nin değeri 2008 Mart ayında

$$\text{Yüzdelik Değişim} = \left(\frac{150.27 - 124.18}{124.18} \right) \times 100 = 21.00982$$

olarak hesaplanmıştır. 2006 Mart ayındaki 100 TL nin 2008 Mart ayındaki değeri $100 \times YüzdeliDeğişim = 100 \times 21.00982 = 2100.982$ TL olarak bulunur.

Tablo 7.3 2006–2009 Aylık TÜFE değerleri

YIL	2006	2007	2008	2009
OCAK	123,57	135,84	146,94	160,90
ŞUBAT	123,84	136,42	148,84	160,35
MART	124,18	137,67	150,27	162,12
NİSAN	125,84	139,33	152,79	162,15
MAYIS	128,20	140,03	155,07	163,19
HAZİRAN	128,63	139,69	154,51	163,37
TEMMUZ	129,72	138,67	155,40	163,78
AĞUSTOS	129,15	138,70	155,02	163,29
EYLÜL	130,81	140,13	155,72	163,93
EKİM	132,47	142,67	159,77	167,88
KASIM	134,18	145,45	161,10	170,01
ARALIK	134,49	145,77	160,44	170,91

Uygulama kısmında SPSS–15 ve MATLAB–7 programları kullanılmıştır. Her iki uygulama da veriler standartlaştırılmıştır.

Çok değişkenli regresyon modelinde katsayılar matrisi aşağıdaki gibi

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 2.53\times10^{-7} & -7.2\times10^{-8} & -4.5\times10^{-8} & -3.1\times10^{-7} & -5.1\times10^{-7} & -8.3\times10^{-7} & 5.99\times10^{-8} \\ 0.958 & 0.980 & 0.898 & 0.668 & 0.556 & 0.326 & 0.260 \\ 0.005 & 0.022 & 0.106 & 0.001 & 0.274 & 0.167 & -0.060 \\ 0.577 & 0.590 & 0.550 & 0.601 & 0.373 & 0.726 & 0.219 \\ 0.077 & 0.065 & 0.063 & -0.218 & 0.176 & -0.099 & -0.060 \\ 0.001 & 0.075 & -0.013 & -0.064 & -0.209 & -0.035 & -0.078 \end{pmatrix}$$

bulunmuştur. Yanıt değişkenler için eşitlikler ise

$$\hat{Y}_1 = 2.53\times10^{-7} + 0.958X_1 + 0.005X_2 + 0.577X_3 + 0.077X_4 + 0.001X_5$$
$$\hat{Y}_2 = -7.2\times10^{-8} + 0.980X_1 + 0.022X_2 + 0.590X_3 + 0.065X_4 + 0.075X_5$$
$$\hat{Y}_3 = -4.5\times10^{-8} + 0.898X_1 + 0.106X_2 + 0.550X_3 + 0.063X_4 - 0.013X_5$$
$$\hat{Y}_4 = -3.1\times10^{-7} + 0.668X_1 + 0.001X_2 + 0.601X_3 - 0.218X_4 - 0.064X_5$$
$$\hat{Y}_5 = -5.1\times10^{-7} + 0.556X_1 + 0.274X_2 + 0.373X_3 + 0.176X_4 - 0.209X_5$$
$$\hat{Y}_6 = -8.3\times10^{-7} + 0.326X_1 + 0.167X_2 + 0.726X_3 - 0.099X_4 - 0.035X_5$$
$$\hat{Y}_7 = -5.99\times10^{-8} + 0.260X_1 - 0.060X_2 + 0.219X_3 - 0.060X_4 - 0.078X_5$$

şeklindedir. Yanıt değişkenler için elde edilen eşitliklerde; diğer değişkenler sabit iken X_1 (Vergi Gelirleri) 7.000.000.000 TL değiştiğinde; Y_1 (Personel Giderleri) 6.706.000.000TL, Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri) 6.860.000.000TL, Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) 6.286.000.000TL, Y_4 (Faiz Giderleri) 676.000.000.TL, Y_5 (Cari Transferler) 3.892.000.000TL, Y_6 (Sermaye Giderleri) 2.282.000.000TL ve Y_7 (Borç Verme) 1.820.000.000TL attırdığı görülür.

Aynı şekilde; diğer değişkenler sabit iken X_2 (Teşebbüs ve Mülkiyet Gelirleri) 7.000.000.000TL değiştiğinde; Y_1 (Personel Giderleri) 35.000.000TL, Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri) 154.000.000TL, Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) 742.000.000TL, Y_4 (Faiz Giderleri) 7.000.000.TL, Y_5 (Cari Transferler) 1.918.000.000TL, Y_6 (Sermaye Giderleri) 1.169.000.000TL artacak, ancak Y_7 (Borç Verme) 420.000.000TL azalacaktır.

X_3 (Diğer Gelirler) 7.000.000.000 TL değiştiğinde ve diğer değişkenler sabit tutulduğunda; Y_1 (Personel Giderleri) 4.039.000.000TL, Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri) 4.130.000.000TL, Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) 3.850.000.000TL, Y_4 (Faiz Giderleri) 4.207.000.000.TL, Y_5 (Cari Transferler) 2.611.000.000TL, Y_6 (Sermaye Giderleri) 5.082.000.000TL ve Y_7 (Borç Verme) 1.533.000.000TL attırdığı görülür.

X_4 (Sermaye Gelirleri) 7.000.000.000TL değiştiğinde ve diğer değişkenler sabit tutulduğunda; Y_1 (Personel Giderleri) 539.000.000TL, Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri) 455.000.000TL, Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) 441.000.000TL, Y_5 (Cari Transferler) 1.232.000.000TL arttığı, Y_4 (Faiz Giderleri) 1.526.000.000.TL, Y_6 (Sermaye Giderleri) 693.000.000TL ve y_7 (Borç Verme) 420.000.000TL azalttığı görülür.

X_5 (Alınan Bağış ve Yardım Gelirleri) 7.000.000.000 TL değiştiğinde ve diğer değişkenler sabit tutulduğunda; Y_1 (Personel Giderleri) 7.000.000TL, Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri) 525.000.000TL artacak, ancak Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) 91.000.000TL, Y_4 (Faiz Giderleri) 448.000.000.TL, Y_5 (Cari Transferler) 1.463.000.000TL, Y_6 (Sermaye Giderleri) 245.000.000TL ve Y_7 (Borç Verme) 546.000.000TL azaldığı görülür.

$S = \begin{pmatrix} S_{YY} & S_{YX} \\ S_{XY} & S_{XX} \end{pmatrix}$ formundaki Varyans-Kovaryans matrisi için;

$$S_{yy} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.9738 & 0.8353 & 0.5112 & 0.5394 & 0.5586 & 0.0431 \\ 0.9738 & 1.0000 & 0.8659 & 0.4237 & 0.5539 & 0.4902 & 0.0520 \\ 0.8353 & 0.8659 & 1.0000 & 0.4221 & 0.6377 & 0.4719 & 0.1046 \\ 0.5112 & 0.4237 & 0.4221 & 1.0000 & 0.4587 & 0.4994 & -0.0365 \\ 0.5394 & 0.5539 & 0.6377 & 0.4587 & 1.0000 & 0.2221 & 0.1450 \\ 0.5586 & 0.4902 & 0.4719 & 0.4994 & 0.2221 & 1.0000 & -0.1035 \\ 0.0431 & 0.0520 & 0.1046 & -0.0365 & 0.1450 & -0.1035 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$S_{xx} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.4565 & -0.4886 & 0.1838 & 0.2032 \\ 0.4565 & 1.0000 & -0.0838 & 0.5865 & 0.4906 \\ -0.4886 & -0.0838 & 1.0000 & 0.2070 & 0.0598 \\ 0.1838 & 0.5865 & 0.2070 & 1.0000 & 0.6280 \\ 0.2032 & 0.4906 & 0.0598 & 0.6280 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 0.6924 & 0.7292 & 0.6867 & 0.3220 & 0.4884 & 0.0222 & 0.0983 \\ 0.4395 & 0.4951 & 0.5006 & 0.0967 & 0.4967 & 0.1795 & -0.0338 \\ 0.1249 & 0.1270 & 0.1144 & 0.2256 & 0.1021 & 0.5299 & 0.0797 \\ 0.3760 & 0.4272 & 0.3960 & -0.0103 & 0.3843 & 0.1869 & -0.0517 \\ 0.2809 & 0.3609 & 0.2943 & -0.0286 & 0.1710 & 0.0941 & -0.0797 \end{pmatrix}$$

$$S_{yx} = \begin{pmatrix} 0.6924 & 0.4395 & 0.1249 & 0.3760 & 0.2809 \\ 0.7292 & 0.4951 & 0.1270 & 0.4272 & 0.3609 \\ 0.6867 & 0.5006 & 0.1144 & 0.3960 & 0.2943 \\ 0.3220 & 0.0967 & 0.2256 & -0.0103 & -0.0286 \\ 0.4884 & 0.4967 & 0.1021 & 0.3843 & 0.1710 \\ 0.0222 & 0.1795 & 0.5299 & 0.1869 & 0.0941 \\ 0.0983 & -0.0338 & 0.0797 & -0.0517 & -0.0797 \end{pmatrix}$$

matrisleri yardımıyla tam model için çoklu belirleyicilik katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

RV değeri

$$RV = \frac{tr\left(S_{xy}S_{yx}\right)}{\sqrt{tr\left(S_{xx}^2\right)tr\left(S_{yy}^2\right)}} = 0.35$$

olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan RV değeri açıklayıcı değişkenler yanıt değişkenlerini $\%35$ açıklama oranına sahiptir.

Parametrelerin önemliliği için $a = 0.05$ önem düzeyinde $\begin{matrix} \mathrm{H}_0 : \mathrm{B}_1 = 0 \\ \mathrm{H}_1 : \mathrm{B}_1 \neq 0 \end{matrix}$ hipotezi test edilebilir. Test için hesaplanması gereken Wilk's Lambda değeri için E, H, ve $\mathrm{E}^{-1}\mathrm{H}$ matrisleri sırasıyla

$$E = \begin{pmatrix} 0.2332 & 0.1662 & 0.0782 & 0.0728 & -0.0196 & 0.2160 & -0.0929 \\ 0.1662 & 0.1447 & 0.0665 & -0.0243 & -0.0338 & 0.1328 & -0.0813 \\ 0.0782 & 0.0665 & 0.2461 & -0.0011 & 0.0683 & 0.1310 & -0.0216 \\ 0.0728 & -0.0243 & -0.0011 & 0.6450 & 0.1651 & 0.2126 & -0.1664 \\ -0.0196 & -0.0338 & 0.0683 & 0.1651 & 0.5228 & -0.0500 & 0.0624 \\ 0.2160 & 0.1328 & 0.1310 & 0.2126 & -0.0500 & 0.6001 & -0.1957 \\ -0.0929 & -0.0813 & -0.0216 & -0.1664 & 0.0624 & -0.1957 & 0.9457 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0.7668 & 0.8075 & 0.7572 & 0.4384 & 0.5590 & 0.3426 & 0.1360 \\ 0.8075 & 0.8553 & 0.7994 & 0.4480 & 0.5877 & 0.3574 & 0.1333 \\ 0.7572 & 0.7994 & 0.7539 & 0.4231 & 0.5694 & 0.3408 & 0.1262 \\ 0.4384 & 0.4480 & 0.4231 & 0.3550 & 0.2936 & 0.2868 & 0.1299 \\ 0.5590 & 0.5877 & 0.5694 & 0.2936 & 0.4772 & 0.2721 & 0.0826 \\ 0.3426 & 0.3574 & 0.3408 & 0.2868 & 0.2721 & 0.3999 & 0.0922 \\ 0.1360 & 0.1333 & 0.1262 & 0.1299 & 0.0826 & 0.0922 & 0.0543 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1}H = \begin{pmatrix} -9.6460 & -10.2867 & -9.5530 & -5.8872 & -6.8445 & -5.5753 & -1.7097 \\ 17.9221 & 19.0510 & 17.7221 & 10.5021 & 12.7432 & 9.0199 & 3.0984 \\ 1.7678 & 1.8590 & 1.7479 & 0.9523 & 1.2733 & 0.5206 & 0.2967 \\ 2.9038 & 3.0531 & 2.8342 & 1.8645 & 1.9478 & 1.3864 & 0.6060 \\ 0.5003 & 0.5347 & 0.5416 & 0.1866 & 0.5553 & 0.3433 & 0.0239 \\ -0.9493 & -0.9981 & -0.9178 & -0.3413 & -0.5874 & 0.3044 & -0.1143 \\ 1.0584 & 1.1056 & 1.0311 & 0.7286 & 0.7238 & 0.6211 & 0.2440 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır.

$E^{-1}H$ matrisinin özdeğerleri $l_1 = 12.8351$, $l_2 = 0.7794$, $l_3 = 0.3510$, $l_4 = 0.1396$, $l_5 = 0.0159$, $l_6 = -0.000007$, $l_7 = -0.0001$ olmak üzere Wilk's Lambda test istatistiği

$$\Lambda = \frac{1}{\left|1+E^{-1}H\right|} = \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{1+l_i}$$

$$= \left(\frac{1}{1+12.8351}\right)\left(\frac{1}{1+0.7794}\right)\left(\frac{1}{1+0.3510}\right)\left(\frac{1}{1+0.1396}\right)\left(\frac{1}{1+0.0159}\right)\left(\frac{1}{1-0.000007}\right)\left(\frac{1}{1-0.001}\right) = 0.0259$$

olarak hesaplanır. Wilk's Lambda tablo değeri $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{p,q,n-q-1} = \Lambda_{7,5,42} = 0,273$ olarak bulunmuş olup; genel regresyon testinde $\Lambda = 0.259 < \Lambda_{3,2,18} = 0.273$ olduğundan H_0 hipotezi red edilir. Açıklayıcı değişkenlerden en az biri model için anlamlıdır.

Oluşturulan çok değişkenli çoklu regresyon modeli için en iyi model seçimini inceleyelim. İlk olarak forward seçim sürecini ele alalım.

Açıklayıcı değişkenler için hesaplanan Wilk's Lambda değerleri,

$$\Lambda(X_1) = 0.269 \qquad \Lambda(X_4) = 0.678$$
$$\Lambda(X_2) = 0.611 \qquad \Lambda(X_5) = 0.754$$
$$\Lambda(X_3) = 0.586$$

olarak hesaplanmıştır. Bu değerlerden minimum Wilk's lamdaya sahip olan değişken ile Forward sürecine başlanır. Tüm Y yanıt değişkenleri modelde iken en küçük Wilk's değeri X_1 açıklayıcı değişkenine aittir. Wilk's tablo değeri ise; $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{7,1,46} = 0.679$ dur. Hesaplanan Wilk's ile tablo değeri karşılaştırıldığında;

$$\Lambda(X_1) = 0.269 < \Lambda_{tablo} = 0.679$$

olduğundan dolayı H_0 red edilir ve X_1 açıklayıcı değişkeni modelde yer almalıdır.

İkinci adımda tüm Y yanıt değişkenleriyle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 açıklayıcı değişkenleri modelde iken hesaplanan Wilk's Lambda istatistiği değerleri

$$\Lambda(X_2 / X_1) = 0.744 \qquad \Lambda(X_4 / X_1) = 0.663$$
$$\Lambda(X_3 / X_1) = 0.179 \qquad \Lambda(X_5 / X_1) = 0.775$$

olarak hesaplanır. Minimum Wilk's değeri X_3 değişkenine ait olan $\Lambda(X_3 / X_1) = 0.179$ değeridir. Wilk's tablo değeri ise $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{7,2,45} = 0.526$ olarak bulunur.

$$\Lambda_{hesap} = 0.179 < \Lambda_{tablo} = 0.526$$

olduğundan dolayı X_3 değişkeni modelde olmalıdır.

X_1 ve X_3 açıklayıcı değişkenleri modelde iken hesaplanan diğer değişkenlere ait Wilk's değerleri;

$$\Lambda(X_2 / X_1, X_3) = 0.755 \quad \Lambda(X_4 / X_1, X_3) = 0.753 \quad \Lambda(X_5 / X_1, X_3) = 0.778$$

olarak hesaplanmıştır. Burada hesaplanan değerler arasındaki minimum Wilk's değerine sahip olan değişken X_4 değişkeni olup; Wilk's tablo değeri olan $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{7,3,44} = 0.417$ ile karşılaştırıldığına;

$$\Lambda_{hesap} = 0.753 > \Lambda_{tablo} = 0.417$$

olduğundan dolayı X_4 değişkeni modelde olmamalıdır. Aynı süreci X_2 değişkeni için uygulandığında;

$$\Lambda(X_2 / X_1, X_3) = \Lambda_{hesap} = 0.755 > \Lambda_{tablo} = 0.417$$

olduğundan dolayı X_2 değişken modelde olmamalıdır. Sürece X_5 ile devam edildiğinde ise hesaplanan Wilk's değeri $\Lambda(X_5 / X_1, X_3) = 0.778$ olarak bulunur. Wilk's tablo değeri ile karşılaştırıldığında,

$$\Lambda_{hesap} = 0.778 > \Lambda_{tablo} = 0.417$$

olduğundan dolayı X_5 modelde yer almamalıdır.

Aynı süreç bu kez Y değişkenleri yanıt değişken olarak değilde açıklayıcı değişken gibi uygulanarak devam edilir. Y açıklayıcı değişkenleri için tek tek Wilk's değerleri hesaplanır.

$$\Lambda(Y_1) = 0.233 \qquad \Lambda(Y_5) = 0.523$$
$$\Lambda(Y_2) = 0.145 \qquad \Lambda(Y_6) = 0.600$$
$$\Lambda(Y_3) = 0.246 \qquad \Lambda(Y_7) = 0.946$$
$$\Lambda(Y_4) = 0.645$$

Bu değerlerden minimum Wilk's değerine sahip olan değişken Y_2 değişkeninin Wilk's değeri olup $\Lambda(Y_2) = 0.145$ olarak bulunur. Bulunan bu değer Wilk's tablo değeriyle $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{5,1,46} = 0.744$ karşılaştırılırsa;

$$\Lambda_{hesap} = 0.145 < \Lambda_{tablo} = 0.744$$

olduğundan dolayı Y_2 değişkeni modelde olmalıdır.

Y_2 değişkeni modelde iken hesaplanan Wilk's değerleri;

$$\Lambda(Y_1 / Y_2) = 0.814 \qquad \Lambda(Y_5 / Y_2) = 0.743$$
$$\Lambda(Y_3 / Y_2) = 0.862 \qquad \Lambda(Y_6 / Y_2) = 0.630$$
$$\Lambda(Y_4 / Y_2) = 0.781 \qquad \Lambda(Y_7 / Y_2) = 0.902$$

buradaki değerler içerisinde minimum değere sahip olan değişken Y_6 değişkeninin sahip olduğu Wilk's değeridir. Bu değer tablo değeri $\Lambda_{p,v_H,v_E} = \Lambda_{5,2,45} = \Lambda_{tablo} = 0.617$ ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.630 > \Lambda_{tablo} = 0.617$$

olduğundan dolayı Y_6 değişkeni modelde yer almamalıdır. Bu sürece devam edildiğinde diğer değişkenlerin Y_1, Y_3, Y_4, Y_5, Y_7 değişkenlerinin modelde olmayacağı görülmektedir.

