İdempotent Doğuraylı Dönüşüm Yarıgrupları

Leyla Bugay
ltanguler@cu.edu.tr
Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü
Doktora
2010913070

Nisan, 2011

Yarıgrup Teorisi Nedir?

Yarıgrup teorisi cebirin en temel dallarından biridir. Yarıgrup terimi ilk olarak 1904 yılında ortaya çıkmış 1950'li yılların sonunda da modern cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir.

Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ile olan bağlantısı yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Neden Bu Konuyu Seçtim?

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Dolayısıyla doğuray kümesi bulma problemi oldukça önem kazanmıştır.

Ayrıca, her S yarıgrubu $X = S^1$ olmak üzere X üzerindeki dönüşümler yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubuna izomorf olduğundan T_X dönüşümler yarıgrubunun altyarıgruplarının doğuray kümelerini bulma problemi yarıgrup teorisinde başlı başına bir araştırma konusu olmuştur.

Neden Bu Konuyu Seçtim?

Bende sizlere $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ üzerindeki dönüşümler yarıgrubu T_n nin bir altyarıgubu olan ve **singüler dönüşümler yarıgrubu** olarak adlandırılan $ST_n = T_n \backslash S_n$ yarıgrubunun bir takım idempotent elemanları tarafından doğurulduğunu göstermek amacıyla bu sunumu hazırlamış bulunmaktayım.

Tanım

S boş olmayan bir küme olmak üzere $S \times S$ den S ye tanımlı bir "μ" fonksiyonuna S üzerinde bir **ikili işlem** *denir. Eğer S üzerinde böyle bir ikili işlem var ve bu ikili işlem birleşme özelliğine sahip ise (S, μ) ikilisine bir* **yarıgrup** *denir.*

Biz kolaylık olsun diye $(x, y) \in S \times S$ için $\mu(x, y) = x\mu y = xy$ şeklinde göstereceğiz. Bu durumda birleşme özelliği

$$\forall x, y, z \in S \text{ için } x(yz) = (xy)z$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım

S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde $e \in S$ varsa bu e elemanına S nin **birim elemanı** *ve bu durumda S ye de bir* **monoid** *denir.*

Biz birim elemanı genellikle 1 ile göstereceğiz.

Yarıgruplarda Temel Tanımlar

Tanım

S bir yarıgrup olsun.

$$S^1 = \begin{cases} S & ; S \textit{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\} & ; S \textit{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin

$$\forall x, y \in S^1 \textit{ için } xy = \begin{cases} xy & ; x \neq 1, \ y \neq 1 \textit{ ise} \\ x & ; y = 1 \textit{ ise} \\ y & ; x = 1 \textit{ ise} \\ 1 & ; x = 1, \ y = 1 \textit{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile bir monoid olduğu açıktır. Bu monoide S **ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** *denir.*

Tanım

S bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun. Eğer $x^2 = xx = x$ oluyorsa x e S nin bir **idempotent elemanı** *denir ve S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.*

X boş olmayan bir küme olmak üzere $X \times X$ in boş olmayan her alt kümesine X **üzerinde bir bağıntı** dendiğini biliyoruz. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini $B(X)$ ile gösterelim.

Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\alpha, \beta \in B(X)$ olmak üzere $B(X)$ üzerinde bir çarpma işlemi

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta \}$$

şeklinde tanımlansın. $B(X)$ bu işlemle bir yarıgruptur ve bu yarıgruba **bağıntılar yarıgrubu** *denir.*

Bağıntı ve Denklik

Tanım

$\beta \in B(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\beta &= \{x \in X : \exists y \in X \ , \ (x,y) \in \beta\}; \\ x\beta &= \{y \in X : (x,y) \in \beta\}; \\ \operatorname{im}\beta &= \{y \in X : \exists x \in X \ , \ (x,y) \in \beta\} \ \textit{ve} \\ y\beta^{-1} &= \{x \in X : (x,y) \in \beta\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla β **bağıntısının tanım kümesi**, *$x \in X$* **in** *β* **altındaki görüntü kümesi**, *β* **bağıntısının görüntü kümesi** *ve $y \in X$* **in ters görüntüsü** *denir.*

