ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ceyda CAN

VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE KESTİRİM YÖNTEMLERİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2015

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE KESTİRİM YÖNTEMLERİ

Ceyda CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ../. ./…. Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/ Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

……..…….	……..…….	……..……..
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL	Doç. Dr. Deniz ÜNAL	Doç. Dr. Gülsen KIRAL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No:

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE KESTİRİM YÖNTEMLERİ

Ceyda CAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
Yıl: 2015, Sayfa: 76
Jüri : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
: Doç. Dr. Deniz ÜNAL
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL

Regresyon analizinde bağımlı değişkeni etkileyecek birden fazla açıklayıcı değişken olabilir. Sonuçların güvenilir olması için tüm açıklayıcı değişkenlerin dikkate alınması ve modele eklenmesi gerekmektedir. Fakat bazı durumlarda teorik olarak modelde olması gereken açıklayıcı değişkenler gözlenemeyebilir. Gözlenemeyen açıklayıcı değişkeninin regresyon modelinde yer almaması durumu, bu etkinin ε hata terimi ile birleşmesine ve ihmal edilmiş değişken yanlılığına yol açacaktır. Bu sapmanın azaltılabilmesi için bir çözüm gözlenemeyen değişken yerine bu değişkenle ilişkili bir vekil değişken kullanmaktır.

Bu çalışmada vekil değişken bulunduran lineer regresyon modeli göz önüne alınmış ve bu modelde parametre vektörünün Alternatif EKK Kestiricisi, Eşitsizlik Kısıtlı EKK Kestiricisi, Stein Rule Kestiricileri ve hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vekil değişkenler, Lineer regresyon, Yinelenmiş kestirici

ABSTRACT

MSc. THESIS

ESTIMATION METHODS IN LINEAR REGRESSION MODELS WITH PROXY VARIABLES

Ceyda CAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
Year: 2015, Pages: 76
Jury : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Assoc. Prof. Dr. Deniz ÜNAL
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL

In a regression analysis there are more than one explanatory variable that may affect dependent variable. All supported explanatory variables should be considered and included in the model for reliable results. However some explanatory variables supported by the theory are often unobservable. When an unobservable explanatory variable does not take part in regression model, it will lead to combine its effect of ε disturbance term and cause omitted variable bias. One solution for reducing this bias is using related proxy variable instead of unobservable variable.

In this thesis linear regression model with proxy variable is considered and based on this model Alternative Ordinary Least Square Estimator, Inequality Constrained Least Squares estimator, Stein Rule Estimators of the parameter vector and The Iterative Estimator of the disturbance variance are examined.

Key Words: Proxy variables, Linear regression, Iterative estimator

TEŞEKKÜR

Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma Doç. Dr. Güzin YÜKSEL danışmanlığında gerçekleştirilmiştir.

Bu tezin başlangıcından bitişine kadar sahip olduğu engin bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen, değerli zamanını bana ayıran sevgili hocam ve danışmanım Doç. Dr. Güzin YÜKSEL' e ve Doç. Dr. Deniz ÜNAL' a sonsuz teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında bana kardeşliğin ne kadar kutsal olduğunu hissettiren, desteklerini esirgemeyen abilerim Gökhan CAN, Tolga CAN ve melek ablam Ebru ACERKOL' a teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim ve öğretim hayatım boyunca benden maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen annem Sabahat CAN, babam Ali CAN ve eşim Erkan YILDIRIM' a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ X
SİMGELER VE KISALTMALAR XII
1. GİRİŞ 1
1.1. Temel Kavramlar 1
1.2. Model Seçimi 3
1.3. Modelin Eksik Belirlenmesi Durumu 3
1.3.1. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumu 4
1.3.1.1. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumunda Yanlılık 4
1.3.1.2. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumunda İstatistiksel Testlerin Geçerliliği 6
1.3.2. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Durumu 6
1.3.2.1. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Durumunda Yanlılık . 6
1.3.2.2. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Durumunda İstatistiksel Testlerin Geçerliliği 8
1.4. Vekil Değişkenler 8
1.4.1. Vekil Değişkenin Etkileri 9
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 11
3. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE ALTERNATİF EKK KESTİRİCİSİ VE AĞIRLIKLI ORTALAMA KESTİRİCİ 15
3.1. Model ve Modelin Özellikleri 15
3.2. Gözlemlenemeyen Değişkenin İhmal Edildiği Modelde $\hat{y}_o$ Alternatif EKK Kestiricisi ve MSE'si 16
3.3. Vekil Değişken Bulunduran Modelde $\hat{y}_p$ Alternatif EKK Kestiricisi ve MSE'si 16

3.4. $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'nin Sayısal Olarak Karşılaştırılması 17
3.5. $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'nın Ağırlıklı Ortalama Kestiricisi $\hat{y}^*$ 18
4. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE EŞİTSİZLİK KISITLI EKK KESTİRİCİSİ 21
4.1. Model ve Modelin Özellikleri 21
4.2. $\hat{\beta}_2^*$ Eşitsizlik Kısıtlı EKK Kestiricisi (ICLS) 22
4.3. Kestiriciler için Moment, Yanlılık ve MSE 22
4.4. Kestiricilerin Sayısal Olarak Karşılaştırılması 24
5. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE STEIN RULE KESTİRİCİLER 29
5.1. Model ve Modelin Özellikleri 29
5.2. Stein Rule Kestiriciler 30
5.2.1. Gözlemlenemeyen Değişkenin İhmal Edildiği Modelde Stein Rule Kestiriciler 31
5.2.2. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Stein Rule Kestiriciler 31
5.2.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Stein Rule Kestiricilerin PMSE'si 32
5.2.3. Kestiricilerin Sayısal Olarak Karşılaştırılması 35
6. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE HATA VARYANSININ YİNELENMİŞ KESTİRİCİSİ 39
6.1. Model ve Modelin Özellikleri 39
6.1.1. Hata Varyansının Alışılmış Kestiricisi 39
6.2. Vekil Değişken Bulunduran Model ve Modelin Özellikleri 40
6.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Hata Varyansının Alışılmış Kestiricisi ve MSE'si 40
6.2.2. Vekil Değişken Bulunduran Modelde SR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi 41
6.2.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde SR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansı Yinelenmiş Kestiricisi için Yanlılık ve MSE 44

6.2.3. Vekil Değişken Bulunduran Modelde PSR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi 46
6.2.3.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde PSR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi için Yanlılık ve MSE..... 49
6.2.3.2. PSR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi ile Alışılmış Hata Varyansı Kestiricisinin Sayısal Olarak Karşılaştırılması..... 53
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER..... 61
KAYNAKLAR 63
ÖZGEÇMİŞ 67
EKLER..... 68
EK 1 70
EK 2 72
EK 3 74
EK 4 75

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 6.1.1. n=20 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 55

Çizelge 6.1.2. n=30 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 56

Çizelge 6.1.3. n=100 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 57

Çizelge 6.1.4. n=1000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 58

Çizelge.6.1.5. n=10000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 59

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 6.1. n=20 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 55

Şekil 6.2. n=30 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 56

Şekil 6.3. n=100 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 57

Şekil 6.4. n=1000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 58

Şekil 6.5. n=10000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ 59

SİMGELER VE KISALTMALAR

DW-d : Durbin-Watson d İstatistiği

EKK : En Küçük Kareler (Least Squares)

ICLS : Eşitsizlik Sınırlamalı En Küçük Kareler (Inequality Constrained Least Squares)

MSE : Hata Kareler Ortalaması (Mean Square Error)

PMSE : Tahmini Hata Kareleri Ortalaması (Predictive Mean Square Error)

PSR : Pozitif Stein Rule (Positive Part of Stein Rule)

PSRO : İhmal Edilen Modelde Pozitif Stein Rule

PSRP : Vekil Değişken Bulunduran Modelde Pozitif Stein Rule

SR : Stein Rule

SRO : İhmal Edilen Modelde Stein Rule

SRP : Vekil değişken Bulunduran Modelde Stein Rule

REF : Göreli Etkinlik (Relative Efficiency)

1.GİRİŞ

1.1. Temel Kavramlar

Regresyon analizi istatistik biliminin en önemli konularından biridir. Matematik, ekonomi, finans, ziraat, mühendislik, tıp gibi bilim dallarında yoğun olarak regresyon analizi uygulanmaktadır. Gözlenen bir olayın, hangi olayların etkisi altında olduğunun araştırılması regresyon analizinin temelini oluşturur. Regresyon analizi yapılırken gözlem değerlerinin ve etkilenilen olayların bir matematiksel gösterimle yani bir fonksiyon yardımıyla ifade edilmesi gerekir.
Regresyon analizi sayesinde;

1. Gelecekteki gözlemlerin tahmini,
2. Bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkinin veya etkinin değerlendirilmesi,
3. Veri yapısı hakkında genel bir tanımlamanın yapılabilmesi mümkün olmaktadır.

Bir regresyon denklemi bir tek açıklayıcı değişken içeriyorsa basit doğrusal regresyon, birden fazla açıklayıcı değişken içeriyorsa çoklu regresyon olarak adlandırılır.

Özellikle ekonomi ve işletmecilik alanlarında herhangi bir bağımlı değişkeni tek bir açıklayıcı değişkenle açıklamak mümkün değildir. Birçok açıklayıcı değişkenin bir araya gelerek bir bağımlı değişkeni etkileyebileceği gibi, kendi aralarında da birbirlerini etkileyebilmektedirler. *k* sayıda açıklayıcı değişkenin bulunduğu çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$y=X\beta+\varepsilon,\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n) \qquad (1.1)$$

olup ve n; gözlem sayısı, k; açıklayıcı değişken sayısı, y; n×1 tipinde bağımlı değişkenin vektörü, X; n×1 tipinde açıklayıcı değişkenlerin matrisi, β; p= k+1 olmak

üzere p×1 tipinde bilinmeyen parametrelerin vektörü ve ε; n×1 tipinde modele eklenmeyen değişkenleri de içeren rastgele hataların vektörüdür.

Kurulan regresyon modeli problemle ilgili örnek olarak alınmış gözlemler kullanılarak hesaplanmaya çalışılır. Tahmin olarak adlandırılan katsayıların gerçek katsayılara en yakın şekilde hesaplanması için geliştirilen yöntemlerden en yaygın kullanılanı En Küçük Kareler (EKK) yöntemidir. (1.1) ile verilen çoklu doğrusal regresyon modelinin parametrelerinin EKK yöntemi ile tahmin edilmesindeki amaç gözlenen (x_i,y_i) noktalarını en iyi temsil edecek regresyon doğrusunun bulunmasıdır. Bu nedenle EKK yönteminde; (1.1) çoklu doğrusal modelindeki hata terimlerinin kareleri toplamını minimum yapacak parametre tahminleri yapılır. β parametre vektörünün EKK kestiricisi $\hat{\beta}$;

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$$

şeklindedir.

EKK modelinin en iyi sonucu vermesi için bazı varsayımların sağlanması gerekir ve ilgili varsayımlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Hatalar; beklenen değeri sıfır, $E(\varepsilon_i)=0$; varyansı, $var(\varepsilon_i)=\sigma^2$ olarak normal dağılır, $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$.
- Hatalar birbiriyle ilişkisizdir, $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$.
- Açıklayıcı değişkenler lineer bağımsızdır, $Cov(X_i, X_j)=0$, $i \neq j$.

EKK tekniğinin varsayımlarının sağlanamaması durumunda yapılan tahminler yanlı, tutarsız veya etkisiz olmakta, tahmin edilen regresyon parametrelerinin güvenilirliği (reliability) bozulmakta ve ilgili anlamlılık testleri geçerliliğini yitirmektedir. Dolayısıyla eldeki verilere uygun regresyon modelinin kurulması ve model uygunluğunun araştırılması regresyon analizinin temel konularından biridir.

1.2. Model Seçimi

Model oluşturulurken en fazla dikkat edilmesi gereken konulardan biri de modelde olması gereken değişkenlerdir. İyi bir modelde bağımsız değişkenlerin istatistiksel öneminin belirlenmesi için gerçek değer ile tahmin değerinin arasındaki fark anlamına gelen tahmin hatasını minimize etme ilkesine dayanan sıfır hipotezi kullanılmaktadır. Bu hipoteze göre bir değişkenin katsayısının "0" olup olmadığı, başka bir deyişle bu değişkenin modelde bir değişime neden olup olmadığı test edilir. Doğrusal regresyonda, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkeni tahmin etmede ne derece önemli oldukları kareler toplamı ve F istatistik değeri gibi yöntemler kullanılarak belirlenebilir. İyi bir modelde basitlik, R^2 belirleyicilik katsayısı, teorik tutarlılık ve tahmin gücü kavramları önemli rol oynar.

Bağımlı değişkeni etkileyecek birden fazla açıklayıcı değişken olabilir. Sonuçların güvenilir olması için model doğru tanımlanmış olmalıdır. İlişkiye uygun fonksiyonun ve eklenmesi gereken tüm değişkenlerin dikkate alınması gerekmektedir. Eğer ilgili açıklayıcı değişkenler göz ardı edilirse, elde edilen model iyi tahmin edici olmayabilir.

1.3. Modelin Eksik Belirlenmesi Durumu

Araştırmalarda kullanılan modelin doğru tanımlandığı kabul edilmektedir. İlişkiye uygun fonksiyonun ve eklenmesi gereken tüm değişkenlerin dikkate alınması gerekmektedir. Doğru modele ulaşmak için R^2, t, F, DW-d vb. istatistiksel ve ekonometrik testler kullanılır. Eğer hangi açıklayıcı değişkenlerin modele katkı sağlayacağı kesin olarak biliniyorsa regresyon analizi uygulandığında katsayı tahminleri, bu tahminlerin güven aralıkları hesaplanabilir.

Bazen farkında olunmadan modelde olmaması gereken bir değişken modele eklenmiş ya da modelde olması gereken bir değişken ihmal edilmiş olabilir. Bu iki durumda da model eksik belirlenmiş olacaktır.

Sonraki kısımda regresyon modelinde olmaması gereken bir değişkenin modele eklenmesi, modele eklenmesi gereken bir değişkenin ihmal edilmesi

durumlarının sonuçları ve veriye ulaşmada zorluk çekildiğinde bunun yerine vekil değişken kullanılması durumu açıklanacaktır.

1.3.1. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumu

Bir regresyon modelinin yapısı modeli oluşturan ilişkilerin özelliklerini, modele katılan açıklayıcı değişkenlerin her birinin özelliklerini ve bu ilişkileri simgeleyen matematiksel fonksiyonları içerir. Modele katkı sağlayan değişkenlerden bir ya da birkaçının modele eklenmemesi durumunda değişen varyans problemi ortaya çıkar.

Değişen varyans probleminin regresyon analizi sonuçları üzerinde olumsuz etkileri vardır. Değişen varyans durumunda EKK tahminleri yansızlık ve tutarlılık özelliğini korumakta, fakat minimum varyans veya etkinlik olarak bilinen özelliğini kaybetmektedir.

1.3.1.1. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumunda Yanlılık

Y bağımlı değişkeninin X_2 ve X_3 olmak üzere iki açıklayıcı değişkene bağlı olduğu varsayımıyla bu ilişki

$$Y=\beta_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+u \tag{1.2}$$

şeklinde gösterilir. X_3 değişkeninin öneminden habersiz olunduğu varsayılarak bu değişkenin ihmal edilmesi durumundaki model,

$$Y=\beta_1+\beta_2X_2+u \tag{1.3}$$

ve uydurulmuş model,

$$\hat{Y}=b_1+b_2X_2 \tag{1.4}$$

ile ifade edilir. (1.2) modelinin doğru olduğu varsayımıyla, X_3 ilgili açıklayıcı değişkeninin ihmal edildiği durumda EKK kestiricisi b_2;

$$b_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2} \tag{1.5}$$

dir. $\bar{Y}=\beta_1+\beta_2\bar{X}_2+u$ olmak üzere (1.2) ile verilen doğru modelin, ortalamadan farklar ile yazılışı

$$(Y-\bar{Y})=\beta_2(X_{2i}-\bar{X}_2)+\beta_3(X_{3i}-\bar{X}_3)+(u_i-\bar{u}) \tag{1.6}$$

dir. (1.6) ifadesi (1.5) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)\left[\beta_2(X_{2i}-\bar{X}_2)+\beta_3(X_{3i}-\bar{X}_3)+(u_i-\bar{u})\right]}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_2(X_{2i}-\bar{X}_2)^2+\beta_3\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)+\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(u_i-\bar{u})}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2} \\ &= \beta_2+\beta_3\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(u_i-\bar{u})}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. b_2' nin β_2'nin yansız kestiricisi olması için gerek ve yeter koşul $E(b_2)=\beta_2$ olmasıdır. X_2 ve X_3' ün stokastik olmadığı ön koşulu altında hataların beklenen değeri sıfır olduğundan b_2 ifadesinin beklenen değeri

$$E(b_2)=\beta_2+\beta_3\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}$$

ilk iki terim toplamı ile yani ihmal edilmiş değişkene bağlı olarak ifade edilir. İkinci terimin varlığıb_2'nin beklenen değerinin, β_2 değerinden farklı olduğunu, dolayısıyla yanlı olduğunu gösterir.

1.3.1.2. Gerekli Değişkenin İhmal Edilmesi Durumunda İstatistiksel Testlerin Geçerliliği

Regresyon modeline eklenmesi gereken bir değişkenin ihmal edilmesinin diğer bir ciddi sonucu katsayıların standart hatalarının ve test istatistiklerinin geçersiz kılınmış olmasıdır. Bu durum güvenilir olmayan istatistiksel testlere neden olmaktadır. Yani, EKK tahmincilerinin kısmi t ve genel F testleri güvenilirliklerini kaybetmektedir (Yamak ve Köseoğlu, 2006). Ayrıca geliştirilen modelle gerçekleştirilen öngörüler etkin olmamaktadır. Bu durum bu regresyon sonuçları ile hiçbir hipotezin test edilemeyeceği anlamına gelir.

1.3.2. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Durumu

Modele bir değişkenin eklenmesi hem regresyon kareler toplamını hem de hata kareler toplamını arttırır. Burada önemli olan; eklenen değişkenin modelin tahmin etme gücüne katkısının olup olmayacağıdır. Modele, katkısı olmayan değişkenlerin eklenmesi durumu, değişkenliği arttırıp modelin tahmin etme gücünü düşürebilir.