Forward seçim sürecine göre; X_1 ve X_3 açıklayıcı değişkenleri ile Y_2 yanıt değişkeni modelde yer almalıdır. Ancak X_2, X_4, X_5 ve Y_1, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 değişkenleri modelde yer almamalıdır.

İkinci olarak Backward eleme sürecini ele alalım. Backward eleme süreci; tüm X açıklayıcı değişkenleri ve tüm Y yanıt değişkenleri modelde iken Wilk's Lambda

$$\Lambda\left(X_1 / X_2X_3X_4X_5\right) = 0.101 \qquad \Lambda\left(X_3 / X_1X_2X_4X_5\right) = 0.189$$
$$\Lambda\left(X_2 / X_1X_3X_4X_5\right) = 0.865 \qquad \Lambda\left(X_4 / X_1X_2X_3X_5\right) = 0.866$$
$$\Lambda\left(X_5 / X_1X_2X_3X_4\right) = 0.828$$

Bu değerlerden en büyük Wilk's Lambda değerine sahip değişken ile sürece başlanır. X_4 değişkeni en büyük Wilk's değerine sahip olup; $\Lambda_{7,5,42} = 0.273$ Wilk's tablo değeri ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.866 > \Lambda_{tablo} = 0.273$$

olduğundan dolayı X_4 değişkeni modelden atılır.

Sürece devam edildiğinde hesaplanan Wilk's değerleri

$$\Lambda\left(X_1 / X_2X_3X_5\right) = 0.101 \qquad \Lambda\left(X_3 / X_1X_2X_5\right) = 0.181$$
$$\Lambda\left(X_2 / X_1X_3X_5\right) = 0.802 \qquad \Lambda\left(X_5 / X_1X_2X_3\right) = 0.827$$

olarak bulunur. En büyük Wilk's değeri ise X_5 değişkenine ait olan $\Lambda(X_5 / X_1X_2X_3) = 0.827$ dir. Bu değer tablo değeri $\Lambda_{7,4,43} = 0.335$ ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.827 > \Lambda_{tablo} = 0.335$$

olduğundan dolayı X_5 modelden atılır. Geriye kalan değişkenlerle elde edilen Wilk's değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\Lambda(X_1 / X_2X_3) = 0.106 \qquad \Lambda(X_3 / X_1X_2) = 0.181$$
$$\Lambda(X_2 / X_1X_3) = 0.755$$

Bu değerlerden en büyük Wilk's değerine sahip olan değişken X_2 değişkenidir. Bu değer Wilk's tablo değeri $\Lambda_{7,3,44} = 0.417$ ile karşılaştırıldığında

$$\Lambda_{hesap} = 0.755 > \Lambda_{tablo} = 0.417$$

olduğundan dolayı X_2 değişkeni modelden atılmalıdır. X_1 ve X_3 ile sürece devam edilirse;

$$\Lambda(X_3 / X_1) = 0.179 \qquad \Lambda(X_1 / X_3) = 0.082$$

olarak hesaplanmıştır. Burada büyük Wilk's değeri X_3 değişkeninin sahip olduğu Wilk's değeri olup, tablo değeri $\Lambda_{7,2,42} = 0.526$ ile karşılaştırıldığında

$$\Lambda_{hesap} = 0.179 < \Lambda_{tablo} = 0.526$$

olduğundan dolayı X_3 değişkeni modelde yer almalıdır. X_1 değişkeni için Wilk's değeri ise $\Lambda(X_1 / X_3) = 0.082$ olarak hesaplanmış olup, Wilk's tablo değeri $\Lambda_{7,2,42} = 0.526$ ile karşılaştırılırsa;

$$\Lambda_{hesap} = 0.082 < \Lambda_{tablo} = 0.526$$

olduğundan dolayı X_1 değişkeni modelde yer almalıdır. X_1 ve X_3 değişkenlerin her ikisi de Backward eleme süreci sonunda model için önem arz ettikleri ve modeli açıklamada katkı sağlayacakları görülmüştür.

Backward eleme sürecinde X açıklayıcı değişkenleri için yapılan testi Bölüm 2.9 da gösterildiği gibi Y yanıt değişkenleri, açıklayıcı değişkenler olarak kabul edip analiz ederek Backward eleme sürecini uygulayacağız.

Tüm Y yanıt değişkenleri modelde iken hesaplanan Wilk's Lambda değerleri,

$\Lambda(Y_1 / Y_2Y_3Y_4Y_5Y_6Y_7) = 0.655$
$\Lambda(Y_2 / Y_1Y_3Y_4Y_5Y_6Y_7) = 0.456$
$\Lambda(Y_3 / Y_1Y_2Y_4Y_5Y_6Y_7) = 0906$
$\Lambda(Y_4 / Y_1Y_2Y_3Y_5Y_6Y_7) = 0.611$
$\Lambda(Y_5 / Y_1Y_2Y_3Y_4Y_6Y_7) = 0.807$
$\Lambda(Y_5 / Y_1Y_2Y_3Y_4Y_6Y_7) = 0.807$
$\Lambda(Y_6 / Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5Y_7) = 0.571$
$\Lambda(Y_7 / Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5Y_6) = 0.831$

Burada en büyük Wilk's değerine sahip olan değişken ile sürece başlanır. Y_3 değişkeninin sahip olduğu Wilk's değeri tablo değeri $\Lambda_{5,7,40} = 0.291$ ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.906 > \Lambda_{tablo} = 0.291$$

olduğundan dolayı Y_3 değişkeni modelden atılır. Sürece devam edildiğinde elde edilen Wilk's değerleri

$$\Lambda\left(Y_1 / Y_2Y_4Y_5Y_6Y_7\right) = 0.645 \qquad \Lambda\left(Y_5 / Y_1Y_2Y_4Y_6Y_7\right) = 0.774$$
$$\Lambda\left(Y_2 / Y_1Y_4Y_5Y_6Y_7\right) = 0.388 \qquad \Lambda\left(Y_6 / Y_1Y_2Y_4Y_5Y_7\right) = 0.602$$
$$\Lambda\left(Y_4 / Y_1Y_2Y_5Y_6Y_7\right) = 0.618 \qquad \Lambda\left(Y_7 / Y_1Y_2Y_4Y_5Y_6\right) = 0.825$$

olarak bulunmuştur. En büyük Wilk's değeri Y_7 değişkenine ait olan $\Lambda\left(Y_7 / Y_1Y_2Y_4Y_5Y_6\right) = 0.825$ dir. Bu değer tablo değeri $\Lambda_{6,5,41} = 0.333$ ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.825 > \Lambda_{tablo} = 0.333$$

olduğundan dolayı Y_7 değişkeni modelden atılır. Sürece devam edildiğinde Wilk's değerleri;

$$\Lambda\left(Y_1 / Y_2Y_4Y_5Y_6\right) = 0.678 \qquad \Lambda\left(Y_5 / Y_1Y_2Y_4Y_6\right) = 0.769$$
$$\Lambda\left(Y_2 / Y_1Y_4Y_5Y_6\right) = 0.418 \qquad \Lambda\left(Y_6 / Y_1Y_2Y_4Y_5\right) = 0.604$$
$$\Lambda\left(Y_4 / Y_1Y_2Y_5Y_6\right) = 0.672$$

olarak bulunur. En büyük Wilk's değeri Y_5 değişkenine ait olan $\Lambda\left(Y_5 / Y_1Y_2Y_4Y_6\right) = 0.769$ dur. Bulunan bu değer tablo değeri $\Lambda_{5,5,42} = 0.384$ ile karşılaştırıldığında;

$$\Lambda_{hesap} = 0.769 > \Lambda_{tablo} = 0.384$$

olduğundan dolayı Y_5 değişkeni modelden atılır. Diğer değişkenlerin hesaplanan Wilk's değerleri

$$\Lambda\left(Y_1 / Y_2 Y_4 Y_6\right) = 0.669 \qquad \Lambda\left(Y_4 / Y_1 Y_2 Y_6\right) = 0.634$$
$$\Lambda\left(Y_2 / Y_1 Y_4 Y_6\right) = 0.393 \qquad \Lambda\left(Y_6 / Y_1 Y_2 Y_4\right) = 0.606$$

olarak hesaplanmıştır. En büyük Wilk's değerine sahip değişken ise Y_1 değişkeni olup; bu değer tablo değeri $\Lambda_{5,4,43} = 0.446$ ile karşılaştırılırsa;

$$\Lambda_{hesap} = 0.669 > \Lambda_{tablo} = 0.446$$

olduğundan dolayı Y_1 değişkeni modelden atılmalıdır. Geriye kalan değişkenlerin Wilk's değerleri;

$$\Lambda\left(Y_2 / Y_4 Y_6\right) = 0.148$$
$$\Lambda\left(Y_4 / Y_2 Y_6\right) = 0.742$$
$$\Lambda\left(Y_6 / Y_2 Y_4\right) = 0.598$$

olarak bulunur. Bu değerlerin en büyüğü Y_4 değişkenine ait olan Wilk's değeri, tablo değeri $\Lambda_{5,3,44} = 0.522$ ile karşılaştırıldığında

$$\Lambda_{hesap} = 0.742 > \Lambda_{tablo} = 0.522$$

olduğundan dolayı Y_4 değişkeni modelden atılır. Geriye kalan değişkenlerin hesaplanan Wilk's değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\Lambda\left(Y_2 / Y_6\right) = 0.152 \qquad \Lambda\left(Y_6 / Y_2\right) = 0.630$$

Büyük Wilk's değerine sahip olan Y_6 değişkenini, tablo değeri $\Lambda_{5,2,45} = 0.617$ ile karşılaştırıldığında,

$$\Lambda_{hesap} = 0.630 > \Lambda_{tablo} = 0.617$$

olduğundan Y_6 değişkeni modelden atılır. Geriye kalan Y_2 değişkenine ait olan Wilk's değeri $\Lambda(Y_2) = 0.145$ olarak bulunur. Bu değer tablo değeri $\Lambda_{5,1,46} = 0.744$ ile karşılaştırıldığında,

$$\Lambda_{hesap} = 0.145 < \Lambda_{tablo} = 0.744$$

olduğundan dolayı Y_2 değişkeni modelde yer almalıdır.

Backward sürecine göre; X_1 ve X_3 açıklayıcı değişkenleri ile Y_2 yanıt değişkeni modelde yer almalıdır. Ancak X_2, X_4, X_5 açıklayıcı değişkenleri ve $Y_1, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7$ değişkenlerinin modele katkı sağlamadıkları belirlenmiştir.

Forward ve Backward süreçlerinin sonunda, X_1 ve X_3 açıklayıcı değişkenleri ile Y_2 yanıt değişkeni modelde yer almalı, ancak X_2, X_4, X_5 açıklayıcı değişkenleri ve $Y_1, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7$ değişkenlerinin modele her iki süreç sonunda da katkı sağlamadıkları belirlenmiştir.

Forward ve Backward süreçlerinin ışığında Stepwise süreci ile de benzer sonuçların bulunduğu görülmüştür.

En iyi model seçimine göre yanıt değişken Y_2 ve açıklayıcı değişkenler X_1 ve X_3 olarak alınır. Bu en iyi modelin analizinde sonuç olarak; çoklu belirleyicilik katsayısı $R^2 = 0.916$ olarak bulunmuştur. Bu durumda açıklayıcı değişkenler yanıt değişkenleri % 91 oranında açıkladığı belirlenir. En iyi modelin R^2 değeri tam modelden daha iyi bir sonuç vermiştir.

Seçim süreçlerinden elde edilen değişkenlerle oluşturulan modelin hata kareler ortalaması

$$HKO = 0.004$$

olarak hesaplanmıştır. Bu değerin küçük olması tercih edilmektedir.

Başka bir model seçim kriteri olan C_p değeri için hesaplama şekli aşağıdaki gibidir:

$$C_p = \frac{HKT}{HKO} - n + 2p$$

Buradaki eşitlikten elde edilen C_p değeri;

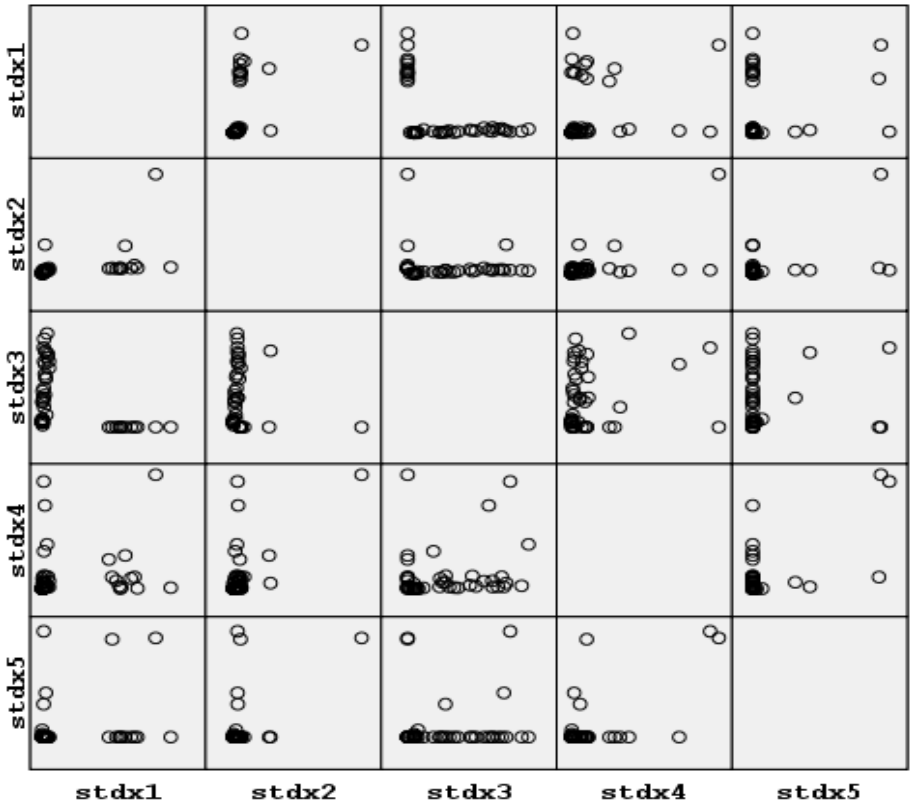
$$C_p = \frac{0.161}{0.004} - 48 + 2 = -5.75$$

olarak hesaplanmıştır.

C_p değeri, çoklu belirleyicilik katsayısı, hata kareler ortalaması ve değişken seçim süreçleri ışığında en iyi modelin değişkenlerinin, yani modeli açıklamakta ve modele maksimum katkı sağlayan değişkenler X_1, X_3 açıklayıcı değişkenleri ve Y_2 yanıt değişkeninin oluşturduğu model en iyi model olarak kabul edilir.

Aynı veri kümesine kanonik korelasyon uygulayarak Büyükşehir Belediyesi gelir ve gider arasındaki ilişkiyi inceleyelim: Hesaplamalardan önce tüm veriler standartlaştırılmıştır.

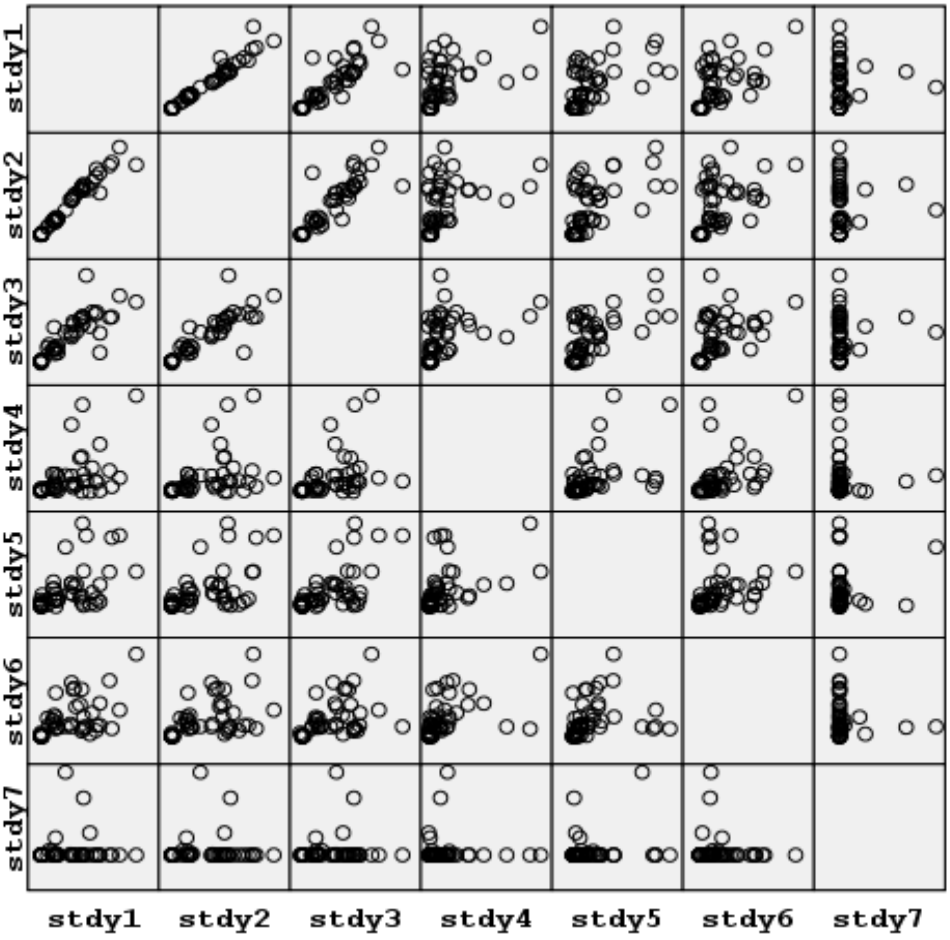
$$S_{xx} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.4565 & -0.4886 & 0.1838 & 0.2032 \\ 0.4565 & 1.0000 & -0.0838 & 0.5865 & 0.4906 \\ -0.4886 & -0.0838 & 1.0000 & 0.2070 & 0.0598 \\ 0.1838 & 0.5865 & 0.2070 & 1.0000 & 0.6280 \\ 0.2032 & 0.4906 & 0.0598 & 0.6280 & 1.0000 \end{pmatrix}$$



Şekil 7.1.X Değerlerinin Saçılım Grafiği

X değişkenlerinin korelasyon matrisine göre; X_2 (Teşebbüs ve Mülkiyet Geliri) ve X_4 (Sermaye Gelirleri), X_2 (Teşebbüs ve Mülkiyet Geliri)ve X_5 (Alınan Bağış ve Yardımlar) değişkenleri arasında orta güçte bir ilişki vardır.

