XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, 12-16 Eylül 2005, HATAY

KOMPOZİT HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Faruk Fırat Çalım* ve Beytullah Temel**

* Mustafa Kemal Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Hatay
** Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana
e-mail: ffcalim@mku.edu.tr

ÖZET

Kompozit silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş tabakalı uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini doğru şekilde hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanarak sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen çözümler, uygun bir sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürülmektedir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

ABSTRACT

The dynamic behavior of composite cylindrical helical rods subjected to time-dependent loads is theoretically investigated in the Laplace domain. The governing equations for naturally twisted and curved spatial laminated rods obtained using Timoshenko beam theory are rewritten for cylindrical helical rods. The curvature of the rod axis, the anisotropy of the rod material, effect of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically using the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem accurately. The solutions obtained are transformed to the time space using an appropriate numerical inverse Laplace transform method. The free vibration is then taken into account as a special case of forced vibration. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature.

1. GİRİŞ

Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Chen ve Yang [1], anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar yöntemi kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Formülasyonda kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir. Chandrashekhara ve Bangera [2], tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için, yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Krishnaswamy ve ark. [3], tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini idare eden dinamik denklemleri Hamilton prensibini kullanarak geliştirmişlerdir. Qatu [4], tabakalı kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimi için denklem takımını sunmuştur. Basit mesnetli eğrisel çubukların serbest titreşimini kesin olarak elde etmiştir. Qatu ve Elsharkawy [5], genel sınır şartlarında, büyük eğrilik yarıçaplı tabakalı kompozit kemerlerin serbest titreşimi için kesin çözümler vermişlerdir. Serbest titreşim frekanslarını Ritz metodu kullanarak elde etmişlerdir.

Yıldırım [6], Timoshenko kiriş teorisi kullanarak ön burulmalı elastik uzaysal çubukların ısı etkisi altındaki titreşim davranışını teorik olarak incelemiştir. Yıldırım [7,8], Timoshenko kiriş teorisi kullanarak simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış silindirik helisel çubukların serbest titreşimini taşıma matrisi yardımıyla incelemiştir.

Çalım [9], izotropik-anizotropik ve elastik-viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında dinamik davranışı incelemiştir. Temel ve ark. [10], kompozit silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda; çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır.

Tabakalı kompozit malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zamanla değişen yükler altında zorlanmış titreşimi ile ilgili çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu çalışmada, kompozit helisel çubukların zamana bağlı yükler altında dinamik davranışları Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak uzaysal eğri eksenli çubukları idare eden denklemler, silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak [9,10] problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [11,12] kullanılmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi yüzlerce eleman ile tanımlamak gerekirken, bu çalışmada sadece birkaç elemanla tanımlayarak istenilen hassasiyette kesin sonuçlar elde edilmektedir.

2. ÇUBUK GEOMETRİSİ

Tabii olarak eğilmiş ve burulmuş uzaysal narin bir çubuğu gözönüne alalım. Çubuk ekseni, geometrik merkezi G'nin yörüngesi olarak tanımlanır. t=0 anındaki durum vektörü $\mathbf{r}^o=\mathbf{r}^o(s, 0)$ olarak verilir (Şekil 1.a). Herhangi bir t anında, çubuk ekseninin orijini ile $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörleri olarak tanımlanan bir hareketli koordinat takımı seçilmiştir.

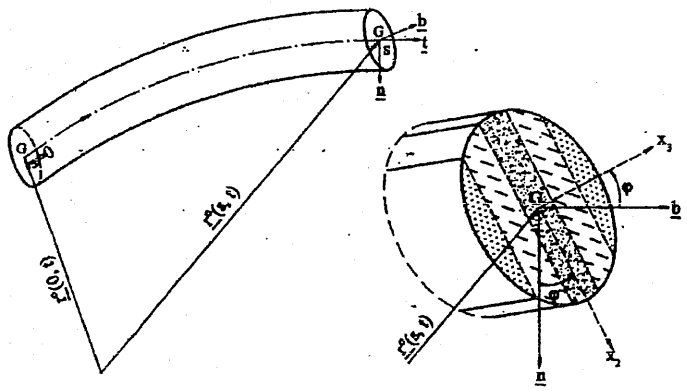
$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}^o(s,t)}{\partial s} \tag{1}$$