1.3.2.1. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Halinde Yanlılık

Doğru modelin (1.3) olduğu varsayımıyla hata ile (1.2) modeli incelendiğinde X_3 gereksiz değişkeni modele eklenmiş olur. Açıklama gücü düşük olan bir değişkenin modele eklenmesi durumunda EKK yöntemi ile elde edilen b_2 kestiricisi

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2-[\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)]^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_{3i}-\bar{X}_3)\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2-\sum_{i=1}^{n}[(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)]^2}$$

dir. $\bar{Y}=\beta_1+\beta_2\bar{X}_2+\beta_3\bar{X}_3+u$ olmak üzere (1.2) hatalı modelin ortalamadan farklara göre normal denklemleri

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(Y_i-\bar{Y})=\beta_2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2+\beta_3\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)(Y_i-\bar{Y})=\beta_2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)+\beta_3\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2$$

dir. X_3 önemsiz bir değişken olup $\beta_3=0$ olduğunda farkların normal denklemleri

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(Y_i-\bar{Y})=\beta_2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)(Y_i-\bar{Y})=\beta_2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)$$

olur. Bu ifadeler b_2 ifadesinde yerine yazılır ve b_2 ifadesinin beklenen değeri hesaplanırsa

$$E(b_2)=\frac{\beta_2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2-\sum_{i=1}^{n}[(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)]^2}-\frac{\beta_2[\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)]^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{3i}-\bar{X}_3)^2-\sum_{i=1}^{n}[(X_{2i}-\bar{X}_2)(X_{3i}-\bar{X}_3)]^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade β_2 parantezine alındığında $E(b_2)=\beta_2$ olduğu açıktır. Yani modeli açıklama gücü düşük olan bir açıklayıcı değişkenin modele eklenmesi durumunda EKK yöntemi ile elde edilen b_2 kestiricisi yansızdır.

1.3.2.2. Gereksiz Değişkenin Modele Eklenmesi Durumunda İstatistiksel Testlerin Geçerliliği

Modeli açıklama gücü düşük olan bir açıklayıcı değişkenin modele eklenmesi durumunda EKK ile elde edilen tahmin sonuçlarında regresyon katsayıları genellikle yansız ancak etkisizdir. Standart hatalar genellikle geçerlidir ancak regresyon tahminleri etkisiz olduğundan bu tahminler anlamsızca büyüyebilir. (Dougherty, 2012)

1.4. Vekil Değişkenler

Regresyon modeli problemle ilgili örnek olarak alınmış gözlemler kullanılarak oluşturulmaya çalışılır. Fakat bazı durumlarda modelde desteklenen bir açıklayıcı değişken gözlemlenemez veya gizli olabilir. Örneğin bir fabrikanın çalışanlarına vereceği ücret düşünülürse, öngörülen maaşın eğitim, deneyim ve kabiliyet ile ilişkisi

$$\log(\text{ücret})=\beta_0+\beta_1\text{eğitim}+\beta_2\text{deneyim}+\beta_3\text{kabiliyet}+\varepsilon$$

regresyon modeliyle gösterilebilir. Kişinin doğuştan gelen kabiliyeti büyük bir açıklama gücüne sahiptir fakat sayısal olarak ölçülemediği için modelde kullanılamaz. Kabiliyet açıklayıcı değişkeninin regresyon modelinde yer almaması, etkisinin ε hata terimi ile birleşmesi anlamına gelir. Eğer eğitim ve kabiliyet ilişkili ise eğitim ile ε hata terimi de ilişkili olur. Bu ise regresyon katsayılarının yanlı olmasına yol açacaktır. Yukarıdaki modelde, kabiliyet açıklayıcı değişkeni yer alamayacağı için, ihmal edilmiş değişken sapması söz konusu olacaktır. Bu sapmanın hafifletilmesine yönelik bir çözüm; gözlenemeyen değişken yerine bir vekil değişken kullanmaktır.

Kullanılacak vekil değişkenin gözlenemeyen değişkenle ilişkili olması gerekir. Örneğin, bu örnekte kabiliyet yerine kişilerin IQ test sonuçlarını kullanmak

akla gelebilir. İki değişkenin aynı şeyi ifade etmesi gerekmemekte, sadece ilişkili olmaları yeterli olmaktadır.

1.4.1. Vekil Değişkenin Etkileri

Açıklayıcı gücü yüksek olan bir değişken gözlemlenemez veya gizli olabilir. Bu durumda diğer bir önemli husus gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenin ihmal edilip edilmeyeceği ya da vekil değişkenin kullanılıp kullanılmayacağıdır. Gözlemlenemeyen bu değişken ihmal edilir ise regresyon katsayı tahminleri yanlı ve standart hatalar geçersiz olacaktır. Bu durumda modele, gözlemlenemeyen değişkenle ilişkili gözlemlenebilen bir başka açıklayıcı değişken vekil olarak eklenerek kayıp veri durumundan kurtulanabilir.

Gözlemlenemeyen açıklayıcı değişken yerine kullanılacak olan vekil değişken özenle seçilmeli, gözlemlenemeyen değişkenle ilişkili olmalıdır. Gözlemlenemeyen değişken ile vekil değişken arasında fonksiyonel bir bağlantı olmazsa, vekil, bağımlı değişken üzerinde bir etkiye sahip olmayacaktır. İlgisiz bir vekil değişken kullanılması durumunda da ilgili bir açıklayıcı değişken ihmal edilmiş, model eksik belirlenmiş olur. Vekil değişkenin zayıf olduğu durumda alışılmış EKK kestiricisinin hem yanlılığı hem de MSE'si, ilgili açıklayıcı değişkenin gözlemlenebilir olduğu durumdakinden çok daha büyük olur ve tahmini katsayılar iyi sonuç vermeyebilir. Bu nedenle eğer analizde gözlemlenemeyen açıklayıcı değişken için bir katsayı hesaplanması gerekiyor ise vekil değişken kullanımı kaçınılmazdır.

Bu çalışmanın amacı gözlemlenemeyen bir açıklayıcı değişkenle karşılaşıldığında vekil değişken bulunduran lineer regresyon modellerini göz önüne almak ve bu modellerin parametre ve hata varyansı tahmininde kullanılan kestirim yöntemlerini ve vekil değişkenlerin modele etkisini incelemektir.

Bu çalışma 7 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde temel kavramlara yer verilmiş, model seçiminde; modelde bulunması gereken bir değişkenin ihmal edilmesi ve modele gereksiz bir değişkenin eklenmesi durumlarının yanlılığı incelenmiş ve vekil değişkenler tanıtılmıştır.

İkinci bölümde gözlemlenemeyen değişkenlerin ihmal edilmesi veya bunların yerine vekil değişkenlerin kullanılması ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde koşullu tahmin durumunda vekil değişken kullanımı üzerinde durulmuş, vekil değişken bulunduran modelin Alternatif EKK kestiricisi ve gözlemlenemeyen değişkenin ihmali ile elde edilen modelin Alternatif EKK kestirici incelenmiş ve bu kestiricilerle ilişkili olan Ağırlıklı Ortalama kestirici tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenin ana açıklayıcı değişkenlerden biri olduğu ve aynı zamanda bu değişken için regresyon katsayıları üzerinde eşitsizlik sınırlaması şeklinde bir ön bilgiye sahip olunduğu varsayımları altında vekil değişken bulunduran regresyon modeli incelenmiş ve bu modelde Eşitsizlik Kısıtlı EKK kestiricisi (ICLS) tanıtılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde Stein Rule (SR) ve Pozitif Stein Rule (PSR) kestiriciler tanıtılmış, gözlemlenemeyen değişkenin ihmal edildiği modelin ve vekil değişken bulunduran modelin SR ve PSR kestiricileri incelenmiştir. Ayrıca iki modelin kestiricilerinin PMSE değerlerinin (Ohtani, 1981)'de verilen sayısal karşılaştırması incelenmiş ve bu kısımda gösterilen kestiriciler göz önüne alındığında en iyi seçimin vekil değişken bulunduran modelin PSR kestiricisi olduğu sonucu sayısal olarak gözlenmiştir.

Altıncı bölümünde öncelikle vekil değişken bulunduran bir regresyon modelinde daha iyi tahminler elde etmek amacıyla hata varyansının Alışılmış Kestiricisi ve SR Kestiricinin kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi incelenmiştir. Sonraki kısımda ise hata varyansının Alışılmış Kestiricisi ifadesinde EKK kestiricisi yerine PSR Kestiricisi kullanılarak, Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi, yanlılığı ve MSE hesabı için formüller elde edilmiştir. Ayrıca PSR kestiricinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi ile hata varyansının Alışılmış Kestiricisinin oranı sayısal olarak karşılaştırılmış ve sonuçları verilmiştir.

Yedinci bölümde ise sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Gözlemlenemeyen değişkenlerin ihmal edilmesi veya bu değişkenlerin yerine vekil değişken kullanılması ile ilgili birçok çalışma vardır. Wickens (1972) gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenlerin ihmal edilmesi durumundaki katsayı tahminlerinin yanlılığını incelemiş, ihmal durumundaki yanlılığın zayıf vekil değişken kullanımı sonucundaki yanlılıktan daha büyük olduğunu göstermiştir. McCallum (1972) zayıf vekil değişken kullanımından kaynaklanan ölçüm hataları rastgele ve doğru açıklayıcı değişken değerlerinden bağımsız ise asimptotik yanlılığın küçük olacağı sonucuna varmıştır. Fakat Aigner (1974) ve Ohtani (1979) vekil değişken kullanımının varyans veya hata kareler ortalaması bakımından mutlaka daha iyi bir strateji olmadığını göstermiştir. Ayrıca Aigner (1974); Wickens (1972) ve McCallum (1972)'un çalışmalarını yanlılık ölçütüne ek olarak varyans fonksiyonunu göz önüne alarak genişletmiştir. Barnow (1976) iki bağımsız değişken durumunda eğer ilgilenilen değişken hatalı ölçülmüşse, zayıf vekil değişkenin ihmal edilmesi ile asimptotik olarak daha az yanlı tahminlerin elde edilebileceğini göstermiştir. Frost (1978) ölçülemeyen değişken ve vekil değişken arasındaki farkın iki doğru açıklayıcı değişkenin bağımsız bir rastgele değişkeni olmadığı durumda vekil değişken eklenmesinin hem karesel yanlılığı hem de tahmin edilen katsayıların varyansını arttırdığını göstermiştir. Frost (1979) ve Ohtani (1981) rastgele vekil değişken kullanımının karesel yanlılık, varyans ve MSE açısından riskli olabileceğini göstermişlerdir. Trenkler ve Stahlecker (1996) MSE matris ölçütüne göre hangi şartlar altında gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenin ihmal edilebilir veya vekil değişken kullanımının tercih edilebilir olduğunu araştırmıştır.

Dhrymes (1978) ve Trenkler ve Stahlecker (1996) gözlemlenemeyen değişkenin ihmal edilmesi durumda kestiricilerin MSE ölçütüne göre daha üstün olduğu durumları göz önüne almıştır.

Ohtani (1983) ve Ohtani ve Giles (1993a) vekil değişken kullanılan modelde sıfır hipotezi için test uygulandığında test istatistiğinin F dağılımına sahip olduğunu göstermiştir. Kurumai ve Ohtani (1998) bazı açıklayıcı değişkenlerin gözlemlenemediği ve vekil değişkenlere ulaşılabildiği durumda gözlemlenemeyen

açıklayıcı değişkenlerin katsayıları sıfır olan sıfır hipotezi için Hata Varyansının Ön-Test Kestiricisinin dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarını elde etmiştir. Dağılım fonksiyonunu temel alarak, ön-testin kritik değeri 1 olduğunda hata varyansının aralık tahminindeki kapsama olasılığının maksimum olduğunu analitik ve sayısal olarak göstermiştir.

Regresyon katsayısı üzerinde bir ön bilgiye sahip olunduğu durumlarda regresyon katsayısının kestiriminde bu bilgiyi kullanmak faydalı olabilir ve regresyon katsayısının Eşitsizlik Sınırlamalı En Küçük Kareler Kestiricisi (ICLS) kullanılabilir. Birçok araştırmacı ICLS kestiricisin örnekleme özelliklerini araştırmıştır. Wan (1994) ihmal edilmiş açıklayıcı değişkenlerin bulunduğu durumda ICLS kestiricisinin örnekleme özelliklerini incelemiştir. Ohtani (2005) gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenin ana açıklayıcı değişkenlerden biri olduğu ve bu değişken için regresyon katsayıları üzerinde eşitsizlik sınırlaması şeklinde bir ön bilgiye sahip olunduğu varsayımıyla vekil değişken bulunduran modelin ICLS kestiricisi için yanlılık ve MSE formüllerini elde etmiştir. Ayrıca En Küçük Kareler (EKK) ve ICLS kestiricisinin yanlılık ve MSE'si sayısal olarak karşılaştırmış, eşitsizlik sınırlaması doğru olduğunda ve bazı durumlarda ICLS kestiricisinin yanlılığının mutlak değerinin EKK kestiricisininkinden daha küçük olduğu gösterilmiştir.

Mittelhammer (1984), Ohtani (1993,1998) ve Namba (2002) ilgili açıklayıcı değişkenler ihmal edildiğinde Stein Rule (SR) ve Pozitif Stein Rule (PSR) kestiricilerinin örnekleme özelliklerini incelemişlerdir. Mittelhammer (1984) ilgili açıklayıcı değişkenler ihmal edildiğinde SR kestiricisinin EKK kestiricisinden üstün olmadığını göstermiştir. Ohtani (1993) ilgili açıklayıcı değişkenin ihmal edildiği modelin SR ve PSR kestiricilerinin tahmini hata kareler ortalaması (PMSE) için formül elde etmiş ve EKK, SR, PSR kestiriciler arasında en iyi seçimin PSR kestiricisi olduğunu sayısal olarak göstermiştir. Namba (2002), PSR kestiricisinin ilgili açıklayıcı değişkenler ihmal edildiğinde SR kestiricisinden üstün olduğunu göstermiştir. Namba ve Ohtani (2006) gözlemlenemeyen değişkenler yerine vekil değişkenler kullanıldığında bile PSR kestiricisinin, SR kestiricisinden üstün olduğunu göstermiştir. Ayrıca vekil değişkenler kullanıldığında SR ve PSR

kestiricilerin tahmini hata kareler ortalaması (PMSE) için açık bir formül elde etmiştir. Vekil değişken bulunduran modelde SR ve PSR kestiricilerin PMSE değerleri ile gözlemlenemeyen değişkenin ihmal edildiği modelin SR ve PSR kestiricilerinin PMSE değerlerini sayısal olarak karşılaştırmış ve bu kestiriciler arasında en iyi sonucun vekil değişken bulunduran modeldeki PSR kestiricisinin verdiğini göstermiştir.

Ohtani (1987) bir regresyon modelinde hata varyansı tahmin edilmek istendiğinde hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisini kullanmaktansa EKK kestiricisi ile ilişkili hata varyansının Alışılmış Kestiricisinin kullanılmasının daha iyi bir seçim olduğunu göstermiştir. Unal (2010) vekil değişken bulunduran bir regresyon modelinde hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisini göz önüne almış, hata varyansı kestiricisi formülünde EKK kestiricisi yerine Stein Rule (SR) Kestiricisini kullanarak hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisini elde etmiştir. Belirli durumlarda hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisinin MSE' sinin, EKK kestiricisiyle ilişkili olan hata varyansının Alışılmış Kestiricisinden büyük olduğunu göstererek Ohtani (1987) ile uyumlu bir sonuç elde etmiştir.

Yukarıdaki çalışmaların ana bağlantılarından biri gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkenin ihmal edilip edilmeyeceği ya da vekil değişkenin kullanılıp kullanılmayacağıdır. Ana açıklayıcı değişkenlerden biri gözlemlenemez veya gizli olduğunda, analizin gözlemlenemeyen açıklayıcı değişken için bir katsayı hesaplamasına kesinlikle gerek duyduğu durumda vekil değişken kullanımı kaçınılmazdır.

3. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE ALTERNATİF EKK KESTİRİCİSİ VE AĞIRLIKLI ORTALAMA KESTİRİCİ

Bu kısımda koşullu tahmin (regresyon katsayılarını tahmin etmek yerine öngörü olarak regresyon doğrusunu tahmin etmek) durumunda vekil değişken kullanılıp kullanılamayacağı sorusu incelenmiştir. İlerleyen kısımda gözlemlenemeyen değişkenin ihmal edildiği ve vekil değişken bulunduran modellerin Alternatif EKK kestiricileri ve bu kestiricilerin MSE'si incelenmiştir. Bölüm sonunda Ağırlıklı Ortalama Kestirici tanıtılmış ve Ağırlıklı Ortalama Kestiricinin bazı özellikleri incelenmiştir.

3.1. Model ve Modelin Özellikleri

y; n×1 tipinde bağımlı değişkenin gözlem vektörü, X_1 ve X_2 ; n×1 tipinde stokastik olmayan gözlemlerin vektörü, β_1 ve β_2 regresyon katsayılarının vektörü ve ε; n×1 tipinde normal hata terimi vektörü olmak üzere doğru regresyon modelinin

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon\ ,\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n) \tag{3.1}$$

olduğu varsayılsın. X_2 gözlemlenemediğinde, X_2^* vekil değişken matrisine ulaşılabildiği varsayımıyla iki model belirlenebilir. Birincisi gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin ihmal edildiği model;

$$y=X_1\beta_1+u,\ \ u=X_2\beta_2+\varepsilon \tag{3.2}$$

dir. Burada $u\sim N(X_2\beta_2,\sigma^2 I_n)$ dağılımına sahiptir. İkincisi ise gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin yerine X_2^* vekil değişkeninin kullanıldığı model;

$$y=X_1\beta_1+X_2^*\beta_2^*+u^* \tag{3.3}$$

dir. Burada $u^{*}\sim N(X_2\beta_2-X_2^{*}\beta_2^{*},\sigma^2 I_n)$ dağılımına sahiptir.

3.2. Gözlemlenemeyen Değişkenin İhmal Edildiği Modelde Alternatif $\hat{y}_o$ EKK Kestiricisi ve MSE'si

Gözlemlenemeyen X_2 değişkeninin ihmal edildiği (3.2) modelinde $\hat{y}_o$ Alternatif EKK kestiricisi

$$\hat{y}_o=X_1\hat{\beta}_1 \tag{3.4}$$

dir. Burada $\hat{\beta}_1$, (3.2) modelinden elde edilen EKK kestiricisidir.