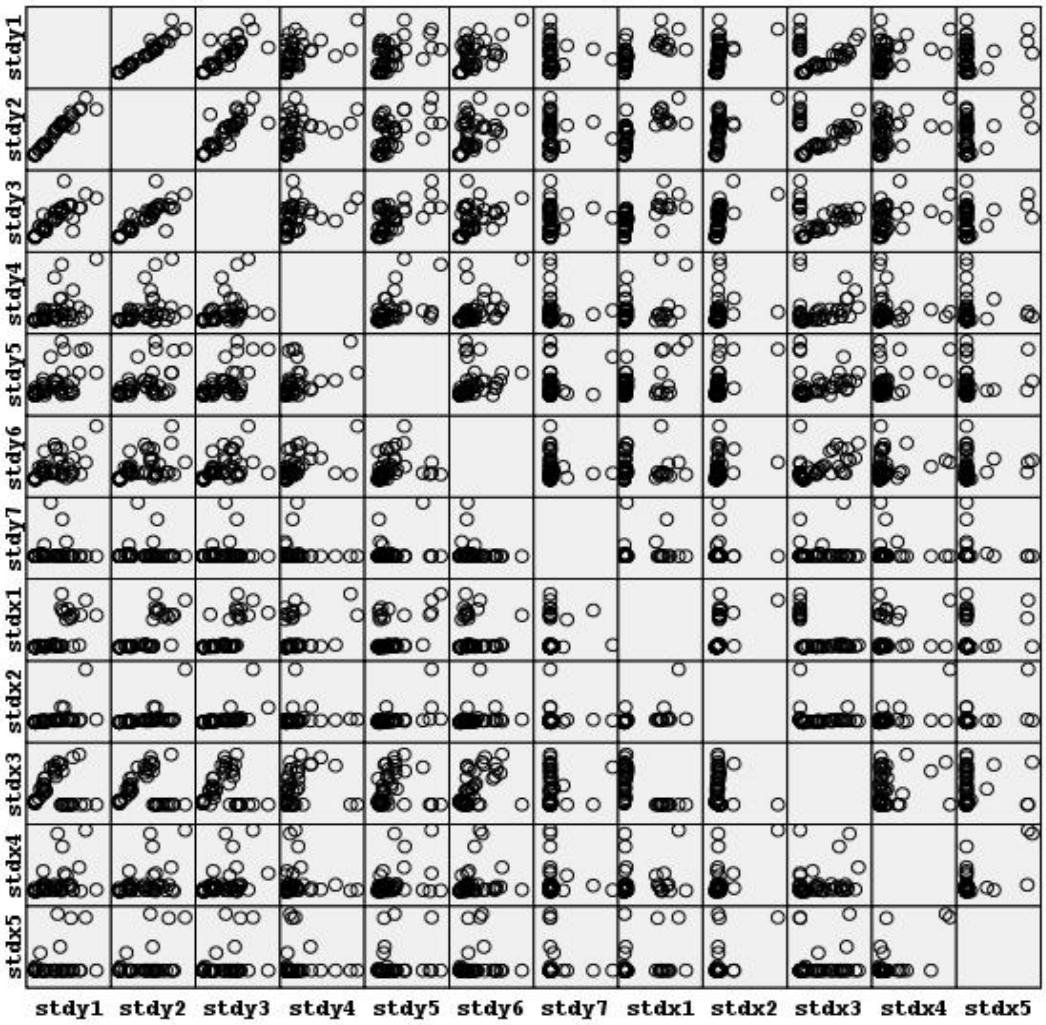
$$S_{yy} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.9738 & 0.8353 & 0.5112 & 0.5394 & 0.5586 & 0.0431 \\ 0.9738 & 1.0000 & 0.8659 & 0.4237 & 0.5539 & 0.4902 & 0.0520 \\ 0.8353 & 0.8659 & 1.0000 & 0.4221 & 0.6377 & 0.4719 & 0.1046 \\ 0.5112 & 0.4237 & 0.4221 & 1.0000 & 0.4587 & 0.4994 & -0.0365 \\ 0.5394 & 0.5539 & 0.6377 & 0.4587 & 1.0000 & 0.2221 & 0.1450 \\ 0.5586 & 0.4902 & 0.4719 & 0.4994 & 0.2221 & 1.0000 & -0.1035 \\ 0.0431 & 0.0520 & 0.1046 & -0.0365 & 0.1450 & -0.1035 & 1.0000 \end{pmatrix}$$



Şekil 7.2.Y Değerlerinin Saçılım Grafiği

Y değişkenlerinin korelasyon matrisine göre; Y_1 (Personel Giderleri) ve Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Prim Giderleri), Y_1 (Personel Giderleri) ve Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri), Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Prim Giderleri) ve Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) değişkenleri arasında çok güçlü bir ilişki vardır.

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 0.6924 & 0.7292 & 0.6867 & 0.3220 & 0.4884 & 0.0222 & 0.0983 \\ 0.4395 & 0.4951 & 0.5006 & 0.0967 & 0.4967 & 0.1795 & -0.0338 \\ 0.1249 & 0.1270 & 0.1144 & 0.2256 & 0.1021 & 0.5299 & 0.0797 \\ 0.3760 & 0.4272 & 0.3960 & -0.0103 & 0.3843 & 0.1869 & -0.0517 \\ 0.2809 & 0.3609 & 0.2943 & -0.0286 & 0.1710 & 0.0941 & -0.0797 \end{pmatrix}$$



Şekil 7.3.X ve Y Değerlerinin Saçılım Grafiği

X ve Y değişkenlerinin korelasyon matrisine göre; X_1 (Vergi Gelirleri) ve Y_1 (Personel Giderleri), X_1 (Vergi Gelirleri) ve Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Prim Giderleri), X_1 (Vergi Gelirleri) ve Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) değişkenleri arasında güçlü bir ilişki vardır.

X ve Y değişkenlerine ait kanonik değişkenler yani lineer kombinasyonlar ise

	V1	V2	V3	V4	V5
Y1	0.4683	-0.7042	-0.8308	-0.6459	0.2425
Y2	–0.8654	0.5621	0.4225	0.7519	-0.3169
Y3	-0.0844	-0.1499	0.2583	-0.0813	-0.0490
Y4	-0.1399	0.0480	0.2206	-0.0019	-0.6136
Y5	-0.0233	0.0566	0.0686	-0.0931	0.6073
Y6	0.0450	0.3927	-0.0776	0.0152	0.2055
Y7	-0.0507	0.0773	-0.0718	-0.0429	-0.2255

	U1	U2	U3	U4	U5
X1	0.8488	-0.2092	-0.1309	0.1664	-0.4790
X2	0.0321	0.3113	0.6869	0.1815	0.5191
X3	0.5232	0.8698	-0.0374	0.0994	-0.2996
X4	0.0008	-0.3184	-0.7040	0.2457	0.5877
X5	0.0687	0.0378	0.1184	-0.9323	-0.2568

$$V1 = 0.4683Y_1 - 0.8654Y_2 - 0.0844Y_3 - 0.1399Y_4 - 0.0233Y_5 + 0.0450Y_6 - 0.0507Y_7$$
$$V2 = -0.7042Y_1 + 0.5621Y_2 - 0.1499Y_3 + 0.0480Y_4 + 0.0566Y_5 + 0.3927Y_6 + 0.0773Y_7$$
$$V3 = -0.8308Y_1 + 0.4225Y_2 + 0.2583Y_3 + 0.2206Y_4 + 0.0686Y_5 - 0.0776Y_6 - 0.0718Y_7$$
$$V4 = -0.6459Y_1 + 0.7519Y_2 - 0.0813Y_3 - 0.0019Y_4 - 0.0931Y_5 + 0.0152Y_6 - 0.0429Y_7$$
$$V5 = 0.2425Y_1 - 0.3169Y_2 - 0.0490Y_3 - 0.6136Y_4 + 0.6073Y_5 + 0.2055Y_6 - 0.2255Y_7$$

$$U1 = 0.8488X_1 + 0.0321X_2 + 0.5232X_3 + 0.0008X_4 + 0.0687X_5$$
$$U2 = -0.2092X_1 + 0.3113X_2 + 0.8698X_3 - 0.3184X_4 + 0.0378X_5$$
$$U3 = -0.1309X_1 + 0.6869X_2 - 0.0374X_3 - 0.7040X_4 + 0.1184X_5$$
$$U4 = 0.1664X_1 + 0.1815X_2 + 0.0994X_3 + 0.2457X_4 - 0.9323X_5$$
$$U5 = -0.4790X_1 + 0.5191X_2 - 0.2996X_3 + 0.5877X_4 - 0.2568X_5$$

şeklindedir.

S kovaryans matrisi $S_{yy}, S_{xx}, S_{yx}, S_{xy}$ olarak parçalanabilir. Bu parçalanmış matristen U ve V kanonik değişkenleri arasındaki korelasyon ve kanonik korelasyonlar bulunabilir.

$$\left|S_{yy}^{-1}S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}-r^2I\right|=0$$
$$\left|S_{xx}^{-1}S_{xy}S_{yy}^{-1}S_{yx}-r^2I\right|=0$$

Bu denklemlerden elde edilen özdeğerler $r_1^2=0.9277$, $r_2^2=0.4380$, $r_3^2=0.2598$, $r_4^2=0.1226$ ve $r_5^2=0.0157$ olarak bulunur. Bu özdeğerler U ve V kanonik değişkenleri arasındaki korelasyonlardır. Bu özdeğerlerin kökleri ise $r_1=0.9632$, $r_2=0.6618$, $r_3=0.1251$, $r_4=0.3501$ ve $r_5=0.5097$ olarak bulunur ve bu değerler kanonik korelasyonlar olarak adlandırılır.

$r_1^2=0.9277$ en büyük korelasyon için U_1 ve V_1 kanonik değişkenleri arasındaki kanonik korelasyon ise

$$r\left(U_1,V_1\right)=\frac{Cov\left(U_1,V_1\right)}{\sqrt{Var\left(U_1\right)Var\left(V_1\right)}}=\frac{a_1^{'}S_{xy}b_1}{\sqrt{a_1^{'}S_{xx}a_1b_1^{'}S_{yy}b_1}}=0.9632$$

olarak hesaplanmıştır.

$r_2^2=0.4380$ için U_2 ve V_2 kanonik değişkenleri arasındaki kanonik korelasyon ise

$$r\left(U_2,V_2\right)=\frac{Cov\left(U_2,V_2\right)}{\sqrt{Var\left(U_2\right)Var\left(V_2\right)}}=\frac{a_2^{'}S_{xy}b_2}{\sqrt{a_2^{'}S_{xx}a_2b_2^{'}S_{yy}b_2}}=0.6618$$

olarak bulunmuştur.

$r_3^2=0.2598$ için U_3 ve V_3 kanonik değişkenleri arasındaki kanonik korelasyon ise

$$r\left(U_3,V_3\right)=\frac{Cov\left(U_3,V_3\right)}{\sqrt{Var\left(U_3\right)Var\left(V_3\right)}}=\frac{a_3^{'}S_{xy}b_3}{\sqrt{a_3^{'}S_{xx}a_3b_3^{'}S_{yy}b_3}}=0.5097$$

olarak hesaplanmıştır.

$r_4^2 = 0.1226$ için U_4 ve V_4 kanonik değişkenleri arasındaki kanonik korelasyon ise

$$r(U_4, V_4) = \frac{Cov(U_4, V_4)}{\sqrt{Var(U_4)Var(V_4)}} = \frac{a_4' S_{xy} b_4}{\sqrt{a_4' S_{xx} a_4 b_4' S_{yy} b_4}} = 0.3501$$

olarak hesaplanır.

$r_5^2 = 0.0157$ için U_5 ve V_5 kanonik değişkenleri arasındaki kanonik korelasyon ise

$$r(U_5, V_5) = \frac{Cov(U_5, V_5)}{\sqrt{Var(U_5)Var(V_5)}} = \frac{a_5' S_{xy} b_5}{\sqrt{a_5' S_{xx} a_5 b_5' S_{yy} b_5}} = 0.1251$$

olarak bulunmuştur.

Kanonik korelasyonun katsayılarının önem testi yapılmak istenirse H_0 hipotezi aşağıdaki gibidir:

$H_0 : r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0$
$H_1 : r_i \neq 0, \exists\, i \;\; için$

H_0 hipotezinin test edilmesi için Wilk's lamda test istatistiği hesaplanabilir. Ayrıca her bir kanonik korelasyonkatsayısının önemliliği için gerekli Wilk's Lambda test istatistikleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

	Wilk's	**Chi - SQ**	**DF**	**Sig**
1	0.026	147.861	35	0
2	0.359	41.459	24	0.015
3	0.639	18.119	15	0.256
4	0.864	5.934	8	0.655
5	0.984	0.639	3	0.888

$H_0 : r_1 = 0$, $H_1 : r_1 \neq 0$ hipotezinin test edilmesi için Wilk's Lambda test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\Lambda_1 = \prod_{i=1}^{5}\left(1-r_i^2\right) = (1-0.9277)(1-0.4380)(1-0.2598)(1-0.1226)(1-0.0157)$$
$$\Lambda_1 = 0.026$$

olarak hesaplanmıştır. $\Lambda_1 = 0.026 < \Lambda_{tablo} = 0.273$ olduğundan dolayı H_0 hipotezi red edilir. Bu durumda; r_1 sıfırdan farklıdır.

$H_0 : r_2 = 0$, $H_1 : r_2 \neq 0$ hipotezinin test edilmesi için Wilk's Lambda test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\Lambda_2 = \prod_{i=2}^{5}\left(1-r_i^2\right) = (1-0.4380)(1-0.2598)(1-0.1226)(1-0.0157)$$
$$\Lambda_2 = 0.359$$

olarak bulunur. $\Lambda_2 = 0.359 < \Lambda_{tablo} = 0.467$ olduğundan dolayı H_0 hipotezi red edilir. Bu durumda r_2 sıfırdan farklıdır.

$H_0 : r_3 = 0$, $H_1 : r_3 \neq 0$ hipotezinin test edilmesi için Wilk's Lambda test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\Lambda_3 = \prod_{i=3}^{5}\left(1-r_i^2\right) = (1-0.2598)(1-0.1226)(1-0.0157) = 0.639$$

olarak bulunur. $\Lambda_3 = 0.639 > \Lambda_{tablo} = 0.522$ olduğundan dolayı H_0 hipotezi kabul edilir. Bu durumda, sürece devam edilemez. Sonuç olarak; r_1 ve r_2 sıfırdan farklı ancak r_3, r_4 ve r_5 sıfıra eşittir.

Bu sonuçlar ışığında ilk iki kanonik korelasyon sıfırdan farklı ve önemli olduğu sonucuna varılır. *U* ve *V* lineer kombinasyonları arasındaki ilişki için $U_1 - V_1$

ve $U_2 - V_2$ arasındaki ilişki önemli ancak $U_3 - V_3$, $U_4 - V_4$ ve $U_5 - V_5$ lineer kombinasyonları arasında önemli olmayan ilişki vardır. $U_1 - V_1$ ve $U_2 - V_2$ her iki küme içerisinde değişkenleri en çok açıklayan kanonik değişkenlerdir**.** Yani U_1 kanonik değişkenini (X_1) vergi gelirleri %84 ve (X_2) teşebbüs mülkiyet geliri %3, U_2 kanonik değişkenini ise sırasıyla (X_1) vergi gelirleri negatif yönde %20 ve (X_2) teşebbüs mülkiyet geliri %31; V_1 kanonik değişkenini (Y_1) personel giderleri %47 ve (Y_2) sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri negatif yönde %86, V_2 kanonik değişkenini ise (Y_1) personel giderleri negatif yönde %70 ve (Y_2) sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri %56 etkilemektedirler.

Kanonik korelasyon analizi ve temel bileşenler analizinin çok değişkenli çoklu regresyon ile ilişkisini inceleyelim:

Kanonik korelasyon analizine göre; $S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}, S_{yx}$ matrisleri kullanılarak; $S_{xx}^{-1}S_{xy}S_{yy}^{-1}S_{yx}$ veya $S_{yy}^{-1}S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}$ matrislerinden aynı özdeğerler elde edilir. Bulunan özdeğerlerden maksimum olanına ait olan özvektör ile hangi değişkenlerin önem arz ettiği bulunabilir.

Sonra maksimum özdeğere ait kanonik korelasyon değeri

$$l = 0.9632$$

olarak bulunur. Bu özdeğer yardımıyla minimum

$$g_{\min} = 1 - l_{\max} = 1 - 0.9632 = 0.0368$$

değeri bulunabilir. Bu değer yardımıyla,

$$LS_{\min} = 2 \cdot g_{\min} = 2(0.0368) = 0.0736$$

değeri elde edilir.

$S_{xx}^{-1}S_{xy}S_{yy}^{-1}S_{yx}$ için $l_{\max}^2 = 0.9277$ maksimum özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.8488 \\ 0.0321 \\ 0.5232 \\ 0.0008 \\ 0.0687 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur ve $S_{yy}^{-1}S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}$ için $l_{\max}^2 = 0.9277$ maksimum özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$b_1 = \begin{pmatrix} -0.4683 \\ 0.8654 \\ 0.0844 \\ 0.1399 \\ 0.0233 \\ -0.0450 \\ 0.0507 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

a_1 ve b_1 özvektörlerine göre; a_1 özvektörü için X_1 (Vergi Gelirleri) ve X_3 (Diğer Gelirler) X değişkenlerini açıklamakta önemli bir yere sahip olup, gelir bütçesinde en fazla getirisi olan gelirler olarak değerlendirilebilir. b_1 için ise ve Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri Giderleri) Y değişkenlerini açıklamakta önemli bir yere sahip olup, gider bütçesinde önemli giderler olarak göze çarpmaktadır. En fazla harcamanın yapıldığı değişkenler olarak değerlendirilebilir. Bu durumda, belediye sınırları içerisinde alınan vergiler ve genel bütçeden alınan paylar buna ek olarak diğer gelirler, kurumda çalışan personelin sosyal güvenlik kurumuna yapılan ödemelere harcanmakta olduğu yorumu yapılabilir.

Genel bütçe kapsamında X_1 , X_3 ve Y_2 değişkenleri genel bütçenin açıklanmasında yada değerlendirilmesinde göze çarpan değişkenlerdir.

