XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

ZAMANA BAĞLI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE UZAYINDAKİ ÇÖZÜMLERİNİN ÇEŞİTLİ SAYISAL YÖNTEMELER İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Mehmet Fatih Sahan[1] * ve Beytullah Temel[2] †
[1]Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman
[2]Çukurova üniversitesi, Adana

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak, basit bir mekanik modele ait diferansiyel denklemin Laplace uzayındaki çözümleri, Fourier uzayındaki çözümleri, Newmark metodu ile zaman uzayında elde edilen çözümleri ve analitik çözümleri ile karşılaştırılacaktır. İkinci olarak, tabakalı kompozit kalın plaklağa ait Navier denklemlerinin Laplace uzayındaki çözümleri ve Newmark metodu ile zaman uzayındaki çözümleri yapılacaktır. Laplace uzayında bulunan çözümler, Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştütrülmektedir. Bu çalışmada, zamana bağlı diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanması ve ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar bulanabildiği literatürdeki çeşitli sayısal yöntemler ile karşılaştırmalar yapılarak gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

Katı cisimler mekaniği, elastisite, yapı-zemin etkileşimi gibi pek çok mühendislik problemleri diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilirler. Bu alanlardaki fiziksel problemler, çoğunlukla başlangıç değer ve/veya sınır değer problemleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Basit problemlerin analitik çözümleri elde edilebilirken karmaşık geometri ve yükleme durumları için kapalı çözümleri bulunamamaktadır.

Zamana bağlı diferansiyel denklemler direk integrasyon yöntemleri ile sayısal olarak çözülebilirler. Bu tür sayısal yönlemlerde, herhangi bir zaman adımındaki çözüm doğrudan bulanamamakta ve o andaki çözüme ulaşabilmek için çözüm aralığı zaman dilimlerine bölünerek integrasyon işlemleri, başlangıç koşulları kullanılmak süretiyle, başlangıçtan itibaren sırasıyla her zaman artımı için uygulanmaktadır. Bu durum adım adım integrasyon metodları için önemli bir dezavantajdır. Bathe [1] yaptığı çaşılmada Newmark yönteminin diğer adım adım integrasyon yöntemlerine göre daha karalı olduğunu göstermiştir. Literatürde dinamik problemler için diferansiyel denklemlerin adım adım integrasyonlarına yönelik

* Yrd. Doç. Dr., İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: mfs@adiyaman.edu.tr
† Doç. Dr., İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: btemel@cu.edu.tr

pekçok çalışma bulunmaktadır [2-6].

Zamana bağlı diferansiyel denklemler, sayısal operasyon metodlardan biri olan Fourier dönüşüm yöntemi ile frekans uzayında çözülebilir. Dinamik sistemlere yönelik olarak, Fourier dönüşüm kullanılmak süretiyle farklı alanlardaki problemlerin çözümünün yapıldığı pek çok çalışma bulunmaktadır [7-10].

Benzer şekilde, elastik bir cismin davranışını idare eden zamana bağlı bir diferansiyel denklem, bir diğer sayısal operasyon metodu olan Laplace dönüşüm yöntemi yardımıyla da çözülebilmektedir. Bu yaklaşımda zaman parametresini ortadan kaldırmak için diferansiyel denkleme Laplace dönüşüşümü uygulanır. Ayrık Laplace dönüşümünün kullanılması halinde cismin veya yapının istenen bir noktasındaki dinamik davranışı, diğer noktalardakiler bulunmadan belirlenebilir. Klasik integrasyon formüllerinin kullanılması halinde ise belli bir noktadaki dinamik davranışı bulmak için diğer noktalardaki davranışlarının bulunmasına da ihtiyaç vardır. Zaman bağlı diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulamak süretiyle elde edilen lineer cebrik denklem takımı sayısal yöntemler yardımıyla kolayca çözülebilir. Bir dizi Laplace parametresi için Laplace uzayında elde edilen çözümler, Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm yöntemi yardımıyla zaman uzayına dönüştürülebilmektedir [11-14]. Temel ve Şahan [15] dik ve eğik açılı olarak tabakalanmış kalın plakların sönümlü davranışlarını sonlu elemanlar ve Laplace dönüşüm metodlarını birlikte kullanarak elde etmişlerdir.

Bu çalışmada başlangıç değer ve/veya sınır değer problemlerini idare eden hareket denklemlerinin Laplace ve Fourier uzayındaki çözümleri ve Newmark yöntemi ile zaman uzayındaki çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu sayısal çözümler kesin değerler ile karşılaştırılmıştır. Önerilen yöntemde, mekanik modelin davranışını idare eden diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanmış ve böylece zaman parametresi ortadan kaldırılarak elde edilmiş olan lineer cebrik denklemin/denklem takımının bir dizi Laplace parametresi için çözümleri elde edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi [17] kullanılmıştır. Bu çalışmada, zamana bağlı diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanarak ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar bulanabildiği literatürdeki çeşitli sayısal yöntemler ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

2. TERS LAPLACE DÖNÜŞÜM ALGORİTMASI İLE ÇÖZÜM METODU

Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin çözümleri Laplace uzayında gerçekleştirilmekte ve zaman uzayındaki çözümlere geçiş için "Fast Fourier Transform" alt-programına [16] dayalı Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm metodu uygulanmaktadır. Durbin'in Modifiye edilmiş ters dönüşüm alt-programı [17] aşağıda özetlenmiştir.