Burada **t, n** ve **b** sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektör olarak tanımlanır. **t, n, b** birim vektörleri arasındaki diferansiyel bağıntılar Frenet formülleri [13] ile verilmektedir.

$$\partial \mathbf{t}/\partial s = \chi \mathbf{n} \ , \quad \partial \mathbf{n}/\partial s = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t} \ , \quad \partial \mathbf{b}/\partial s = -\tau \mathbf{n} \tag{2}$$

Burada, χ ve τ eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır. x_1 ekseni kesitin **t** doğrultusu ve x_2, x_3 kesitin asal eksenleri olmak üzere, ikinci bir dik takım (x_1, x_2, x_3) seçilmektedir (Şekil 1.b). $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ ve $\mathbf{i}_3$ birim vektörleri sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 eksenleri üzerindedir. (Şekil 1.b)'den (3) ifadesi yazılabilir.

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}_1 \ , \qquad \mathbf{n} = \mathbf{i}_2 \cos\varphi - \mathbf{i}_3 \sin\varphi \ , \qquad \mathbf{b} = \mathbf{i}_2 \sin\varphi + \mathbf{i}_3 \cos\varphi \tag{3}$$



(a) (b)

Şekil 1. Çubuk geometrisi

3. HAREKET DENKLEMLERİ

Çubuk ekseni üzerinde herhangi bir s noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^o(s, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\Omega^o(s, t)$ olarak gösterilsin. $\mathbf{T}(s, t)$ vektörü ile t anında s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(s, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(s, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(s, t)$ olsun.

Kesit çarpılmasının olmadığı kabul edilmektedir. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropiktir. Kompozit uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir [6, 10].

$$\frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial s} = \mathbf{A}'\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{M} + \mathbf{\Omega}^o \times \mathbf{t} \ , \qquad \frac{\partial \mathbf{\Omega}^o}{\partial s} = \mathbf{F}'\mathbf{T} + \mathbf{D}'\mathbf{M} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial s} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{p}^{(in)} \ , \qquad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T}^o + \mathbf{m}^{(ex)} = \mathbf{m}^{(in)} \tag{4b}$$

$\mathbf{p}^{in}$ kütlesel atalet kuvveti ve $\mathbf{m}^{in}$ kütlesel atalet momenti ifadeleri

$$p_i^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 U_i^o}{\partial t^2}, \qquad m_i^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i^o}{\partial t^2} \qquad (i = t, n, b) \tag{5}$$

olmak üzere, burada ρ, kütlesel yoğunluğu göstermektedir. I_t burulma ve I_n, I_b ise eğilme atalet momentleridir.

A, B, F ve D matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir. Bu matrislerin açık ifadeleri Ref. [10] 'da verilmektedir.

Zorlanmış titreşim durumu için, $\mathbf{Y}(s,t)$ kolon matrisi

$$\mathbf{Y}(s,t)=\left\{U_t^o,\ U_n^o,\ U_b^o,\ \Omega_t^o,\ \Omega_n^o,\ \Omega_b^o,\ T_t^o,\ T_n^o,\ T_b^o,\ M_t^o,\ M_n^o,\ M_b^o\right\}^T \tag{6}$$

olarak tanımlanmaktadır. (6) ifadesinin zamana göre Laplace dönüşümü, t>0 için $L[\mathbf{Y}(s,t)]=\overline{\mathbf{Y}}(s,z)$ ise

$$\overline{\mathbf{Y}}(s,z)=\int_0^\infty \mathbf{Y}(s,t)e^{-zt}\,dt \tag{7}$$

olup, burada Laplace dönüşüm parametresi z kompleks bir sayıdır. Bu tariflerin yardımıyla (4a) ve (4b) eşitlikleri birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmektedir.