Lipovetsky, Tishler ve Conklin (2002) makalesindeki sonuçları uygulama üzerinde görmek amacıyla (5.15) eşitliğindeki S korelasyon matrisi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$S=\begin{pmatrix}
1.0000 & 0.4565 & -0.4886 & 0.1838 & 0.2032 & -0.6924 & -0.7292 & -0.6867 & -0.3220 & -0.4884 & -0.0222 & -0.0983 \\
0.4565 & 1.0000 & -0.0838 & 0.5865 & 0.4906 & -0.4395 & -0.4951 & -0.5006 & -0.0967 & -0.4967 & -0.1795 & 0.0338 \\
-0.4886 & -0.0838 & 1.0000 & 0.2070 & 0.0598 & -0.1249 & -0.1270 & -0.1144 & -0.2256 & -0.1021 & -0.5299 & -0.0797 \\
0.1838 & 0.5865 & 0.2070 & 1.0000 & 0.6280 & -0.3760 & -0.4272 & -0.3960 & 0.0103 & -0.3843 & -0.1869 & 0.0517 \\
0.2032 & 0.4906 & 0.0598 & 0.6280 & 1.0000 & -0.2809 & -0.3609 & -0.2943 & 0.0286 & -0.1710 & -0.0941 & 0.0797 \\
-0.6924 & -0.4395 & -0.1249 & -0.3760 & -0.2809 & 1.0000 & 0.9738 & 0.8353 & 0.5112 & 0.5394 & 0.5586 & 0.0431 \\
-0.7292 & -0.4951 & -0.1270 & -0.4272 & -0.3609 & 0.9738 & 1.0000 & 0.8659 & 0.4237 & 0.5539 & 0.4902 & 0.0520 \\
-0.6867 & -0.5006 & -0.1144 & -0.3960 & -0.2943 & 0.8353 & 0.8659 & 1.0000 & 0.4221 & 0.6377 & 0.4719 & 0.1046 \\
-0.3220 & -0.0967 & -0.2256 & 0.0103 & 0.0286 & 0.5112 & 0.4237 & 0.4221 & 1.0000 & 0.4587 & 0.4994 & -0.0365 \\
-0.4884 & -0.4967 & -0.1021 & -0.3843 & -0.1710 & 0.5394 & 0.5539 & 0.6377 & 0.4587 & 1.0000 & 0.2221 & 0.1450 \\
-0.0222 & -0.1795 & -0.5299 & -0.1869 & -0.0941 & 0.5586 & 0.4902 & 0.4719 & 0.4994 & 0.2221 & 1.0000 & -0.1035 \\
-0.0983 & 0.0338 & -0.0797 & 0.0517 & 0.0797 & 0.0431 & 0.0520 & 0.1046 & -0.0365 & 0.1450 & -0.1035 & 1.0000
\end{pmatrix}$$

Temel bileşenler analizine göre; S matrisinin sahip olduğu özdeğerlerden maksimum olanı tercih edilir. Bu maksimum özdeğerin sahip olduğu özvektöre göre X ve Y değişkenlerinin önemli olanları belirlenebilir. $l^2_{\max}=5.0883$ olarak bulunur. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör,

$$V_1 = \begin{cases} a_1 = \begin{pmatrix} 0.3150 \\ 0.2912 \\ 0.0602 \\ 0.2492 \\ 0.1999 \end{pmatrix} \\ b_1 = \begin{pmatrix} 0.4074 \\ 0.4148 \\ 0.4013 \\ 0.2326 \\ 0.3185 \\ 0.2351 \\ 0.0224 \end{pmatrix} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Buna göre, X değişkenleri içerisinde X_1 (Vergi Gelirleri), X_2 (Teşebbüs ve Mülkiyet Gelirleri) ve önemli olan açıklayıcı değişkenler ve Y yanıt değişkenleri içerisinde önemli olan değişkenler Y_1 (Personel Giderleri), Y_2 (Sosyal Güvenlik Kurumlarına Devlet Primleri Giderleri) ve Y_3 (Mal ve Hizmet Alım Giderleri) tür. Belediyenin topladığı gelirler içerisinde belediye sınırları içerisinde alınan vergiler, belediyenin kendi bünyesinde kurulan şirketlerden gelen sermaye gelirleri, personelin maaşlarına, tazminatlarına, sosyal güvenlik kurumu için ödenen primlere ve belediyenin yatırım yada diğer hizmet durumları için yaptığı mal ve hizmet için yapılan giderlere harcandığı söylenebilir. Yani genel bütçenin açıklanmasında ve bütçeyi oluşturan değişkenler olarak X_1, X_2, Y_1, Y_2 ve Y_3 temel olarak alınabilir. Fakat Y_1, Y_2 ve Y_3 karşılaştırıldığında Y_1 ve Y_3 ün etkilerinin birbirine yakın ancak Y_2 nin biraz daha etkin olduğu görülmüştür.

Çok değişkenli çoklu regresyon, kanonik korelasyon ve temel bileşenler analizlerinin ekk ile ilişkisi incelendiğinde bu üç yöntem sonucunda varılan sonuç; açıklayıcı değişkenler kümesinde önemli olan değişkenler (X_1) vergi gelirleri ve (X_3) diğer gelirler, yanıt değişkenler kümesinde önemli olan değişken ise (Y_2) sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri olarak belirlenir.

UYGULAMA 2

İkinci uygulamada kullanılacak olan veri Khuri'den (1986) alınmıştır. Khuri (1986) makalesinde; çoklu iç ilişkinin etkisiyle ilgili çok değişkenli testleri ve Σ varyans–kovaryans matrisinin yapısına çoklu iç ilişkinin etkisini incelemiştir. Veriler 1935–1954 yılları arasında 10 Amerikan şirketinin brüt yatırımlarını içeren veri gurubundan seçilmiştir. Bu şirketler endüstrinin aynı iş kolunda faaliyet göstermektedir. Bu şirketlerin yanıt modellerinin ilişkili olduğunu düşünmenin mantıklı olduğunu Boot ve De Wit (1960) tarafından önerilmiştir. Bu şirketler ise General Electric, IBM ve Westinghouse şirketleridir. Değişkenler ise

$\mathbf{X_{1i}}$ **= i - inci Şirketin her yıl için hisse senedi değeri**

$\mathbf{X_{2i}}$ **= i - inci Şirketin aynı zamandaki sermaye stok değeri**

$\mathbf{Y_i}$ **= Bir yıl içindeki i - inci şirketin mevcut brüt yatırım değeri** , $(i = 1,2,3)$

şeklinde tanımlanabilir.

$$\mathbf{X} = 1\times 10^{3}$$

	General Electric		IBM		Westinghouse	
	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	X_{4i}	X_{5i}	X_{6i}
0.0010	1.1706	0.0978	0.1970	0.0065	0.1915	0.0018
0.0010	2.0158	0.1044	0.2103	0.0158	0.5160	0.0008
0.0010	2.8033	0.1180	0.2231	0.0277	0.7290	0.0074
0.0010	2.0397	0.1562	0.2167	0.0392	0.5604	0.0181
0.0010	2.2562	0.1726	0.2864	0.0486	0.5199	0.0235
0.0010	2.1322	0.1866	0.2980	0.0525	0.6285	0.0265
0.0010	1.8341	0.2209	0.2769	0.0615	0.5371	0.0362
0.0010	1.5880	0.2878	0.2726	0.0805	0.5612	0.0608
0.0010	1.7494	0.3199	0.2874	0.0944	0.6172	0.0844
0.0010	1.6872	0.3213	0.3303	0.0926	0.6267	0.0912
0.0010	2.0077	0.3196	0.3244	0.0923	0.7372	0.0924
0.0010	2.2083	0.3460	0.4019	0.0942	0.7605	0.0860
0.0010	1.6567	0.4564	0.4074	0.1114	0.5814	0.1111
0.0010	1.6044	0.5434	0.4092	0.1274	0.6623	0.1306
0.0010	1.4318	0.6183	0.4822	0.1493	0.5838	0.1418
0.0010	1.6105	0.6474	0.6738	0.1644	0.6352	0.1367
0.0010	1.8194	0.6713	0.6769	0.1772	0.7238	0.1297
0.0010	2.0797	0.7261	0.7020	0.2000	0.8641	0.1455
0.0010	2.3716	0.8003	0.7935	0.2115	1.1935	0.1748
0.0010	2.7599	0.8889	0.9273	0.2387	1.1889	0.2135

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \textbf{General Electric} & \textbf{IBM} & \textbf{Westinghouse} \\ \mathbf{Y_1} & \mathbf{Y_2} & \mathbf{Y_3} \\ 33.1000 & 20.3600 & 12.9300 \\ 45.0000 & 25.9800 & 25.9000 \\ 77.2000 & 25.9400 & 35.0500 \\ 44.6000 & 27.5300 & 22.8900 \\ 48.1000 & 24.6000 & 18.8400 \\ 74.4000 & 28.5400 & 28.5700 \\ 113.0000 & 43.4100 & 48.5100 \\ 91.9000 & 42.8100 & 43.3400 \\ 61.3000 & 27.8400 & 37.0200 \\ 56.8000 & 32.6000 & 37.8100 \\ 93.6000 & 39.0300 & 39.2700 \\ 159.9000 & 50.1700 & 53.4600 \\ 147.2000 & 51.8500 & 55.5600 \\ 146.3000 & 64.0300 & 49.5600 \\ 98.3000 & 68.1600 & 32.0400 \\ 93.5000 & 77.3400 & 32.2400 \\ 135.2000 & 95.3000 & 54.3800 \\ 157.3000 & 99.4900 & 71.7800 \\ 179.5000 & 127.5200 & 90.0800 \\ 189.6000 & 135.7200 & 68.6000 \end{pmatrix}$$

Khuri'nin (1986) çalışmasında analizler ham ver üzerinde yapılmıştır ve koşul sayısı 14514 olarak bulunmuştur. Standartlaştırmanın çoklu iç ilişkinin etkisini azaltacağı düşüncesi ile bu çalışmada veriler önce standartlaştırılmış, daha sonra analizler yapılmıştır.

$$Koşul\ Sayısı = K(X) = \left(\frac{l_{\max}}{l_{\min}} \right)^{1/2} = 28.3444$$

olarak belirlenmiştir. Bulunan bu değer 30 a yakın olduğundan çoklu iç ilişkinin olduğu kabul edilebilir. $\hat{\mathrm{B}}$ ekk tahminler matrisi ise,

$$\hat{B}_{EKK} = \begin{pmatrix} 0.0531 & -0.1891 & -0.5214 \\ 1.5107 & 1.3317 & 0.7403 \\ -0.3607 & 0.4831 & -0.5085 \\ -0.7835 & -0.6167 & 0.5131 \\ 0.4617 & 0.4984 & 1.3694 \\ 0.0759 & -0.5913 & -0.9700 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Tahminlerdeki negatif değerler çok ilişkinin varlığını göstermektedir. Çoklu iç ilişkinin varlığı durumunda ridge regresyon tahmin edici yöntemi kullanılabilir.

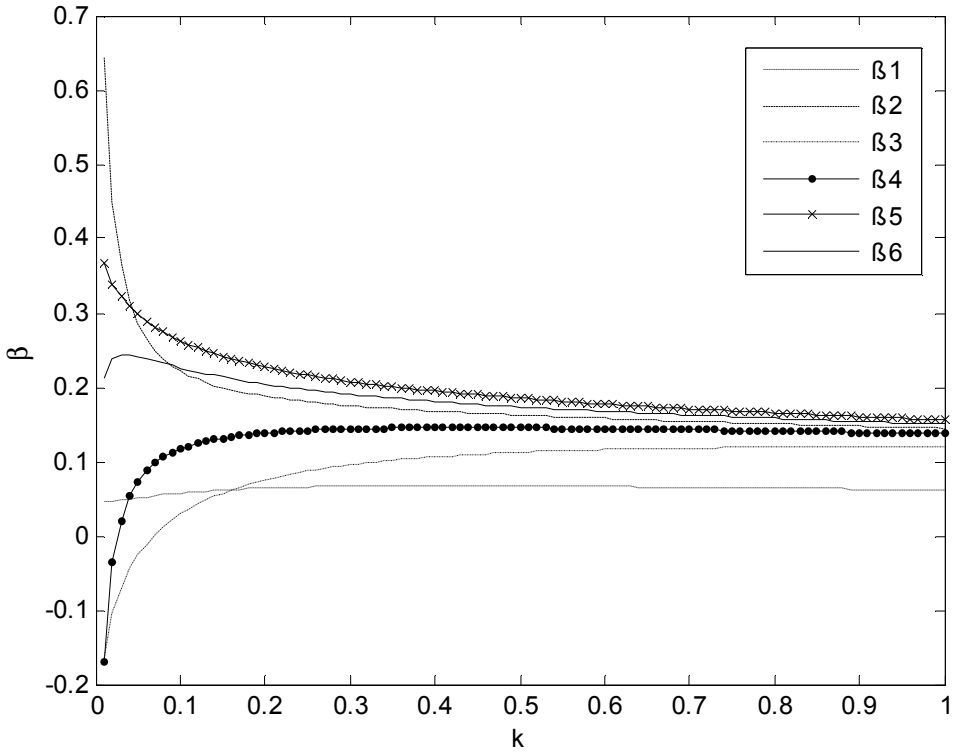
Ridge regresyon yöntemini Breidman ve Friedman'ın (1997) önerdiği gibi her y yanıt değişkeni için ayrı ayrı uygulanacaktır. Birinci model olarak $Y_1 = Xb^{(1)} + e^{(1)}$ alınsın. Bu model için elde edilen ekk tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{b}_{EKK}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0531 \\ 1.5107 \\ -0.3607 \\ -0.7835 \\ 0.4617 \\ 0.0759 \end{pmatrix}$$

Şekil 7.4 de verilen ridge iz yardımıyla uygun k değeri $0.8 - 0.9$ arasındaki değerler olarak belirlenebilir. $k = 0.88$ değeri için elde edilen ridge regresyon tahmin edici ise

$$\hat{b}_{R}^{(1)}(k) = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.147 \\ 0.119 \\ 0.139 \\ 0.160 \\ 0.154 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.



Şekil 7.4. Birinci model için k grafiği

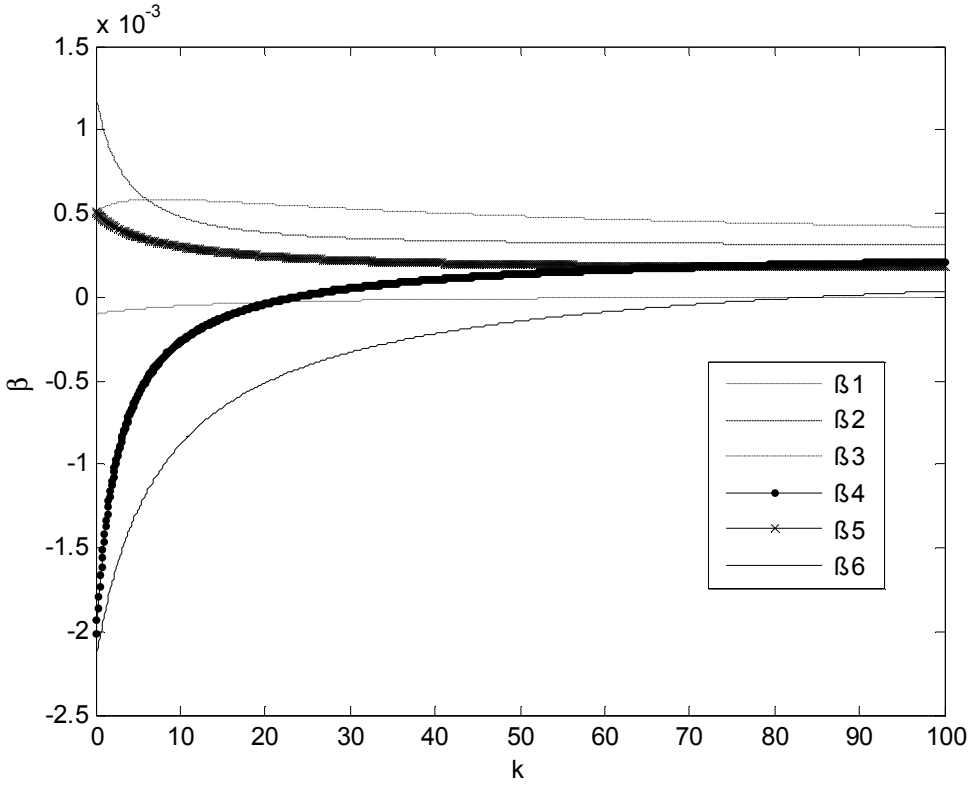
İkinci model olarak $Y_2 = Xb^{(2)} + e^{(2)}$ alınsın. Bu model için elde edilen EKK tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{b}_{EKK}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.1891 \\ 1.3317 \\ 0.4831 \\ -0.6167 \\ 0.4984 \\ -0.5913 \end{pmatrix}$$

Şekil 7.5 deki ridge iz yardımıyla uygun k değeri $(80-100)$ arasındaki değerler olarak belirlenebilir. $k=88.9$ değeri için elde edilen ridge regresyon tahmin edici ise;

$$\hat{b}_R^{(2)}(k)=\begin{pmatrix} 1.8978\times10^{-8} \\ 0.00031 \\ 0.00042 \\ 0.0002 \\ 0.00018 \\ 1.385\times10^{-5} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.



Şekil 7.5. İkinci model için k grafiği

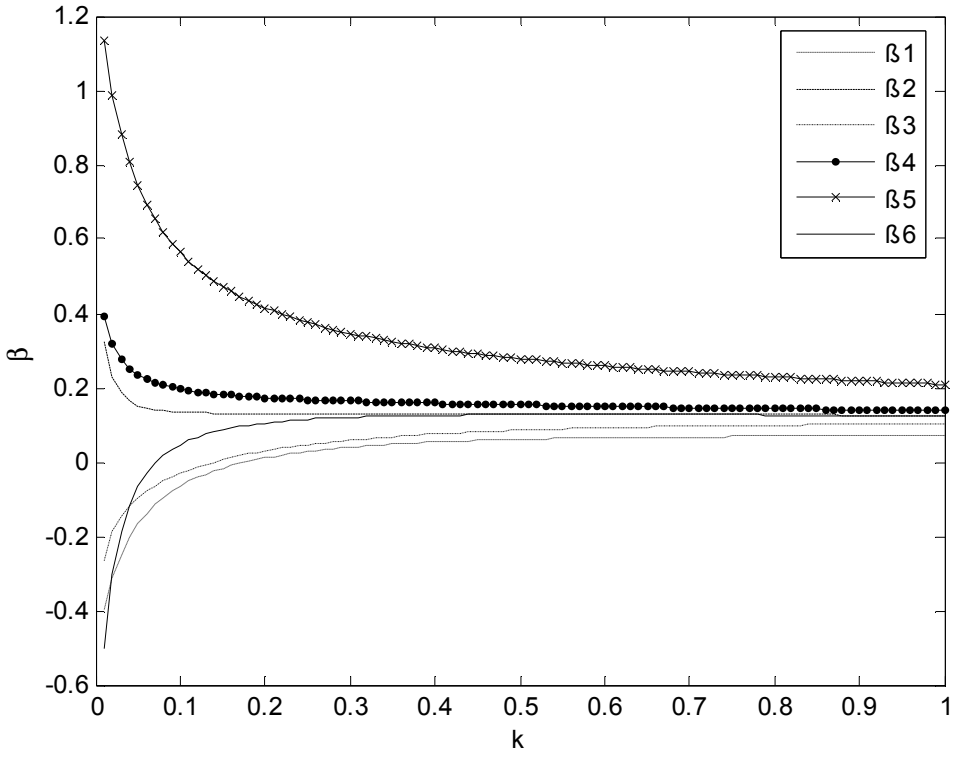
Üçüncü model olarak $Y_3 = Xb^{(3)} + e^{(3)}$ alınsın. Bu model için elde edilen EKK tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{b}_{EKK}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.5214 \\ 0.7403 \\ -0.5085 \\ 0.5131 \\ 1.3694 \\ -0.9700 \end{pmatrix}$$

Uygun k değeri $(0.9 - 1)$ arasındaki değerler olarak belirlenebilir. $k = 0.95$ değeri için elde edilen ridge regresyon tahmin edici ise;

$$\hat{b}_{R}^{(3)}(k) = \begin{pmatrix} 0.0693 \\ 0.125 \\ 0.101 \\ 0.140 \\ 0.218 \\ 0.124 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.



Şekil 7.6.Üçüncü model için k grafiği

Her üç modelin EKK tahmin matrisleri ve ridge regresyon tahmin matrisleri birleştirilir ise;

$$\hat{b}_{EKK} = \begin{pmatrix} 0.0531 & -0.1891 & -0.5214 \\ 1.5107 & 1.3317 & 0.7403 \\ -0.3607 & 0.4831 & -0.5085 \\ -0.7835 & -0.6167 & 0.5131 \\ 0.4617 & 0.4984 & 1.3694 \\ 0.0759 & -0.5913 & -0.9700 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_R(k) = \begin{pmatrix} 0.063 & 1.8978\times10^{-8} & 0.0693 \\ 0.147 & 0.00031 & 0.125 \\ 0.119 & 0.00042 & 0.101 \\ 0.139 & 0.0002 & 0.140 \\ 0.160 & 0.00018 & 0.218 \\ 0.154 & 1.385\times10^{-5} & 0.124 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu iki matris karşılaştırılacak olursa; ridge regresyon tahminlerinin birbirlerine yakın değerlerde olduğu ve negatif değerlerin olmadığı görülebilir. Böylece, ridge regresyon tahmin edicinin çoklu iç ilişkinin şiddetini azalttığı söylenebilir.