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\{\bar{F}(a)\} + Re\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(A(k) + i\,B(k)\right)e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)jk}\right\}\right] \tag{1}$$

$$A(k) = \sum_{l=0}^{L} Re\left\{\bar{F}\left(a + i\,(k + lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\} \tag{2}$$

$$B(k) = \sum_{l=0}^{L} Im\left\{\bar{F}\left(a + i\,(k + lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\} \tag{3}$$

Burada i kompleks sayı olup, $z_k = a+i(2\pi k/T)$ ise, k nıncı Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. T, çözüm aralığı olmak üzere, N adet eşit zaman aralığı $t_j=j\Delta t=jT/N$, (j=0,1,2,…. N-1) için $f(t_j)$ hesaplanmaktadır. (1) eşitliğinde parantez içindeki

$$\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(A(k)+i\,B(k)\right)e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)jk}\right\} \tag{4}$$

toplam ifadesi Fast Fourier Transform (FFT) [16] alt-programı yardımı ile hesaplanmaktadır. (1) ifadesi Narayanan'ın [18] önerdiği gibi aşağıdaki şekilde modifiye edilmiştir.

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\{\bar{F}(a)\}+Re\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(\bar{F}(z_k)L_k)e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)jk}\right\}\right] \tag{5}$$

Laplace uzayında hesaplanan $\overline{F(z_k)}$ teriminin her bir ayrık değeri Lancsoz (L_k) katsayısı ile çarpılarak çok daha etkin ters dönüşümler elde edilebilmektedir. Bu katsayı,

$$L_k \;:\; \begin{cases} = 1 & , \quad k=0 \\ = Sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\Big/\left(\frac{k\pi}{N}\right) & , \quad k>0 \end{cases} \tag{6}$$

olarak verilmektedir. İlgili kaynakta, kapalı Laplace ifadesi verilen bir fonksiyonun ters dönüşümleri yapılırken, $5\leq aT\leq 10$ aralığında iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir. Edindiğimiz deneyimlere göre, fiziksel problemlerin çözümlerinde ise, $aT=6$ seçilmesi halinde etkin sonuçlar elde edilmektedir.

Eğer $f(t)$ fonksiyonunun kapalı Laplace dönüşümü bilinmiyorsa, fonksiyonun $t_n=n\Delta t$ noktalarında elde edilen ayrık değerlerinin Laplace dönüşümü FFT alt-programı yardımı ile aşağıdaki şekilde yapılmaktadır.

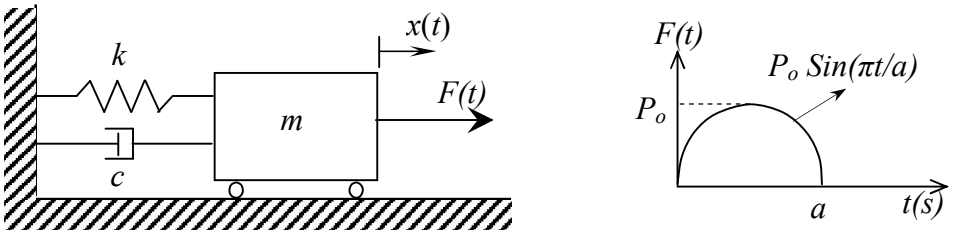
$$\bar{F}(z_k) = \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}[f(t_n)e^{-at_n}]\; e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \tag{7}$$

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde iki sayısal uygulama ele alınacaktır. İlk olarak bu çalışmada önerilen metodun doğruluğu, basit bir mekanik model üzerinde gösterilecektir. Ardından tabakalanmış kalın plak problemine ait Navier denklemleri çözülecektir.

3.1. Uygulama 1: Sinüzoidal İmpulsif Yük Etkisi Altındaki Basit Mekanik Model

Bu uygulamada sinüzoidal yük etkisi altındaki tek serbestlik dereceli mekanik bir modele ait diferansiyel denklem çözümleri çeşitli metodlar ile elde edilmiştir.



Şekil 1. (a) Mekanik Model **(b)** Dinamik Yük

Öncelikle mekanik modelin davranışını idare eden diferansiyel denkleme sırasıyla Laplace ve Forurier dönüşümleri uygulanacaktır. Zamandan bağımsız hale getirilen denklemin Laplace ve Forurier uzayında çözümleri yapıldıktan sonra, bunların ters dönüşümleri alınarak zaman uzayındaki çözümler bulunacaktır. Ayrıca, hareket denkleminin Newmark metodu kullanılarak zaman uzayındaki çözümleri de bulunacaktır. Bulunan sayısal sonuçlar, problemin analitik çözümü ile karşılaştırılacaktır.