Serbest titreşim analizi için, $p_i^{(ex)}=0$ ve $m_i^{(ex)}=0$ (i= t, n, b) alınmaktadır. Harmonik titreşim kabulü ile $\mathbf{U}^o$, Ω^o, $\mathbf{T}^o$ ve $\mathbf{M}^o$ vektörleri aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{U}^o(s,t)=\mathbf{U}^*(s)e^{i\omega t},\ \mathbf{\Omega}^o(s,t)=\mathbf{\Omega}^*(s)e^{i\omega t},\ \mathbf{T}^o(s,t)=\mathbf{T}^*(s)e^{i\omega t},\ \mathbf{M}^o(s,t)=\mathbf{M}^*(s)e^{i\omega t} \tag{8}$$

(8) ifadesi (4) denkleminde yerine konulduğunda, birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Eğer, genelleştirilmiş deplasmanlar U_t^*, U_n^*, U_b^*, Ω_t^*, Ω_n^*, Ω_b^* ve bunlara karşılık gelen kuvvetler T_t^*, T_n^*, T_b^*, M_t^*, M_n^*, M_b^*, $\mathbf{Y}^*(s)$ kolon matrisinin bileşenleri olarak düşünülürse, bu on iki adet denklem matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}^*(s)}{ds}=\mathbf{F}(s,\omega)\mathbf{Y}^*(s) \tag{9}$$

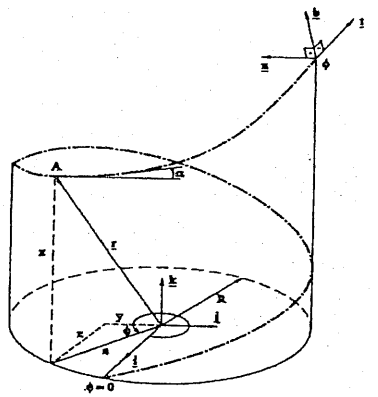
Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri problemin doğal frekanslarını vermektedir.

4. ÖZEL DURUM

Helisel çubuklar, eğri eksenli uzaysal çubukların özel durumu olarak ele alınmıştır. Helisin parametrik denklemi [9,10] ile verilmektedir (Şekil 2).

$$x=a\cos\phi\ ,\ y=a\sin\phi\ ,\ z=h\phi \tag{10}$$

Burada, ϕ helisi çevreleyen silindirin taban dairesinde x-ekseninden itibaren ölçülen açıdır.



Şekil 2. Silindirik helisin geometrisi

Helis üzerinde çok küçük bir eleman uzunluğu için

$$c=\sqrt{a^2+h^2}\ ,\ ds=c\,d\phi\ ,\ \cos\alpha=\frac{a}{c}\ ,\ \sin\alpha=\frac{h}{c} \tag{11}$$

tarifleri yapılmaktadır. Burada,α ve a sırasıyla yükselme açısı ve helisin sarıldığı silindirin yarıçapıdır. Silindirik helisel yayın eğrilikleri ise

$$\chi=\frac{a}{c^2}=\text{sabit}\ ,\ \tau=\frac{h}{c^2}=\text{sabit} \tag{12}$$

şeklindedir. Hareketli koordinat takımı (**t**, **n**, **b**) ile ortak koordinat takımı (**i**, **j**, **k**) arasında aşağıdaki ilişki vardır (Şekil 2).

$$\{V\}_{mb}=[B]\{V\}_{ijk}\quad \begin{Bmatrix}V_t\\V_n\\V_b\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-(a/c)\sin\phi & (a/c)\cos\phi & (h/c)\\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ (h/c)\sin\phi & -(h/c)\cos\phi & (a/c)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}V_i\\V_j\\V_k\end{Bmatrix} \tag{13}$$