Aynı veri için temel bileşenler regresyonu kullanarak parametreleri tahmin edelim. Temel bileşen regresyonda $\left(X'X\right)$ matrisinin özdeğerleri dikkate alınarak, en büyük özdeğerlere göre tahminler yapılır. $\left(X'X\right)$ matrisinin özdeğerleri:

$$D_{(q)} = \left(4.6369, 1.2118, 0.1029, 0.0309, 0.0117, 0.0058\right) \quad \left(q = r + s\right)$$

olarak bulunur. Burada 1 den büyük olan ilk iki $l_1 = 4.6369$ ve $l_2 = 1.2118$ özdeğerleri dikkate alınacaktır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -0.1591 & 0.8481 \\ -0.4499 & -0.2124 \\ -0.4508 & -0.0594 \\ -0.4554 & -0.1610 \\ -0.4078 & 0.3938 \\ -0.4421 & -0.2259 \end{pmatrix}$$

açıklayıcı değişkenler yardımıyla temel bileşen regresyonda tahminleri bulmada yardımcı olacaktır.

En küçük kareler tahminler;

$$\hat{b}_{EKK} = \begin{pmatrix} 0.0531 & -0.1891 & -0.5214 \\ 1.5107 & 1.3317 & 0.7403 \\ -0.3607 & 0.4831 & -0.5085 \\ -0.7835 & -0.6167 & 0.5131 \\ 0.4617 & 0.4984 & 1.3694 \\ 0.0759 & -0.5913 & -0.9700 \end{pmatrix}$$

iken temel bileşen regresyon tahminler

$$\hat{\mathrm{B}}_{TBR} = \begin{pmatrix} 0.0096 & -0.0061 & 0.0058 \\ 0.0545 & 0.0491 & 0.0200 \\ 0.0530 & 0.0453 & 0.0198 \\ 0.0546 & 0.0484 & 0.0201 \\ 0.0433 & 0.0297 & 0.0173 \\ 0.0538 & 0.0487 & 0.0197 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

EKK tahminleri ile temel bileşen regresyon tahminleri karşılaştırıldığında; EKK tahminlerinde negatif değerlerin sayılarının temel bileşen regresyon da azaldığını ve tahminlerin birbirlerine yakınlaştığı görülebilir. Böylece, çoklu iç ilişkinin tahminler üzerindeki olumsuz etkisinin azaldığı belirlenmiştir.

8. SONUÇLAR

İlk uygulama kısmında değişken seçim süreci ve alt küme seçim kriterlerine göre en iyi model oluşturulduğunda Büyükşehir Belediyesi sınırları içerisinde aldığı (X_1) vergi gelirleri ve (X_3) diğer gelirlerin her iki gelirin önemli olduğu görülür. Büyükşehir Belediyesi kaynaklarının kullanıldığı giderler ise (Y_2) sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri olarak belirlenir. Belediyenin gelirlerini bünyesinde çalışan personelin maaşlarına, sosyal güvenlik primlerine harcadığı söylenebilir.

Kanonik korelasyon ve temel bileşenler analizlerinin çok değişkenli ile ilişkisi incelendiğinde (X_1) vergi gelirleri ve (X_3) diğer gelirlerin önemli gelir kaynağı olduğunu ve (Y_2) sosyal güvenlik kurumlarına devlet primleri giderleri önemli gider olduğu söylenebilir. Sonuç olarak, Büyükşehir Belediyesi sınırları içerisinde aldığı vergileri ve devlet genel bütçesinden aldığı vergi gelirlerini, belediye çalışanlarının sosyal güvelik primlerine harcadığı belirlenmiştir.

İkinci uygulamada, çoklu iç ilişki varlığında ekk yönteminin hatalar verdiğini ve güvenilir olmayan bir yöntem olduğu görülmektedir. Bu olumsuz durumu düzeltmek için önerilen iki yöntem ridge regresyon ve temel bileşenler kullanılarak elde edilen tahmin değerlerinin EKK tahminlerinden daha kararlı oldukları tespit edilmiştir. Ridge regresyon yönteminde çok değişkenli regresyon için Breidman ve Friedman'nın (1997) önerdiği şekilde ayrı ayrı model oluşturularak çoklu iç ilişkinin olumsuz etkileri azaltılmıştır.

KAYNAKLAR

ALPAR, R., 2003, Uygulamalı Çok değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1, Nobel Yayıncılık, Ankara.

AL-SUBAIHI, A. A., 2002, Variable Selection in Multivariate Regression Using SAS / IML, American Statistical Association, 7, 12.

ANDERSON, T. W., 1958, An Introduction To Multivariate Analysis, New York: Wiley, New York.

BAEK, S., KARAMAN, F., AHN, H., 2005, Variable Selection for Heteroscedastic Data Through Variance Estimation, Communications in Statistics, 34, 567-583.

BALOĞLU, B., 1996, Gelir Ve Hanehalkı Kişi Sayısıyla Et Ve Sebze Tüketimi Arasındaki İlişkinin Çok değişkenli Regresyon Analiziyle Belirlenmesi Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

BİÇKİCİ, B., 2007, Çok Değişkenli Varyans Analizi ve Çoklu Doğrusal Regresyon Analizinin Uygulamalı Olarak Karşılaştırılması Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum

BOOT, J., C., DE WIT, G., M., 1960, Investment Demand: An Empirical Contribution To The Aggregation Problem, International Economic, 1, 3 – 30.

BREIMAN, L., FRIEDMAN, J.,H., 1997, Predicting Multivariate Responses İn Multiple Linear Regression, Journal Of The Royal Statistical Society, B59, 1, 3-54

BROWN, P. J., ZIDEK, J. V., 1980, Adaptive Multivariate Ridge Regression, Ann. Statist., 8, 64-74.

BURDICK, R. K., A Note On The Multivariate General Linear Test, The American Statistician, 36, 2, 131 - 132.

CANNON, A. J., 2009, Negative Ridge Regression Parameters For İmproving The Covariance Structure Of Multivariate Linear Downscaling Models, International Journal Of Climatology, 29, 761 – 769.

COOLEY, W. W., LOHNES, P. R., 1971, Multivariate Data Analysis, John Wiley & Sons, New York.

ÇANKAYA, S., 2005, Kanonik Korelasyon Analizi ve Hayvancılıkta Kullanımı, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Adana.

HARDLE, W., SIMAR, L., 2003, Applied Multivariate Statistical Analysis, Springer – Verlag.

HASTIE, T., TIBSHIRANI, R., FRIEDMAN, J., 2001, The Elements of Statistical Learning, Springer, New York

HOERL, A. E., and KENNARD, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12, 1, 55-67.

HOTELLING, H., 1933. Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components. Journal of Educational Pschology, 24, 417-441 and 489-520.

JOHNSON, R. A., WICHERN, D.W., 2002, Applied Multivariate Statistical Analysis, Pearson Education, New Jersey.

JOSSE, J., PAGES, J., HUSSON, F., 2008, Testing The Significance of The RV Coefficient, Computational Statistics and Data Analysis, 53, 82 – 91.

KESKİN, S., BOYSAN, M., GÖKTAŞ, İ., 2007, Mükemmeliyetçilik ve Obsesif Kompülsif Semptomlar Arası İlişki İçin Çok Değişkenli Analiz Yaklaşımı, 10. Ulusal Biyoistatistik Kongresi.

KESKİN, S., KOR, A., BAŞPINAR, E., 2005, Akkeçi Oğlaklarında Kesim Öncesi ve Kesim Sonrası Ölçülen Bazı Özellikler Arasındaki İlişki Yapısının Kanonik Korelasyon Analizi ile İrdelenmesi. Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi Tarım Bilimleri Dergisi, 11(2), 154-159, Ankara.

KHURI, A.I., 1986, Exact Tests For The Comparison Of Correlated Response Models With an Unknown Dispersion Matrix, Technometrics, 28, 4.

KIERS, H. A. L., SMILDE, A. K., 2007, A Comparison of Various Methods for Multivariate Regression with Highly Collinear Varaibles, Stat. Meth. And Appl., 16, 193-228.

KLADOPOULOS, C. N., RAMSEY, P. H., 2005, A More Roboust Procedure for Testing The Null Hypothesis in MANOVA, Qeens College Of City University Of New York.

KOÇAK, İ., 2006, Çok Değişkenli Ayarlama Probleminde Değişken Seçimi Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

KOLLO, T., VON ROSEN, D., 2005, Advanced Multivariate Statistics with Matrices, Springer.

KÜÇÜKÖNDER, H., EFE, E., AKYOL, E., ŞAHİN, M., ÜÇKARDEŞ, F., 2004, Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerin Hayvancılıkta Kullanımı, 4. Ulusal Zootekni Bilim Kongresi.

LEVINE, R. A., OHMAN, P. A., 1997, Repeated Challenge Studies: A Comparison Of Union-Intersection Testing With Linear Modeling, Psychometrika, 62, 3, 435-455.

LIPOVETSKY, S., TISHLER, A., CONKLIN, W. M., 2002, Multivariate Least Squares And Its Relation To Other Multivariate Techniques, Applied Stochastic Models In Business And Industry, 18, 347 – 356.

MALLOWS, C., L., 1973, Some Comments on CP, Technometrics, 15 (4), 661 – 675.

MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A., VINING, G. G., 2001, Introduction To Linear Regression Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, New York.

ÖZDAMAR, K., 1999, Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi 1, Kaan Kitapevi, Eskişehir.

ÖZDAMAR, K., 1999, Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi 2, Kaan Kitapevi, Eskişehir.

PHAM-GIA, T., 2008, Exact Distribution of The Generalized Wilk's Statistic and Applications, Journal of Multivariate Analysis, 99, 1698–1716.

RENCHER, A.C., 2002, Methods Of Multivariate Analysis, Wiley, New York.

ROBERT, P., ESCOUFIER, Y., 1976, A Unifying Tool For Linear Multivariate Statistical Methods: The RV – Coefficient, Journal Of The Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics), 25, 3, 257-265.

SARAÇLI, Z., SARAÇLI, S., 2006, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi İİBF. Öğrencilerinin Demografik Özellikleri ile Üniversite Sorunları Arasındaki İlişkinin Doğrusal Olmayan Kanonik Korelasyon Analizi ile İncelenmesi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi İİBF Dergisi, 1(1), 27-38, Eskişehir.

SCLOVE, S. L., 1971, Improved Estimation of Parameters in Multivariate Regression. Sankhya, Ser. A, 33, 61-66.

SRIVASTAVA, M. S., 1979, An Introduction To Multivariate Statistics, New York:North Holland, New York.

SRIVASTAVA, M. S., KUBOKAWA, T., 2005, Minimax Multivariate Empirical Bayes Estimators Under Multicollinearity, Journal of Multivariate Analysis, 93, 394 – 416 .

ŞAHİNLER, S., 2000, En Kareler Yöntemi ile Doğrusal Regresyon Modeli Oluşturmanın Temel Prensipleri, Mustafa Kemal Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi -5, 57 -73.

TEKİN, M., 1993, Kanonik Korelasyon Analizi ve Bir Uygulama, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Doktora Tezi, İstanbul.

TIMM, N.H., 2002, Applied Multivariate Analysis, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Adana'da doğdum. 1996 yılında Tatbikat İlkokulunu (şu anki ismi Manas İlköğretim Okulu), 1999 yılında Özel Ortadoğu Kolejini, 2002 yılında Yüreğir İncirlik Lisesini bitirdim. 2003 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2007 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra aynı yıl Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde yüksek lisans öğrenimime başladım. Halen bu bölümde yüksek lisana öğrenimime devam etmekteyim.

EKLER

EK – 1 l_i 'ler $E^{-1}H$ 'ın özdeğerleri olmak üzere Wilk's lamda $\Lambda = \frac{|E|}{|E+H|} = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+l_i}$ için kritik değerler. ($a = 10^{-3}$ ü göstermektedir.)

	v_H											
v_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 1$						
1	6.16[a]	2.50[a]	1.54[a]	1.11[a]	.868[a]	.712[a]	.603[a]	.523[a]	.462[a]	.413[a]	.374[a]	.341[a]
2	.098	.050	.034	.025	.020	.017	.015	.013	.011	.010	9.28[a]	8.51[a]
3	.229	.136	.097	.076	.062	.053	.046	.041	.036	.033	.030	.028
4	.342	.224	.168	.135	.113	.098	.086	.076	.069	.063	.058	.053
5	.431	.302	.236	.194	.165	.144	.128	.115	.104	.096	.088	.082
6	.501	.368	.296	.249	.215	.189	.169	.153	.140	.129	.119	.111
7	.556	.425	.349	.298	.261	.232	.209	.190	.175	.161	.150	.140
8	.601	.473	.396	.343	.303	.271	.246	.225	.208	.193	.180	.169
9	.638	.514	.437	.382	.341	.308	.281	.258	.239	.223	.209	.196
10	.668	.549	.473	.418	.376	.341	.313	.289	.269	.251	.236	.222
11	.694	.580	.505	.450	.407	.372	.343	.318	.297	.278	.262	.247
12	.717	.607	.534	.479	.436	.400	.370	.345	.323	.304	.286	.271
13	.736	.631	.560	.506	.462	.426	.396	.370	.347	.327	.310	.294
14	.753	.652	.583	.529	.486	.450	.420	.393	.370	.350	.332	.315
15	.768	.671	.603	.551	.508	.473	.442	.415	.392	.371	.352	.336
16	.781	.688	.622	.571	.529	.493	.462	.436	.412	.391	.372	.355
17	.792	.703	.639	.589	.548	.512	.482	.455	.431	.410	.390	.373
18	.803	.717	.655	.606	.565	.530	.499	.473	.449	.427	.408	.390
19	.813	.730	.669	.621	.581	.546	.516	.490	.466	.444	.425	.407
20	.821	.741	.683	.636	.596	.562	.532	.505	.482	.460	.440	.423
21	.829	.752	.695	.649	.610	.576	.547	.520	.497	.475	.455	.437
22	.836	.762	.706	.661	.623	.590	.561	.534	.511	.489	.470	.452
23	.843	.771	.717	.673	.635	.603	.574	.548	.524	.503	.483	.465
24	.849	.779	.727	.684	.647	.615	.586	.560	.537	.516	.496	.478
25	.855	.787	.736	.694	.658	.626	.598	.572	.549	.528	.508	.490
26	.860	.794	.744	.703	.668	.637	.609	.583	.560	.539	.520	.502
27	.865	.801	.752	.712	.677	.647	.619	.594	.571	.551	.531	.513
28	.870	.807	.760	.721	.686	.656	.629	.604	.582	.561	.542	.524
29	.874	.813	.767	.729	.695	.665	.638	.614	.592	.571	.552	.535
30	.878	.819	.774	.736	.703	.674	.647	.623	.601	.581	.562	.544
40	.907	.861	.824	.793	.766	.741	.718	.696	.677	.658	.641	.625
60	.938	.905	.879	.856	.835	.816	.798	.781	.766	.751	.736	.723
80	.953	.928	.907	.889	.873	.858	.843	.829	.816	.804	.792	.780
100	.962	.942	.925	.910	.897	.884	.872	.860	.849	.838	.828	.818
120	.968	.951	.937	.925	.913	.902	.891	.882	.872	.863	.854	.845
140	.973	.958	.946	.935	.925	.915	.906	.897	.889	.881	.873	.865
170	.978	.965	.955	.946	.937	.929	.922	.914	.907	.900	.893	.887
200	.981	.970	.962	.954	.947	.940	.933	.926	.920	.914	.908	.902
240	.984	.975	.968	.961	.955	.949	.944	.938	.933	.928	.923	.918
320	.988	.981	.976	.971	.966	.962	.957	.953	.949	.945	.941	.937
440	.991	.986	.982	.979	.975	.972	.969	.966	.963	.960	.957	.954
600	.994	.990	.987	.984	.982	.979	.977	.975	.972	.970	.968	.966
800	.995	.993	.990	.988	.986	.984	.983	.981	.979	.977	.976	.974
1000	.996	.994	.992	.991	.989	.988	.986	.985	.983	.982	.981	.979

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 2$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	2.50[a]	.641[a]	.287[a]	.162[a]	.104[a]	.072[a]	.053[a]	.041[a]	.032[a]	.026[a]	.022[a]	.018[a]
3	.050	.018	9.53[a]	5.84[a]	3.95[a]	2.85[a]	2.15[a]	1.68[a]	1.35[a]	1.11[a]	.928[a]	.787[a]
4	.136	.062	.036	.023	.017	.012	9.56[a]	7.62[a]	6.21[a]	5.17[a]	4.36[a]	3.73[a]
5	.224	.117	.074	.051	.037	.028	.023	.018	.015	.013	.011	.009
6	.302	.175	.116	.084	.063	.049	.040	.033	.027	.023	.020	.017
7	.368	.230	.160	.119	.092	.074	.060	.050	.042	.036	.032	.028
8	.4256	.280	.203	.155	.122	.099	.082	.069	.059	.051	.045	.040
9	.473	.326	.243	.190	.153	.126	.106	.090	.078	.068	.060	.053
10	.514	.367	.281	.223	.183	.152	.129	.111	.097	.085	.075	.067
11	.549	.404	.316	.255	.212	.179	.153	.133	.116	.102	.091	.082
12	.580	.437	.348	.286	.240	.204	.176	.154	.136	.120	.108	.097
13	.607	.467	.378	.314	.266	.229	.199	.175	.155	.138	.124	.112
14	.631	.495	.405	.340	.291	.252	.221	.195	.174	.156	.141	.128
15	.652	.519	.431	.365	.315	.275	.242	.215	.193	.174	.157	.143
16	.671	.542	.454	.389	.337	.296	.263	.235	.211	.191	.174	.159
17	.688	.562	.476	.410	.359	.317	.282	.254	.229	.208	.190	.174
18	.703	.581	.496	.431	.379	.337	.301	.272	.246	.225	.206	.189
19	.717	.598	.515	.450	.398	.355	.320	.289	.263	.241	.221	.204
20	.730	.614	.532	.468	.416	.373	.337	.306	.279	.256	.236	.218
21	.741	.629	.548	.485	.433	.390	.354	.322	.295	.271	.251	.232
22	.752	.643	.564	.501	.449	.406	.370	.338	.310	.286	.265	.246
23	.762	.656	.578	.516	.465	.422	.385	.353	.325	.300	.279	.259
24	.771	.668	.591	.530	.479	.436	.399	.367	.339	.314	.292	.272
25	.779	.679	.604	.544	.493	.450	.413	.381	.353	.328	.305	.285
26	.787	.689	.616	.556	.506	.464	.427	.395	.366	.341	.318	.297
27	.794	.699	.627	.568	.519	.477	.440	.407	.379	.353	.330	.309
28	.801	.708	.638	.580	.531	.489	.452	.420	.391	.365	.342	.321
29	.807	.717	.648	.591	.542	.501	.464	.432	.403	.377	.354	.332
30	.813	.725	.657	.601	.553	.512	.475	.443	.414	.388	.365	.344
40	.858	.786	.730	.682	.640	.602	.568	.537	.509	.484	.460	.439
60	.903	.853	.811	.774	.741	.710	.682	.656	.632	.609	.588	.568
80	.927	.888	.854	.825	.798	.772	.749	.727	.706	.686	.667	.649
100	.941	.909	.882	.857	.834	.813	.793	.774	.755	.738	.721	.705
120	.951	.924	.900	.879	.860	.841	.823	.807	.791	.775	.760	.746
140	.958	.934	.914	.895	.878	.862	.846	.831	.817	.803	.790	.777
170	.965	.946	.929	.913	.898	.885	.871	.859	.846	.834	.823	.812
200	.970	.954	.939	.926	.913	.901	.889	.878	.867	.857	.847	.837
240	.975	.961	.949	.938	.927	.917	.907	.897	.888	.879	.870	.862
320	.981	.971	.962	.953	.945	.937	.929	.922	.914	.907	.901	.894
440	.986	.979	.972	.965	.959	.953	.948	.942	.937	.932	.926	.921
600	.990	.984	.979	.975	.970	.966	.961	.957	.953	.949	.945	.942
800	.993	.988	.984	.981	.977	.974	.971	.968	.965	.962	.959	.956
1000	.994	.991	.987	.985	.982	.979	.977	.974	.972	.969	.967	.964