Şekil 1.'de görülen sistemin davranışını idare eden hareket denklemi, kütleye göre normalize edilerek aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\ddot{x} + 2\omega^* \xi\, \dot{x} + (\omega^*)^2 x = F(t)/m \tag{8}$$

Burada *x,* zamana bağlı deplasmanı ifade etmektedir. $(\omega^*)^2 = k/m$ olup, k yay sabitini, m ise, sistem kütlesini göstermektedir. $\xi = c/2m\omega^*$, boyutsuz sönüm oranı ve c sönüm sabitidir. Sisteme etki eden dinamik yük fonksiyonu, $F(t)$ aşağıda verilmektedir.

$$F(t) = P_0 \,\mathrm{Sin}(\pi\, t/a) \tag{9}$$

İlk olarak (8) denkleminin Laplace dönüşümünü yazalım:

$$z^2 \bar{x}(z) - z\, x(0) - \dot{x}(0) + 2\xi\omega^* \,[z\, \bar{x}(z) - \, x(0)] + \, (\omega^*)^2 \bar{x}(z) = \bar{F}(z)/m \tag{10}$$

Burada z, Laplace parametresini, $x(0)$ ve $\dot{x}(0)$ ise başlangıç anındaki deplasman ve hızı göstermektedir. (10) denklemi, sıfır başlangıç şartları altında

$$z^2 \bar{x}(z) + 2\xi\omega^* \, z\, \bar{x}(z) + \, (\omega^*)^2 \bar{x}(z) = \bar{F}(z)/m \tag{11}$$

halini alır. (11) denklemi düzenirse, deplasmanın Laplace uzayındaki ifadesi elde edilir.

$$\bar{x}(z) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{z^2 + 2\xi\omega^* \, z \, + \, (\omega^*)^2}\right) \bar{F}(z) \tag{12}$$

Uygulanan sinüzoidal impulsif dinamik yük için a=π seçilirse, (9) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$F(t) = P_0 \,\mathrm{Sin}\, t \tag{13}$$

Bu yük fonksiyonun kapalı Laplace dönüşümü de aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\bar{F}(z) = \, P_0 \frac{1 + e^{-\pi z}}{1 + z^2} \tag{14}$$

İkinci olarak (8) denkleminin Fourier dönüşümünü elde edelim.

$$-\omega^2 x^F - (i\, \omega)\, x(0) - \dot{x}(0) + 2\xi\omega^* \,[(i\, \omega)\, x^F - x(0)] + \, (\omega^*)^2 x^F = F^F/m \tag{15}$$

Burada ω, Fourier parametresidir. (15) denklemi sıfır başlangıç şartları altında aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-\omega^2 x^F + 2\xi\omega^* \,(i\, \omega)\, x^F + \, (\omega^*)^2 x^F = F^F/m \tag{16}$$

(16) denklemi düzenlenirse, deplasmanın Fourier uzayındaki ifadesi elde edilir.

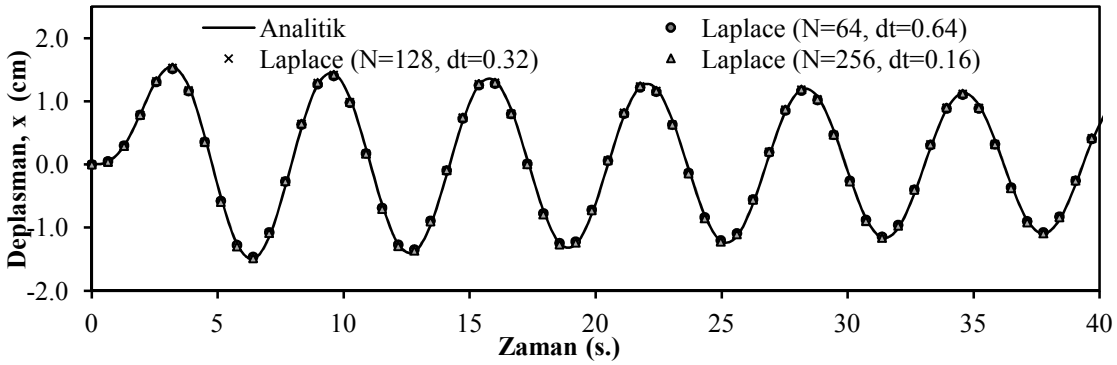
$$x^F(\omega) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{-\omega^2 + 2\xi\omega^* \,(i\, \omega) \, + \, (\omega^*)^2}\right) F^F \tag{17}$$

İmpulsif yük fonksiyonunun biz dizi ω değerleri için F^F, ayrık Fourier dönüşümü FFT alt-programı ile yapılabilmektedır.