V_i, V_j, V_k ortak koordinat takımında, V_t, V_n, V_b ise hareketli koordinat takımında herhangi bir vektörün bileşenleridir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse **n, b** eksenleri asal eksenler olmaktadır. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse, hareketli koordinat takımında N adet kompozit tabakadan oluşan silindirik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\overline{U}_t}{d\phi}=\frac{a}{c}\overline{U}_n+cA'_{11}\overline{T}_t+cA'_{12}\overline{T}_n \tag{14a}$$

$$\frac{d\overline{U}_n}{d\phi}=-\frac{a}{c}\overline{U}_t+\frac{h}{c}\overline{U}_b+c\overline{\Omega}_b+c\alpha_n A'_{22}\overline{T}_n+cA'_{21}\overline{T}_t$$

$$\frac{d\overline{U}_b}{d\phi}=-\frac{h}{c}\overline{U}_n-c\overline{\Omega}_n+c\alpha_b A'_{33}\overline{T}_b \tag{14c}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_t}{d\phi}=\frac{a}{c}\overline{\Omega}_n+cD'_{11}\overline{M}_t+cD'_{12}\overline{M}_n \tag{14d}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_n}{d\phi}=-\frac{a}{c}\overline{\Omega}_t+\frac{h}{c}\overline{\Omega}_b+cD'_{22}\overline{M}_n+cD'_{21}\overline{M}_t \tag{14e}$$

$$\frac{d\overline{\Omega}_b}{d\phi}=-\frac{h}{c}\overline{\Omega}_n+cD'_{33}\overline{M}_b \tag{14f}$$

$$\frac{d\overline{T}_t}{d\phi}=cz^2\tilde{A}\overline{U}_t+\frac{a}{c}\overline{T}_n+c\overline{B}_7 \tag{14g}$$

$$\frac{d\overline{T}_n}{d\phi}=cz^2\tilde{A}\overline{U}_n+\frac{h}{c}\overline{T}_b-\frac{a}{c}\overline{T}_t+c\overline{B}_8 \tag{14h}$$

$$\frac{d\overline{T}_b}{d\phi}=cz^2\tilde{A}\overline{U}_b-\frac{h}{c}\overline{T}_n+c\overline{B}_9 \tag{14i}$$

$$\frac{d\overline{M}_t}{d\phi}=cz^2\tilde{I}_1\overline{\Omega}_t+\frac{a}{c}\overline{M}_n+c\overline{B}_{10} \tag{14j}$$

$$\frac{d\overline{M}_n}{d\phi}=cz^2\tilde{I}_2\overline{\Omega}_n+\frac{h}{c}\overline{M}_b-\frac{a}{c}\overline{M}_t+c\overline{T}_b+c\overline{B}_{11} \tag{14k}$$

$$\frac{d\overline{M}_b}{d\phi}=cz^2\tilde{I}_3\overline{\Omega}_b-\frac{h}{c}\overline{M}_n-c\overline{T}_n+c\overline{B}_{12} \tag{14l}$$

$\overline{\mathbb{B}}(\phi,z)$ kolon matrisinin elemanları (15) denkleminde verilmiştir. Laplace dönüşümünden gelen başlangıç şartları, $\overline{\mathbb{B}}(\phi,z)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

$$\overline{B}_i(\phi,z)=0 \qquad (i=1,2,...,6)$$

$$\overline{B}_{6+j}(\phi,z)=-\left(\overline{p}_j^{(ex)}\right)-\rho\tilde{A}\left[zU_j^{\circ}(\phi,0)+\frac{\partial U_j^{\circ}(\phi,0)}{\partial t}\right] \quad (j=1,2,3) \tag{15}$$

$$\overline{B}_{9+j}(\phi,z)=-\left(\overline{m}_j^{(ex)}\right)-\rho\tilde{I}_j\left[z\Omega_j^{\circ}(\phi,0)+\frac{\partial\Omega_j^{\circ}(\phi,0)}{\partial t}\right]$$

$$\tilde{A}=\sum_{k=1}^{N}\rho^{(k)}A^{(k)}\ ,\ \tilde{I}_2=\sum_{k=1}^{N}\rho^{(k)}\int_{A^{(k)}}(x_3)^2\,dA\ ,\ \tilde{I}_3=\sum_{k=1}^{N}\rho^{(k)}\int_{A^{(k)}}(x_2)^2\,dA \tag{16}$$

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, zamana bağlı yükler altında kompozit helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizleri için FORTRAN dilinde genel amaçlı bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runga-Kutta algoritması [14] uygulanmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi [11, 12] kullanılmıştır.