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 3$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.001[a]	.002[a]	.004[a]	.005[a]	.008[a]	.010[a]	.013[a]
3	1.70[a]	.354[a]	.179[a]	.127[a]	.105[a]	.095[a]	.091[a]	.090[a]	.091[a]	.092[a]	.095[a]	.098[a]
4	.034	.010	.004	.002	.001	.001	.809[a]	.659[a]	.562[a]	.496[a]	.449[a]	.416[a]
5	.097	.036	.018	.010	6.36[a]	4.37[a]	3.20[a]	2.46[a]	1.97[a]	1.64[a]	1.40[a]	1.22[a]
6	.168	.074	.040	.024	.016	.011	.008	.006	.004	3.94[a]	3.28[a]	2.79[a]
7	.236	.116	.068	.043	.029	.021	.016	.012	9.49[a]	7.67[a]	6.35[a]	5.35[a]
8	.296	.160	.099	.066	.046	.034	.026	.020	.016	.013	.011	9.00[a]
9	.349	.203	.131	.091	.066	.049	.038	.030	.024	.020	.016	.014
10	.396	.243	.164	.117	.086	.066	.052	.041	.034	.028	.023	.020
11	.437	.281	.196	.143	.108	.084	.067	.054	.044	.037	.031	.026
12	.473	.316	.226	.169	.130	.103	.083	.067	.056	.047	.040	.034
13	.505	.348	.255	.194	.152	.122	.099	.082	.068	.058	.049	.042
14	.534	.378	.283	.219	.174	.141	.116	.096	.081	.069	.059	.051
15	.560	.405	.309	.243	.195	.160	.133	.111	.095	.081	.070	.061
16	.583	.431	.334	.266	.216	.179	.149	.127	.108	.093	.081	.071
17	.603	.454	.357	.288	.236	.197	.166	.142	.122	.106	.092	.081
18	.622	.476	.379	.309	.256	.215	.183	.157	.136	.118	.104	.092
19	.639	.496	.399	.329	.275	.233	.199	.172	.149	.131	.115	.102
20	.655	.515	.419	.348	.293	.250	.215	.187	.163	.144	.127	.113
21	.669	.532	.437	.366	.310	.266	.230	.201	.177	.156	.139	.124
22	.683	.548	.454	.383	.327	.282	.246	.215	.190	.169	.150	.135
23	.695	.564	.470	.399	.343	.298	.260	.229	.203	.181	.162	.146
24	.706	.578	.486	.415	.359	.313	.275	.243	.216	.193	.173	.156
25	.717	.591	.500	.430	.374	.327	.289	.256	.229	.205	.185	.167
26	.727	.604	.514	.444	.388	.341	.302	.269	.241	.217	.196	.178
27	.736	.616	.527	.458	.401	.355	.315	.282	.253	.229	.207	.188
28	.744	.627	.540	.471	.415	.368	.328	.294	.265	.240	.218	.199
29	.752	.638	.552	.483	.427	.380	.340	.306	.277	.251	.229	.209
30	.760	.648	.563	.495	.439	.392	.352	.318	.288	.262	.239	.219
40	.816	.724	.651	.591	.539	.494	.454	.419	.387	.359	.334	.311
60	.875	.808	.752	.704	.661	.623	.587	.555	.526	.498	.473	.449
80	.905	.853	.808	.769	.733	.700	.670	.641	.615	.590	.566	.544
100	.924	.881	.844	.810	.780	.751	.725	.700	.676	.654	.632	.612
120	.936	.900	.868	.839	.813	.788	.764	.742	.721	.700	.681	.663
140	.945	.913	.886	.861	.837	.815	.794	.774	.755	.736	.719	.702
170	.955	.928	.905	.884	.864	.845	.827	.809	.792	.776	.761	.746
200	.961	.939	.919	.900	.883	.866	.850	.835	.820	.806	.792	.779
240	.968	.949	.932	.916	.901	.887	.873	.860	.848	.835	.823	.811
320	.976	.961	.948	.936	.925	.914	.903	.893	.883	.873	.864	.854
440	.982	.972	.962	.953	.945	.937	.929	.921	.913	.906	.899	.891
600	.987	.979	.972	.966	.959	.953	.947	.941	.936	.930	.924	.919
800	.990	.984	.979	.974	.969	.965	.960	.956	.951	.947	.943	.939
1000	.992	.987	.983	.979	.975	.972	.968	.964	.961	.957	.954	.950

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 4$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.002[a]	.002[a]	.002[a]	.003[a]
4	1.38[a]	.292[a]	.127[a]	.075[a]	.052[a]	.040[a]	.033[a]	.029[a]	.026[a]	.025[a]	.023[a]	.022[a]
5	.026	6.09[a]	2.31[a]	1.13[a]	.647[a]	.416[a]	.292[a]	.218[a]	.172[a]	.141[a]	.120[a]	.105[a]
6	.076	.024	.010	5.07[a]	2.90[a]	1.82[a]	1.22[a]	.872[a]	.652[a]	.508[a]	.409[a]	.338[a]
7	.135	.051	.024	.013	7.74[a]	4.94[a]	3.34[a]	2.36[a]	1.74[a]	1.33[a]	1.05[a]	.848[a]
8	.194	.084	.043	.025	.015	.010	6.98[a]	4.99[a]	3.70[a]	2.82[a]	2.21[a]	1.77[a]
9	.249	.119	.066	.040	.026	.017	.012	8.91[a]	6.66[a]	5.11[a]	4.01[a]	3.21[a]
10	.298	.155	.091	.057	.038	.027	.019	.014	.011	8.29[a]	6.54[a]	5.25[a]
11	.343	.190	.117	.077	.053	.037	.027	.021	.016	.012	9.84[a]	7.95[a]
12	.382	.223	.143	.097	.068	.049	.037	.028	.022	.017	.014	.011
13	.418	.255	.169	.117	.085	.063	.047	.037	.029	.023	.019	.015
14	.450	.286	.194	.138	.102	.077	.059	.046	.037	.030	.024	.020
15	.479	.314	.219	.159	.119	.091	.071	.056	.045	.037	.030	.025
16	.506	.340	.243	.180	.136	.106	.083	.067	.054	.044	.037	.031
17	.529	.365	.266	.200	.154	.121	.096	.078	.064	.053	.044	.037
18	.551	.389	.288	.219	.171	.136	.109	.089	.074	.061	.051	.044
19	.571	.410	.309	.239	.188	.151	.123	.101	.084	.070	.059	.051
20	.589	.431	.329	.257	.205	.166	.136	.113	.094	.079	.068	.058
21	.606	.450	.348	.275	.221	.181	.149	.124	.105	.089	.076	.065
22	.621	.468	.366	.292	.237	.195	.162	.136	.115	.098	.085	.073
23	.636	.485	.383	.309	.253	.210	.175	.148	.126	.108	.093	.081
24	.649	.501	.399	.325	.268	.224	.188	.160	.137	.118	.102	.089
25	.661	.516	.415	.340	.283	.237	.201	.172	.148	.128	.111	.097
26	.673	.530	.430	.355	.297	.251	.214	.183	.158	.138	.120	.106
27	.684	.544	.444	.369	.311	.264	.226	.195	.169	.147	.129	.114
28	.694	.556	.458	.383	.324	.277	.238	.206	.180	.157	.138	.122
29	.703	.568	.471	.396	.337	.289	.250	.217	.190	.167	.147	.131
30	.712	.580	.483	.409	.349	.301	.261	.228	.200	.177	.157	.139
40	.779	.668	.583	.513	.455	.406	.364	.327	.295	.267	.243	.221
60	.849	.767	.700	.643	.592	.547	.507	.471	.438	.409	.382	.357
80	.885	.821	.766	.718	.675	.636	.600	.567	.536	.508	.482	.457
100	.908	.854	.809	.768	.730	.696	.664	.634	.606	.580	.555	.532
120	.923	.877	.838	.802	.770	.739	.711	.684	.658	.634	.611	.590
140	.934	.894	.860	.828	.799	.772	.746	.721	.698	.676	.655	.635
170	.945	.912	.883	.856	.831	.808	.785	.764	.743	.724	.705	.687
200	.953	.925	.900	.876	.855	.834	.814	.795	.777	.759	.742	.726
240	.961	.937	.916	.896	.877	.859	.842	.826	.810	.795	.780	.765
320	.971	.952	.936	.921	.907	.893	.879	.866	.854	.841	.829	.818
440	.979	.965	.953	.942	.931	.921	.911	.901	.891	.882	.872	.863
600	.984	.974	.966	.957	.949	.941	.934	.926	.919	.912	.905	.898
800	.988	.981	.974	.968	.961	.956	.950	.944	.938	.933	.927	.922
1000	.991	.985	.979	.974	.969	.964	.960	.955	.950	.946	.941	.937

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 5$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]
5	1.60[a]	.291[a]	.105[a]	.052[a]	.031[a]	.021[a]	.015[a]	.012[a]	.010[a]	.008[a]	.007[a]	.007[a]
6	.021	4.39[a]	1.48[a]	.647[a]	.335[a]	.197[a]	.126[a]	.087[a]	.064[a]	.049[a]	.039[a]	.032[a]
7	.063	.017	6.36[a]	2.90[a]	1.51[a]	.872[a]	.544[a]	.361[a]	.253[a]	.185[a]	.141[a]	.110[a]
8	.114	.037	.016	7.74[a]	4.21[a]	2.48[a]	1.56[a]	1.03[a]	.716[a]	.516[a]	.385[a]	.296[a]
9	.165	.063	.029	.015	8.79[a]	5.35[a]	3.43[a]	2.30[a]	1.61[a]	1.16[a]	.861[a]	.657[a]
10	.215	.092	.046	.026	.015	9.64[a]	6.34[a]	4.34[a]	3.06[a]	2.22[a]	1.66[a]	1.27[a]
11	.261	.122	.066	.038	.024	.015	.010	7.22[a]	5.17[a]	3.80[a]	2.86[a]	2.19[a]
12	.303	.153	.086	.053	.034	.022	.015	.011	7.99[a]	5.95[a]	4.51[a]	3.49[a]
13	.341	.183	.108	.068	.045	.031	.022	.016	.012	8.68[a]	6.66[a]	5.19[a]
14	.376	.212	.130	.085	.057	.040	.029	.021	.016	.012	9.31[a]	7.32[a]
15	.407	.239	.152	.102	.070	.050	.037	.027	.021	.016	.012	9.88[a]
16	.436	.266	.174	.119	.084	.061	.045	.034	.026	.020	.016	.013
17	.462	.291	.195	.136	.098	.072	.054	.042	.032	.025	.020	.016
18	.486	.315	.216	.154	.113	.084	.064	.050	.039	.031	.025	.020
19	.508	.337	.236	.171	.127	.096	.074	.058	.046	.037	.030	.024
20	.529	.359	.256	.188	.142	.109	.085	.067	.053	.043	.035	.029
21	.548	.379	.275	.205	.156	.121	.095	.076	.061	.050	.041	.034
22	.565	.398	.293	.221	.171	.134	.106	.085	.069	.057	.047	.039
23	.581	.416	.310	.237	.185	.146	.117	.095	.077	.064	.053	.044
24	.596	.433	.327	.253	.199	.159	.128	.104	.086	.071	.060	.050
25	.610	.449	.343	.268	.213	.171	.139	.114	.094	.079	.066	.056
26	.623	.465	.359	.283	.226	.183	.150	.124	.103	.087	.073	.062
27	.635	.479	.374	.297	.239	.195	.161	.134	.112	.094	.080	.068
28	.647	.493	.388	.311	.252	.207	.172	.143	.121	.102	.087	.075
29	.658	.506	.401	.324	.265	.219	.182	.153	.130	.110	.094	.081
30	.668	.519	.415	.337	.277	.230	.193	.163	.138	.118	.102	.088
40	.744	.617	.522	.446	.384	.333	.291	.255	.224	.198	.176	.156
60	.825	.729	.652	.587	.531	.482	.438	.400	.366	.336	.308	.284
80	.867	.791	.727	.672	.623	.578	.538	.502	.469	.438	.410	.385
100	.893	.830	.776	.728	.685	.645	.609	.576	.544	.516	.489	.464
120	.910	.856	.810	.768	.730	.694	.661	.631	.602	.575	.549	.525
140	.923	.876	.835	.798	.763	.731	.701	.673	.647	.621	.598	.575
170	.936	.897	.862	.830	.801	.773	.747	.722	.698	.675	.654	.633
200	.945	.912	.882	.854	.828	.803	.780	.758	.736	.716	.696	.677
240	.954	.926	.900	.877	.855	.833	.813	.793	.775	.757	.739	.722
300	.966	.944	.925	.906	.889	.872	.856	.841	.825	.811	.797	.783
440	.975	.959	.945	.931	.918	.905	.893	.881	.870	.858	.847	.836
600	.982	.970	.959	.949	.939	.930	.920	.911	.903	.894	.885	.877
800	.986	.977	.969	.961	.954	.947	.940	.933	.926	.919	.913	.906
1000	.989	.982	.975	.969	.963	.957	.951	.946	.940	.935	.929	.924

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 6$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	.007[a]	.002[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	2.04[a]	.315[a]	.095[a]	.040[a]	.021[a]	.012[a]	.008[a]	.006[a]	.004[a]	.003[a]	.003[a]	.002[a]
7	.019	3.48[a]	1.05[a]	.416[a]	.197[a]	.106[a]	.063[a]	.040[a]	.027[a]	.020[a]	.015[a]	.011[a]
8	.054	.013	4.37[a]	1.82[a]	.872[a]	.465[a]	.270[a]	.168[a]	.111[a]	.076[a]	.055[a]	.041[a]
9	.098	.029	.011	4.94[a]	2.48[a]	1.36[a]	.798[a]	.497[a]	.325[a]	.222[a]	.157[a]	.115[a]
10	.144	.050	.021	.010	5.35[a]	3.04[a]	1.83[a]	1.16[a]	.762[a]	.521[a]	.369[a]	.269[a]
11	.189	.074	.034	.017	9.64[a]	5.67[a]	3.51[a]	2.26[a]	1.51[a]	1.05[a]	.744[a]	.543[a]
12	.232	.099	.049	.027	.015	9.35[a]	5.94[a]	3.92[a]	2.66[a]	1.86[a]	1.34[a]	.983[a]
13	.271	.126	.066	.037	.022	.014	9.17[a]	6.17[a]	4.27[a]	3.03[a]	2.20[a]	1.63[a]
14	.308	.152	.084	.049	.031	.020	.013	9.07[a]	6.38[a]	4.59[a]	3.37[a]	2.52[a]
15	.341	.179	.103	.063	.040	.026	.018	.013	9.00[a]	6.57[a]	4.88[a]	3.68[a]
16	.372	.204	.122	.077	.050	.034	.024	.017	.012	8.97[a]	6.74[a]	5.14[a]
17	.400	.229	.141	.091	.061	.042	.030	.021	.016	.012	8.97[a]	6.90[a]
18	.426	.252	.160	.106	.072	.051	.037	.027	.020	.015	.012	8.97[a]
19	.450	.275	.179	.121	.084	.060	.044	.033	.025	.019	.015	.011
20	.473	.296	.197	.136	.096	.070	.052	.039	.030	.023	.018	.014
21	.493	.317	.215	.151	.109	.080	.060	.045	.035	.027	.021	.017
22	.512	.337	.233	.166	.121	.090	.068	.052	.041	.032	.025	.020
23	.530	.355	.250	.181	.134	.101	.077	.060	.047	.037	.030	.024
24	.546	.373	.266	.195	.146	.111	.086	.067	.053	.042	.034	.028
25	.562	.390	.282	.210	.159	.122	.095	.075	.060	.048	.039	.032
26	.576	.406	.298	.224	.171	.133	.104	.083	.066	.054	.044	.036
27	.590	.422	.313	.237	.183	.143	.113	.091	.073	.060	.049	.040
28	.603	.436	.327	.251	.195	.154	.123	.099	.080	.066	.054	.045
29	.615	.450	.341	.264	.207	.165	.132	.107	.088	.072	.060	.050
30	.626	.464	.355	.277	.219	.175	.142	.116	.095	.079	.066	.055
40	.711	.570	.467	.387	.324	.273	.232	.198	.170	.147	.127	.110
60	.802	.693	.608	.536	.476	.424	.379	.340	.305	.275	.249	.225
80	.849	.762	.690	.629	.574	.526	.483	.445	.410	.378	.350	.324
100	.878	.806	.745	.691	.642	.599	.559	.523	.489	.458	.430	.404
120	.898	.836	.783	.735	.692	.652	.616	.582	.551	.521	.494	.468
140	.912	.858	.811	.769	.730	.694	.660	.629	.599	.572	.546	.521
170	.927	.882	.842	.806	.772	.740	.710	.682	.656	.630	.607	.584
200	.938	.899	.864	.832	.803	.774	.748	.722	.698	.675	.653	.632
240	.948	.915	.886	.858	.833	.808	.785	.763	.741	.721	.701	.682
320	.961	.936	.913	.892	.872	.852	.834	.816	.799	.782	.766	.750
440	.972	.953	.936	.920	.905	.890	.876	.862	.849	.836	.823	.811
600	.979	.965	.953	.941	.930	.918	.908	.897	.887	.877	.867	.857
800	.984	.974	.964	.955	.947	.938	.930	.922	.914	.906	.898	.891
1000	.987	.979	.971	.964	.957	.950	.944	.937	.930	.924	.918	.912