X boş olmayan bir küme ve β, X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $1_X = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq \beta$ ise β ya **yansımalı bağıntı**;
- $\beta^{-1} = \beta$ ise β ya **simetrik bağıntı**;
- $\beta \circ \beta \subseteq \beta$ ise β ya **geçişmeli bağıntı**

denir. Eğer β yansımalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise β ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** dendiğini biliyoruz.

Tanım

S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq I \subseteq S$ olsun.Eğer $SI \subseteq I$ ise I ya S nin bir **sol ideali** *ve eğer $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir* **sağ ideali** *denir. Eğer I, S nin hem sol hemde sağ ideali ise I ya S nin bir* **ideali** *denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.*

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a elemanını içeren en küçük sol ve sağ idealleri sırasıyla

$$S^1 a = Sa \cup \{a\} = \left\{xa : x \in S^1\right\}$$

$$aS^1 = aS \cup \{a\} = \left\{ay : y \in S^1\right\}$$

dir.

Green Denklik Bağıntıları

Tanım

S yarıgrubu üzerinde tanımlanan

$$\mathbf{L} = \{(a,b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathbf{R} = \{(a,b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$

bağıntıları birer denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntılarına sırasıyla **sol green ($\mathbf{L}-$green)** *ve* **sağ green ($\mathbf{R}-$green) bağıntısı** *denir.*

Tanım

S yarıgrubu üzerinde sol-green denklik bağıntısı $\mathbf{L}$ *ve sağ-green denklik bağıntısı* $\mathbf{R}$ *yi içeren en küçük denklik bağıntısına* **D-green bağıntısı** *denir ve kolayca gösterilebilir ki* $\mathbf{D} = \mathbf{L} \circ \mathbf{R}$ *dir.*

Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\beta \in B(X)$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } |x\beta| = 1$$

ise β ya X üzerinde bir **dönüşüm (fonksiyon)** *denir.*

X kümesi üzerinde tanımlı tüm dönüşümlerin oluşturduğu küme, bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba X üzerindeki **(tüm) dönüşümler yarıgrubu** *denir ve bu yarıgrup T_X ile gösterilir.*

Eğer $X = X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ şeklinde n elemanlı sonlu bir küme ise X_n üzerindeki (tüm) dönüşümler yarıgrubu T_n ile gösterilir.

Bu durumda bir $\beta \in T_n$ dönüşümünü

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ (1)\,\beta & (2)\,\beta & \ldots & (n)\,\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade ederiz.

Biliyoruz ki herhangi bir $\beta \in T_n$ dönüşümü verildiğinde $A \subseteq X_n$ olmak üzere $\forall a \in A$ için

$$(a)\widehat{\beta} = (a)\beta$$

şeklinde tanımlanan $\widehat{\beta} : A \to X_n$ dönüşümüne β nın A kümesine **kısıtlanışı** diyoruz ve bunu $\beta\,|_A$ ile gösteriyoruz.

Benzer şekilde $X_n \subseteq A$ olmak üzere $\forall a \in A$ için

$$(a)\overset{*}{\beta} = \begin{cases} (a)\beta & ; a \in X_n \ \textit{ise} \\ (a)\overset{*}{\beta} & ; a \notin X_n \ \textit{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\overset{*}{\beta} : A \to A$ dönüşümüne de β nın A kümesine **genişlemesi** diyoruz.

Önerme

$\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere $(\alpha, \beta) \in \mathbf{D}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$|\operatorname{im}\alpha| = |\operatorname{im}\beta|$$

olmasıdır.

İspat: Ganyushkin and Mazorchuk (2009), Teorem 4.5.1'e bakınız.