Örnek 1. İki ucu ankastre tek eksenli kompozit helisel çubuk problemi göz önüne alınmıştır (0°). Tablo 1'de verilen Carbon-epoxy[2] malzemesinden yapılmış iki ucu ankastre helisel yayın (D/d) oranı ve aktif sarım sayısının dinamik davranışa etkisi araştırılmıştır. Helisel yay daire kesitli olup d=1 mm'dir. Helisin yükselme açısı $\alpha=5^{\circ}$ olup, D/d=5 ve D/d=10 oranları için serbest titreşim frekansları sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 3'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Enine izotrop malzeme özellikleri

	Carbon-epoxy[2] (T300/N5208)
E_1 (N/m^2)	181×10^9
$E_2=E_3$ (N/m^2)	10.3×10^9
$G_{12}=G_{13}$ (N/m^2)	7.17×10^9
G_{23} (N/m^2)	3.433×10^9
ν_{12}	0.28
ρ (kg/m^3)	1600

Tablo 2. Serbest titreşim frekansları (Hertz) (D/d=5) (n: Aktif sarım sayısı)

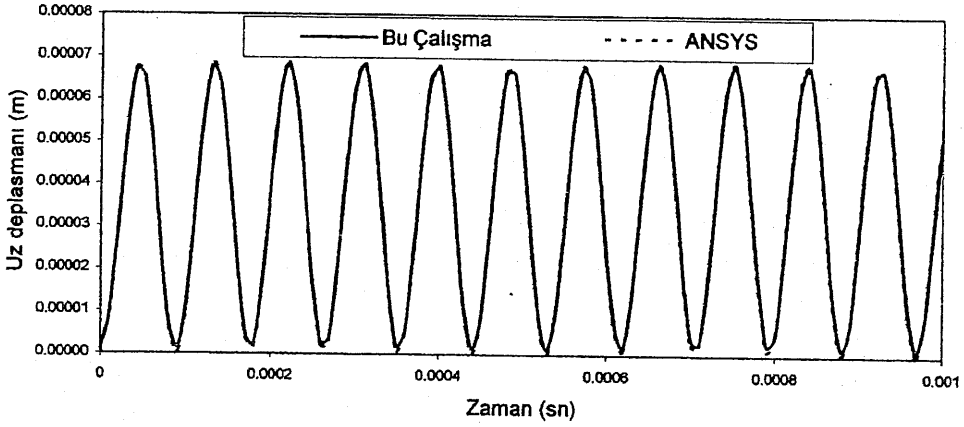
	n	Yıldırım [8]	ANSYS [15] (500 eleman)	Bu çalışma
1	1	13344.82	13287.50	13287.17
2		31418.87	31217.20	31216.87
3		36954.71	36927.17	36926.24
4		68439.02	68195.48	68194.80
5		78187.39	77547.84	77546.27
6		127977.00	127558.75	127556.80
1	4	2321.33	2322.23	2321.43
2		4470.94	4472.84	4471.31
3		5158.32	5160.69	5159.43
4		5594.30	5580.29	5578.99
5		6277.12	6280.12	6278.14
6		6916.74	6917.38	6915.31
1	8	1167.39	1169.02	1167.39
2		2097.16	2097.24	2096.17
3		2104.31	2100.40	2099.37
4		2320.17	2323.47	2320.23
5		3431.79	3436.72	3431.98
6		4044.55	4050.02	4046.38

Tablo 3. Serbest titreşim frekansları (Hertz) (D/d=10) (n: Aktif sarım sayısı)