(3.2) modeli için $\hat{y}_o$ Alternatif EKK kestiricisinin MSE'si

$$MSE(\hat{y}_o)=E\left[\hat{y}_o-(X_1\beta_1+X_2\beta_2)\right]'\left[\hat{y}_o-(X_1\beta_1+X_2\beta_2)\right]=\sigma^2\left(t_{\beta_2}^2+1\right) \tag{3.5}$$

dir (Ohtani,1981). (3.5) eşitliğindeki $t_{\beta_2}^2$; β_2'nin gerçek değerinin $\hat{\beta}_2$'nın standart hatasına oranıdır ve

$$t_{\beta_2}^2=\beta_2^2\left[(X_1'X_1)(X_2'X_2)-(X_2'X_1)^2\right]/\sigma^2(X_1'X_1)$$

(Feldstein, 1974) eşitliği ile ifade edilir.

3.3. Vekil Değişken Bulunduran Modelde $\hat{y}_p$ Alternatif EKK Kestiricisi ve MSE'si

Yukarıdaki varsayımlar ile gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin yerine X_2^{*} vekil değişkeninin kullanıldığı (3.3) modelinin $\hat{y}_p$ Alternatif EKK kestiricisi

$$\hat{y}_p = X_1\hat{\beta}_1 + X_2^*\hat{\beta}_2^* \tag{3.6}$$

dir. (3.6) ifadesinde kullanılan $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2^*$ model (3.3)'ten elde edilen EKK kestiricileridir. $\hat{y}_p$ Alternatif EKK kestiricisi için MSE

$$\begin{aligned} MSE\left(\hat{y}_p\right) &= E\left[\left[\hat{y}_p-\left(X_1\beta_1+X_2\beta_2\right)\right]'\left[\hat{y}_p-\left(X_1\beta_1+X_2\beta_2\right)\right]\right] \\ &= \sigma^2\left[t_{\beta_2}^2\left(1-r_{X_2X_2^*.X_1}^2\right)+2\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

dir (Ohtani, 1981). Burada $r_{X_2X_2^*.X_1}$, X_1 verildiğinde X_2 ve X_2^* arasındaki kısmi korelasyon katsayısıdır.

3.4. $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'nin Sayısal Olarak Karşılaştırılması

Yukarıdaki (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden yola çıkarak

$$\left[MSE\left(\hat{y}_p\right)-MSE\left(\hat{y}_o\right)\right]/\sigma^2 = -t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2 + 1 \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) denkleminden eğer $t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2 \leq 1$ ise $MSE\left(\hat{y}_o\right) \leq MSE\left(\hat{y}_p\right)$ olduğu görülür ve tersi de doğrudur. (3.8) denklemi, $\hat{y}_o$ 'nın $\hat{y}_p$'dan üstün olması için gerek ve yeter koşuldur. Ohtani (1981) $\hat{y}_o$'nın $\hat{y}_p$'den üstün olduğu aralıkları deneysel olarak göstermiş, eğer vekil değişken zayıf ise bu alanların oldukça geniş olduğu görülmüştür. Bu nedenle vekil değişken kullanımı rastgele yapılmamalıdır. Özellikle $r_{X_2X_2^*.X_1}^2=0$ olduğunda, t_{β_2} sonlu olduğu sürece $\hat{y}_o$ için herhangi bir t_{β_2} kullanılabilir. Bu sonuç $r_{X_2X_2^*.X_1}^2=0$ olsa bile $\hat{y}_p$'nın kullanımını öneren McCallum(1972) ve Wickens(1972) sonuçları ile uyuşmaz çünkü bu durumda $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$ aynı asimptotik yanlılığa sahiptir(Ohtani 1981).

3.5. $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'nın Ağırlıklı Ortalama Kestiricisi $\hat{y}^*$

Önceki kısımda t_{β_2} ve $r_{X_2X_2^*.X_1}$ hakkında önsel bir bilgiye sahip olunmadıkça hangi tahmin edicinin kullanılacağına karar verilemediği görülmüştür. Bu nedenle MSE'yi azaltmak için $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'nın bir Ağırlıklı Ortalama Kesticisi

$$\hat{y}^* = \lambda\hat{y}_p + (1-\lambda)\hat{y}_o,\ 0 \le \lambda \le 1 \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır (Feldstein, 1973,1974).

Ohtani (1981) $\hat{y}^*$ için MSE formülünü

$$\begin{aligned} MSE(\hat{y}^*) &= E\left[\left[\hat{y}^* - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)\right]'\left[\hat{y}^* - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)\right]\right] \\ &= \lambda^2\, MSE\left(\hat{y}_p\right) + (1-\lambda)^2 MSE(\hat{y}_o) \\ &\quad + 2\lambda(1-\lambda)E\left[\hat{y}_p - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)\right]' \times \left[\hat{y}_o - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)\right] \\ &= \sigma^2\left[\left(1+t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2\right)\lambda^2 - 2t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2\lambda + \left(1+t_{\beta_2}^2\right)\right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak vermiştir. (3.10) denkleminde $\lambda=0$ alındığında $MSE(\hat{y}_o)$, $\lambda= 1$ alındığında ise $MSE\left(\hat{y}_p\right)$ elde edilir.

$MSE(\hat{y}^*)$'yi minimum yapan λ ifadesi

$$\lambda^* = t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2 \Big/ \left(1+t_{\beta_2}^2 r_{X_2X_2^*.X_1}^2\right) \tag{3.11}$$

dir (Ohtani 1981). (3.11) denkleminden $r_{X_2X_2^*.X_1} \neq 0$ ve $0 < t_{\beta_2} < \infty$ olduğunda $0 \le \lambda^* \le 1$ dir. Bu durum $r_{X_2X_2^*.X_1} = \pm 1$ olduğunda da devam etmektedir. Yani MSE kriterine göre

λ^* ağırlık olarak kullanıldığında en iyi kestirici Ağırlıklı Ortalama Kestiricidir. Fakat pratikte $t_{\beta_2}^2$ gibi $r_{X_2X_2^*.X_1}^2$'de bilinememekte dolayısıyla λ^* değeri de bilinememektedir.

(3.10) eşitliğinden şu iki ifade elde edilebilir:

$$MSE(\hat{y}^*)\text{-}MSE(\hat{y}_o)=\sigma^2\left[\lambda(\lambda\text{-}2)t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2+\lambda^2\right] \tag{3.12}$$

$$MSE(\hat{y}^*)\text{-}MSE\left(\hat{y}_p\right)=\sigma^2\left\{(\lambda\text{-}1)\left[(\lambda\text{-}1)t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2+(1+\lambda)\right]\right\} \tag{3.13}$$

(3.12) ve (3.13) eşitliğinden $MSE(\hat{y}^*)<MSE(\hat{y}_o)$ ancak ve ancak $t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2>\lambda/(2\text{-}\lambda)$ olduğu ayrıca $MSE(\hat{y}^*)<MSE\left(\hat{y}_p\right)$ ancak ve ancak $t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2<(1+\lambda)/(1\text{-}\lambda)$ olduğu görülür. Eğer $\lambda/(2\text{-}\lambda)<t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2<(1+\lambda)/(1\text{-}\lambda)$ ise Ağırlıklı Ortalama Kestirici hem $\hat{y}_o$'den hem de $\hat{y}_p$'den üstündür. Aynı zamanda eğer $t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2>(1+\lambda)/(1\text{-}\lambda)$ ise $MSE\left(\hat{y}_p\right)<MSE(\hat{y}^*)<MSE(\hat{y}_o)$'dir. Ayrıca eğer $t_{\beta_2}^2\, r_{X_2X_2^*.X_1}^2<\lambda/(2\text{-}\lambda)$ ise $MSE(\hat{y}_o)<MSE(\hat{y}^*)<MSE\left(\hat{y}_p\right)$'dir. Bu eşitsizlikler; $\hat{y}^*$'nın hatalı kullanımından kaynaklanan potansiyel maksimum MSE kaybının, $\hat{y}_o$ veya $\hat{y}_p$'nin hatalı kullanımından kaynaklanan MSE kaybından daha küçük olduğu anlamına gelir. Bu nedenle Ohtani, (1981) model kararının yanlış verildiği durumda MSE kaybını azaltmak için Ağırlıklı Ortalama Kestiricisinin kullanımını tavsiye etmiştir.

λ'nın seçimi zor olduğundan, t_{β_2} ve $r_{X_2X_2^*.X_1}$ hakkında bir ön bilgiye sahip olunmadığında ağırlık olarak 1/2 kullanabilir. Ohtani (1981) λ=1/2 alındığında ağırlıklı ortalama kestiricinin geniş aralıklarda $\hat{y}_o$ ve $\hat{y}_p$'dan üstün olduğunu göstermiştir.

Sonuç olarak modele rastgele vekil değişken eklenmesinin riskli olabileceği belirtilip ağırlıklı ortalama kestirici kullanımı tavsiye edilmiştir. Fakat λ'nın seçimi belirsiz olduğundan ağırlık bir anlamda en uygun seçim olarak kabul

edilebilir(Ohtani 1981). Bu sonuç McCallum (1972) ve Wickens (1972) vekil değişken zayıf olsa bile bu değişkenin kullanılması yönündeki sonuçla uyuşmaz.

4. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE EŞİTSİZLİK KISITLI EKK KESTİRİCİSİ

Regresyon katsayısı üzerinde bir eşitsizlik sınırlaması şeklinde bir ön bilgi var ise regresyon katsayısının eşitsizlik sınırlamalı en küçük kareler (ICLS) kestiricisi kullanılabilir. Çeşitli kaynaklarda ICLS kestiricisinin kullanılışı üzerine çalışmalar yayımlanmıştır. Bunlardan bazıları Wan (1994, 1997), Wan ve Ohtani (2000) ve Ohtani (2005)'tir.

Bu kısımda gözlemlenemeyen değişkenin ana açıklayıcı değişkenlerden biri olduğu varsayılmıştır ve bu nedenle vekil değişken kullanımı önerilmiştir. Ayrıca gözlemlenemeyen açıklayıcı değişkene ait regresyon katsayıları üzerinde eşitsizlik sınırlaması şeklinde bir ön bilgiye sahip olunduğu varsayımı altında ICLS kestiricisi ve bu kestiricinin MSE formülü ve sayısal karşılaştırmalar gösterilmiştir.

4.1. Model ve Modelin Özellikleri

Doğru olan lineer regresyon modelinin

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon,\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n) \qquad (4.1)$$

olduğu varsayılsın. Burada y; n×1 tipinde bağımlı değişken vektörü; X_1; n×(k-1) tipinde gözlemlenebilen açıklayıcı değişkenler matrisi, X_2; n×1 tipinde gözlemlenemeyen açıklayıcı değişken vektörü, β_1; (k-1)×1 tipinde X_1 için regresyon katsayılarının vektörü, β_2; X_2 için skaler bir regresyon katsayısıdır. ε; n×1 tipinde $E[\varepsilon]=0$ ve $E[\varepsilon\varepsilon']=\sigma^2 I_n$ şeklinde normal hata terimi vektörüdür. X_1 ve X_2 değişkenlerinin stokastik olmadığı ve X_2^*'ın X_2'nin vekil değişkeni olduğu varsayılmıştır.

X_2 değişkeninin ana açıklayıcı değişkenlerden biri olduğu varsayıldığından analiz β_2 katsayısını kestirilmesini gerektirir. Bu nedenle aşağıdaki vekil değişken bulunduran modeli kullanarak β_2 katsayısı hesaplanmalıdır.

$$y=X_1\beta_1+X_2^*\beta_2^*+w \qquad (4.2)$$

Burada $w=X_2\beta_2-X_2^*\beta_2^*+\varepsilon$ dir.

4.2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{2}}^{*}$ Eşitsizlik Kısıtlı EKK Kestiricisi (ICLS)

Vekil değişken bulunduran modelde β_2'nin EKK kestiricisi b_2^* olmak üzere

$$b_2^*=(X_2^{*'}M_1X_2^*)^{-1}X_2^{*'}M_1y \qquad (4.3)$$

dir. Burada $M_1=I_n-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$ dir.

β_2 için eşitsizlik sınırının

$$\beta_2>0 \qquad (4.4)$$

şeklinde verildiği varsayılsın. ICLS kestiricisi

$$\hat{\beta}_2^*=\begin{cases} b_2^* \text{ eğer } b_2^*>0 \text{ ise} \\ \\ 0 \text{ eğer } b_2^*\leq 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır (Lovell and Prescott,1970).

4.3. Kestiriciler için Moment, Yanlılık ve MSE

$r_2^*=\left(X_2^{*'}M_1X_2\right)/\left(X_2^{*'}M_1X_2^*\right)$ ve $m_{22}^*=\left(X_2^{*'}M_1X_2^*\right)$ olmak üzere b_2^*'ın dağılımı $N\left(r_2^*\beta_2,\sigma^2/m_{22}^*\right)$'dır. b_2^* EKK kestiricisinin yanlılığı

$$BIAS(b_2^*)= E[(b_2^*-\beta_2)]=E[b_2^*]-E[\beta_2]=r_2^*\beta_2-\beta_2=\beta_2(r_2^*-1)$$

dir. b_2^* EKK kestiricisinin σ ile normalleştirilmiş yanlılığı

$$BIAS(b_2^*)/\sigma=E\left[\frac{(b_2^*-\beta_2)}{\sigma}\right]=(r_2^*-1)\left(\frac{\beta_2}{\sigma}\right) \quad (4.6)$$

olarak bulunur. b_2^* EKK kestiricisinin MSE'si

$$MSE(b_2^*)=E\left[(b_2^*-\beta_2)^2\right]=Var(b_2^*)+\left(BIAS(b_2^*)\right)^2=\sigma^2/m_{22}^*+\beta_2^2(r_2^*-1)^2$$

dir. b_2^*, $N(r_2^*\beta_2,\sigma^2/m_{22}^*)$ dağılımına sahip olduğundan Ohtani (2005), b_2^* EKK kestiricisinin σ^2 ile normalleştirilmiş MSE formülünü

$$MSE(b_2^*)/\sigma^2=\sigma^2/m_{22}^*\sigma^2+\beta_2^2(r_2^*-1)^2/\sigma^2=\left(\frac{\beta_2}{\sigma}\right)^2(r_2^*-1)^2+1/m_{22}^* \quad (4.7)$$

olarak vermiştir.

b_2^* EKK kestiricisinin olasılık fonksiyonu $p(b_2^*)$ olsun. O halde $\hat{\beta}_2^*$'nın birinci momenti

$$E\left[\hat{\beta}_2^*\right]=\int_0^{\infty} b_2^*\,p(b_2^*)db_2^*+\int_{-\infty}^{0} 0\,p(b_2^*)db_2^* \quad (4.8)$$

dir. $z=\sqrt{m_{22}^*}(b_2^*-r_2^*\beta_2)/\sigma$ değişken değiştirmesi yapılarak $z_0=-\sqrt{m_{22}^*}r_2^*\beta_2/\sigma$, $f(z)$ ve $F(z)$ standart normal dağılımın sırasıyla olasılık ve dağılım fonksiyonları olmak üzere

$$E\left[\hat{\beta}_2^*\right]=\left(\sigma/\sqrt{m_{22}^*}\right)f(z_0)+r_2^*\beta_2\left[1-F(z_0)\right] \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Bu nedenle $\hat{\beta}_2^*$'ın σ ile normalleştirilmiş yanlılığı

$$BIAS(\hat{\beta}_2^*)/\sigma=f(z_0)/\sqrt{m_{22}^*}+\left(r_2^*-1\right)\left(\beta_2/\sigma\right)-r_2^*F(z_0)\left(\beta_2/\sigma\right) \tag{4.10}$$

dır. $\hat{\beta}_2^*$'ın MSE'si

$$MSE\left(\hat{\beta}_2^*\right)=\int_0^{\infty}\left(b_2^*-\beta_2\right)^2 p\left(b_2^*\right)db_2^*+\int_{-\infty}^{0}\left(0-\beta_2\right)^2 p\left(b_2^*\right)db_2^* \tag{4.11}$$

dir. $\int_a^{\infty} z^2 f(z)dz=af(a)+1-F(a)$ olduğundan tekrar $z=\sqrt{m_{22}^*}\left(b_2^*-r_2^*\beta_2\right)/\sigma$ değişken değiştirmesi yapılarak $\hat{\beta}_2^*$'nın σ^2 ile normalleştirilmiş MSE'si

$$MSE\left(\hat{\beta}_2^*\right)/\sigma^2=\left(r_2^*-1\right)^2\left[1-F(z_0)\right]\left(\beta_2/\sigma\right)^2+\left(2/\sqrt{m_{22}^*}\right)\left(r_2^*-1\right)f(z_0)\left(\beta_2/\sigma\right)$$
$$+\left[z_0f(z_0)+1-F(z_0)\right]/m_{22}^*+F(z_0)\left(\beta_2/\sigma\right)^2 \tag{4.12}$$

olarak bulunur.

4.4. Kestiricilerin Sayısal Olarak Karşılaştırılması

Ohtani (2005) $\hat{\beta}_2^*$ ve b_2^*'ın MSE'si ve yanlılığını analitik olarak karşılaştırmak zor olduğundan sayısal değer tahmini ile karşılaştırma yapmıştır. Sayısal değer tahmini için aşağıdaki model kullanılmıştır.

Doğru model: $y=\beta_1 I_1+\beta_2 x_2+\varepsilon$

Vekil değişkenli model: $y=\beta_1 I_1+\beta_2 x_2^*+w$

Burada I_1; n×1 tipinde 1'lerin vektörü, x_2; n×1 tipinde gözlemlenemeyen açıklayıcı değişken vektörü, x_2^*; x_2'nin vekil değişkenidir.