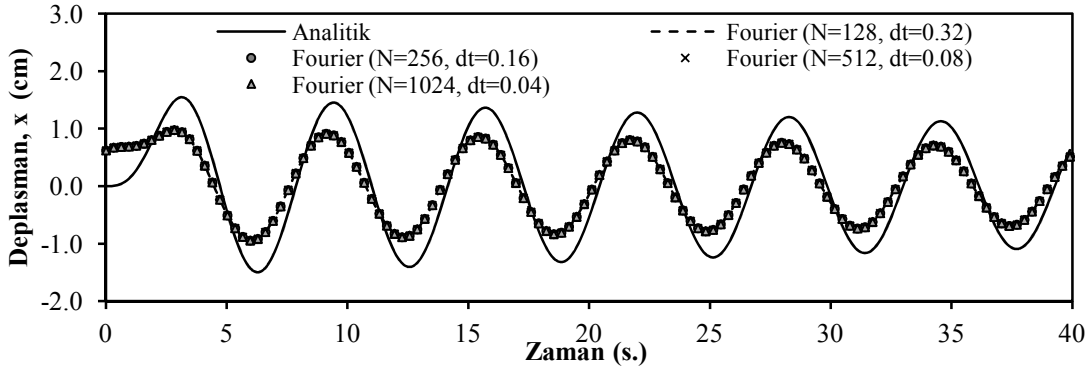
Bu problem için sistemin boyutsuz sönüm oranı ξ=0.01 olup, ω^*=1 rad/s, m=1 kg ve P_0=1 kg-cm/s^2 değerleri seçilmiştir. İlk olarak bir dizi Laplace parametresi için (12) ifadesinin ayrık değerleri oluşturulmuş ve zaman uzayındaki çözümlere Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm yöntemiyle geçilmiştir. Benzer şekilde, bir dizi Fourier parametresi için (17) eşitliğinin ayrık değerleri oluşturulup, bu ayrık değerlerin ters dönüşümleri ise FFT alt-programı yardımı ile yapılmıştır. Bu amaçla problemin dinamik analizini Laplace ve Fourier uzaylarında yapan bilgisayar programları yazılmıştır. Ayrıca, aynı problemin zaman uzayındaki analizleri Newmark methodu ile yapılmıştır. Elde edilen sayısal çözümlerin doğruluğu, problemin kesin sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Problemin hesaplama süresi (T=40.96 s.) sabit tutulup, çeşitli Laplace parametreleri (N=64,128, 256) ile birlikte çeşitli zaman artım miktarları (dt=0.64 s., 0.32 s., 0.16 s.) için elde edilen çözümleri ve problemin analilitik çözümleri Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekil 2. incelendiğinde, çeşitli Laplace parametreleri ve zaman artım miktarları için elde edilen tüm çözümlerin analitik değerler ile örtüştüğü görülmektedir.

Benzer şekilde problemin hesaplama süresi (T=40.96 s.) sabit tutulup, çeşitli Fourier parametreleri (N=128, 256, 512, 1024) ile birlikte zaman artım miktarları (dt=0.32 s., 0.16 s., 0.08 s., 0.04 s.) için elde edilen çözümlerin karşılaştırılması Şekil 3 üzerinde gösterilmiştir. Bu durumda elde elde edilen sonuçların analitik değerlere yakınsamadığı görülmektedir.



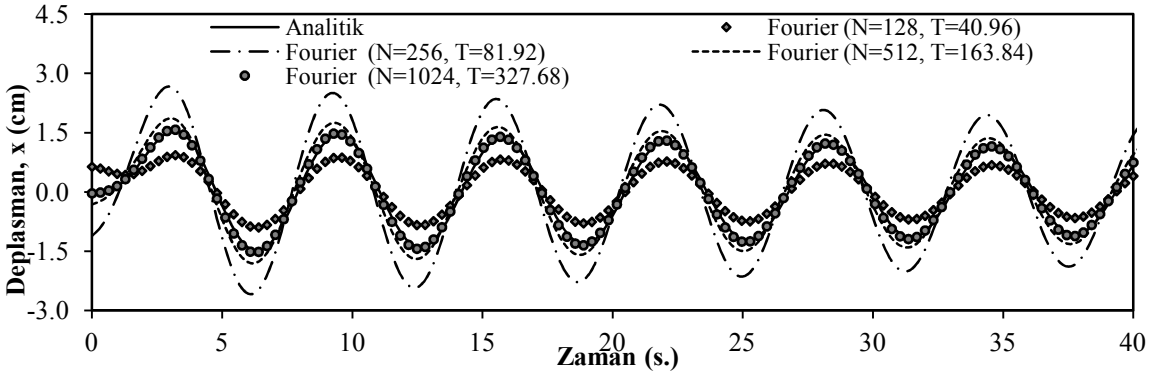
Şekil 2. Sistem deplasmanının zamanla değişimi



Şekil 3. Sistem deplasmanının zamanla değişimi

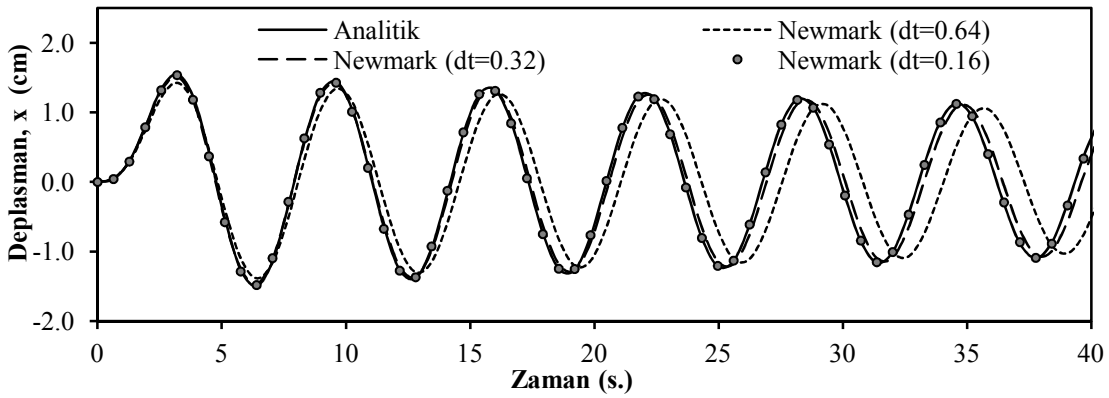
Hem hesaplama süresi hem de Fourier parametrelerinin (N=128, T=40.96 s.; N=256, T=81.92 s.; N=512, T=163.84 s.; N=1024, T=327.68 s.) birlikte arttırılması suretiyle elde edilen çözümlerin ilk 40 saniyelik kısmı Şekil 4 üzerinde gösterilmiştir. Bu durumda hesaplama süresi ile berlikte Fourier parametreleri artırıldıkça elde edilen çözümlerin analitik değerlere

yakınsadığı görülmüştür. Şekil 4. incelendiğinde, hesaplama süresinin T=327.68 s. ve Fourier parametresinin 1024 alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebildiği görülmektedir.