■

Önerme

$\alpha \in T_n$ dönüşümünün bir **idempotent eleman** *olması için gerek ve yeter koşul*

$$\alpha \mid_{\operatorname{im}\alpha} = 1_{\operatorname{im}\alpha}$$

olmasıdır. Burada $1_{\operatorname{im}\alpha}$, $\forall x \in \operatorname{im}\alpha$ için

$$(x)1_{\operatorname{im}\alpha} = x$$

şeklinde tanımlanan birim dönüşümdür.

İspat: Ganyushkin and Mazorchuk (2009), Teorem 2.7.2'ye bakınız. ■

Doğuray Kümesi

Tanım

S bir yarıgrup ve X boş olmayan bir küme olmak üzere S nin X i içeren en küçük altyarıgrubuna X **tarafından doğurulan yarıgrup** *denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.*

Kolayca gösterilebilir ki

$$\langle X \rangle = \left\{ x_1 x_2 \ldots x_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \; n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

dır. Yani X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

Singüler Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım

*X_n üzerindeki (tüm) bire-bir ve örten dönüşümlerin (permutasyonların) kümesi T_n nin bir altyarıgrubu olup bu yarıgruba $n-$***inci simetrik grup** *denir ve S_n ile gösterilir.*

Biz ST_n ile gösterilen ve **singüler dönüşümler yarıgrubu** olarak adlandırılan $T_n \backslash S_n$ yarıgrubunu ele alacağız.

Önerme

$K^*_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\operatorname{im}\alpha| = r\}$ *olarak tanımlanıyor olmak üzere bir* $X \subseteq ST_n$ *için* $K^*_{n,n-1} \subseteq \langle X \rangle$ *ise* $ST_n = \langle X \rangle$ *dir.*

T_n nin **D**-green bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarını düşünelim.

Daha önceki bir önermeden dolayı T_n nin **D**-green bağıntısına göre n tane denklik sınıfı olduğu açıktır. Bunlar $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\mathbf{D}_{n,k} = \{\alpha \in T_n : |\operatorname{im}\alpha| = k\}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki önermeden de kolayca görülüyor ki ST_n nin tüm elemanlarını doğurabilmek için $\mathbf{D}_{n,n-1}$ in tüm elemanlarını doğuran bir küme bulmak yeterlidir.

Şimdi Howie(1978) tarafından daha önce ispatlanmış olan ve anlaşılmasının daha basit olduğunu düşündüğüm tümevarım yöntemiyle yeniden ispatladığım aşağıdaki teoremi inceleyelim.

Teorem

$n \geq 2$ olmak üzere $\forall \alpha \in \mathbf{D}_{n,n-1}$, içerisindeki idempotentlerin yani $E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilirdir.

İspat: $n = 2$ için

$$\mathbf{D}_{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} = E\left(\mathbf{D}_{2,1}\right)$$

olup iddia doğrudur.

$n > 2$ olmak üzere $\forall \alpha \in \mathbf{D}_{n,n-1}$ in $E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğunu kabul edelim.

Şimdi, T_{n+1} yarıgrubunun $\mathbf{D}_{n+1,n}$ green denklik sınıfını ve bu sınıftaki idempotent elemanları düşünelim.

$$A = \{\alpha \in E(\mathbf{D}_{n+1,n}) : (n+1)\alpha = n+1;\ \forall x \in X_n,\ (x)\alpha \in X_n\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ 1 & n+1 & 3 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}, \\ \\ \dots, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 & n+1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$C=\left\{\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix},\dots,\\[2ex] \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n-1\end{pmatrix},\\[2ex] \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

olmak üzere $E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ bu üç kümenin birleşimidir.

Burada $\alpha \in A$ için $\alpha\,|_{X_n} = \widehat{\alpha}$ dersek $\widehat{\alpha} \in E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ olduğu açıktır.