Vekil değişken bulunduran modelde,

$$M_1=I_n-\left(I_1'I_1\right)^{-1}I_1'=I_n-I_1I_1'/n$$

$$x_2^{*'}M_1x_2^*=x_2^{*'}\left(I_n-I_1I_1'/n\right)x_2^*=x_2^{*'}I_nx_2^*-n\left(x_2^{*'}/n\right)I_1I_1'\left(x_2^*/n\right)=x_2^{*'}x_2^*-n\bar{x}_2^{*2}$$

$$x_2^{*'}M_1x_2=x_2^{*'}\left(I_n-I_1I_1'/n\right)x_2=x_2^{*'}I_nx_2-n\left(x_2^{*'}/n\right)I_1I_1'\left(x_2/n\right)=x_2^{*'}x_2-n\bar{x}_2^*\bar{x}_2$$

dir. Burada $\bar{x}_2$ ve $\bar{x}_2^*$ sırasıyla x_2 ve x_2^* 'nin örneklem ortalamasıdır. x_2 ve x_2^* arasındaki basit korelasyon katsayısı ρ^* olmak üzere

$$\rho^*=\frac{x_2^{*'}x_2-n\bar{x}_2^*\bar{x}_2}{\sqrt{\left(x_2'x_2-n\bar{x}_2^2\right)\left(x_2^{*'}x_2^*-n\bar{x}_2^{*2}\right)}}$$

ρ^* değeri 1'e yakın olduğunda vekil değişken kuvvetli, ρ^* değeri sıfıra yakın olduğunda ise vekil değişken zayıf olarak nitelendirilir.

Yukarıdaki notasyonlar kullanılarak (4.6) denkleminde ifade edilen r_2^*;

$$
\begin{aligned}
r_2^* &= \frac{\left(x_2^{*\prime} M_1 x_2\right)}{\left(x_2^{*\prime} M_1 x_2^*\right)} \\
&= \frac{x_2^{*\prime}\left(I_n - I_1 I_1^{\prime}/n\right)x_2}{x_2^{*\prime}\left(I_n - I_1 I_1^{\prime}/n\right)x_2^*} \\
&= \frac{x_2^{*\prime} x_2 - n\left(x_2^{*\prime}/n\right)(x_2/n)}{x_2^{*\prime} x_2^* - n\left(x_2^{*\prime}/n\right)\left(x_2^*/n\right)} \\
&= \frac{x_2^{*\prime} x_2 - n\bar{x}_2^*\bar{x}_2}{x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}} \\
&= \frac{x_2^{*\prime} x_2 - n\bar{x}_2^*\bar{x}_2}{x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}} \frac{\sqrt{\left(x_2^{\prime} x_2 - n\bar{x}_2^2\right)\left(x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}\right)}}{\sqrt{\left(x_2^{\prime} x_2 - n\bar{x}_2^2\right)\left(x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\left(x_2^{\prime} x_2 - n\bar{x}_2^2\right)}}{\sqrt{\left(x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}\right)}}\rho^* = \sqrt{\frac{m_{22}}{m_{22}^*}}\rho^*
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada $m_{22}=\left(x_2^{\prime} x_2 - n\bar{x}_2^2\right)$ ve $m_{22}^*=\left(x_2^{*\prime} x_2^* - n\bar{x}_2^{*2}\right)$ dir.

Ohtani (2005) sayısal değer tahmininde çeşitli parametre değerleri kullanmıştır. Belirgin bulgular Tablo 4.1, EK-1'de gösterilmiştir. Burada Tablo 4.1'deki "REF" terimi $\text{REF}\left(\hat{\beta}_2^*\right)=\text{MSE}(b_2^*)/\text{MSE}(\hat{\beta}_2^*)$ şeklinde tanımlanmış olup $\hat{\beta}_2^*$'nın b_2^*'a göreli etkinliği anlamına gelir. Bu nedenle $\text{REF}\left(\hat{\beta}_2^*\right)$ değeri 1'den büyük olduğunda ICLS kestiricisi MSE açısından EKK kestiricisinden daha etkindir.

Tablo 4.1'de görüldüğü gibi β_2/σ negatif olduğunda b_2^*'ın yanlılığı pozitiftir ve bunun tersi de doğrudur. Bu, eşitlik (4.6)'dan kolayca görülür. ρ^* değeri artar iken $\hat{\beta}_2^*$' nin yanlılığının işaretinin pozitiften negatife dönüştüğü yerde β_2/σ'nın değeri pozitif ve artandır. Eşitsizlik sınırlaması doğru olduğunda (yani $\beta_2/\sigma>0$ olduğunda) bazı durumlar dışında (örneğin $\beta_2/\sigma=0.5$ ve $\rho^*\geq 0.90$ durumu dışında) ICLS kestiricisinin yanlılığının mutlak değeri EKK kestiricisinin yanlılığından küçüktür.

Fakat eşitsizlik sınırlaması doğru olmadığında (yani $\beta_2/\sigma \leq 0$ durumunda) ICLS kestiricisinin yanlılığının mutlak değeri EKK kestiricisinin yanlılığından büyüktür.

Aynı zamanda Tablo 4.1'de görüldüğü gibi eşitsizlik sınırlaması doğru veya doğruya yakın olduğunda, (yani $\beta_2/\sigma > -c$ durumunda, burada c; 0 ile 1 arasında bir değerdir.), ICLS kestiricisi EKK kestiricisinden daha etkindir. Özellikle $\beta_2/\sigma > 0$ durumunda, vekil değişken zayıf düştüğünden (yani ρ^* değeri sıfıra yakınlaştığından) göreli etkinlik artar. Aynı zamanda eşitsizlik sınırlaması doğruya yakın olmadığında (örneğin $\beta_2/\sigma \leq -1.0$ durumunda) göreli etkinlik 1'den küçüktür. Bu nedenle ICLS kestiricisi EKK kestiricisinden daha az etkindir. Ancak ρ^* değeri azaldıkça göreli etkinlik büyür. $\beta_2/\sigma > 0$ ve $\beta_2/\sigma \leq -1.0$ durumunda vekil değişken zayıflarken göreli etkinlik artar. Bu durum, eşitsizlik sınırlaması doğru olduğunda veya yanlış ve doğruya yakın olmadığında (yani $\beta_2/\sigma > 0$, $\beta_2/\sigma \leq -1.0$ durumunda) eşitsizlik sınırını genişlettiği gibi vekil değişkenin de güçsüzleştiğini belirtir.

5. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE STEIN RULE KESTİRİCİLER

Birçok araştırmacı vekil değişkenlerin kullanıldığı regresyon modeli istatistiklerinin örnekleme özelliklerini araştırmıştır. Bunlardan bazıları McCallum (1972), Wickens (1972), Frost (1979), Ohtani (1981), Ohtani ve Hasegawa (1993), ve Trenkler ve Stahlecker (1996)'dır. Namba ve Ohtani (2006) vekil değişkenler kullanıldığında SR ve PSR kestiricilerin PMSE'leri için açık bir formül elde etmiş ve kestiricilerin örnekleme özelliklerini incelemek için bu formülü kullanarak sayısal ölçümler verilmiştir.

5.1. Model ve Modelin Özellikleri

Aşağıdaki lineer regresyon modeli göz önüne alınsın.

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon,\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n) \tag{5.1}$$

Burada y; n×1 tipinde bağımlı değişkenin gözlem vektörü, X_1 ve X_2 sırasıyla n×k_1 ve n×k_2 tipinde stokastik olmayan gözlemlerin matrisidir. β_1 ve β_2 sırasıyla k_1×1 ve k_2×1 tipinde regresyon katsayılarının vektörü ve ε; n×1 tipinde normal hata terimi vektörüdür.

X_2' nin gözlemlenemediği durumda, X_2^* vekil değişkenlerin matrisine ulaşabildiği; X_1, $[X_1,X_2]$ ve $X=[X_1,X_2^*]$ matrislerinin kolon ranklı olduğu varsayımları ile iki model belirlenebilir. Birincisi gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin ihmal edildiği model;

$$y=X_1\beta_1+u,\ u=X_2\beta_2+\varepsilon \tag{5.2}$$

dir. Burada $u\sim N(X_2\beta_2,\sigma^2 I_n)$ dağılımına sahiptir.

İkincisi ise X_2^* vekil değişkeninin gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin yerine kullanıldığı model;

$$y=X_1\beta_1+X_2^*\beta_2^*+u^*,\ u^*=X_2\beta_2-X_2^*\beta_2^*+\varepsilon \tag{5.3}$$

dir. Burada $u^*\sim N(X_2\beta_2-X_2^*\beta_2^*,\sigma^2 I_n)$ dağılımına sahiptir.

5.2. Stein Rule Kestiriciler

Model (5.1) temel alınarak $\beta=\left[\beta_1',\beta_2'\right]'$ için EKK kestiricisi $S=X'X$ olmak üzere

$$b=S^{-1}X'y \tag{5.4}$$

dir. (5.1) eşitliği temel alınarak lineer regresyonda SR kestiricisi $0\le a\le 2(k-2)/(v+2)$, $k=k_1+k_2$, $v=n-k_1-k_2$ ve $e=y-Xb$ olmak üzere

$$b_{SR}=\left(1-a\frac{e'e}{b'Sb}\right)b \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanır. James ve Stein (1961), model doğru tanımlandığında PMSE açısından (5.5) denklemiyle verilen SR kestiricisinin (5.4) denklemiyle verilen EKK kestiricisinden üstün olduğunu gösterdi. Baranchik (1970)

$$b_{PSR}=\max\left[0,\ 1-a\frac{e'e}{b'Sb}\right]b \tag{5.6}$$

olarak tanımlanan PSR kestiricisinin SR kestiricisinden daha üstün olduğunu gösterdi.

5.2.1. Gözlemlenemeyen Değişkenin İhmal Edildiği Modelde Stein Rule Kestiriciler

Gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin ihmal edildiği (5.2) modeli temel alınarak sırası ile tanımlanmış EKK, SR ve PSR kestiricileri

$$b_1=S_{11}^{-1}X_1'y, \tag{5.7}$$

$$b_{SRO}=\left(1-a_1\frac{e_1'e_1}{b_1'S_{11}b_1}\right)b_1 \tag{5.8}$$

$$b_{PSRO}=\max\left[0,1-a_1\frac{e_1'e_1}{b_1'S_{11}b_1}\right]b_1 \tag{5.9}$$

olarak tanımlanır (Namba ve Ohtani, 2006). Burada $S_{11}=X_1'X_1$, $0\leq a_1\leq 2(k_1-2)/(v_1+2)$, $v_1=n-k_1$ ve $e_1=y-X_1b_1$'dir. Namba (2002) çalışmasında tanımlamış olduğu modelde ilgili X_2 açıklayıcı değişken matrisi ihmal edildiğinde PSR kestiricisinin SR kestiricisinden üstün olduğunu göstermiştir.

5.2.2. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Stein Rule Kestiriciler

Gözlemlenemeyen X_2 açıklayıcı değişkeninin yerine X_2^* vekil değişkeninin kullanıldığı (5.3) modeli temel alınarak $\beta^*=\left[\beta_1',\beta_2^{*'}\right]'$ için sırası ile tanımlanmış EKK, SR ve PSR kestiricileri;

$$b^*=S^{*-1}X^{*'}y \tag{5.10}$$

$$b_{SRP}=\left(1-a\frac{e^{*'}e^*}{b^{*'}S^*b^*}\right)b^* \tag{5.11}$$

$$b_{PSRP}=\max\left[0,1-a\frac{e^{*'}e^*}{b^{*'}S^*b^*}\right]b^* \tag{5.12}$$

olarak tanımlanır (Namba ve Ohtani, 2006). Burada $S^*=X^{*'}X^*$, $X^*=[X_1,X_2^*]$, $0\leq a\leq 2(k-2)/(v+2)$ ve $e^*=y-X^*b^*$'dir.

5.2.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Stein Rule Kestiriciler için PMSE

Namba ve Ohtani (2006) PMSE'leri elde etmek için ön-test kestiricisini

$$\hat{\beta}^*(\tau)=I(F^*\geq\tau)\left(1-a\frac{e^{*'}e^*}{b^{*'}S^*b^*}\right)b^* \tag{5.13}$$

göz önüne almıştır. Burada I(A); eğer bir A olayı gerçekleşiyorsa I(A)=1 aksi takdirde I(A)=0 olan bir gösterge fonksiyonudur. $F^*=\left(\frac{b^{*'}S^*b^*}{k}\right)/\left(\frac{e^{*'}e^*}{v}\right)$; (5.3) denklemi temel alınarak $H_0:\beta^*=0$ hipotezine karşı $H_1:\beta^*\neq 0$ alternatif hipotezinin test istatistiği ve τ; ön-testin kritik değeridir. $\tau=0$ olduğunda $\hat{\beta}^*(\tau)$ (5.11) denklemiyle verilen b_{SRP} kestiricisine, $\tau=av/k$ olduğunda b_{PSRP} kestiricisine dönüşür.

Ayrıca (5.8) ve (5.9) denklemleriyle verilen SR ve PSR kestiricilerinin PMSE'si sırasıyla

$$PMSE[b_{SRO}]=E\left[(X_1b_{SRO}-X\beta)'(X_1b_{SRO}-X\beta)\right] \tag{5.14}$$

$$PMSE[b_{PSRO}]=E\left[(X_1b_{PSRO}-X\beta)'(X_1b_{PSRO}-X\beta)\right] \tag{5.15}$$

olarak tanımlanır. Namba (2002) çalışmasında (5.14) ve (5.15)'deki PMSE'ler için açık formüller elde etti.

Benzer yol ile $\hat{\beta}^*(\tau)$ için PMSE formülünü Namba ve Ohtani (2006)

$$\begin{aligned}
PMSE\left[\hat{\beta}^{*}(\tau)\right] &= E\left[\left(X^{*}\hat{\beta}^{*}(\tau)-X\beta\right)'\left(X^{*}\hat{\beta}^{*}(\tau)-X\beta\right)\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\beta}^{*}(\tau)'S^{*}\hat{\beta}^{*}(\tau)\right)-2X^{*}\hat{\beta}^{*}(\tau)\beta'X'+\beta'S\beta\right] \\
&= E\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)\left(1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)^{2}b^{*'}S^{*}b^{*}\right] \\
&\quad -2E\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)\left(1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)\beta'X'X^{*}b^{*}\right]+\beta'S\beta \\
&= E\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)b^{*'}S^{*}b^{*}\right]-2aE\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)e^{*'}e^{*}\right] \\
&\quad +a^{2}E\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right] \\
&\quad -2E\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)\beta'X'X^{*}b^{*}\right]+2aE\left[I\left(F^{*}\geq\tau\right)\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\beta'X'X^{*}b^{*}\right] \\
&\quad +\beta'S\beta \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplamıştır. Namba ve Ohtani (2006) $\hat{\beta}^{*}(\tau)$' nın τ'ya göre birinci türevi alarak

$$\begin{aligned}
\frac{PMSE\left[\hat{\beta}^{*}(\tau)\right]}{\sigma^{2}} &= H(1,0;\tau)-2aH(0,1;\tau)+a^{2}H(-1,2;\tau)-2J(0,0;\tau)+2aJ(-1,1;\tau) \\
&\quad +\lambda_{1}^{*}+\lambda_{2}^{*} \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

olarak tanımlamıştır. Burada

$$H(p,q;\tau)=E\left[I\left(\frac{vv_{1}}{kv_{2}}\geq\tau\right)v_{1}^{p}v_{2}^{q}\right] \qquad (5.18)$$

$$J(p,q;\tau)=E\left[I\left(\frac{vv_{1}}{kv_{2}}\geq\tau\right)v_{1}^{p}v_{2}^{q}\frac{\beta'X'X^{*}b^{*}}{\sigma^{2}}\right] \qquad (5.19)$$

dir. Namba ve Ohtani (2006) $H(p,q;\tau)$ ve $J(p,q;\tau)$ fonksiyonlarının açık formüllerini

$$H(p,q;\tau)=2^{p+q}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}w_i(\lambda_1^*)w_j(\lambda_2^*)G_{ij}(p,q;\tau) \tag{5.20}$$

$$J(p,q;\tau)=\lambda_1^*2^{p+q}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}w_i(\lambda_1^*)w_j(\lambda_2^*)G_{i+1,j}(p,q;\tau) \tag{5.21}$$

olarak tanımlamıştır. $I_x(.\,,.)$; $I_x(a_1,a_2)=[B(a_1,a_2)]^{-1}\int_0^x t^{a_1-1}(1-t)^{a_2-1}dt$, şeklinde tamamlanmamış beta fonksiyonu olmak üzere

$$G_{ij}(p,q;\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+p+i\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+q+j\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+j\right)}\left[1-I_{\tau^*}\left(\frac{k}{2}+p+i,\frac{v}{2}+q+j\right)\right] \tag{5.22}$$

dir. Burada $\tau^*=k\tau/(k\tau+v)$ ve $w_i(\lambda)=\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i/\,i!$ dir. $\tau=0$ ve $\tau=av/k$ alınarak vekil değişkenler kullanıldığında SR ve PSR kestiricilerin PMSE'leri elde edilir. Namba ve Ohtani (2006) $\hat{\beta}^*(\tau)$ nın τ'ya göre türevini alarak PMSE formülünü bazı düzenlemelerle

$$\frac{\partial \mathrm{PMSE}\left[\hat{\beta}^*(\tau)\right]/\sigma^2}{\partial\tau}=-2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}w_i(\lambda_1^*)w_j(\lambda_2^*)\frac{\Gamma(v+k)/2+i+j+1)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+j\right)}$$
$$\times\frac{k^{k/2+i-1}v^{v/2+j}\tau^{k/2+i-2}}{(k\tau+v)^{(v+k/2)+i+j+1}}(k\tau-av)\left[(k\tau-av)-\lambda_1^*\frac{k\tau}{k/2+i}\right] \tag{5.23}$$

olarak elde etmiştir. (5.20) ve (5.21) denklemleri sonsuz seriler olup mutlak yakınsak olduklarından $\hat{\beta}^*(\tau)$'nın PMSE'si $[0,av/k]$ aralığında monoton azalan bir fonksiyondur. $\hat{\beta}^*(\tau)$, $\tau=0$ alındığında SR kestiricisine, $\tau=av/k$ alındığında ise PSR kestiricisine dönüştüğünden aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1 Gözlemlenemeyen değişkenler yerine vekil değişkenler kullanıldığında PSR kestiricisi, SR kestiricisinden üstündür (Namba ve Ohtani, 2006).

5.2.3. Kestiricilerin Sayısal Olarak Karşılaştırılması

Namba ve Ohtani (2006) vekil değişken bulunduran ve vekil değişken bulundurmayan kestiricilerin PMSE'lerini sayısal olarak karşılaştırmıştır. Ohtani ve Hasegewa (1993) çalışmasında ele aldığı gibi $F_{\beta_2}=\beta_2 X_2' M_1 X_2 \beta_2/\sigma^2$ ve $M_1=I-X_1 S_{11}^{-1} X_1'$ olmak üzere

$$\lambda_2^*=F_{\beta_2}\left[1-\left\{\beta_2' X_2' M_1 X_2^* \left(X_2^{*'} M_1 X_2^*\right)^{-1} X_2^{*'} M_1 X_2 \beta_2/\beta_2' X_2' M_1 X_2 \beta_2\right\}\right] \qquad (5.24)$$

dir. Burada F_{β_2}; X_2 gözlemlendiğinde $H_0:\beta_2=0$ sıfır hipotezi için merkezi olmayan parametre olduğundan X_2'nin önem büyüklüğü olarak yorumlanabilir. F_{β_2} sıfıra yakın olduğunda X_2 önemsiz bir değişken olduğundan vekil değişken kullanmak oldukça gereksiz olur ve bunun tersi de doğrudur.