Şekil 4. Sistem deplasmanının zamanla değişimi (N=128, T=40.96 s.; N=256, T=81.92 s.; N=512, T=163.84 s.; N=1024, T=327.68 s.)

Ayrıca, problem farklı zaman artım miktarları (dt=0.64 s., 0.32 s., 0.16 s.) için Newmark metodu ile de çözülmüş ve sonuçlar analitik çözüm ile Şekil 5 üzerinde karşılaştırılmıştır. Newmark metodu ile analizlerde, bu problem için zaman artım miktarı dt=0.16 s. alındığında, ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir.



Şekil 5. Sistem deplasmanının zamanla değişimi

3.2. Uygulama 2: Dinamik Yük Etkisindeki Tabakalı Kompozit Plak

Bu uygulamada, dinamik yük etkisi altındaki tabakalı kompozit kalın plaklara ait Navier denklemlerinin Laplace uzayındaki çözümleri ilk kez bu çalışmada yapılacaktır. Bu amaçla, zamanla keyfi olarak değişen yükler altındaki ortotropik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların birinci mertebe kayma deformasyon teorisine (BKDT) göre Laplace uzayında analizlerini yapan bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Öncelikle sistemi idare eden hareket denklemi Navier yaklaşımı[19] kullanılarak elde edilmiştir. Ardından elde edilen hareket denklemine Laplace dönüşümü uygulanmış ve böylece dönüşmüş uzayda elde edilen lineer cebrik denklem takımının bir dizi Laplace parametresi için Gauss eliminasyon metodu ile çözümleri elde edilmiştir. Laplace uzayından zaman uzayına geçiş için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada tabakalı kompozit plak için elde edilen sayısal çözümler literatürde verilen yarı-analitik yöntemin[19] sonuçları ile karşılaştırılmıştır. İlgili kaynakta

tabakalanmış plakların BKDT'ne göre Navier çözümleri için hareket denklemleri analitik olarak elde edilmiş; ancak bu denklemlerin integrasyonları ise Newmark metodu ile sayısal olarak yapılmıştır.

Dört kenarından basit mesnetlenmiş, dik açılı olarak tabakalanmış kompozit kalın plaklara ait Navier denklemleri [19] aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{m}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & 0 & \hat{s}_{14} & \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & 0 & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{25} \\ 0 & 0 & \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{35} \\ \hat{s}_{14} & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{44} & \hat{s}_{45} \\ \hat{s}_{15} & \hat{s}_{25} & \hat{s}_{35} & \hat{s}_{45} & \hat{s}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Bu denklemlere ait ayrıntılar ilgili kaynakta verilmektedir. (18) denklemi basit olarak matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left[\hat{M}\right]\{\ddot{X}_{mn}\} + \left[\hat{K}\right]\{X_{mn}\} = \{F_{mn}\} \quad (19)$$

Zamana bağlı bu hareket denkemine Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki lineer cebrik denklem elde edilir.

$$[\overline{D}]\{\bar{X}_{mn}\} = \{\bar{F}_{mn}\} + \{\bar{F}_0\} \quad (20)$$

Burada $[\overline{D}]$, Laplace uzayında dinamik rijitlik matrisi, $\{\bar{X}_{mn}\}$ ve $\{\bar{F}_{mn}\}$ ise, sırasıyla sistem düğüm deplasman ve yük vektörlerinin Laplace dönüşümleridir. $\{\bar{F}_0\}$ ise başlangıç koşulları nedeniyle yük vektörüne gelen ilave terimlerdir. Dinamik rijitlik matrisi ve yük vektörüne gelen katkı sırasıyla,

$$[\overline{D}] = \left[\hat{K}\right] + z^2\left[\hat{M}\right] \quad (21)$$

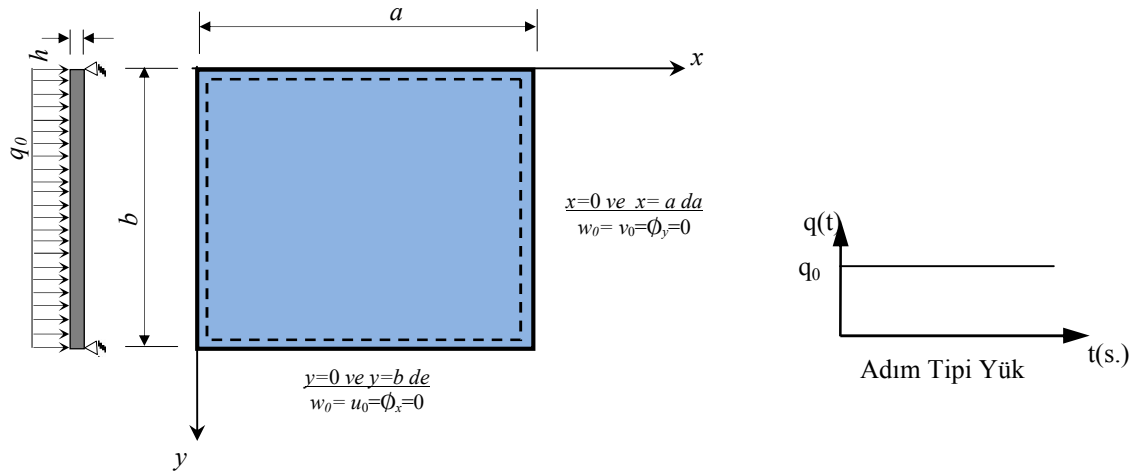
$$\{\bar{F}_0\} = z\left[\hat{M}\right]\{X(0)\} + \left[\hat{M}\right]\{\dot{X}(0)\} \quad (22)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada z, Laplace dönüşüm parametresi olup, $\{X(0)\}$ ve $\{\dot{X}(0)\}$ ise, başlangıç deplasman ve hız vektörlerini göstermektedir. Bu çalışmada başlangıç koşulları sıfır olarak dikkate alınmaktadır.