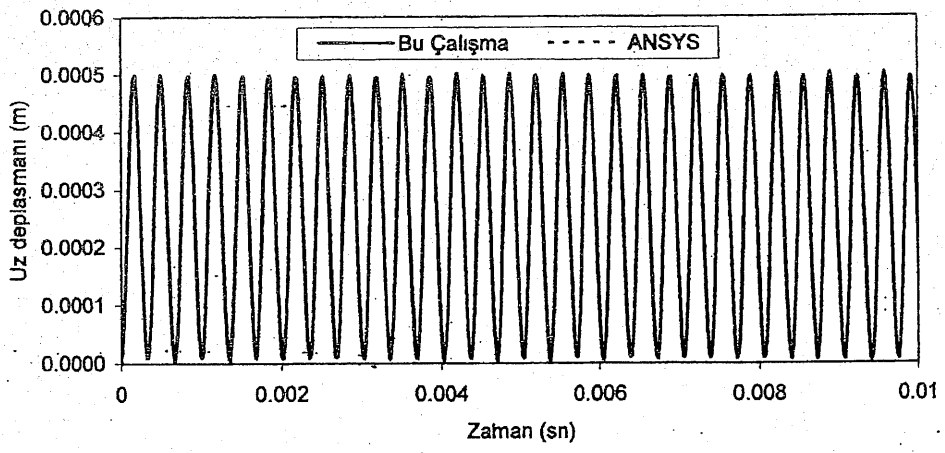
	n	Yıldırım [8]	ANSYS [15] (500 eleman)	Bu çalışma
1	1	3456.36	3443.96	3443.87
2		8986.25	8915.63	8915.52
3		9883.83	9857.71	9857.44
4		22561.67	22446.00	22445.49
5		23154.79	23004.38	23004.10
6		41444.57	41134.93	41134.27
1	4	584.97	585.17	584.97
2		1126.87	1127.18	1126.79
3		1305.87	1305.51	1305.19
4		1425.17	1422.56	1422.22
5		1581.20	1581.43	1580.93
6		1750.18	1749.48	1748.97
1	8	294.18	294.59	294.18
2		531.22	530.90	530.62
3		532.54	531.89	531.62
4		584.72	585.54	584.71
5		864.85	866.02	864.81
6		1024.57	1024.98	1024.03

Tablo 2 ve 3 incelendiğinde serbest titreşim frekanslarının literatür ile uyum içinde olduğu görülmektedir. ANSYS programı ile çözüm yapılırken aktif sarım sayısı ile orantılı olarak problemi daha fazla sayıda elemana bölerek modellemek gerekmektedir. D/d oranı ve aktif sarım sayısı arttıkça frekans değeri küçülmektedir.

Helisel yayın orta noktasına P_o= 1N şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır. Carbon-epoxy[1] malzemesinden yapılmış çubuk, aktif sarım sayısı n=1, D/d=5 ve D/d=10 oranları için helisel çubuğun orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri gösterilmektedir (Şekil 3-4). Hesaplamalarda D/d=5 oranı için zaman artımı DT=$1x10^{-5}$ sn ve D/d=10 oranı için DT=$2.5x10^{-5}$ sn seçilmiştir.



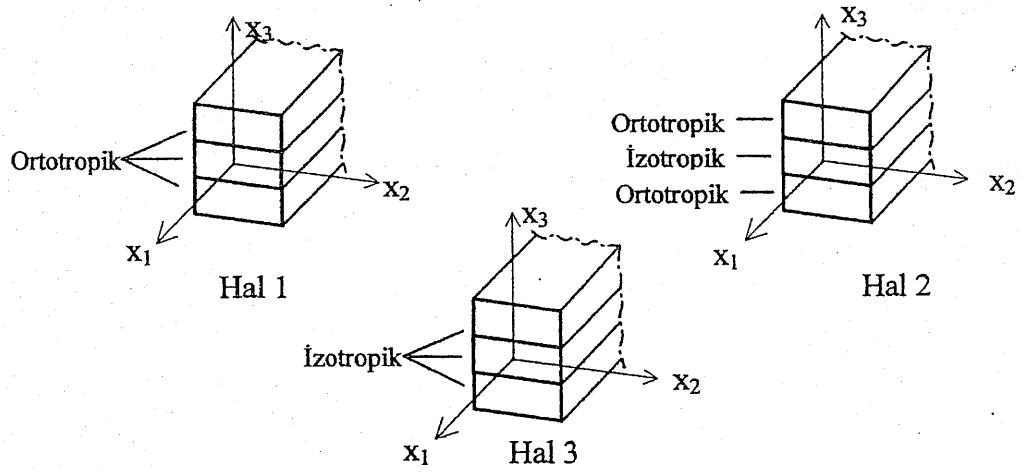
Şekil 3. D/d=5 için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