Eğer $k_2=1$ ise (5.24) denklemindeki küme parantezinin içindeki kısım

$$\left(X_2' M_1 X_2^*\right)^2 / \left[\left(X_2' M_1 X_2\right)\left(X_2^{*'} M_1 X_2^*\right)\right] \qquad (5.25)$$

olarak elde edilir. (5.25) ifadesi X_1 verildiğinde X_2 ile X_2^* arasındaki kısmi korelasyon katsayısı olduğundan (5.24) denkleminin küme parantezinin içindeki kısım, $k_2\geq 2$ olduğunda bile vekil değişkenin öneminin büyüklüğü olarak yorumlanmıştır**.** (5.24) denklemindeki küme parantezinin içi $r_{22.1}^{*2}$ olarak adlandırılırsa

$$\lambda_2^*=F_{\beta_2}\left(1-r_{22.1}^{*2}\right) \qquad (5.26)$$

elde edilir. $r_{22.1}^{*2}$, 1 değerine yakın olduğunda ve özellikle $k_2=1$ iken vekil değişken oldukça önemlidir ve bunun tersi de doğrudur.

Ayrıca Namba (2002) çalışmasında olduğu gibi (5.8) ve (5.9) denklemleriyle verilen kestiricilerin PMSE'leri $\lambda_1=\beta'X'X_1S_{11}^{-1}X_1'X\beta/\sigma^2=F_\beta R_1^2$ ve $\lambda_2=\beta'X'M_1X\beta=F_{\beta_2}=F_\beta(1-R_1^2)$ değerlerine bağlıdır, burada $F_\beta=\beta'S\beta/\sigma^2$ ve $R_1^2=\beta'X'X_1S_{11}^{-1}X_1'X\beta/\beta'S\beta$ dir. F_β, sıfır hipotezi testi için doğru tanımlanmış ve bütün regresyon katsayılarının sıfır olduğu modelde görülen merkezi olmama parametresidir. Aynı zamanda R_1^2, Xβ'nın X_1 üzerinde belirleme katsayısı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle eğer R_1^2, 1 değerine yakın ise modelin eksik tanımlanma değeri sıfır olarak sayılabilir ve bunun tersi de doğrudur

Namba ve Ohtani (2006) sayısal ölçümlerde k_1=3, 4, 5, 7; k_2=1; n=20, 30, 40 değerlerini, $\lambda_2/F_\beta=1-R_1^2$ =0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 değerlerini ve buna benzer olarak $\lambda_2^*/F_\beta=\left(1-R_1^2\right)\left(1-r_{22.1}^{*2}\right)$=0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 değerlerini ve F_β için de çeşitli parametre değerlerini kullanmıştır. $\lambda_2/F_\beta=1-R_1^2$ değeri küçük olduğunda modelin eksik tanımlanma değeri küçük olarak sayılabilir. Ayrıca $r_{22.1}^{*2}$ değeri bire yaklaştığından λ_2^*/F_β değeri λ_2/F_β değerinden daha küçük olur (vekil değişken önem kazanır.). PMSE'leri karşılaştırmak için, $\bar{\beta}$ herhangi bir kestirici olmak üzere, oransal PMSE değerleri PMSE $[\bar{\beta}]$/PMSE$\left[b^*\right]$ şeklinde tanımlanıp ölçülmüştür. Bu nedenle oransal PMSE değerleri birden küçük olduğunda $\bar{\beta}$ kestiricisi b^* kestiricisinden daha küçük PMSE değerine sahiptir.

Namba ve Ohtani (2006) sayısal analizde FORTRAN kodu kullanmış olup, $H(p,q;\tau)$ ve $J(p,q;\tau)$ sonsuz serileri, serilerdeki artış 10^{-14} değerinden daha küçük olduğunda yakınsak olarak değerlendirilmiştir. b_{SRO} ve b_{PSRO}'nin PMSE hesapları için Namba (2002) tarafından elde edilen formül kullanmış, k=6, 8 ve n=30 durumundaki sonuçlar Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 EK-2'de örneksel olarak verilmiştir.

Tablo 5.1 ilgili açıklayıcı değişkenin ihmal edildiği durumdaki kestiricilerin PMSE'lerini gösterir. Namba (2002) de gösterildiği gibi PSR kestiricisi b_{PSRO}, SR kestiricisi olan b_{SRO}'dan üstündür. F_β ve λ_2/F_β nin büyük değerleri için SR ve PSR kestiricileri vekil değişkenin kullanıldığı EKK kestiricisinden çok az oranla daha büyüktür, yani aradaki fark çok küçüktür.

Tablo 5.2'den, teorem 1'de gösterildiği gibi PSR kestiricisi b_{PSRP}'nin vekil değişken kullanıldığında bile SR kestiricisinin b_{SRP}'den üstün olduğu görülmektedir. F_β ve λ_2/F_β değerleri büyüdükçe SR ve PSR kestiricilerinin PMSE'si büyür. Tablo 5.1'e benzer olarak F_β ve λ_2/F_β'nin büyük değerleri için SR ve PSR kestiricilerinin EKK kestiricisinden daha büyük PMSE değerine sahip olduğu halde aradaki fark çok azdır. Aynı zamanda Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'yi karşılaştırarak $F_\beta=0$ için vekil değişkenin kullanıldığı PSR kestiricisinin PMSE'si, açıklayıcı değişkenin ihmal edildiği durumdaki PSR kestiricisinden çok az oranla daha büyüktür. Fakat $\lambda_2^* \leq \lambda_2$ olduğu kaydedilerek, parametre uzayının geniş bir bölümünde b_{PSRP}, b_{PSRO}'dan daha küçük PMSE değerine sahiptir. Bu nedenle buradaki tüm kestiriciler göz önüne alındığında en iyi seçim vekil değişken bulunduran modelin PSR kestiricisidir.

6. VEKİL DEĞİŞKEN BULUNDURAN MODELDE HATA VARYANSININ YİNELENMİŞ KESTİRİCİSİ

Bu bölümde önce vekil değişken bulunduran bir regresyon modelinde hata varyansının Alışılmış Kestiricisi formülünde EKK kestiricisi yerine SR kestirici kullanılarak elde edilmiş olan Yinelenmiş Kestirici incelenecektir.

Sonraki kısımda ise X_2 'nin gözlemlenemediği durumda, X_2^* vekil değişken matrisine ulaşabildiği varsayımıyla X_2 yerine X_2^* vekil değişkeni kullanılan lineer regresyon modeli göz önüne alınmıştır. Hata varyansının Alışılmış Kestiricisinde EKK kestiricisi yerine PSR Kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi, bu kestiricinin yanlılığı ve MSE hesabı için formüller elde edilmiştir. Hata varyansının Alışılmış kestiricisi ile PSR kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş kestiricisi Mathematica programı kullanılarak karşılaştırılmış ve sonuçlar sergilenmiştir.

6.1. Model ve Modelin Özellikleri

İki değişkenli lineer regresyon modeli

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon\ ,\ \varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n) \qquad (6.1)$$

göz önüne alınsın. Burada y; n×1 tipinde bağımlı değişkenin gözlem vektörü X_1 ve X_2 sırasıyla $n\times k_1$ ve $n\times k_2$ tipinde stokastik olmayan gözlemlerin matrisi $\beta_1$ve β_2 sırasıyla $k_1\times 1$ ve $k_2\times 1$ tipinde parametre vektörleri ve ε; n×1 tipinde normal hata terimi vektörüdür.

6.1.1. Hata Varyansının Alışılmış Kestiricisi

Parametre vektörü $\beta=\left[\beta_1^{'},\beta_2^{'}\right]^{'}$ için EKK kestiricisi

$$b=S^{-1}X'y \tag{6.2}$$

dir. Burada $S= X'X$ ve $X=[X_1,X_2]$ ve X tam kolon rankına sahiptir.
Hata varyansının alışılmış kestiricisi

$$s^2=\frac{(y-Xb)'(y-Xb)}{n-k} \tag{6.3}$$

olarak tanımlanır.

6.2. Vekil Değişken Bulunduran Model ve Modelin Özellikleri

X_2 'nin gözlemlenemediği durumda, X_2^* vekil değişkenlerin matrisine ulaşabildiği varsayımıyla X_2 yerine X_2^* vekil değişkeninin kullanıldığı lineer regresyon modeli

$$y=X_1\beta_1+X_2^*\beta_2^*+u^* \tag{6.5}$$

dir. Burada $u^*\sim N(X_2\beta_2-X_2^*\beta_2^*,\sigma^2I_n)$ dağılımına sahip ve $u^*=X_2\beta_2-X_2^*\beta_2^*+\varepsilon$'dir.

6.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde Hata Varyansının Alışılmış Kestiricisi ve MSE'si

$X^*=[X_1,X_2^*]$ matrisinin tam kolon rankına sahip olsun. Parametre vektörü $\beta^*=[\beta_1',\beta_2^{*'}]'$ için EKK kestiricisi

$$b^*=S^{*-1}X^{*'}y \tag{6.6}$$

dir. Burada $S^*= X^{*'}X^*$ dir. Vekil değişken bulunduran modelde hata varyansının alışılmış kestiricisi

$$s^{*2}=\frac{\left(y-X^{*}b^{*}\right)^{'}\left(y-X^{*}b^{*}\right)}{n-k} \tag{6.7}$$

dir.

s^{*2}'nin MSE'si

$$MSE(s^{*2})=E\left[\left(s^{*2}-\sigma^{2}\right)^{2}\right]=E\left(s^{*4}\right)-2\sigma^{2}E\left(s^{*2}\right)+\sigma^{4}$$

$v=n-k$ ve $vs^{*2}=e^{*'}e^{*}$ olduğundan

$$MSE(s^{*2})=E\left[\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{v^{2}}\right]-2\sigma^{2}E\left(\frac{e^{*'}e^{*}}{v}\right)+\sigma^{4}=\frac{\sigma^{4}}{v^{2}}E(v_{2}{}^{2})-\frac{2\sigma^{4}}{v}(v_{2})+\sigma^{4} \tag{6.8}$$

olarak elde edilir.

6.2.2. Vekil Değişken Bulunduran Modelde SR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi

Vekil değişken bulunduran regresyon modelinde β^{*} parametresi için Stein Rule kestiricisi (SRP)

$$b_{SRP}=\left(1-\frac{ae^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)b^{*} \tag{6.9}$$

dir. Burada $e^{*}=y-X^{*}b^{*}$ ve $0\leq a\leq 2\left(k-2\right)/\left(n-k+2\right)$ dir. Vekil değişken bulunduran modelde EKK kestiricisi yerine SR kestiricisi kullanarak hata varyansının bir kestiricisi

$$\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\frac{\left(y-X^{*}b_{SRP}\right)^{'}\left(y-X^{*}b_{SRP}\right)}{n-k}$$

olarak tanımlanır (Unal, 2010).

Yukarıda verilen ifadede gerekli işlemler yapıldığında

$$(n-k)\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\left(y-X^{*}b_{SRP}\right)^{'}\left(y-X^{*}b_{SRP}\right)=y^{'}y-2y^{'}X^{*}b_{SRP}+b_{SRP}^{'}X^{*'}X^{*}b_{SRP}$$

elde edilir. $e^{*}=y-X^{*}b^{*}$ olduğundan $y=X^{*}b^{*}+e^{*}$ ve $\left(X^{*'}X^{*}\right)b^{*}=X^{*'}y$ olduğundan $y^{'}X^{*}=b^{*'}X^{*'}X^{*}$ olup son eşitlikte yerine yazılırsa

$$(n-k)\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)'\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)-2\left(y'X^{*}\right)b_{SRP}+b_{SRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{SRP}$$

$$=\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)'\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)-2\left(b^{*'}X^{*\prime}X^{*}\right)b_{SRP}+b_{SRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{SRP}$$

$$=b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}+2e^{*'}X^{*}b^{*}-2b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b_{SRP}+b_{SRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{SRP}$$

$$=b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}+2e^{*'}X^{*}b^{*}-2b^{*'}X^{*\prime}X^{*}\left(1-\frac{ae^{*'}e^{*}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}}\right)b^{*}$$

$$+\left(1-\frac{ae^{*'}e^{*}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{**}b^{*}}\right)^{2}b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}$$

$$=b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}+2\left(y-b^{*'}X^{*\prime}\right)X^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}-2b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}$$

$$+2ab^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}}$$

$$+\left[1-2a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}}+a^{2}\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{\left(b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}\right)^{2}}\right]b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}$$

$$=b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}+2\left(yX^{*}b^{*}-\left(b^{*'}X^{*\prime}X^{*}\right)b^{*}\right)+e^{*'}e^{*}-2b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}+2ae^{*'}e^{*}$$

$$+b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}-2ae^{*'}e^{*}+a^{2}\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}}$$

$$=2\left(yX^{*}b^{*}-y'X^{*}b^{*}\right)+e^{*'}e^{*}+a^{2}\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}}$$

bulunur ve bir takım sadeleştirmelerle

$$(n-k)\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=e^{*'}e^{*}+a^{2}\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{b^{*'}X^{*\prime}X^{*}b^{*}} \qquad (6.10)$$

elde edilir (Unal, 2010).

Burada $v_1=\frac{b^{*'}X^{*'}X^{*}b^{*}}{\sigma^2}$ ve $v_2=\frac{e^{*'}e^{*}}{\sigma^2}$ alınsın. v_1 ve v_2 karesel formda olduklarından v_1 ve v_2 bağımsız merkezi olmayan ki-kare dağılımına sahiptir yani $v_1\sim\chi_k'^2(\lambda_1^*)$, $v_2\sim\chi_v'^2(\lambda_2^*)$'dir. Ayrıca burada $\lambda_1^*=\beta'X'X^*S^{*-1}X^{*'}X\beta/\sigma^2$ ve $\lambda_2^*=\beta'X'M^*X\beta/\sigma^2$'dir. Eğer v=n-k alınırsa

$$v\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\sigma^2\left[v_1+a^2\frac{{v_2}^2}{v_1}\right] \tag{6.11}$$

elde edilir (Unal, 2010).

6.2.2.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde SR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi için Yanlılık ve MSE

Bu kısımda $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin ve s^2'nin yanlılığı ve MSE'si hesaplanıp MSE kriteri açısından karşılaştırılacaktır. $\frac{{v_1}^{\eta}}{{v_2}^{m}}$'nin beklenen değerini Unal (2006)

$$E\left(\frac{{v_1}^{\eta}}{{v_2}^{m}}\right)=e^{-\lambda_1^*}e^{-\lambda_2^*}2^{\eta-m}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}\Gamma\left(\frac{k}{2}+i+\eta\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+j-m\right)}{i!j!\Gamma\left(\frac{k}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+j\right)} \tag{6.12}$$

olarak tanımlamıştır. Eşitlik (6.12) den $E\left(\frac{{v_2}^2}{v_1}\right)=e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j)(v+2j+2)}{k+2i-2}$ ve $v_2\sim\chi_v'^2(\lambda_2^*)$ olduğundan $E(v_2)=v+\lambda_2^*$ elde edilir. $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin beklenen değeri hesaplanırsa

$$E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=\frac{\sigma^2}{v}\left[v+\lambda_2^*\right]a^2e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j)(v+2j+2)}{k+2i-2} \tag{6.13}$$

elde edilir. v=n-k, $S^*=X^{*'}X^*$ olmak üzere Unal (2010) $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin yanlılığını ve MSE'sini sırasıyla

$$BIAS\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)-\sigma^2=\frac{\sigma^2}{v}\left[\lambda_2^*\right]a^2e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j)(v+2j+2)}{k+2i-2} \quad (6.14)$$

$$MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=E\left[\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}-\sigma^2\right)^2\right]=E\left[\hat{\sigma}_{IP}^{*4}\right]-2\sigma^2E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)+\sigma^4$$

şeklinde tanımlamıştır. Gerekli işlemler yapıldığında

$$MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=\frac{\sigma^4}{v^2}\left[E\left(v_2^2\right)+2a^2E\left[\frac{v_2^3}{v_1}\right]+a^4E\left(\frac{v_2^4}{v_1^2}\right)\right]-\frac{2\sigma^4}{v}\left[E(v_2)+a^2E\left(\frac{{v_2}^2}{v_1}\right)\right]+\sigma^4 \quad (6.15)$$

elde edimiştir.

s^{*2}'nin ve $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin MSE değerlerini karşılaştırmak için farkları incelendiğinde

$$\begin{aligned}MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)-MSE(s^{*2})&=\frac{\sigma^4}{v^2}E\left(v_2^2\right)+\frac{\sigma^4}{v^2}2a^2E\left[\frac{v_2^3}{v_1}\right]+\frac{\sigma^4}{v^2}a^4E\left(\frac{v_2^4}{v_1^2}\right)\\&\quad-\frac{2\sigma^4}{v}E(v_2)-\frac{2\sigma^4}{v}a^2E\left(\frac{{v_2}^2}{v_1}\right)+\sigma^4-\frac{\sigma^4}{v^2}E({v_2}^2)+\frac{2\sigma^4}{v}(v_2)-\sigma^4\\&=\frac{2a^2\sigma^4}{v^2}E\left[\frac{v_2^3}{v_1}\right]+\frac{a^4\sigma^4}{v^2}E\left(\frac{v_2^4}{v_1^2}\right)-\frac{2\sigma^4}{v}a^2E\left(\frac{{v_2}^2}{v_1}\right)\end{aligned} \quad (6.16)$$

bulunur. Eşitlik (6.12) de η ve m için uygun değerler alınarak,

$$\begin{aligned}
MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)\text{-}MSE(s^{*2}) &= \frac{a^4\sigma^4}{v^2}e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j)}{(k+2i-2)} \\
&\times\frac{(v+2j+6)(v+2j+4)(v+2j+2)}{(k+2i-4)} \\
&+\frac{2a^2\sigma^4}{v^2}e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j+4)(v+2j+2)(v+2j)}{(k+2i-2)} \\
&-\frac{2a^2\sigma^4}{v}e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j+2)(v+2j)}{(k+2i-2)} \\
&=\frac{a^2\sigma^4}{v}e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}}{i!j!}\frac{(v+2j+2)(v+2j)}{(k+2i-2)} \\
&\times\left(\frac{a^2}{v}\frac{(v+2j+6)(v+2j+4)}{(k+2i-4)}+\frac{2}{v}(v+2j+4)\text{-}2\right) \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

bulunur. (6.17) ifadesinden eşitliğin k≥5 değerleri için daima pozitif olduğundan $MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)>MSE(s^{*2})$, ∀k≥5 denilebilir (Unal, 2010).