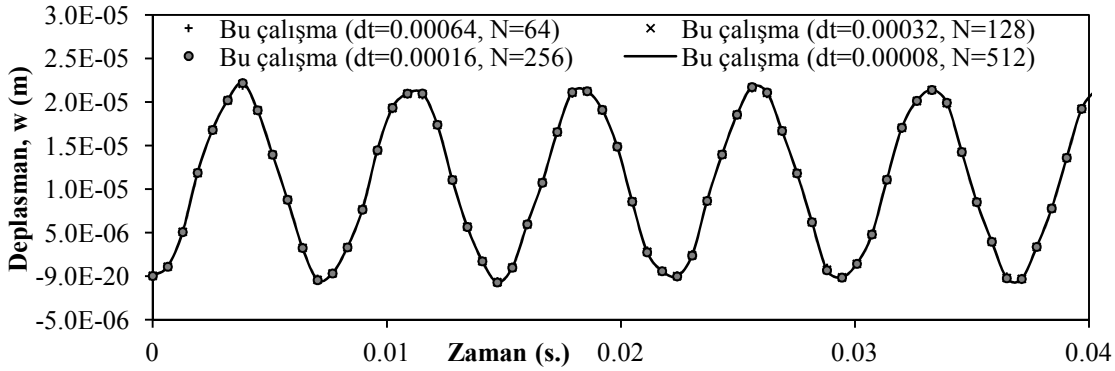
Bu uygulamada, tabakalı kompozit plağın oluşturan tüm tabakalar için aynı kalınlık, yoğunluk ve aynı ortotropik özelliklere sahip lineer elastik bir malzeme kullanılmıştır. Plak geometrisi ve uygulanan dinamik yük tipi Şekil 6.'da gösterilmiştir. Malzeme özellikleri: $E_1=25\text{x}10^9$ N/m^2, $E_2=E_1/25$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\nu=0.25$, Geometrik özellikler: a=b=1 m, h=0.1 m, a/b=1ve a/h=10 seçilmiştir. Kütlesel yoğunluk, $\rho=2000$ kg/m^3 ve düzgün yayılı yükün şiddeti, $q_0=1000$ N/m^2 olarak alınmıştır.

Kenarlarından basit mesnetlenmiş, $(0^o/90^o)_2$ dizilimli kompozit plağa adım tipi bir fonksiyona sahip dinamik yük etki etmektedir. Sınır şartları Şekil 6.'da gösterilmiştir. Burada u_0 ve v_0 orta düzlemin x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri, w_0 ise plak orta düzlemine dik yer değiştirmesidir. $\emptyset_x$ ve $\emptyset_y$ ise, sırasıyla, y ve x eksenleri etrafındaki dönmeler ($\emptyset_x=\partial u/\partial z$, $\emptyset_y=\partial v/\partial z$) olarak tarif edilmektedir.

Bu çalışmada önerilen yöntem ile tabakalı plak için elde edilen çözümler, Newmark yöntemi ile zaman uzayında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada çeşitli zaman artım miktarları için bulunan çözümler Şekil 7'de gösterilmiştir.