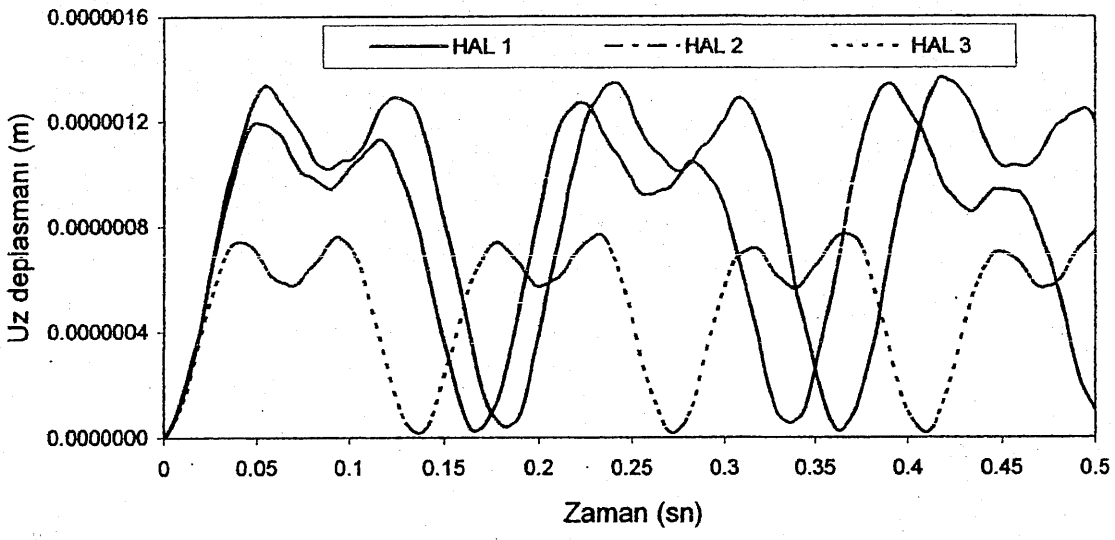
Şekil 4. D/d=10 için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi

D/d=5 ve D/d=10 oranları için iki ucu ankastre helisel çubuğun deplasmanları ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve iki farklı yöntemle bulunan sonuçların uyum içinde olduğu görülmüştür. D/d oranı arttıkça deplasman genlikleri ve titreşim periyotları da artmaktadır.

Örnek 2. Enkesiti üç tabakadan oluşan iki ucu ankastre yarım sarımlık helis ele alınmıştır. Helis dikdörtgen kesitli olup kesit genişliği b=0.0762 m, kesit yüksekliği h=0.2286 m'dir. Helisin sarıldığı dairenin yarıçapı a=200 cm, yükselme açısı=25.52 ° ve tabakanın izotropik olduğu durumda malzeme özellikleri; $E=68.9\times10^9$ N/m^2 , $\rho=7850$ kg/m^3 ve $\nu=0.3$ olarak verilmektedir. Tabakanın ortotropik olması halinde ise malzeme sabitleri; elastisite modülleri $E_{11}=39.3\times10^9$ N/m^2, $E_{22}=152\times10^9$ N/m^2, $E_{33}=22.9\times10^9$ N/m^2, kayma modülleri $G_{12}=29.3\times10^9$ N/m^2, $G_{13}=1.6\times10^9$ N/m^2, $G_{23}=4.1\times10^9$ N/m^2 ve Poisson oranları $\nu_{12}=0.613$, $\nu_{13}=0.265$, $\nu_{23}=0.209$ ve $\rho=7850$ kg/m^3 olarak seçilmiştir. Tabakalar x_2 eksenine göre simetrik olacak şekilde yerleştirilmektedir (Şekil 5). Fiber doğrultu açıları 0° olarak seçilmiştir. Şekil 5'de görülen üç ayrı hal için, helisin orta noktasına $P_o=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulayarak zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır.