Unal (2010) vekil değişken kullanılan lineer regresyon modelinde, $k \geq 5$ için, hata varyansının alışılmış kestiricisinin hata varyansının Yinelenmiş kestiricisinden hata kareleri kayıp fonksiyonu ölçütüne göre daha iyi olduğunu göstermiş ve bu sonucun Ohtani (1987)'nin vekil değişken kullanılmayan lineer regresyon modelinde elde ettiği sonuçla uyumlu olduğunu belirtmiştir.

Açıklayıcı değişkenlerin sayısı 5 ya da 5'ten büyükse, vekil değişken bulunduran lineer modelde, hataların varyansının tahmini probleminde SR kestiricisi ile çalışırken, yinelenmiş tahmin yöntemini kullanmak iyi bir yol değildir sonucuna varılabilir.

6.2.3. Vekil Değişken Bulunduran Modelde PSR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi

Parametre vektörü $\beta^*=\left[\beta_1^{'},\beta_2^{'*}\right]^{'}$ için EKK kestiricisi, $S^*= X^{*'}X^*$ olmak üzere

$$b^{*}=S^{*-1}X^{*'}y$$

dir.

Vekil değişken bulunduran regresyon modelinde β^{*} parametre vektörünün PSR kestiricisi (PSRP)

$$b_{PSRP}=\max\left[0,1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right]b^{*} \qquad (6.18)$$

dir (Baranchik, 1970). Burada $e^{*}=y-X^{*}b^{*}$ ve $0\leq a\leq 2(k-2)/(v+2)$ dir.

Vekil değişken bulunduran modelde β^{*} parametre vektörü için Ön-test kestiricisi

$$\hat{\beta}^{*}(\tau)=I(F^{*}\geq\tau)\left(1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)b^{*}$$

dir. Burada $I(A)$; eğer bir A olayı doğru ise $I(A)=1$ aksi takdirde $I(A)=0$ olan bir gösterge fonksiyonudur.

$F^{*}=\left(\frac{b^{*'}S^{*}b^{*}}{k}\right)/\left(\frac{e^{*'}e^{*}}{v}\right)$; (3) denklemi temel alınarak $H_0:\beta^{*}=0$ hipotezine karşı $H_1:\beta^{*}\neq 0$ alternatif hipotezinin test istatistiği ve τ; ön-testin kritik değeridir.

$\hat{\beta}^{*}(\tau)$ ön-test kestirici göz önüne alındığında, $\tau=av/k$ ise

$$I(F^{*}\geq\tau)=I\left(\frac{\frac{b^{*'}S^{*}b^{*}}{k}}{\frac{e^{*'}e^{*}}{v}}\geq\frac{av}{k}\right)=I\left(\frac{b^{*'}S^{*}b^{*}}{e^{*'}e^{*}}\geq a\right)=I\left(\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\leq\frac{1}{a}\right)=I\left(a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\leq 1\right)$$

bulunur. O halde $\tau=av/k$ ise $\hat{\beta}^{*}(\tau)$ kestiricisi b_{PSRP} kestiricisine dönüşür ve

$$b_{PSRP}=I(F^{*}\geq av/k)\left(1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)b^{*} \qquad (6.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Vekil değişken bulunduran modelde hata varyansının alışılmış kestiricisinde EKK kestiricisi yerine PSR kestiricisi kullanarak hata varyansının bir Yinelenmiş Kestiricisi (Ohtani, 1987)

$$\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\frac{\left(y-X^{*}b_{PSRP}\right)'\left(y-X^{*}b_{PSRP}\right)}{n-k}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki ifadede

$$(n-k)\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=\left(y-X^{*}b_{PSRP}\right)'\left(y-X^{*}b_{PSRP}\right)=y'y-2y'X^{*}b_{PSRP}+b_{PSRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{PSRP}$$

ve $e^{*}=y-X^{*}b^{*}$ olduğundan $y=X^{*}b^{*}+e^{*}$, $S^{*}=X^{*\prime}X^{*}$ ve $\left(X^{*\prime}X^{*}\right)b^{*}=X^{*\prime}y$ olduğundan $y'X^{*}=b^{*'}X^{*\prime}X^{*}$ olup son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{IP}^{*2}&=\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)'\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)-2\left(y'X^{*}\right)b_{PSRP}+b_{PSRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{PSRP}\\
&=\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)'\left(X^{*}b^{*}+e^{*}\right)-2\left(b^{*'}X^{*\prime}X^{*}\right)b_{PSRP}+b_{PSRP}'X^{*\prime}X^{*}b_{PSRP}\\
&=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}+2e^{*'}X^{*}b^{*}-2b^{*'}S^{*}b_{PSRP}+b_{PSRP}'S^{*}b_{PSRP}\\
&=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}+2(y'-b^{*'}X^{*'})b_{PSRP}+b_{PSRP}'S^{*}b_{PSRP}\\
&=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}+2y'X^{*}b^{*}-2y'X^{*}b^{*}-2I\left(F^{*}\geq av/k\right)\left(1-a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)b^{*'}S^{*}b^{*}\\
&\quad+I\left(F^{*}\geq av/k\right)\left(1-\frac{ae^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\right)^{2}b^{*'}S^{*}b^{*}=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}-2I\left(F^{*}\geq av/k\right)b^{*'}S^{*}b^{*}\\
&\quad+2aI\left(F^{*}\geq av/k\right)\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}b^{*'}S^{*}b^{*}\\
&\quad+I\left(F^{*}\geq av/k\right)\left[1-2a\frac{e^{*'}e^{*}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}+a^{2}\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{\left(b^{*'}S^{*}b^{*}\right)^{2}}\right]b^{*'}S^{*}b^{*}\\
&=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}-2I\left(F^{*}\geq av/k\right)b^{*'}S^{*}b^{*}+2aI\left(F^{*}\geq av/k\right)e^{*'}e^{*}+I\left(F^{*}\geq av/k\right)b^{*'}S^{*}b^{*}\\
&\quad-2aI\left(F^{*}\geq av/k\right)e^{*'}e^{*}+a^{2}I\left(F^{*}\geq av/k\right)\frac{\left(e^{*'}e^{*}\right)^{2}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}
\end{aligned}$$

olup bir takım sadeleştirmeler yapıldığında

$$(n-k)\hat{\sigma}_{IP}^{*2}=b^{*'}S^{*}b^{*}+e^{*'}e^{*}-I(F^{*}\geq av/k)b^{*'}S^{*}b^{*}+a^{2}I(F^{*}\geq av/k)\frac{(e^{*'}e^{*})^{2}}{b^{*'}S^{*}b^{*}}$$

elde edilir(Unal,2006).

$v_1=\frac{b^{*'}X^{*'}X^{*}b^{*}}{\sigma^2}$ ve $v_2=\frac{e^{*'}e^{*}}{\sigma^2}$ alınsın. v_1 ve v_2 karesel formda olduklarından v_1 ve v_2 bağımsız merkezi olmayan ki-kare dağılımına sahiptir yani $v_1\sim\chi_k^{'2}(\lambda_1^{*})$ $v_2\sim\chi_v^{'2}(\lambda_2^{*})$'dir. Burada $\lambda_1^{*}=\beta'X'X^{*}S^{*-1}X^{*'}X\beta/\sigma^2$ ve $\lambda_2^{*}=\beta'X'M^{*}X\beta/\sigma^2$'dir. Yukarıdaki eşitlikte v=n-k alındığında, vekil değişken bulunduran modelde hata varyansı formülünde PSR kestiricinin kullanıldığı Yinelenmiş kestirici

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{IP}^{*2}&=\frac{1}{v}\sigma^2\frac{b^{*'}S^{*}b^{*}}{\sigma^2}+\sigma^2\frac{e^{*'}e^{*}}{\sigma^2}-\sigma^2 I\left(F^{*}\geq\frac{av}{k}\right)\frac{b^{*'}S^{*}b^{*}}{\sigma^2}\\&+\frac{1}{v}a^2\sigma^4\frac{1}{\sigma^2}I\left(F^{*}\geq\frac{av}{k}\right)\left(\frac{e^{*'}e^{*}}{\sigma^2}\right)^2\frac{\sigma^2}{b^{*'}S^{*}b^{*}}\\&=\frac{1}{v}\left(\sigma^2v_1+\sigma^2v_2-\sigma^2I\left(F^{*}\geq\frac{av}{k}\right)v_1+\sigma^2I\left(F^{*}\geq\frac{av}{k}\right)\frac{v_2^{2}}{v_1}\right)\\&=\frac{\sigma^2}{v}\left[v_1+v_2-I(F^{*}\geq av/k)v_1+I(F^{*}\geq av/k)\frac{v_2^{2}}{v_1}\right]\end{aligned}\qquad(6.20)$$

elde edilmiş olur.

6.2.3.1. Vekil Değişken Bulunduran Modelde PSR Kestiricinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi için Yanlık ve MSE

$\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin beklenen değeri

$$E[\hat{\sigma}_{IP}^{*2}]=\frac{\sigma^2}{v}E\left[v_1+v_2-I(F^{*}\geq av/k)v_1+I(F^{*}\geq av/k)\frac{v_2^{2}}{v_1}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{v}\left[E[v_1]+E[v_2]-E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)v_1\right]+E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{v_2{}^2}{v_1}\right]\right]$$

dir. Öncelikle $E[v_1]$, $E[v_2]$, $E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)v_1\right]$ ve $E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{v_2{}^2}{v_1}\right]$ hesaplanmalıdır. Bu beklenen değerler için (6.12) eşitliği kullanılmıştır. Ayrıca $v_1\sim\chi'^2_k(\lambda_2^*)$ olduğundan $E(v_1)=k+2\lambda_1^*$ ve $v_2\sim\chi'^2_v(\lambda_2^*)$ olduğundan $E(v_2)=v+2\lambda_2^*$ elde edilir. Göstergefonksiyonu içeren beklenen değerleri hesaplamak için (5.18)'de verilen $H(p,q;\tau)$ fonksiyonu kullanılırsa

$$E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)v_1\right]=E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)v_1^1v_2^0\right]=H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)$$

$$E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{v_2{}^2}{v_1}\right]=E\left[I\left(F^*\geq av/k\right)v_1^{-1}v_2^2\right]=H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)$$

bulunur. $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin beklenen değeri

$$E\left[\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right]=\frac{\sigma^2}{v}\left[k+2\lambda_1^*+v+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]$$

elde edilir.

$v=n-k$, $S^*=X^{*'}X^*$ olmak üzere $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin yanlılığı

$$BIAS\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)-\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{v}\left[k+2\lambda_1^*+v+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]-\frac{\sigma^2}{v}v$$

$$=\frac{\sigma^2}{v}\left[k+v+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)-v\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{v}\left[k+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]$$

olarak elde edilir. $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin MSE'si

$$MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=E\left[\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}-\sigma^2\right)^2\right]=E\left[\hat{\sigma}_{IP}^{*4}\right]-2\sigma^2E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)+\sigma^4$$

dir. $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$ ve $E\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=&E\left[\left(\frac{\sigma^2}{v}\right)^2\left(v_1+v_2-I\left(F^*\geq av/k\right)v_1+I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{{v_2}^2}{v_1}\right)^2\right]\\&-2\sigma^2\frac{\sigma^2}{v}\left[k+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]+\sigma^4\\&=\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{E({v_1}^2)+2E(v_1v_2)+E({v_2}^2)-E\left(I\left(F^*\geq av/k\right){v_1}^2\right)\right\}\\&+\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{2a^2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right){v_2}^2\right)-2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)v_1v_2\right)\right\}\\&+\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{2a^2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{{v_2}^3}{v_1}\right)-2a^2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right){v_2}^2\right)\right\}\\&+\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{+a^4E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{{v_2}^4}{{v_1}^2}\right)\right\}\\&-2\frac{\sigma^4}{v}\left[k+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]+\sigma^4\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=&\frac{\sigma^4}{v^2}\{E({v_1}^2)+2E(v_1v_2)+E({v_2}^2)\}\\&+\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{-E\left(I\left(F^*\geq av/k\right){v_1}^2\right)-2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)v_1v_2\right)\right\}\\&+\frac{\sigma^4}{v^2}\left\{+2a^2E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{{v_2}^3}{v_1}\right)+a^4E\left(I\left(F^*\geq av/k\right)\frac{{v_2}^4}{{v_1}^2}\right)\right\}\\&-2\frac{\sigma^4}{v}\left[k+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]+\sigma^4\end{aligned}$$

elde edilir.

$MSE(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ için öncelikle $E(v_1^2)$, $E(v_1v_2)$, $E(v_2^2)$, $E\left(I(F^*\geq av/k)v_1^2\right)$, $E\left(I(F^*\geq av/k)v_1v_2\right)$, $E\left(I(F^*\geq av/k)\frac{v_2^3}{v_1}\right)$, $E\left(I(F^*\geq av/k)\frac{v_2^4}{v_1^2}\right)$ beklenen değerleri hesaplanmalıdır.

Gösterge fonksiyonu içermeyen ifadelerin beklenen değerleri için (6.12) kullanılır ve $\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n)$ olduğundan bir takım sadeleştirmeler yapıldığında sırasıyla

$$E(v_1^2)=e^{-(\lambda_1^*+\lambda_2^*)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(k+2i+2)(k+2i)}{i!j!}$$

$$E(v_1v_2)==e^{-(\lambda_1^*+\lambda_2^*)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(k+2i)(v+2j)}{i!j!}$$

$$E(v_2^2)=e^{-(\lambda_1^*+\lambda_2^*)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(v+2j+2)(v+2j)}{i!j!}$$

elde edilir.

İşaret fonksiyonu içeren beklenen değerler için (5.18) ile verilen $H(p,q;\tau)$ fonksiyonu kullanıldığında sırasıyla

$$E\left(I(F^*\geq av/k)v_1^2\right)=E\left[I(F^*\geq av/k)v_1^2v_2^0\right]=H(2,0;av/k)$$

$$E\left(I(F^*\geq av/k)v_1v_2\right)=E\left[I(F^*\geq av/k)v_1^1v_2^1\right]=H(1,1;av/k)$$

$$E\left(I(F^*\geq av/k)\frac{v_2^3}{v_1}\right)=E\left[I(F^*\geq av/k)v_1^{-1}v_2^3\right]=H(-1,3;av/k)$$

$$E\left(I(F^*\geq av/k)\frac{v_2^4}{v_1^2}\right)=E\left[I(F^*\geq av/k)v_1^{-2}v_2^4\right]=H(-2,4;av/k)$$

elde edilir. Yukarıda bulunan beklenen değerler yerine yazıldığında $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$ kestiricisinin MSE'si

$$
\begin{aligned}
MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right) = {} & \frac{\sigma^4}{v^2} e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(k+2i+2)(k+2i)}{i!j!} \\
& + \frac{2\sigma^4}{v^2} e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(k+2i)(v+2j)}{i!j!} \\
& + \frac{\sigma^4}{v^2} e^{-\left(\lambda_1^*+\lambda_2^*\right)} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{*i}\lambda_2^{*j}(v+2j+2)(v+2j)}{i!j!} \\
& + \frac{\sigma^4}{v^2}[-H(2,0;av/k)-2H(1,1;av/k)] \\
& + \frac{\sigma^4}{v^2}[2a^2H(-1,3;av/k)+a^4H(-2,4;av/k)] \\
& -2\frac{\sigma^4}{v}\left[k+2\lambda_1^*+2\lambda_2^*-H\left(1,0;\frac{av}{k}\right)+a^2H\left(-1,2;\frac{av}{k}\right)\right]+\sigma^4 \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

6.2.3.2. PSR Kestiricisinin Kullanıldığı Hata Varyansının Yinelenmiş Kestiricisi ile Alışılmış Hata Varyansı Kestiricisinin Sayısal Olarak Karşılaştırılması

Bu bölümde vekil değişken bulunduran modelde, (6.8)'de verilen, hata varyansının Alışılmış Kestiricisi s^{*2}'nin hata kareler ortalaması $MSE(s^{*2})$ ile (6.21)'de verilen, PSR kestiricinin kullanıldığı hata varyansınının Yinelenmiş Kestiricisi $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin hata kareler ortalaması $MSE\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ sayısal olarak karşılaştırılmıştır.

Bu karşılaştırma için göreli etkinlik (Relative Efficiency)

$$REF\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)=MSE(s^{*2})/MSE(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$$

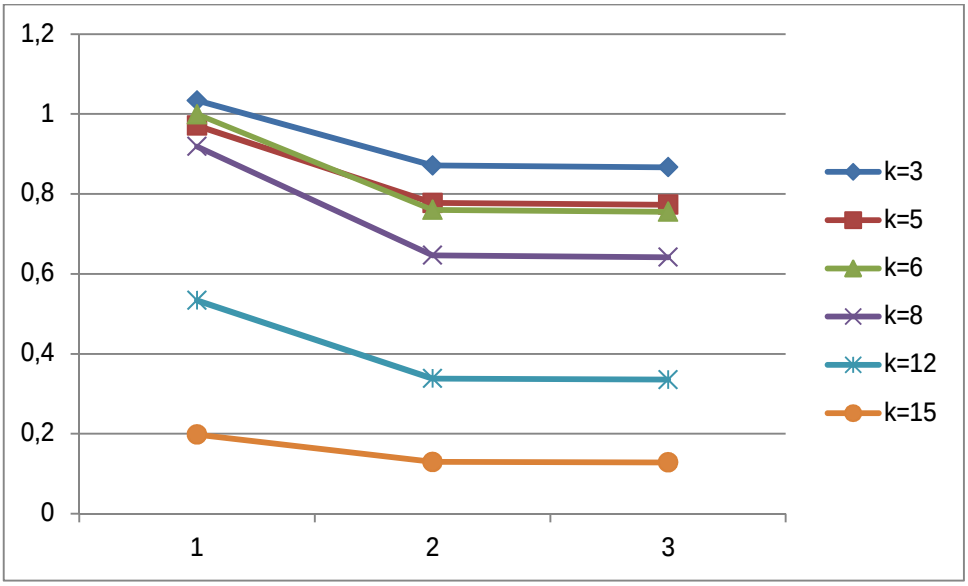
olarak tanımlanmıştır. $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin s^{*2}'ye göreli etkinliği anlamına gelir. $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değeri 1'den büyük olduğunda hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$, MSE ölçütü açısından hata varyansının Alışılmış Kestiricisi s^{*2}'den daha etkindir.