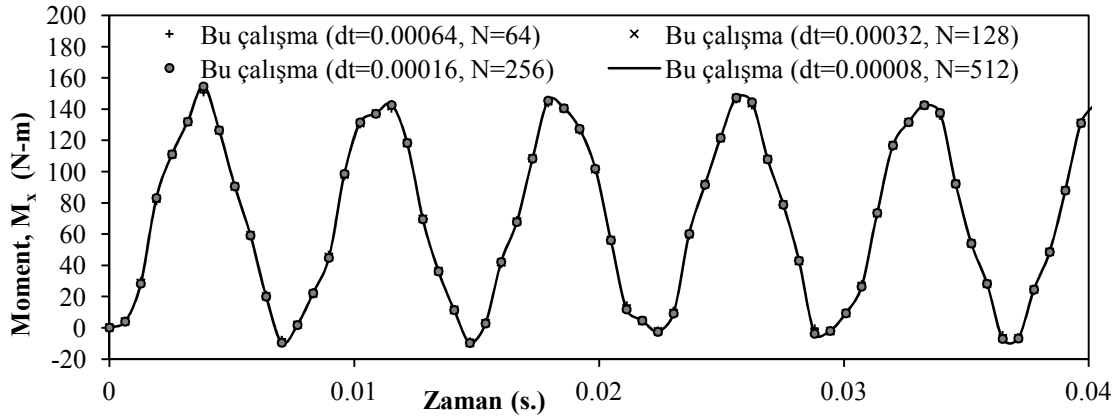


Şekil 6. (a) Düzgün yayılı yükü plak geometrisi, **(b)** Dinamik Yük



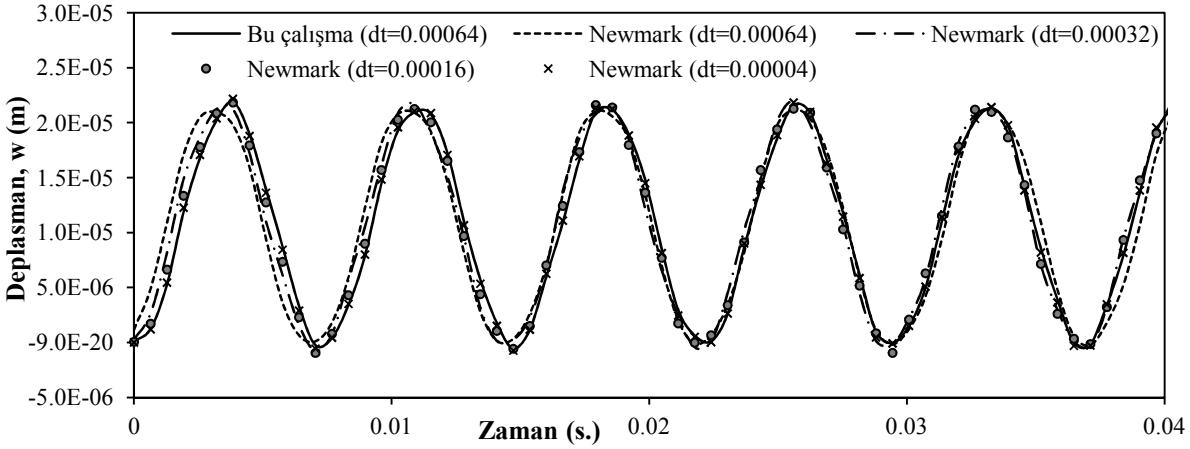
Şekil 7. Plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi

Grafik incelendiğinde, tabakalı plak için farklı zaman artım miktarları (dt=0.00008 s., 0.00016 s., 0.00032 s., 0.00064 s.) ve Laplace parametreleri (N=64, 128, 256, 512) için elde edilen çözümlerin birbiri ile çakıştığı görülmektedir. Tabakalı plağın orta noktasındaki M_x momentinin zamanla değişimi Şekil 8.'de gösterilmiştir. Momentlere ait grafikler incelendiğinde, çökmeye benzer şekilde farklı zaman artım miktarları için elde edilen çözümlerin birbiri ile çakıştığı görülmektedir.

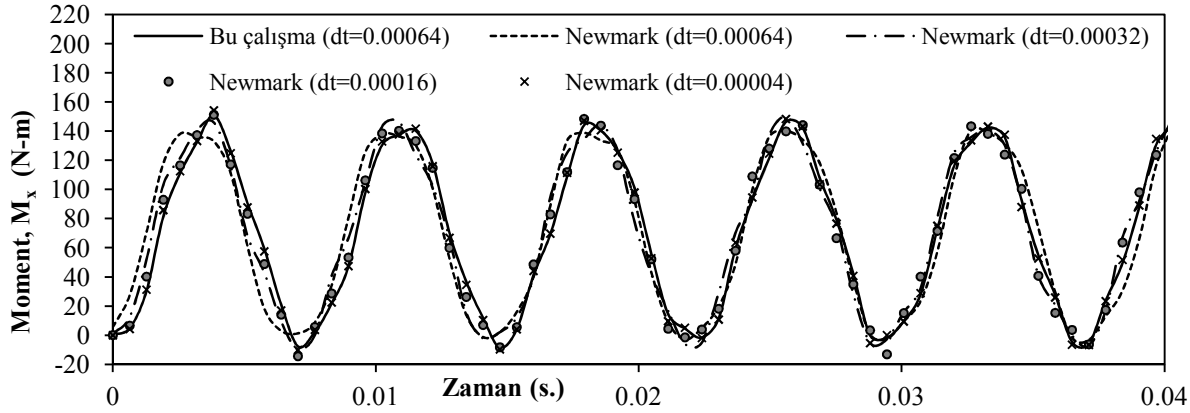


Şekil 8. Plak ortasındaki M_x momentinin zamanla değişimi

(18) eşitliği ile verilen Navier denklemlerin Newmark metodu kullanılarak farklı zaman artımları için elde edilen çökme değerleri Şekil 9'da moment değerleri ise Şekil 10'da gösterilmektedir. Şekiller incelendiğinde, bu problem için Newmark yöntemi ile 0.00004 s. ve daha küçük zaman artım miktarları alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir. Genel olarak bu çalışmada önerilen yöntem ile elde edilen çözümler, [11]-[13] ve [15] çalışmalarında da olduğu gibi, Newmark yöntemi ile elde edilen çözümlere göre çok daha tutarlı ve etkindir.