Şekil 5. Kesitin tabaka durumları



Şekil 6. Helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

Şekil 6 incelendiğinde, x_2 ekseni etrafındaki eğilmeye göre en esnek kesit 1. halde olmakta, sonra sırasıyla, 2. ve 3. haller gelmektedir. Çubuk geometrisi ve yüklemesi aynı kaldığı halde kesitin esnekliği azaldıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları azalmaktadır.

6. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Kompozit malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak araştırılmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de gözönüne alınmıştır. Tabakalanma şekline bağlı olarak rijitlik arttıkça titreşim periyodları ve deplasman genlikleri küçülmektedir. Dolayısıyla doğal frekanslar artmaktadır. Sabit yükselme açısı ile helisin sarıldığı silindir çapının tel çapına oranı (D/d) ve aktif sarım sayıları değiştirilerek bunların titreşim frekanslarına etkileri araştırılmıştır. Enine izotrop malzemeden yapılmış helisel çubuklarda D/d oranı ve aktif sarım sayıları arttıkça deplasman genlikleri ve titreşim peryodları artmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Chen, A.T., and Yang, T.Y., "Static and Dynamic Formulation of a Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer" *Journal of Composite Material* 19, 459-475, 1985.

[2] Chandrashekhara, K., and Bangera, K.M., "Free Vibration of Composite Beams using a Refined Shear Flexible Beam Element" *Computers & Structures* 43(4), 719-727, 1992.

[3] Krishnaswamy, S., Chandrashekhara, K., and Wu, W.Z.B., "Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams" *Journal of Sound and Vibration* 159(1), 85-99, 1992.
[4] Qatu, M.S., "In-Plane Vibration of Slightly Curved Laminated Composite Beams" *Journal of Sound and Vibration* 159(2), 327-338, 1992.
[5] Qatu, M.S., and Elsharkawy, A.A., "Vibration of Laminated Composite Arches with Deep Curvature and Arbitrary Boundaries" *Computers & Structures* 47(2), 305-311, 1993.
[6] Yıldırım, V., "Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Laminated Composite Materials" *International Journal of Engineering Sciences* 37, 1007-1035, 1999.
[7] Yıldırım, V., "A Numerical Study on the Free Vibration of Symmetric Cross-Ply Laminated Cylindrical Helical Springs" *Journal of Applied Mechanics* 66, 1040-1043, 1999.
[8] Yıldırım, V., "Free Vibration of Uniaxial Composite Cylindrical Helical Springs with Circular Section" *Journal of Sound and Vibration* 239(2), 321-333, 2001.
[9] Çalım, F.F., "Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi" ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana, 2003.
[10] Temel, B., Çalım, F.F., and Tütüncü, N., "Forced Vibration of Composite Cylindrical Helical Rods" *International Journal of Mechanical Sciences* 47(7), 998-1022, 2005.
[11] Durbin, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method" *Computer Journal* 17, 371-376, 1974.
[12] Narayanan, G.V., *"Numerical Operational Methods in Structural Dynamics"* Ph.D. thesis, University. of Minnesota, Minneapolis, Minn, 1979.
[13] Sokolnikoff, I.S., and Redheffer, R.M., *"Mathematics of Physics and Modern Engineering"* Tokyo : McGraw-Hill, 1958.
[14] Chapra, S.C., and Canale, R.P., *"Numerical Methods for Engineers"* McGraw-Hill, Third edition, 1998.
[15] ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, U.S.A.
[16] Jones, R.M., *"Mechanics of Composite Materials"* NewYork: Hemisphere Publishing Corporation, 1975.