Ayrıca $\beta \in E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ için de $\overset{*}{\beta} : X_{n+1} \to X_{n+1}$ dönüşümünü $\forall x \in X_{n+1}$ için

$$(x)\,\overset{*}{\beta} = \begin{cases} (x)\,\beta & ; x \in X_n \ \textit{ise} \\ n+1 & ; x = n+1 \ \textit{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $\overset{*}{\beta} \in A$ olur. Bu durumda $\forall \alpha \in A$ için $(\overset{*}{\widehat{\alpha}}) = \alpha$ ve $\forall \beta \in E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ için $\widehat{\left(\overset{*}{\beta}\right)} = \beta$ olup $\widehat{\ }: A \to E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ ve $* : E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right) \to A$ dönüşümleri bire-bir, örtendirler.

$\alpha \in \mathbf{D}_{n+1,n}$ olsun. Bu durumda $|\operatorname{im}\alpha| = n$ olur. Dolayısıyla X_n nin sadece iki elemanının görüntüleri aynıdır. Genelliği bozmaksızın görüntüleri aynı olan bu iki eleman X_n nin elemanı ise bu iki elemanın 1 ile 2 olduğunu ve eğer bu iki elemandan biri X_n nin elemanı diğeri de $n+1$ ise X_n deki bu elemanın 1 olduğunu kabul edelim.

O halde genel olarak

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \\ (1)\,\alpha & (2)\,\alpha & (3)\,\alpha & \ldots & (n)\,\alpha & (n+1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde olan bir $\alpha \in \mathbf{D}_{n+1,n}$ dönüşümünde $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 0, 1, 2$ oluşuna, görüntüleri aynı olan iki elemanın durumuna ve $(n+1)\,\alpha$ ya göre 7 temel durum söz konusudur.

Bunlar

1. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 0$ ve $(1)\,\alpha = (2)\,\alpha$
2. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 0$ ve $(1)\,\alpha = (n+1)\,\alpha$
3. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 1,\ (1)\,\alpha = (2)\,\alpha$ ve $(n+1)\,\alpha = n+1$
4. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 1,\ (1)\,\alpha = (2)\,\alpha$ ve $(n+1)\,\alpha \neq n+1$
5. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 1$ ve $(1)\,\alpha = (n+1)\,\alpha$
6. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 2$ ve $(1)\,\alpha = (n+1)\,\alpha = n+1$
7. $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 2$ ve $(1)\,\alpha = (2)\,\alpha = n+1$

dır. Bunları tek tek inceleyelim.

1. durumda: $\forall x \in X_{n+1}$ için $(x)\,\alpha \in X_n$ ve $(1)\,\alpha = (2)\,\alpha$ olup

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \\ (1)\,\alpha & (1)\,\alpha & (3)\,\alpha & \ldots & (n)\,\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & (n+1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

alınırsa $\beta\gamma = \alpha$ olur.

2. durumda: $\forall x \in X_{n+1}$ için $(x)\alpha \in X_n$ ve $(1)\alpha = (n+1)\alpha$ olup

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ (2)\alpha & (2)\alpha & (3)\alpha & \dots & (n)\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & (n+1)\alpha \end{pmatrix}$$

alınırsa $\gamma\beta\lambda = \alpha$ olur.

3. durumda: $\forall x \in X_n$ için $(x)\alpha \in X_n$, $(1)\alpha = (2)\alpha$ ve $(n+1)\alpha = n+1$ olup $\alpha = \beta$ alalım.

4. durumda: $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 1$, $(1)\,\alpha = (2)\,\alpha$ ve $(n+1)\,\alpha \neq n+1$ olup bir tek $3 \leq i \leq n$ için $(i)\,\alpha = n+1$ ve α nın görüntü kümesinde olmayan tek eleman $z \in X_n$ dir. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n & n+1 \\ (1)\,\alpha & (1)\,\alpha & (3)\,\alpha & \dots & (i)\,\alpha & \dots & (n)\,\alpha & (n+1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde olup

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n & n+1 \\ (1)\,\alpha & (1)\,\alpha & (3)\,\alpha & \dots & z & \dots & (n)\,\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & z & \dots & n & n+1 \\ 1 & \dots & z & \dots & n & (n+1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & z-1 & z & z+1 & \dots & n & n+1 \\ 1 & \dots & z-1 & n+1 & z+1 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\beta\gamma\lambda = \alpha$ olur.