Sayısal analiz Mathematica programı kullanılarak yapılmıştır. Kullanılan kodlama EK 3'te verilmiştir. Sayısal ölçümlerde bazı çalışmalarda sıkça kullanılan (örneğin Namba ve Ohtani, 2006) λ_1^*=0,9, λ_2^*=0,1, k= 3, 5, 6, 8, 12, 15; n=20, 30, 100, 1000, 10 000 ve n_i=1, 5, 10 değerleri kullanılmıştır. Burada n_i, MSE hesabında kullanılan toplam formüllerinin üst sınırıdır.

Sayısal ölçümlerde elde edilen sonuçlar genel olarak Tablo 6.1, EK 4'te gösterilmiştir. Tablo 6.1'deki $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerleri 'n' değerlerine göre tekrar düzenlenip aşağıdaki tablolar ve grafikler oluşturulmuştur. Grafiklerde yatay eksen n_i değerlerini, düşey eksen ise karşılık gelen $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerlerini göstermektedir.

Çizelge 6.1.1. n=20 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

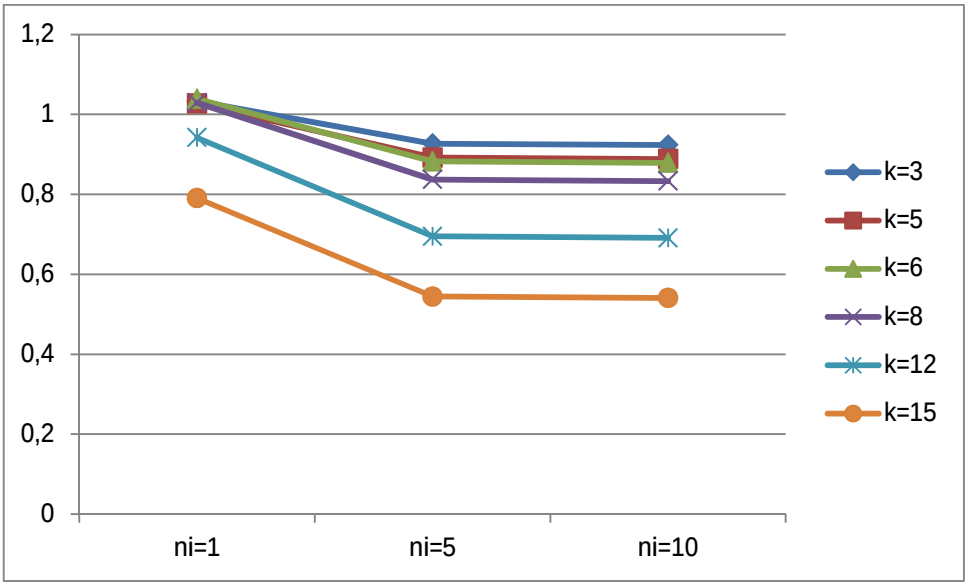
k	n_i=1	n_i=5	n_i=10
3	1.03381	0.87126	0.86688
5	0.97068	0.77762	0.77316
6	0.99911	0.76028	0.75536
8	0.91890	0.64665	0.64180
12	0.53367	0.33827	0.33531
15	0.19802	0.12977	0.12867



Şekil 6.1. n=20 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

Çizelge 6.1.2. n=30 için REF$(\hat{\sigma}^{*2}_{IP})$

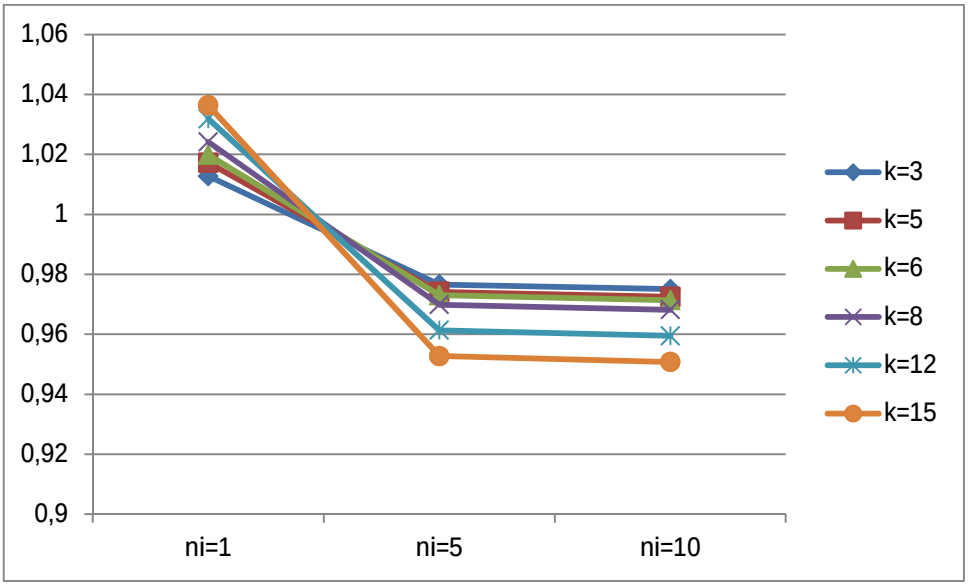
k	n_i=1	n_i=5	n_i=10
3	1.03302	0.92667	0.92356
5	1.02688	0.89185	0.88847
6	1.03895	0.88233	0.87875
8	1.02920	0.83692	0.83306
12	0.94213	0.69491	0.69092
15	0.79079	0.54438	0.54085



Şekil 6.2. n=30 için REF$(\hat{\sigma}^{*2}_{IP})$

Çizelge 6.1.3. n=100 için REF$(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$

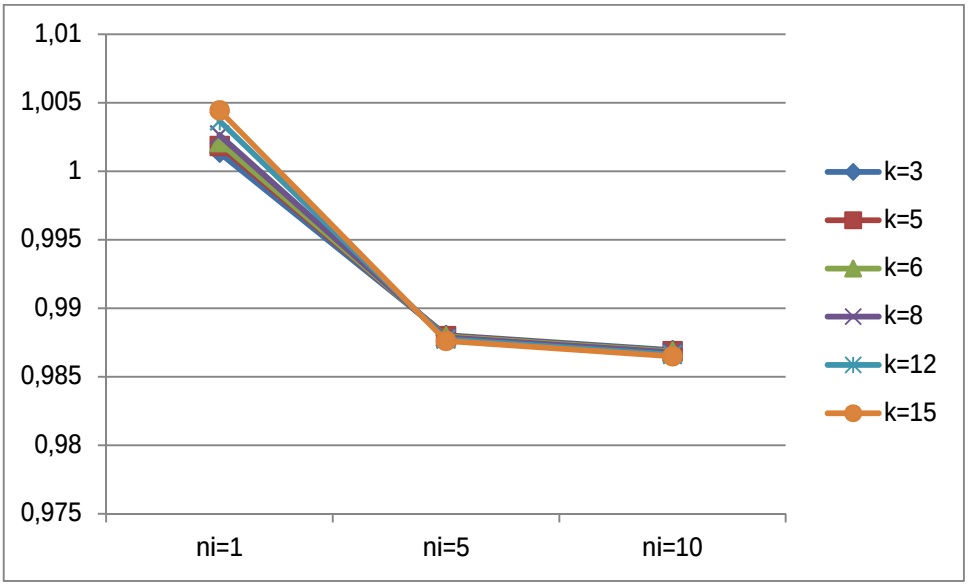
k	n_i=1	n_i=5	n_i=10
3	1.01276	0.97659	0.97503
5	1.01721	0.97412	0.97250
6	1.01981	0.97304	0.97138
8	1.02416	0.96987	0.96814
12	1.03182	0.96133	0.95947
15	1.03637	0.95274	0.95077



Şekil 6.3. n=100 için REF$(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$

Çizelge 6.1.4. n=1000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

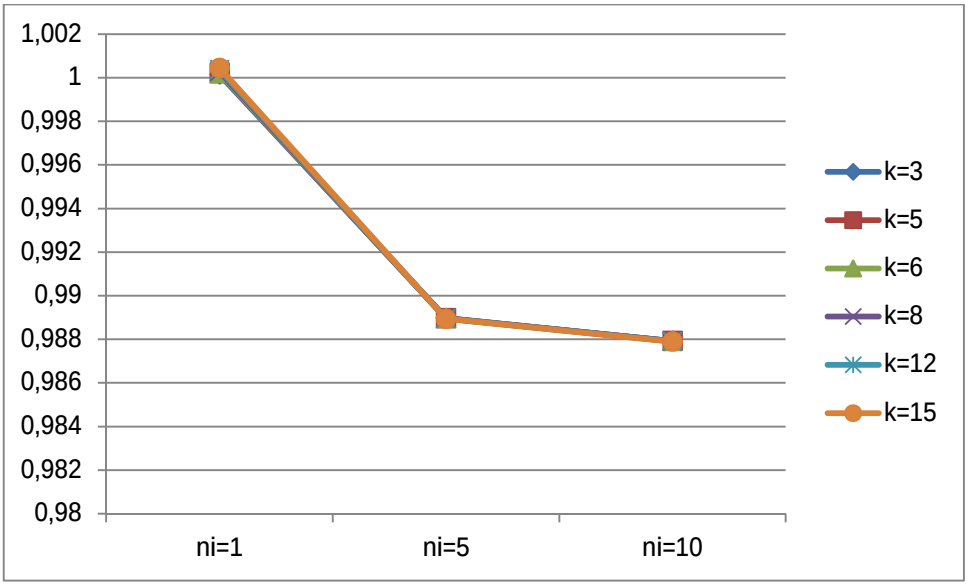
k	n_i=1	n_i=5	n_i=10
3	1.00135	0.98804	0.98695
5	1.00186	0.98798	0.98688
6	1.00212	0.98795	0.98685
8	1.00264	0.98788	0.98678
12	1.00367	0.98774	0.98662
15	1.00444	0.98762	0.98650



Şekil 6.4. n=1000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

Çizelge.6.1.5. n=10000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

k	n_i=1	n_i=5	n_i=10
3	1.00014	0.98897	0.98792
5	1.00019	0.98897	0.98792
6	1.00021	0.98896	0.98792
8	1.00027	0.98896	0.98791
12	1.00037	0.98895	0.9879
15	1.00045	0.98894	0.98789



Şekil 6.5. n=10000 için REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$

Sonuçlar: Çizelge ve şekillerden aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

1) Farklı k ve n değerleri için en yüksek REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ değerleri n_i=1 için elde edilmiştir.
2) k ve n değerleri sabit tutulduğunda n_i değerleri arttıkça hesaplanan REF$\left(\hat{\sigma}_{IP}^{*2}\right)$ değerleri düşmüş dolayısıyla göreli etkinlik azalmıştır.

3) Farklı k değerlerinin n_i=1için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerleri daha yüksektir ancak aynı k değerlerinin n_i=5 ve n_i=10 için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerleri birbirine çok yakındır.
4) n=20 için k=6 değeri dışında, k değerleri arttıkça göreli etkinlik düşmüştür. n=20 alındığında en yüksek $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değeri k=3 ve n_i=1 için elde edilmiştir.
5) n=30 için en yüksek $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değeri k=3 ve n_i=1 için elde edilmiştir. n=30 ve n_i=1 alındığında k=3, 5, 6, 8 için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ >1 bulunmuştur.
6) n=100 ve n_i=1 için k değerleri arttıkça $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değeri artmış dolayısıyla göreli etkinlik artmıştır. n=100 ve n_i=1 alındığında k=3, 5, 6, 8, 12, 15 için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ >1 bulunmuştur.
7) n=1000 ve n_i=1 alındığında k=3, 5, 6, 8, 12, 15 için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ >1 bulunmuştur. n_i=1 için k değerleri arttıkça $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değeri artmıştır. Ayrıca n_i sabit tutulduğunda farklı k değerleri için elde edilen $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerleri birbirine çok yakındır.
8) n=10000 ve n_i=1 alındığında k=3, 5, 6, 8, 12, 15 için $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ >1 bulunmuştur. Ayrıca n_i sabit tutulduğunda farklı k değerleri için elde edilen $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerleri arasındaki fark yok denecek kadar azalmıştır. Dolayısıyla k değerlerinin farklılaşması $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ değerini neredeyse hiç etkilememektedir denilebilir.

Sonuç olarak vekil değişken bulunduran modelde hata varyansının Alışılmış Kestiricisi ile PSR Kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi göreli olarak karşılaştırılmıştır. $REF(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$ >1olarak bulunduğu özel değerler için hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi $\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$'nin, MSE ölçütü açısından hata varyansının Alışılmış Kestiricisi s^{*2}'den daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle vekil değişkenlerin yer aldığı lineer regresyon modelleri ve bu modellerin parametre tahmininde kullanılan kestirim yöntemleri ele alınmış ve vekil değişkenlerin modele etkisi incelenmiştir. Sonraki kısımda ise hata varyansı kestirimi üzerinde durulmuş, vekil değişken bulunduran bir regresyon modelinde hata varyansının Alışılmış Kestiricisi ve SR Kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi incelenmiştir.

Ayrıca hata varyansı kestiriminde, PSR kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisi ve bu kestiricinin yanlılığı ve MSE hesabı için formüller elde edilmiştir. Mathematica programı kullanılarak PSR kestiricisinin kullanıldığı Yinelenmiş Kestiricisi ile hata varyansının Alışılmış Kestiricisinin oranı sayısal olarak incelenmiştir. Bu amaçla tanımlanan göreli etkinlik (Relative Efficiency) hesaplamasının sonuçlarına bakarak PSR kestiricisinin kullanıldığı hata varyansının Yinelenmiş Kestiricisinin, hesaplamada kullanılan değişkenlerin bazı sayısal değerleri için hata varyansının Alışılmış Kestiricisinden üstün olduğu sonucuna varılabilir.

Bundan sonraki çalışmalarda vekil değişken bulunduran lineer regresyon modelinde parametre tahminleri için farklı kestirim yöntemleri ile incelenebilir. Farklı bir çalışma konusu olarak hata varyansı kestiriminde SR ve PSR kestiricisinin kullanıldığı yinelenmiş kestiricilerin ağırlıklı ortalama kestiricisi tanımlanabilir ve özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

AIGNER, D. J., 1974. MSE Dominance of Least Squares with Errors of Observation. Journal of Econometrics, 2:365–372.

BARANCHIK, A. J.,1970. A Family of Minimax Estimators of the Mean of a Multivariate Normal Distribution, 41(2):642-645.

BARNOW, B. S., 1976. The Use of Proxy Variables When One or Two Independent Variables Are Measured with Error. American Statistician, 30:119-121.

DHRYMES, P. J., 1978. Introductory Econometrics. Springer, New York, 425 p.

DOUGHERTY, C., 2012. Introduction to Econometrics. Oxford University Press, Fourth Edition, London, 592 p.

FELDSTEIN, M. S., 1973. Multicollinearity and the Mean Square Error of Alternative Estimators. Econometrica, 41:337-346.

FROST, P. A., 1979. Proxy Variables and Specification Bias. The Review of Economics and Statistics, 61:323–325.

KENNEDY, P., 1992. Proxy Variables can be Useful. Journal of Quantitative Economics, 8:443-445.

KUMAR, T. K., 1992. A Note on Proxy Variables in Regression. Journal of Quantitative Economics, 8:447-448.

KURUMAI H., OHTANI, K., 1998. The Exact Distribution and Density Functions of a Pre-test Estimator of the Error Variance in a Linear Regression Model with Proxy Variables. Statistical Papers, 39:163-177.

LOVELL, M. C., and PRESCOTT, E., 1970. Multiple Regression with Inequality Constraints: Pretesting Bias, Hypothesis Testing and Efficiency. Journal of the American Statistical Association, 65(330):913-925.

MCCALLUM, B. T., 1972. Relative Asymptotic Bias from Errors of Omission and Measurement. Econometrica, 40:757–758.

MITTELHAMMER, R. C., 1984. Restricted Least Squares, Pre- test, OLS and Stein-rule Estimators: Risk Comparisons under Model Misspecification. J. Econometrics 25:151-164.

NAMBA, A., 2002. PMSE Performance of the Biased Estimators in a Linear Regression Model When Revelant Regressors are Ommited. Econometric Theory 18:1086-1098.

NAMBA, A., 2003. Dominance of the Positive-part Shrinkage Estimator in a Linear Regression Model when Revelant Regressors are Ommited. Statistics and Probability Letters, 63:375-385.

NAMBA, A., OHTANI, K., 2006. PMSE Performance of the Stein-rule and Positive part Stein-rule Estimators in a Linear Regression Model with or without Proxy Variables. Statistics and Probability Letters, 76:898–906.

OHTANI, K., 1981. On the Use of a Proxy Variable in Prediction: an MSE Comparison. Review of Economics and Statistics, 63(4):627–629.

OHTANI, K., 1983. Preliminary Test Predictor in the Linear Regression Model Including a Proxy Variable. Journal of the Japan Statistical Society, 13:11-19.

OHTANI, K., 1987. Inadmissibility of the Iterative Stein-rule Estimator of the Disturbance Variance in a Linear Regression. Econ. Lett., 24:51–55.

OHTANI, K., 1993. The Exact Distribution and Density Functions of the Stein-type Estimator for Normal Variance. Communications in Statistics- Theory and Methods, 22:2863-2876.

OHTANI, K., HASEGAWA, H., 1993. On Sample Properties of R^2 in a Linear Regression Model with Multivariate t Errors and Proxy Variables. Econometric Theory, 9:504-515.

OHTANI, K. and GİLES, J.A., 1993a. Testing Linear Restrictions on Coefficients in a Linear Regression Model with Proxy Variables and Spherically Symmetric Disturbances. Journal of Econometrics, 57:393-406.

OHTANI, K., 1998. MSE Performance of the Minimum Mean Squared Error Estimators in a Linear Regression Model when Revelant Regressors are Omitted. J. Statist. Comput. Simulation, 61:61-75.