Şekil 9. Plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 10. Plak ortasındaki M_x momentinin zamanla değişimi

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada başlangıç değer ve/veya sınır değer problemlerini idare eden hareket denklemlerinin Laplace ve Fourier uzayındaki çözümleri ve Newmark yöntemi ile zaman uzayındaki çözümleri elde edilmiştir. Önerilen yöntemde, mekanik modelin davranışını idare eden diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanmış ve böylece zaman parametresi ortadan kaldırılmış olan lineer cebrik denklemin/denklem takımının bir dizi Laplace parametresi için çözümleri elde edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada önerilen model esas alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Önerilen yöntemde elastik bir cismin davranışını idare eden zamana bağlı bir diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanarak zaman parametresi ortadan kaldırılmaktadır.

Böylece zamandan bağımsız hale getirilen lineer cebrik denklem/denklem takımı sayısal metodlar ile çok daha etkin ve basit olarak çözülebilmektedir.

Grafiklerin incelenmesinden Newmark metodu ile zaman uzayında elde edilen çözümlerin tutarlılığının doğru zaman artım miktarının seçilmesine bağlı olduğu görülmüştür. Önerilen yöntemde ise, kaba zaman artım miktarları kullanılarak çok az parametre ile kesin çözümler ile örtüşen sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu nedenle önerilen yöntemin diğer klasik adım adım integrasyon yöntemlerine göre çok daha etkin olduğu açıkça görülmektedir.

Ayrıca, Fourier uzayındaki çözümlerin doğruluğu hesaplama süresi ile birlikte Fourier parametresinin doğru seçilmesine bağlıdır. Fourier uzayındaki çözümlerin kesin sonuçlara yakınsaması hem çözüm aralığının hem de hesaplama süresinin birlikte artırılması ile gerçekleşmektedir. Bu nedenle uygun bir çözüm aralığının ve Fourier parametre sayısının seçilmesi büyük önem taşımaktadır. Önerilen yöntemde ise, çözüm aralığı sabit tutulmasına rağmen, kaba zaman artım miktarları ile çok az parametre kullanılarak kesin çözümler ile örtüşen sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu durum, bu çalışmada önerilen yöntemin Fourier dönüşüm yöntemine göre çok daha etkin olduğunu göstermektedir.

Fourier uzayında çözüm yapabilmek için, hem sistem davranışının hem de yük fonksiyonunun sonsuzda sıfıra gitmesi gerekmektedir. Laplace uzayında ise böyle bir zorunluluk bulunmamaktadır.

Bu çalışmada, zamana bağlı diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanması ve ardından Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi uygulanması ile oldukça etkin ve doğru sonuçlar bulanabildiği literatürdeki çeşitli sayısal yöntemler ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Bathe K.J, Wilson E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1976

[2] Chang S.Y., "A technique for overcoming load discontinuity in using Newmark method", Journal of Sound and Vibration 304 (2007) 556–569

[3] Mata P., Oller S., Barbat A.H., "Dynamic analysis of beam structures considering geometric and constitutive nonlinearity", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 857–878

[4] Khalili S.M.R., Botshekanan D.M., "Shariyat M., Modeling and transient dynamic analysis of pseudoelastic SMA hybrid composite beam", Applied Mathematics and Computation 219 (2013) 9762–9782

[5] Mohebpour S.R., Fiouz A.R., Ahmadzadeh A.A., "Dynamic investigation of laminated composite beams with shear and rotary inertia effect subjected to the moving oscillators using FEM", Composite Structures 93 (2011) 1118–1126

[6] Heitzex J., "Dynamic interaction of a plate and an impactor", Computers & Structures Vol. 60, No. 5, pp. 837-848, 1996

[7] Huang Y.M., Yang M.L., "Dynamic analysis of a rotating beam subjected to repeating axial and transverse forces for simulating a lathing process", International Journal of Mechanical Sciences 51 (2009) 256–268

[8] Lee U., Oh H., "Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension", International Journal of Solids and Structures 42 (2005) 2381–2398

[9] Park H. W., Kim E.J., Lim K.L., Sohn H., "Spectral element formulation for dynamic analysis of a coupled piezoelectric wafer and beam system", Computers and Structures 88 (2010) 567–580

[10] Kim S.M., McCullough B.F., "Dynamic response of plate on viscous Winkler foundation to moving loads of varying amplitude", Engineering Structures 25 (2003) 1179–1188

[11] Temel B., "Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads", Int. J. Solids Struct. 2003;41:1605–1624.

[12] Temel B., Şahan M.F., "Transient analysis of orthotropic viscoelastic thick plates in the Laplace domain", Eur. J. Mech. A-Solid. 2013;37:96–105.

[13] Şahan M.F., "Viskoelastik kompozit plakların laplace uzayında dinamik analizi". Doktora Tezi, Adana: Çukurova Üniversitesi, 2012.

[14] Pekel H., Keleş İ., Temel B., Tütüncü N., "Transient response of FGM pressure vessels", In: Springer proceedings in Physics 139. Vibration problems ICOVP, 315–320, 2011.

[15] Temel B., Şahan M.F., "An alternative solution method for the damped response of laminated Mindlin plates", Composites: Part B. 2013;47:107–117.

[16] Brigham E.O., "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[17] Durbin F., "Numerical inversion of Laplace transforms: An Efficient improvement to Dubner and Abate's method". Comput. J. 1974;17:371–376.

[18] Narayanan G.V., "Numerical operational methods in structural dynamics", Ph.D. thesis, Minneapolis: University of Minnesota, 1979.

[19] Reddy J.N., "Mechanics of laminated composite plate and shells: theory and analysis", Second ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.