5. durumda: $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 1$ ve $(1)\,\alpha = (n+1)\,\alpha$ olup bir tek $2 \leq i \leq n$ için $(i)\,\alpha = n+1$, α nın görüntü kümesinde olmayan tek eleman $z \in X_n$ ve $i \neq 1$ dir. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n & n+1 \\ (1)\,\alpha & (2)\,\alpha & (3)\,\alpha & \dots & (i)\,\alpha & \dots & (n)\,\alpha & (1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde olup

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & i & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n & n+1 \\ z & (2)\,\alpha & \dots & z & \dots & (n)\,\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & n+1 \\ 1 & \dots & n & (1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & \dots & z-1 & z & z+1 & \dots & n & n+1 \\ 1 & \dots & z-1 & n+1 & z+1 & \dots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\gamma\beta\lambda\mu = \alpha$ olur.

6. durumda: $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 2$ ve $(1)\,\alpha = (n+1)\,\alpha = n+1$ olup $(2)\,\alpha, \ldots, (n)\,\alpha \in X_n$ olur. Bu durumda

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 \\ n+1 & 2 & \ldots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 \\ (2)\,\alpha & (2)\,\alpha & \ldots & (n)\,\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\gamma\beta = \alpha$ olur.

7. durumda: $\left|(n+1)\,\alpha^{-1}\right| = 2$ ve $(1)\,\alpha = (2)\,\alpha = n+1$ olup $(3)\,\alpha, \ldots, (n+1)\,\alpha \in X_n$ ve α nın görüntü kümesinde olmayan tek eleman $z \in X_n$ olur.Bu durumda

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \\ z & z & (3)\,\alpha & \ldots & (n)\,\alpha & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & z & \ldots & n & n+1 \\ 1 & \ldots & z & \ldots & n & (n+1)\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & z-1 & z & z+1 & \ldots & n & n+1 \\ 1 & \ldots & z-1 & n+1 & z+1 & \ldots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\beta\gamma\lambda = \alpha$ olur., Her durumda da $\gamma, \lambda, \mu \in B \cup C$ ve $\beta \in \mathbf{D}_{n+1,n}$ olduğu kolayca görülüyor. $\beta\mid_{X_n} \in \mathbf{D}_{n,n-1}$ olup tümevarım hipotezinden dolayı $\beta\mid_{X_n}$, $E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilirdir. O halde $\beta\mid_{X_n} = \beta_1 \cdots \beta_k$ olacak şekilde $\beta_1, \ldots, \beta_k \in E\left(\mathbf{D}_{n,n-1}\right)$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ var olup $\beta = \overset{*}{\beta}_1 \cdots \overset{*}{\beta}_k$ olur. Burada $\overset{*}{\beta}_1, \ldots, \overset{*}{\beta}_k \in A$ olup yukarıdaki durumlarda yerlerine yazılırsa α nın $E\left(\mathbf{D}_{n+1,n}\right)$ in elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabildiği görülür. ■

Howie 1978'de yaptığı çalışmada daha da özel olarak ST_n i üretmek için $\frac{n(n-1)}{2}$ tane idempotent elemanın yeterli olduğunu da göstermiştir.

KAYNAKLAR

1. Howie, J.M.,1995.Fundamentals of Semigroup Theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, New York, 351s.
2. Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V., 2009. classical Finite Transformations Semigroups, An introduction Algebra and Applications. 9. Springer-Verlag London, Ltd., London, 314s.
3. Howie, J.M., 1978. Idempotent Generators in Finite Full Transformations Semigroups. Mathematical Institute, University of St Andrews. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 81A, 317-323.