	ν_H											
ν_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 7$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	.043[a]	.006[a]	.002[a]	.001[a]	.001[a]	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	2.62[a]	.350[a]	.091[a]	.033[a]	.015[a]	.008[a]	.005[a]	.003[a]	.002[a]	.002[a]	.001[a]	.001[a]
8	.018	2.95[a]	.809[a]	.292[a]	.126[a]	.063[a]	.034[a]	.020[a]	.013[a]	.009[a]	.006[a]	.005[a]
9	.048	.010	3.20[a]	1.22[a]	.543[a]	.270[a]	.147[a]	.086[a]	.053[a]	.035[a]	.024[a]	.017[a]
10	.087	.023	8.07[a]	3.34[a]	1.56[a]	.798[a]	.440[a]	.259[a]	.160[a]	.104[a]	.070[a]	.049[a]
11	.128	.040	.016	6.97[a]	3.43[a]	1.83[a]	1.04[a]	.619[a]	.387[a]	.252[a]	.170[a]	.119[a]
12	.170	.060	.026	.012	6.34[a]	3.51[a]	2.05[a]	1.25[a]	.796[a]	.525[a]	.357[a]	.249[a]
13	.209	.083	.038	.019	.010	5.94[a]	3.57[a]	2.23[a]	1.45[a]	.967[a]	.665[a]	.468[a]
14	.246	.106	.052	.027	.015	9.17[a]	5.67[a]	3.63[a]	2.40[a]	1.62[a]	1.13[a]	.804[a]
15	.281	.129	.067	.037	.022	.013	8.37[a]	5.48[a]	3.68[a]	2.54[a]	1.79[a]	1.28[a]
16	.313	.153	.083	.047	.029	.018	.012	7.80[a]	5.34[a]	3.73[a]	2.66[a]	1.94[a]
17	.343	.176	.099	.059	.037	.024	.016	.011	7.38[a]	5.24[a]	3.78[a]	2.78[a]
18	.370	.199	.116	.071	.045	.030	.020	.014	9.81[a]	7.06[a]	5.16[a]	3.83[a]
19	.396	.221	.133	.083	.054	.037	.025	.018	.013	9.20[a]	6.80[a]	5.10[a]
20	.420	.242	.149	.096	.064	.044	.031	.022	.016	.012	8.72[a]	6.60[a]
21	.442	.263	.166	.109	.074	.052	.037	.026	.019	.014	.011	8.34[a]
22	.462	.283	.183	.123	.085	.060	.043	.031	.023	.018	.013	.010
23	.482	.301	.199	.136	.095	.068	.050	.037	.028	.021	.016	.013
24	.499	.320	.215	.149	.106	.077	.057	.042	.032	.025	.019	.015
25	.516	.337	.230	.162	.117	.086	.064	.048	.037	.029	.022	.018
26	.532	.354	.246	.175	.128	.095	.071	.055	.042	.033	.026	.020
27	.547	.370	.260	.188	.139	.104	.079	.061	.047	.037	.029	.024
28	.561	.385	.275	.201	.150	.113	.087	.068	.053	.042	.033	.027
29	.574	.399	.289	.214	.161	.123	.095	.074	.059	.047	.037	.030
30	.586	.413	.302	.226	.172	.132	.103	.081	.064	.052	.042	.034
40	.679	.526	.417	.335	.273	.224	.185	.154	.128	.108	.091	.077
60	.779	.660	.566	.490	.426	.373	.327	.288	.254	.225	.200	.178
80	.832	.735	.656	.588	.530	.479	.434	.394	.358	.326	.298	.272
100	.864	.783	.715	.656	.603	.556	.513	.475	.439	.408	.378	.352
120	.886	.817	.757	.704	.657	.613	.574	.537	.504	.473	.444	.418
140	.902	.841	.788	.741	.698	.658	.621	.587	.556	.526	.498	.472
170	.919	.868	.823	.782	.744	.709	.676	.645	.616	.589	.563	.539
200	.931	.887	.848	.812	.778	.747	.717	.689	.662	.637	.613	.590
240	.942	.905	.871	.841	.812	.784	.758	.733	.709	.687	.665	.644
320	.957	.928	.902	.878	.855	.833	.812	.792	.773	.754	.736	.719
440	.968	.947	.928	.910	.893	.876	.860	.844	.829	.814	.800	.786
600	.977	.961	.947	.933	.920	.908	.895	.883	.872	.860	.849	.838
800	.982	.971	.960	.950	.940	.930	.920	.911	.902	.893	.884	.876
1000	.986	.977	.968	.959	.951	.943	.936	.928	.921	.914	.906	.899

	v_H											
v_E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						$p = 8$						
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	.138[a]	.015[a]	.004[a]	.001[a]	.001[a]	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
8	3.30[a]	.393[a]	.090[a]	.029[a]	.012[a]	.006[a]	.003[a]	.002[a]	.001[a]	.001[a]	.001[a]	.000
9	.017	2.63[a]	.659[a]	.218[a]	.087[a]	.040[a]	.020[a]	.011[a]	.007[a]	.004[a]	.003[a]	.002[a]
10	.044	8.63[a]	2.46[a]	.872[a]	.361[a]	.168[a]	.086[a]	.047[a]	.028[a]	.017[a]	.011[a]	.008[a]
11	.078	.019	6.15[a]	2.36[a]	1.03[a]	.497[a]	.259[a]	.144[a]	.085[a]	.052[a]	.034[a]	.023[a]
12	.116	.033	.012	4.99[a]	2.30[a]	1.16[a]	.619[a]	.351[a]	.209[a]	.130[a]	.084[a]	.056[a]
13	.154	.051	.020	8.91[a]	4.34[a]	2.26[a]	1.25[a]	.727[a]	.441[a]	.278[a]	.181[a]	.122[a]
14	.190	.070	.030	.014	7.22[a]	3.92[a]	2.23[a]	1.33[a]	.824[a]	.527[a]	.347[a]	.235[a]
15	.225	.090	.041	.021	.011	6.17[a]	3.63[a]	2.22[a]	1.40[a]	.910[a]	.608[a]	.416[a]
16	.258	.111	.054	.028	.016	9.06[a]	5.48[a]	3.42[a]	2.20[a]	1.46[a]	.987[a]	.683[a]
17	.289	.133	.067	.037	.021	.013	7.80[a]	4.98[a]	3.27[a]	2.20[a]	1.51[a]	1.06[a]
18	.318	.154	.082	.046	.027	.017	.011	6.92[a]	4.62[a]	3.15[a]	2.19[a]	1.56[a]
19	.345	.175	.096	.056	.034	.021	.014	9.23[a]	6.26[a]	4.34[a]	3.06[a]	2.19[a]
20	.370	.195	.111	.067	.042	.027	.018	.012	8.22[a]	5.77[a]	4.12[a]	2.99[a]
21	.393	.215	.127	.078	.050	.033	.022	.015	.010	7.46[a]	5.39[a]	3.95[a]
22	.415	.235	.142	.089	.058	.039	.026	.018	.013	9.40[a]	6.86[a]	5.08[a]
23	.436	.254	.157	.101	.067	.045	.031	.022	.016	.012	8.56[a]	6.39[a]
24	.455	.272	.172	.113	.076	.052	.037	.026	.019	.014	.010	7.88[a]
25	.473	.289	.187	.124	.085	.060	.042	.031	.023	.017	.013	9.56[a]
26	.490	.306	.201	.136	.095	.067	.048	.035	.026	.020	.015	.011
27	.505	.322	.215	.148	.104	.075	.055	.040	.030	.023	.017	.013
28	.520	.338	.229	.160	.114	.083	.061	.045	.034	.026	.020	.016
29	.534	.353	.243	.172	.124	.091	.068	.051	.039	.030	.023	.018
30	.548	.367	.256	.183	.134	.099	.074	.056	.043	.034	.026	.021
40	.649	.485	.372	.290	.229	.182	.146	.118	.096	.079	.065	.054
60	.758	.627	.527	.447	.381	.327	.282	.244	.212	.184	.161	.141
80	.815	.709	.623	.551	.489	.435	.389	.348	.313	.281	.253	.229
100	.851	.761	.687	.622	.566	.516	.471	.431	.395	.362	.333	.306
120	.875	.798	.732	.675	.623	.577	.535	.496	.461	.429	.399	.372
140	.892	.825	.767	.715	.667	.625	.585	.549	.515	.484	.455	.428
170	.911	.854	.804	.759	.717	.679	.644	.610	.579	.550	.523	.497
200	.924	.875	.831	.791	.755	.720	.688	.657	.629	.602	.576	.551
240	.936	.895	.858	.823	.791	.761	.732	.705	.679	.655	.631	.609
320	.952	.920	.891	.865	.839	.815	.792	.770	.748	.728	.708	.689
440	.965	.942	.920	.900	.880	.862	.844	.827	.810	.794	.778	.762
600	.974	.957	.941	.926	.911	.897	.883	.870	.857	.844	.831	.819
800	.981	.968	.955	.944	.933	.922	.911	.901	.890	.880	.871	.861
1000	.985	.974	.964	.955	.946	.937	.928	.920	.911	.903	.895	.887

EK – 2

Lawley Hotelling test **istatistiği** $\frac{v_E}{v_H}U^{(s)}$ için üst yüzdelik noktalar

	v_H												
v_E	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	25	40	60
						$p = 2$							
2^a	9.8591	10.659	11.098	11.373	11.562	11.952	11.804	12.052	12.153	12.254	12.316	12.409	12.461
3	58.428	58.915	59.161	59.308	59.407	59.531	59.606	59.655	59.705	59.755	59.785	59.830	59.855
4	23.999	23.312	22.918	22.663	22.484	22.250	22.104	22.003	21.901	21.797	21.733	21.636	21.582
5	15.639	14.864	14.422	14.135	13.934	13.670	13.504	13.391	13.275	13.156	13.083	12.972	12.909
6	12.175	11.411	10.975	10.691	10.491	10.228	10.063	9.9489	9.8320	9.7118	9.6381	9.5251	9.4610
7	10.334	9.5937	9.1694	8.8927	8.6975	8.4396	8.2765	8.16399	8.0480	7.9285	7.8549	7.7417	7.6773
8	9.2069	8.4881	8.0752	7.8054	7.6145	7.3614	7.2008	7.0896	6.9748	6.8560	6.7826	6.6694	6.6048
10	7.9095	7.2243	6.8294	6.5702	6.3860	6.1405	5.9837	5.8745	5.7612	5.6433	5.5701	5.4564	5.3910
12	7.1902	6.5284	6.1461	5.8942	5.7147	5.4744	5.3200	5.2122	5.0997	4.9820	4.9085	4.7938	4.7274
14	6.7350	6.0902	4.7168	5.4703	5.2941	5.0574	4.9048	4.7977	4.6856	4.5678	4.4939	4.3780	4.3105
16	6.4217	5.7895	5.4230	5.1804	5.0067	4.7727	4.6213	4.5147	4.4028	4.2846	4.2102	4.0930	4.0243
18	6.1932	5.5708	5.2095	4.9700	4.7982	4.5663	4.4157	4.3094	4.1976	4.0791	4.0042	3.8855	3.8158
20	6.0192	5.4046	5.0475	4.8105	4.6402	4.4099	4.2600	4.1539	4.0420	3.9231	3.8477	3.7278	3.6569
25	5.7244	5.1237	4.7741	2.5415	4.3740	4.1465	3.9977	3.8919	3.7798	3.6598	3.5832	3.4605	3.3868
30	5.5401	4.9487	4.6040	4.3743	4.2086	3.9829	3.8347	3.7291	3.6166	3.4957	3.4181	3.2926	3.2168
35	5.4140	4.8291	4.8880	4.2604	4.0959	3.8715	3.7237	3.6181	3.5054	3.3836	3.3051	3.1774	3.1000
40	5.3224	4.7424	4.4039	4.1778	4.0143	3.7908	3.6433	3.5377	3.4247	3.3022	3.2230	3.0933	3.0140
50	5.1981	4.6249	4.2900	4.0661	3.9039	3.6817	3.5346	3.4289	3.3154	3.1919	3.1115	2.9787	2.8965
60	5.1178	4.5490	4.2166	3.9941	3.8328	3.6114	3.4646	3.3588	3.2450	3.1206	3.0392	2.9041	2.8196
70	5.0616	4.4960	4.1653	3.9439	3.7831	3.5624	3.4157	3.3099	3.1957	3.0706	2.9886	2.8516	2.7652
80	5.0200	4.4569	4.1275	3.9068	3.7465	3.5262	3.3796	3.2737	3.1594	3.0338	2.9512	2.8126	2.7247
100	4.9628	4.4030	4.0754	3.8557	3.6961	3.4764	3.3300	3.2240	3.1093	2.9829	2.8994	2.7586	2.6683
200	4.8514	4.2982	3.9742	3.7567	3.5983	3.3798	3.2336	3.1275	3.0120	2.8838	2.7984	2.6520	2.5559
∞	4.7442	4.1973	3.8769	3.6614	3.5044	3.2870	3.1410	3.0346	2.9182	2.7879	2.7002	2.5470	2.4428

$p = 3$

3[e]	25.930	26.996	27.665	28.125	28.712	29.073	29.316	29.561	29.809	29.959	30.19	30.31
4[e]	1.1880	1.1929	1.1959	1.1978	1.2003	1.2018	1.2028	1.2038	1.2048	1.2054	1.2063	1.2068
5	42.474	41.764	1.305	40.983	40.562	40.300	40.120	39.937	39.750	39.635	39.462	39.366
6	25.456	24.715	24.235	23.899	23.458	23.182	22.992	22.799	22.600	22.479	22.294	22.190
7	18.752	18.056	17.605	17.288	16.870	16.608	16.427	16.241	16.051	15.934	15.755	15.653
8	15.308	14.657	14.233	13.934	13.540	13.290	13.118	12.941	12.758	12.646	12.473	12.375
10	11.893	11.306	10.921	10.649	10.287	10.057	9.8974	9.7320	9.5603	9.4541	9.2897	9.1955
12	10.229	9.6825	9.3234	9.0680	8.7271	8.5088	8.3566	8.1982	8.0330	7.9301	7.7700	7.6777
14	9.2550	8.7356	8.3935	8.1495	7.8225	7.6122	7.4649	7.3110	7.1497	7.0488	6.8908	6.7991
16	8.6180	8.1183	7.7884	7.5526	7.2355	7.0307	6.8868	6.7360	6.5772	6.4774	6.3204	6.2287
18	8.1701	7.6851	7.3644	7.1347	6.8251	6.6244	6.4830	6.3343	6.1771	6.0780	5.9212	5.8292
20	7.8384	7.3649	7.0513	6.8263	6.5224	6.3249	6.1853	6.0383	5.8822	5.7834	5.6266	5.5341
25	7.2943	6.8407	6.5394	6.3227	6.0287	5.8365	5.7001	5.5555	5.4010	5.3025	5.1446	5.0503
30	6.9654	6.5245	6.2311	6.0196	5.7319	5.5431	5.4085	5.2654	5.1116	5.0129	4.8535	4.7575
35	6.7453	6.3132	6.0253	5.8175	5.5341	5.3476	5.2143	5.0720	4.9185	4.8195	4.6586	4.5608
40	6.5877	6.1621	5.8783	5.6732	5.3929	5.2081	5.0757	4.9340	4.7806	4.6813	4.5189	4.4195
50	6.3773	5.9606	5.6823	5.4809	5.2050	5.0224	4.8911	4.7502	4.5967	4.4968	4.3319	4.2297
60	6.2433	5.8324	5.5577	5.3587	5.0856	4.9044	4.7739	4.6334	4.4798	4.3793	4.2123	4.1078
70	6.1504	5.7436	5.4715	5.2742	5.0031	4.8229	4.6929	4.5526	4.3988	4.2979	4.1292	4.0227
80	6.0823	5.6786	5.4084	5.2122	4.9426	4.7632	4.6336	4.4935	4.3395	4.2381	4.0680	3.9600
100	5.9891	5.5896	5.3220	5.1276	4.8601	4.6817	4.5525	4.4126	4.2583	4.1563	3.9840	3.8734
200	5.8099	5.4186	5.1562	4.9653	4.7017	4.5252	4.3970	4.2574	4.1023	3.9988	3.8212	3.7042
∞	5.6397	5.2565	4.9992	4.8116	4.5519	4.3773	4.2499	4.1104	3.9541	3.8487	3.6642	3.5384

	v_H										
v_E	4	5	6	8	10	12	15	20	25	40	60
					$p = 4$						
4[e]	49.964	51.204	52.054	53.142	53.808	54.258	54.71	55.17	55.46	—	—
5[e]	1.9964	2.0013	2.0046	2.0087	2.0112	2.0128	2.0145	2.0171	2.0171	2.019	—
6	65.715	64.999	64.497	63.841	63.432	63.151	62.866	62.573	62.396	62.13	—
7	37.343	36.629	36.129	35.474	35.064	34.782	34.495	34.200	34.019	33.75	—
8	26.516	25.868	25.413	24.814	24.437	24.178	23.912	23.639	23.471	23.214	23.072
10	17.875	17.326	16.938	16.424	16.098	15.872	15.640	15.399	15.250	15.021	14.891
12	14.338	13.848	13.500	13.037	12.741	12.535	12.321	12.099	11.961	11.747	11.624
14	12.455	12.002	11.680	11.248	10.972	10.778	10.577	10.366	10.234	10.029	9.9103
16	11.295	10.868	10.563	10.154	9.8904	9.7054	9.5119	9.3085	9.1810	8.9808	8.8644
18	10.512	10.104	9.8121	9.4190	9.1647	8.9857	8.7978	8.5996	8.4748	8.2778	8.1626
20	9.9500	9.5560	9.2736	8.8926	8.6453	8.4708	8.2871	8.0926	7.9696	7.7748	7.6601
25	9.0585	8.6884	8.4223	8.0616	7.8261	7.6590	7.4821	7.2933	7.1730	6.9805	6.8659
30	8.5377	8.1825	7.9265	7.5784	7.3502	7.1876	7.0147	6.8291	6.7101	6.5181	6.4026
35	8.1968	7.8517	7.6026	7.2631	7.0397	6.8801	6.7099	6.5262	6.4079	6.2156	6.0989
40	7.9566	7.6188	7.3746	7.0413	6.8214	6.6640	6.4955	6.3131	6.1952	6.0023	5.8844
50	7.6404	7.3125	7.0751	6.7501	6.5350	6.3804	6.2143	6.0334	5.9157	5.7214	5.6011
60	7.4417	7.1202	6.8872	6.5676	6.3555	6.2027	6.0381	5.8581	5.7403	5.5446	5.4222
70	7.3054	6.9884	6.7584	6.4426	6.2325	6.0809	5.9173	5.7378	5.6200	5.4230	5.2987
80	7.2061	6.8924	6.6646	6.3515	6.1430	5.9924	5.8294	5.6503	5.5323	5.3343	5.2084
100	7.0711	6.7619	6.5372	6.2279	6.0215	5.8721	5.7101	5.5313	5.4131	5.2133	5.0849
200	6.8143	6.5139	6.2952	5.9933	5.7910	5.6439	5.4836	5.3053	5.1863	4.9819	4.8471
∞	6.5741	6.2821	6.0692	5.7743	5.5758	5.4309	5.2721	5.0940	4.9737	4.7629	4.6190