OHTANI, K., 2005. Sampling properties of the Inequality Constrained Least Squares Estimator when the Use of a Proxy Variable is Inevitable. Kobe University Economic Review, 51:11-16.

STAHLECKER, P. and TRENKLER, G., 1993. Some Further Results on the Use of Proxy Variables in Prediction. The Review of Economics and Statistics, 75:707-711.

SRIVASTAVA, V. K. and MADHULIKA, 1990. Use of Proxy Variables in Regression Analysis. Journal of Quantitative Economics, 6:71-74.

JAMES, W., STEIN, C., 1961. Estimation with Quadratic Loss Proceedings. In: Fourth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, 361–379.

TRENKLER, G. and TOUTENBURG, H., 1992. Proxy Variables and Mean Square Error Dominance in Linear Regression. Journal of Quantitative Economics, 8:433-442.

TRENKLER, G., STAHLECKER P., 1996. Dropping Variables versus use of Proxy Variables in Linear Regression. Journal of Statistical Planning and Inference, 50(1):65–75.

UNAL, D., 2006. The Doubly Non-central F Distribution in a Regression Model with Proxy Variables. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 30:387-392.

UNAL, D. and AKDENIZ, F., 2006. The Iterative Stein Rule Estimator of The Disturbance Variance in a Linear Regression Model When The Proxy Variables are Used. Selçuk Journal of Applied Mathematics,7(2):13-25

UNAL, D., 2010. The Effects of the Proxy Information on the Iterative Stein-rule Estimator of the Disturbance Variance. Statistical Papers, 51:477-484.

WAN, A. T. K., 1994. Risk Comparison of the Inequality Constrained Least Squares and Other Related Estimators Under Balanced Loss. Economics Letters, 46:203-210.

WAN, A. T. K., 1997. The Exact Density and Distribution Functions of the Inequality Constrained and Pre-test Estimators. Statistical Papers, 38: 329-341.

WAN, A.T.K. and OHTANI, K., 2000. Minimum Mean-squared Error Estimation in Linear Regression with an Inequality Constraint. Journal of Statistical Planning and Inference, 86:157-173.

WICKENS, M. R., 1972. A Note on the Use of Proxy Variables. Econometrica, 40: 759–761.

YAMAK, R., KOSEOGLU, M., 2006. Uygulamalı İstatistik ve Ekonometri. Celepler Matbaacılık, Trabzon.

ÖZGEÇMİŞ

02.11.1985 yılında Adana'da doğdu. İlköğretimini Adana 23 Nisan İlköğretim okulunda tamamladı. Ortaöğretimini Adana Seyhan Rotary Anadolu lisesinde 2003 yılında tamamladı. 2004 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl İstatistik Bölümü İstatistik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2009-2013 yılları arasında özel bir dershanede matematik öğretmenliği yaptı. 2012 yılında Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesinde pedagojik formasyon eğitimi programını tamamladı. 2014 yılından beri özel bir kolejde matematik öğretmenliği yapmaktadır.

EKLER

EK 1.

Tablo 4.1

		Yanlılık		MSE		
ρ^*	β_2/σ	EKK	ICLS	EKK	ICLS	REF
0.1	-2.0000	1.8000	2.3069	4.2400	5.5869	.7589
	-1.5000	13500	1.8284	2.8225	3.6264	.7783
	-1.0000	.9000	1.3509	1.8100	2.1269	.8510
	-.5000	.4500	.8744	1.2025	1.0858	1.1075
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.4500	-.0756	1.2025	.3667	3.2791
	1.0000	-.9000	-.5491	1.8100	.6831	2.6499
	1.5000	-1.3500	-1.0216	2.8225	1.4461	1.9518
	2.0000	-1.8000	-1.4931	4.2400	2.6531	1.5982
	2.5000	-2.2500	-1.9637	6.0625	4.3011	1.4095
	3.0000	-2.7000	-2.4332	8.2900	6.3874	1.2979
0.3	-2.0000	1.4000	2.1687	2.9600	4.8477	.6106
	-1.5000	1.0500	1.7137	2.1025	3.1212	.6736
	-1.0000	.7000	1.2668	1.4900	1.8356	.8117
	-.5000	.3500	.8284	1.1225	.9695	1.1578
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.3500	-.0216	1.1225	.4030	2.7856
	1.0000	-.7000	-.4332	1.4900	.6544	2.2768
	1.5000	-1.0500	-.8363	2.1025	1.2313	1.7076
	2.0000	-1.4000	-1.2313	2.9600	2.1123	1.4013
	2.5000	-1.7500	-1.6188	4.0625	3.2784	1.2392
	3.0000	-2.1000	-1.9996	5.4100	4.7137	1.1477
0.5	-2.0000	1.0000	2.0833	2.0000	4.4086	.4537
	-1.5000	.7500	1.6312	1.5625	2.7718	.5637
	-1.0000	.5000	1.1978	1.2500	1.6052	.7787
	-.5000	.2500	.7863	1.0625	.8661	1.2268
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.2500	.0363	1.0625	.4464	2.3799
	1.0000	-.5000	-.3022	1.2500	.6448	1.9387
	1.5000	-.7500	-.6188	1.5625	1.0407	1.5013
	2.0000	-1.0000	-.9167	2.0000	1.5914	1.2568
	2.5000	-1.2500	-1.1994	2.5625	2.2671	1.1303
	3.0000	-1.5000	-1.4707	3.2500	3.0513	1.0651
0.7	-2.0000	.6000	2.0367	1.3600	4.1761	.3257
	-1.5000	.4500	1.5757	1.2025	2.5444	.4726
	-1.0000	.3000	1.1429	1.0900	1.4277	.7635
	-.5000	.1500	.7481	1.0225	.7745	1.3203
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.1500	.0981	1.0225	.4980	2.0530
	1.0000	-.3000	-.1571	1.0900	.6623	1.6458
	1.5000	-.4500	-.3743	1.2025	.9081	1.3242

	2.0000	-.6000	-.5633	1.3600	1.1839	1.1487
	2.5000	-.7500	-.7338	1.5625	1.4699	1.0630
	3.0000	-.9000	-.8935	1.8100	1.7669	1.0244
0.9	-2.0000	.2000	2.0143	1.0400	4.0673	.2557
	-1.5000	.1500	1.5409	1.0225	2.4060	.4250
	-1.0000	.1000	1.1004	1.0100	1.2945	.7802
	-.5000	.0500	.7137	1.0025	.6939	1.4448
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.0500	.1637	1.0025	.5586	1.7946
	1.0000	-.1000	.0004	1.0100	.7155	1.4117
	1.5000	-.1500	-.1091	1.0225	.8665	1.1800
	2.0000	-.2000	-.1857	1.0400	.9727	1.0692
	2.5000	-.2500	-.2458	1.0625	1.0386	1.0230
	3.0000	-.3000	-.2989	1.0900	1.0830	1.0064
0.95	-2.0000	.1000	2.0111	1.0100	4.0519	.2493
	-1.5000	.0750	1.5347	1.0056	2.3817	.4222
	-1.0000	.0500	1.0916	1.0025	1.2672	.7911
	-.5000	.0250	.7056	1.0006	.6753	1.4817
	.0000	.0000	.3989	1.0000	.5000	2.0000
	.5000	-.0250	.1806	1.0006	.5753	1.7394
	1.0000	-.0500	.0416	1.0025	.7353	1.3634
	1.5000	-.0750	-.0403	1.0056	.8739	1.1507
	2.0000	-.1000	-.0889	1.0100	.9581	1.0542
	2.5000	-.1250	-.1221	1.0156	.9992	1.0165
	3.0000	-.1500	-.1494	1.0225	1.0183	1.0041

EK 2

Tablo 5.1 İlgili açıklayıcı değişken ihmal edildiğinde k=6 ve n=30 için PMSE değerleri

Kestirici	F_β	λ_2/F_β					
		0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\mathbf{b_{SRO}}$	0.0	0.3704	0.3704	0.3846	0.3704	0.3704	0.3704
	1.0	0.4511	0.4531	0.4768	0.4588	0.4603	0.4609
	2.0	0.5126	0.5176	0.5514	0.5300	0.5319	0.5312
	4.0	0.5972	0.6095	0.6624	0.6358	0.6380	0.6335
	6.0	0.6505	0.6700	0.7389	0.7091	0.7119	0.7049
	8.0	0.6859	0.7119	0.7933	0.7617	0.7657	0.7578
	10.0	0.7105	0.7424	0.8330	0.8006	0.8061	0.7988
	15.0	0.7475	0.7913	0.8949	0.8627	0.8723	0.8702
	20.0	0.7676	0.8209	0.9290	0.8983	0.9111	0.9166
	25.0	0.7801	0.8412	0.9496	0.9207	0.9358	0.9494
	30.0	0.7886	0.8564	0.9631	0.9360	0.9526	0.9737
	40.0	0.7995	0.8780	0.9791	0.9554	0.9736	1.0072
	50.0	0.8061	0.8932	0.9879	0.9670	0.9858	1.0290
	100.0	0.8196	0.9326	1.0025	0.9900	1.0089	1.0740
	150.0	0.8241	0.9504	1.0061	0.9976	1.0160	1.0879
$\mathbf{b_{SRO}}$	0.0	0.2714	0.2714	0.2714	0.2714	0.2714	0.2714
	1.0	0.3712	0.3718	0. 3721	0. 3713	0.3697	0.3670
	2.0	0.4497	0.4521	0.4542	0.4529	0.4484	0.4410
	4.0	0.5602	0.5687	0.5773	0.5762	0.5663	0.5483
	6.0	0.6297	0.6456	0.6624	0.6631	0.6497	0.6226
	8.0	0.6746	0.6977	0.7226	0.7262	0.7113	0.6774
	10.0	0.7045	0.7342	0.7663	0.7733	0.7584	0.7196
	15.0	0.7463	0.7894	0.8341	0.8485	0.8373	0.7926
	20.0	0.7674	0.8205	0.8715	0.8908	0.8851	0.8396
	25.0	0.7801	0.8411	0.8949	0.9168	0.9163	0.8728
	30.0	0.7886	0.8563	0.9110	0.9339	0.9379	0.8976
	40.0	0.7995	0.8780	0.9319	0.9548	0.9650	0.9324
	50.0	0.8061	0.8932	0.9450	0.9668	0.9807	0.9559
	100.0	0.8196	0.9326	0.9733	0.9900	1.0084	1.0119
	150.0	0.8241	0.9504	0.9835	0.9976	1.0159	1.0348

Tablo 5.2 Vekil değişken kullanıldığında k=6 ve n=30 için PMSE değerleri

Kestirici	F_β	λ_2^*/F_β					
		0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
b_{SRP}	0.0	0.3846	0.3846	0.3846	0.3846	0.3846	0.3846
	1.0	0.4755	0.4761	0.4768	0.4767	0.4759	0.4744
	2.0	0.5472	0.5492	0.5514	0.5512	0.5488	0.5444
	4.0	0.6507	0.6563	0.6624	0.6626	0.6575	0.6473
	6.0	0.7197	0.7289	0.7389	0.7401	0.7337	0.7199
	8.0	0.7678	0.7801	0.7933	0.7958	0.7896	0.7746
	10.0	0.8027	0.8174	0.8330	0.8369	0.8318	0.8174
	15.0	0.8578	0.8762	0.8949	0.9018	0.9013	0.8940
	20.0	0.8892	0.9094	0.9290	0.9379	0.9423	0.9456
	25.0	0.9094	0.9303	0.9496	0.9598	0.9684	0.9832
	30.0	0.9234	0.9445	0.9631	0.9740	0.9861	1.0121
	40.0	0.9415	0.9622	0.9791	0.9908	1.0077	1.0537
	50.0	0.9527	0.9726	0.9879	1.0000	1.0200	1.0823
	100.0	0.9759	0.9916	1.0025	1.0152	1.0414	1.1477
	150.0	0.9838	0.9967	1.0061	1.0190	1.0471	1.1707
b_{PSRP}	0.0	0.2753	0.2753	0.2753	0.2753	0.2753	0.2753
	1.0	0.3663	0.3674	0.3690	0.3694	0.3689	0.3675
	2.0	0.4361	0.4398	0.4446	0.4458	0.4439	0.4389
	4.0	0.5306	0.5420	0.5562	0.5604	0.5557	0.5426
	6.0	0.5863	0.6066	0.6316	0.6403	0.6345	0.6146
	8.0	0.6196	0.6484	0.6839	0.6976	0.6925	0.6679
	10.0	0.6400	0.6766	0.7210	0.7398	0.7366	0.7090
	15.0	0.6644	0.7169	0.7768	0.8058	0.8099	0.7806
	20.0	0.6742	0.7389	0.8067	0.8417	0.8537	0.8270
	25.0	0.6792	0.7539	0.8251	0.8631	0.8819	0.8600
	30.0	0.6823	0.7656	0.8379	0.8768	0.9011	0.8848
	40.0	0.6860	0.7834	0.8549	0.8931	0.9245	0.9200
	50.0	0.6880	0.7969	0.8661	0.9022	0.9376	0.9439
	100.0	0.6918	0.8362	0.8918	0.9200	0.9584	1.0021
	150.0	0.6930	0.8559	0.9017	0.9259	0.9631	1.0266

EK 3

```
Clear[n, k, z, λ1, λ2, a, v]
n = 1;
k = 6;
n = 20;
λ1 = 0.9;
λ2 = 0.1;
x
v = n - k
a
a = (k - 2) / (v + 2)
ni = 10;
B[p_, q_] :=
 2^(p + q)
  Sum[Sum[(Exp[-λ1 / 2] (λ1 / 2)^i / i!) x (Exp[-λ2 / 2] (λ2 / 2)^j / j!) (Gamma[k / 2 + p + i] Gamma[v / 2 + q + j]) / (Gamma[k / 2 + i] Gamma[v / 2 + j]), {j, 0, 100}], {i, 0, 100}] x
    (1 / (1 - x))^(k / 2 + p + i) x^(v / 2 + q + j)

Print["MSE1="]
MSE1 = Exp[-(λ1 + λ2)] Sum[Sum[(λ1^i) x (λ2^j) (k + 2 i + 2) (k - 2 i) / (i! j!), {j, 0, ∞}], {i, 0, ∞}]
Print["MSE2="]
MSE2 = 2 Exp[-(λ1 + λ2)] Sum[Sum[(λ1^i) x (λ2^j) (k - 2 i) (v + 2 j) / (i! j!), {j, 0, ni}], {i, 0, ni}]

Print["MSE3="]
MSE3 = Exp[-(λ1 + λ2)] Sum[Sum[(λ1^i) x (λ2^j) (v - 2 j + 2) (v + 2 j) / (i! j!), {j, 0, ∞}], {i, 0, ∞}]
Print["MSE4="]
MSE4 = -B[2, 0] - 2 B[1, 1] + 2 (a^2) B[-2, 2] + (a^4) B[-2, 4]

Print["MSE5="]
MSE5 = -2 (a^4 / v) (-2 B[1, 0] + (a^2) B[-1, 2]) - a^4

Print["MSE="]
MSE = (a^4 / v^2) (MSE1 + MSE2 - MSE3 - MSE4) + MSE5
Print["BV2kare= "]
BV2kare = Exp[-(λ1 + λ2)] x 4 Sum[Sum[(λ1^i) x (λ2^j) Gamma[v / 2 + j + 2] / (i! j! Gamma[v / 2 - j]), {j, 0, ∞}], {i, 0, ∞}]

Print["BV2= "]
BV2 = Exp[-(λ1 + λ2)] x 2 x Sum[Sum[(λ1^i) x (λ2^j) Gamma[v / 2 + j + 1] / (i! j! Gamma[v / 2 + j]), {j, 0, ni}], {i, 0, ni}]

Print["ni=", ni, "      SAPMSE= "]
SAPMSE = (a^4 / v^2) + BV2kare + (-2 a^4 / v^2) + BV2 + a^4

SFF = SAPMSE / MSE

Print["ni=", ni, "      SFF= ", SFF]
```

EK 4
Tablo 6.1

k=3,5,6,8,12,15	n=20,30,100,1000,10 000	ni=1,5,10	REF$(\hat{\sigma}_{IP}^{*2})$= MSE(s^2)/MSE($\hat{\sigma}_{IP}^{*2}$)
3	20	1	1.03381
3	20	5	0.87126
3	20	10	0.86688
3	30	1	1.03302
3	30	5	0.92667
3	30	10	0.92356
3	100	1	1.01276
3	100	5	0.97659
3	100	10	0.97503
3	1000	1	1.00135
3	1000	5	0.98804
3	1000	10	0.98695
3	10 000	1	1.00014
3	10 000	5	0.98897
3	10 000	10	0.98792
5	10 000	10	0.98792
6	20	1	0.99911
6	20	5	0.76028
6	20	10	0.75536
6	30	1	1.03895
6	30	5	0.88233
6	30	10	0.87875
6	100	1	1.01981
6	100	5	0.97304
6	100	10	0.97138
6	1000	1	1.00212
6	1000	5	0.98795
6	1000	10	0.98685
6	10 000	1	1.00021
6	10 000	5	0.98896
6	10 000	10	0.98792
8	20	1	0.91890
8	20	5	0.64665
8	20	10	0.64180
8	30	1	1.02920
8	30	5	0.83692
8	30	10	0.83306
8	100	1	1.02416
8	100	5	0.96987

8	100	10	0.96814
8	1000	1	1.00264
8	1000	5	0.98788
8	1000	10	0.98678
8	10 000	1	1.00027
8	10 000	5	0.98896
8	10 000	10	0.98791
12	20	1	0.53367
12	20	5	0.33827
12	20	10	0.33531
12	30	1	0.94213
12	30	5	0.69491
12	30	10	0.69092
12	100	1	1.03182
12	100	5	0.96133
12	100	10	0.95947
12	1000	1	1.00367
12	1000	5	0.98774
12	1000	10	0.98662
12	10 000	1	1.00037
12	10 000	5	0.98895
12	10 000	10	0.98790
15	20	1	0.19802
15	20	5	0.12977
15	20	10	0.12867
15	30	1	0.79079
15	30	5	0.54438
15	30	10	0.54085
15	100	1	1.03637
15	100	5	0.95274
15	100	10	0.95077
15	1000	1	1.00444
15	1000	5	0.98762
15	1000	10	0.98650
15	10 000	1	1.00045
15	10 000	5	0.98894
15	10 000	10	0.98789