					$p = 5$					
5[g]	81.991	83.352	85.093	86.160	86.88	—	—	—	—	—
6[g]	3.0093	3.0142	3.0204	3.0241	3.0266	3.0291	3.032	—	—	—
7	93.762	93.042	92.102	91.515	91.113	90.705	90.29	90.04	—	—
8	51.339	50.646	49.739	49.170	48.780	48.382	47.973	47.723	47.35	—
10	27.667	27.115	26.387	25.927	25.610	25.284	24.947	24.740	24.422	—
12	20.169	19.701	19.079	18.683	18.409	18.124	17.830	17.647	17.365	17.20
14	16.643	16.224	15.666	15.309	15.059	14.800	14.530	14.361	14.100	13.95
16	14.624	14.239	13.722	13.389	13.157	12.914	12.659	12.499	12.250	12.105
18	13.326	12.963	12.476	12.161	11.939	11.708	11.463	11.310	11.068	10.928
20	12.424	12.078	11.612	11.310	11.097	10.874	10.637	10.488	10.252	10.113
25	11.046	10.728	10.297	10.016	9.8168	9.6061	9.3814	9.2386	9.0102	8.8745
30	10.270	9.9689	9.5592	9.2907	9.0995	8.8964	8.6785	8.5389	8.3141	8.1790
35	9.7739	9.4836	9.0879	8.8277	8.6419	8.4437	8.2301	8.0926	7.8693	7.7339
40	9.4292	9.1469	8.7613	8.5070	8.3250	8.1303	7.9195	7.7833	7.5607	7.4247
50	8.9825	8.7107	8.3385	8.0921	7.9150	7.7248	7.5177	7.3829	7.1605	7.0229
60	8.7057	8.4406	8.0769	7.8355	7.6615	7.4741	7.2692	7.1351	6.9124	6.7730
70	8.5174	8.2570	7.8991	7.6612	7.4894	7.3039	7.1004	6.9667	6.7434	6.6024
80	8.3811	8.1241	7.7705	7.5351	7.3648	7.1807	6.9782	6.8448	6.6208	6.4785
100	8.1969	7.9446	7.5969	7.3649	7.1968	7.0145	6.8133	6.6801	6.4550	6.3103
200	7.8505	7.6070	7.2706	7.0451	6.8811	6.7023	6.5032	6.3702	6.1416	5.9908
∞	7.5305	7.2955	6.9698	6.7505	6.5902	6.4144	6.2171	6.0838	5.8499	5.6899

	ν_H								
ν_E	6	8	10	12	15	20	25	30	35
					$p = 6$				
10	45.722	44.677	44.019	43.567	43.103	42.626	42.334	42.136	41.993
12	28.959	28.121	27.590	27.223	26.843	26.451	26.209	26.044	25.925
14	22.321	21.600	21.141	20.821	20.489	20.144	19.929	19.783	19.677
16	18.858	18.210	17.795	17.505	17.202	16.886	16.688	16.553	16.455
18	16.755	16.157	15.772	15.501	15.218	14.921	14.735	14.607	14.513
20	15.351	14.788	14.424	14.168	13.899	13.615	13.436	13.313	13.223
25	13.293	12.786	12.456	12.222	11.975	11.711	11.544	11.428	11.343
30	12.180	11.705	11.395	11.173	10.939	10.687	10.526	10.414	10.331
35	11.484	11.031	10.733	10.520	10.293	10.049	9.8921	9.7820	9.7003
40	11.009	10.571	10.282	10.075	9.8535	9.6142	9.4596	9.3508	9.2699
50	10.402	9.9832	9.7060	9.5067	9.2927	9.0598	8.9082	8.8009	8.7207
60	10.031	9.6246	9.3547	9.1602	8.9507	8.7215	8.5717	8.4651	8.3851
70	9.7813	9.3830	9.1182	8.9269	8.7204	8.4938	8.3450	8.2388	8.1589
80	9.6014	9.2093	8.9480	8.7591	8.5548	8.3300	8.1819	8.0759	7.9959
100	9.3598	8.9760	8.7197	8.5340	8.3326	8.1102	7.9629	7.8572	7.7771
200	8.9099	8.5419	8.2950	8.1153	7.9193	7.7011	7.5552	7.4494	7.3685
∞	8.4997	8.1463	7.9082	7.7340	7.5430	7.3284	7.1832	7.0768	6.9945

EK – 3

l_1, $E^{-1}H$ matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere $q = \frac{l_1}{1+l_1}$ ile verilen Roy'un test istatistiği. Parametreler $m = \frac{|v_H - p| - 1}{2}$, $N = \frac{v_E - p - 1}{2}$, $s = \min(v_H, p)$ dir.

	m								
N	0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 2$					
5	.565	.651	.706	.746	.776	.799	.834	.868	.901
10	.374	.455	.514	.561	.598	.629	.679	.732	.789
15	.278	.348	.402	.446	.483	.515	.567	.627	.696
20	.221	.281	.329	.369	.404	.434	.486	.546	.620
25	.184	.236	.278	.314	.346	.375	.424	.484	.558
30	.157	.203	.241	.274	.303	.330	.376	.433	.507
40	.122	.159	.190	.218	.243	.266	.306	.359	.428
50	.099	.130	.157	.180	.202	.222	.259	.306	.370
60	.084	.110	.133	.154	.173	.191	.223	.266	.326
80	.064	.085	.103	.119	.135	.149	.176	.211	.263
120	.043	.058	.070	.082	.093	.104	.123	.150	.190
240	.022	.030	.036	.042	.048	.054	.065	.080	.103
				$s = 3$					
5	.669	.729	.770	.800	.822	.840	.867	.894	.920
10	.472	.537	.586	.625	.656	.683	.725	.770	.819
15	.362	.422	.469	.508	.541	.569	.616	.669	.730
20	.293	.346	.390	.427	.458	.486	.533	.589	.656
25	.246	.294	.333	.367	.397	.424	.470	.525	.594
30	.212	.255	.291	.322	.350	.375	.419	.473	.543
40	.166	.201	.232	.259	.283	.305	.345	.395	.462
50	.136	.167	.192	.216	.237	.257	.292	.339	.402
60	.116	.142	.164	.185	.204	.221	.254	.296	.355
80	.089	.109	.127	.144	.160	.174	.201	.237	.288
120	.061	.075	.088	.100	.111	.122	.142	.169	.209
240	.031	.039	.046	.052	.058	.064	.075	.090	.114

	m								
N	0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 4$					
5	.739	.782	.813	.836	.854	.868	.889	.911	.933
10	.547	.601	.641	.674	.700	.723	.759	.798	.840
15	.431	.482	.523	.558	.587	.612	.654	.701	.756
20	.354	.402	.441	.474	.503	.529	.572	.623	.684
25	.301	.344	.380	.412	.440	.464	.507	.559	.624
30	.261	.301	.334	.364	.390	.414	.455	.507	.572
40	.207	.240	.269	.294	.318	.339	.377	.426	.490
50	.171	.199	.224	.247	.268	.287	.322	.367	.428
60	.145	.170	.193	.213	.232	.249	.280	.322	.380
80	.112	.132	.150	.167	.182	.196	.223	.259	.309
120	.077	.091	.104	.116	.127	.138	.158	.185	.226
240	.040	.047	.054	.061	.067	.073	.084	.100	.124
				$s = 5$					
5	.788	.821	.845	.863	.877	.888	.906	.924	.942
10	.607	.651	.685	.713	.735	.755	.786	.820	.857
15	.488	.533	.569	.599	.625	.648	.685	.728	.777
20	.407	.449	.485	.515	.542	.565	.604	.651	.708
25	.349	.388	.422	.451	.477	.500	.540	.588	.648
30	.305	.341	.373	.400	.425	.448	.487	.535	.597
40	.243	.275	.302	.327	.349	.370	.406	.453	.514
50	.202	.230	.254	.276	.296	.315	.348	.392	.451
60	.173	.197	.219	.238	.257	.274	.304	.345	.401
80	.134	.154	.171	.188	.203	.217	.243	.278	.329
120	.093	.107	.120	.132	.143	.154	.174	.201	.241
240	.048	.056	.063	.069	.076	.082	.093	.109	.134

	m								
N	0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 6$					
5	.825	.850	.869	.883	.895	.904	.918	.934	.949
10	.655	.692	.721	.744	.764	.781	.808	.838	.871
15	.537	.576	.608	.635	.658	.678	.711	.750	.795
20	.454	.491	.523	.551	.575	.596	.632	.676	.728
25	.392	.428	.458	.485	.509	.531	.568	.613	.669
30	.345	.378	.407	.433	.457	.478	.514	.560	.618
40	.278	.307	.333	.356	.378	.397	.432	.477	.536
50	.232	.258	.281	.302	.322	.340	.372	.414	.472
60	.200	.223	.243	.262	.280	.297	.327	.366	.421
80	.156	.174	.192	.208	.222	.236	.262	.297	.346
120	.108	.122	.134	.146	.157	.168	.188	.215	.255
240	.056	.064	.071	.078	.084	.090	.101	.118	.142
				$s = 7$					
5	.852	.872	.887	.899	.908	.917	.929	.941	.955
10	.695	.726	.750	.771	.788	.802	.826	.853	.882
15	.579	.613	.641	.665	.686	.704	.734	.769	.810
20	.494	.528	.557	.582	.604	.624	.657	.697	.745
25	.431	.463	.491	.516	.538	.558	.593	.635	.688
30	.381	.412	.439	.463	.485	.505	.540	.583	.638
40	.309	.337	.362	.384	.404	.423	.456	.499	.555
60	.224	.246	.266	.285	.302	.318	.347	.386	.439
80	.176	.194	.211	.226	.241	.255	.280	.314	.363
100	.145	.160	.175	.188	.200	.212	.235	.265	.310
200	.077	.085	.093	.101	.109	.116	.129	.148	.175
300	.052	.058	.064	.069	.074	.079	.089	.103	.125
500	.032	.036	.039	.042	.046	.049	.055	.064	.078
1000	.016	.018	.020	.022	.023	.025	.028	.033	.041

	m								
N	0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 8$					
5	.874	.890	.902	.912	.920	.927	.937	.948	.959
10	.728	.754	.775	.793	.808	.821	.842	.865	.892
15	.615	.645	.670	.692	.710	.727	.754	.786	.824
20	.531	.561	.587	.610	.630	.648	.679	.716	.761
25	.466	.495	.521	.544	.565	.583	.616	.655	.705
30	.414	.443	.468	.491	.511	.530	.563	.603	.655
40	.339	.365	.388	.409	.428	.446	.478	.519	.573
60	.248	.269	.288	.306	.323	.338	.367	.404	.456
80	.195	.213	.229	.244	.259	.272	.297	.330	.378
100	.161	.176	.190	.203	.216	.228	.250	.279	.323
200	.086	.094	.103	.110	.118	.125	.138	.157	.185
300	.058	.065	.070	.076	.081	.086	.096	.109	.130
500	.036	.040	.043	.047	.050	.053	.059	.068	.081
1000	.018	.020	.022	.024	.025	.027	.030	.035	.042
				$s = 9$					
5	.891	.904	.914	.922	.929	.935	.944	.953	.963
10	.756	.778	.797	.812	.825	.837	.855	.876	.901
15	.647	.674	.696	.715	.732	.747	.771	.801	.835
20	.563	.591	.614	.635	.654	.670	.698	.733	.775
25	.497	.525	.549	.570	.589	.606	.636	.673	.720
30	.445	.471	.495	.516	.535	.552	.583	.622	.671
40	.366	.391	.413	.433	.451	.468	.499	.538	.590
60	.270	.291	.309	.326	.343	.358	.385	.421	.472
80	.214	.231	.247	.262	.276	.289	.313	.346	.392
100	.177	.192	.206	.219	.231	.242	.264	.293	.336
200	.095	.104	.112	.119	.127	.134	.147	.166	.194
300	.065	.071	.077	.082	.087	.092	.102	.115	.136
500	.040	.043	.047	.051	.054	.057	.063	.072	.086
1000	.020	.022	.024	.026	.028	.029	.032	.037	.044
				$s = 10$					
5	.905	.916	.924	.931	.937	.941	.949	.958	.967
10	.780	.799	.815	.829	.840	.851	.867	.886	.908
15	.675	.699	.719	.736	.751	.764	.787	.814	.846
20	.592	.617	.639	.658	.675	.690	.716	.748	.787
25	.526	.551	.573	.593	.611	.627	.655	.690	.734
30	.473	.497	.519	.539	.557	.573	.603	.639	.686
40	.392	.415	.436	.455	.473	.489	.518	.555	.605
60	.292	.311	.329	.346	.361	.376	.402	.438	.487
80	.232	.249	.264	.278	.292	.305	.329	.361	.406
100	.193	.207	.220	.233	.245	.256	.278	.306	.348
200	.104	.112	.120	.128	.135	.142	.156	.174	.202
300	.071	.077	.083	.088	.093	.098	.108	.122	.143
500	.044	.047	.051	.054	.058	.061	.067	.076	.090
1000	.022	.024	.026	.028	.030	.031	.034	.039	.047

EK – 4:

l_i 'ler $E^{-1}H$ 'ın özdeğerleri olmak üzere Pillai's istatistiği $V^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i}{1+l_i}$ için kritik değerler

	N													
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
							s = 2							
0	1.536	1.232	1.031	.890	.782	.698	.629	.573	.526	.485	.451	.333	.263	.218
1	1.706	1.452	1.258	1.109	.991	.896	.817	.751	.694	.646	.604	.455	.364	.304
2	1.784	1.573	1.397	1.254	1.137	1.039	.956	.886	.825	.772	.725	.556	.451	.379
3	1.829	1.649	1.492	1.358	1.245	1.149	1.065	.993	.930	.875	.825	.643	.526	.445
4	1.859	1.703	1.560	1.436	1.329	1.235	1.153	1.081	1.018	.961	.910	.719	1.594	.506
5	1.880	1.742	1.613	1.497	1.395	1.305	1.226	1.155	1.091	1.034	.983	.786	.655	.561
6	1.895	1.772	1.654	1.546	1.450	1.364	1.286	1.217	1.154	1.098	1.046	.846	.710	.612
7	1.907	1.796	1.687	1.586	1.495	1.413	1.338	1.270	1.209	1.153	1.102	.901	.761	.658
8	1.917	1.815	1.714	1.620	1.534	1.455	1.383	1.317	1.257	1.202	1.151	.950	.808	.702
9	1.924	1.831	1.737	1.649	1.567	1.491	1.422	1.358	1.299	1.245	1.195	.995	.851	.743
10	1.931	1.844	1.757	1.673	1.595	1.523	1.456	1.394	1.337	1.284	1.235	1.036	.891	.781
15	1.951	1.888	1.822	1.758	1.695	1.636	1.580	1.527	1.477	1.430	1.386			
20	1.963	1.913	1.860	1.807	1.756	1.706	1.658	1.612	1.568	1.527	1.487			
25	1.969	1.929	1.885	1.840	1.796	1.753	1.711	1.671	1.632	1.595	1.559			
							s = 3							
0	2.037	1.710	1.473	1.294	1.153	1.040	.947	.869	.803	.746	.697	.524	.420	.350
1	2.297	1.988	1.751	1.564	1.412	1.287	1.183	1.094	1.017	.950	.892	.682	.552	.453
2	2.447	2.168	1.943	1.759	1.606	1.477	1.367	1.273	1.190	1.117	1.053	.818	.668	.565
3	2.544	2.294	2.084	1.907	1.757	1.628	1.517	1.420	1.334	1.258	1.190	.937	.772	.656
4	2.612	2.386	2.191	2.023	1.878	1.752	1.641	1.543	1.456	1.378	1.308	1.042	.866	.740
5	2.662	2.457	2.276	2.117	1.978	1.854	1.745	1.648	1.561	1.482	1.411	1.137	.952	.818
6	2.701	2.514	2.345	2.194	2.061	1.941	1.835	1.739	1.652	1.573	1.502	1.222	1.030	.890
7	2.732	2.559	2.402	2.259	2.131	2.016	1.912	1.818	1.732	1.654	1.582	1.300	1.103	.957
8	2.757	2.597	2.449	2.314	2.192	2.081	1.979	1.887	1.803	1.726	1.655	1.371	1.170	1.020
9	2.777	2.629	2.490	2.362	2.244	2.137	2.039	1.949	1.866	1.790	1.720	1.436	1.23	
10	2.795	2.656	2.525	2.403	2.291	2.187	2.092	2.004	1.923	1.848	1.779	1.496	1.3	
15	2.853	2.748	2.646	2.549	2.457	2.370	2.288	2.211	21.39	2.071	2.007			
20	2.885	2.802	2.718	2.637	2.560	2.485	2.414	2.347	2.283	2.222	2.163			
25	2.906	2.836	2.766	2.697	2.630	2.565	2.503	2.443	2.385					

	N													
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
							$s = 4$							
0	2.549	2.194	1.926	1.717	1.548	1.410	1.294	1.196	1.112	1.038	.974	.744	.602	
1	2.852	2.510	2.241	2.023	1.844	1.693	1.566	1.456	1.360	1.277	1.203	.932	.761	
2	3.052	2.733	2.472	2.256	2.074	1.919	1.786	1.670	1.567	1.477	1.396	1.097	.903	
3	3.193	2.898	2.650	2.440	2.260	2.104	1.969	1.849	1.743	1.649	1.564	1.243	1.032	
4	3.298	3.025	2.791	2.589	2.413	2.259	2.123	2.002	1.895	1.798	1.710	1.375	1.149	
5	3.378	3.126	2.905	2.711	2.541	2.390	2.255	2.135	2.027	1.929	1.840	1.494		
6	3.442	3.208	2.999	2.814	2.649	2.502	2.370	2.251	2.143	2.044	1.955	1.602		
7	3.494	3.276	3.079	2.902	2.743	2.600	2.470	2.353	2.246	2.148	2.058	1.70		
8	3.537	3.333	3.146	2.977	2.824	2.685	2.559	2.444	2.338	2.241	2.151	1.8		
9	3.574	3.382	3.205	3.043	2.896	2.761	2.638	2.525	2.421	2.325	2.236			
10	3.605	3.424	3.256	3.101	2.959	2.829	2.708	2.598	2.496	2.401	2.313			
15	3.710	3.570	3.436	3.310	3.191	3.079	2.974	2.876	2.783	2.696	2.615			
20	3.771	3.657	3.546	3.440	3.338	3.241	3.149							

	N													
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
							$s = 5$							
0	3.055	2.681	2.389	2.155	1.962	1.801	1.664	1.547	1.445	1.356	1.277			
1	3.390	3.025	2.731	2.488	2.285	2.122	1.964	1.835	1.722	1.622	1.533			
2	3.628	3.281	2.993	2.751	2.545	2.367	2.213	2.077	1.957	1.850	1.754			
3	3.805	3.478	3.201	2.964	2.759	2.580	2.423	2.284	2.160	2.048	1.948			
4	3.941	3.635	3.370	3.140	2.938	2.761	2.604	2.463	2.337	2.222	2.119			
5	4.050	3.762	3.510	3.288	3.091	2.916	2.760	2.619	2.492	2.377	2.271			
6	4.138	3.868	3.627	3.414	3.223	3.052	2.897	2.758	2.630	2.514	2.408			
7	4.212	3.957	3.728	3.522	3.337	3.170	3.018	2.880						
8	4.274	4.033	3.815	3.617	3.438	3.275	3.126							
9	4.327	4.099	3.890	3.700	3.527	3.369								
10	4.372	4.156	3.957	3.774	3.607	3.45								
							$s = 6$							
0	3.559	3.171	2.859	2.604	2.390	2.209	2.053	1.918	1.799	1.694	1.601			
1	3.917	3.535	3.221	2.958	2.734	2.542	2.375	2.229	2.099	1.984	1.881			
2	4.185	3.817	3.508	3.245	3.018	2.821	2.647	2.494	2.358	2.235	2.125			
3	4.391	4.041	3.741	3.482	3.256	3.057	2.881	2.724	2.583	2.456	2.341			
4	4.556	4.223	3.934	3.681	3.458	3.260	3.084	2.925	2.782	2.652	2.534			
5	4.690	4.375	4.097	3.851	3.633	3.438	3.262	3.103	2.959	2.827	2.706			
6	4.802	4.502	4.236	3.998	3.785									
7	4.896	4.611	4.356	4.126	3.919									
8	4.976	4.706	4.461	4.239										
9	5.045	4.788	4.553											
10	5.106	4.860	4.635											