ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Fatma Feyza GÜNDÜZ

AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE ALTERNATİF BİR ANALİTİK YAKLAŞIM

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2016

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE ALTERNATİF BİR ANALİTİK YAKLAŞIM

Fatma Feyza GÜNDÜZ

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2016 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

…….....	…….....	……..
Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ	Prof. Dr. Aşır GENÇ	Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

.....	.....
Doç. Dr. Gülsen KIRAL	Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE ALTERNATİF BİR ANALİTİK YAKLAŞIM

Fatma Feyza GÜNDÜZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Yıl: 2016, Sayfa: 91
Jüri : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Aşır GENÇ
: Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
: Doç. Dr. Gülsen KIRAL
: Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN

Bu tezde, regresyonda pozitif yanıt değişkenini modellemede üslendirilmiş Fréchet dağılımı kullanılmış ve regresyon parametreleriyle açıklayıcı değişkenler arasında ilişki kuran farklı iki parametrizasyon önerilmiştir. Sonrasında parametrelerin maksimum olabilirlik tahmini hem teorik olarak hem de deneysel olarak ele alınmıştır. Üslendirilmiş Fréchet dağılımı için belli risk ölçülerinin kapalı formda ifadeleri elde edilmiştir. Son olarak ise önerilen bu model motosiklet tazminat verisine uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Üslendirilmiş Fréchet dağılımı, Maksimum olabilirlik tahmini, Kalın kuyruklu dağılımlar, Regresyon modellemesi, Risk ölçüleri

ABSTRACT

PhD THESIS

AN ALTERNATIVE ANALYTICAL APPROACH TO REGRESSION MODELING IN ACTUARIAL STATISTICS

Fatma Feyza GÜNDÜZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
Year: 2016, Pages: 91
Jury : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ
: Prof. Dr. Aşır GENÇ
: Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Assoc. Prof. Dr. Gülsen KIRAL
: Assoc. Prof. Dr. Murat Alper BAŞARAN

In this thesis, the exponentiated Fréchet regression was used for modeling positive responses in regression and two parametrizations each of which links the regression parameters with the explanatory variables were poposed. Then maximum likelihood estimation of the parameters both theoretically and empirically was dicussed. Closed form expressions for certain risk measures for the exponentiated Fréchet distribution were obtained. Finally the proposed model to a motorcycle claim size data set was applied.

Keywords: Exponentiated Fréchet distribution, Maximum likelihood estimation, Long tailed distribution, Regression modeling, Risk measures

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli görüş ve fikirleriyle bana yol gösteren, öğrencisi olmaktan her zaman onur duyacağım kıymetli hocam, gerçek bir bilim insanı, sayın Prof. Dr. Ali İhsan Genç'e; sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışma sürecimdeki olumlu yaklaşımlarından ve desteklerinden ötürü Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına çok teşekkür ederim.

Sevgisi ve güveniyle bu süreçte bana güç veren, hayatı birlikte paylaşıyor olmaktan mutluluk duyduğum, sevgili eşim Yrd. Doç. Dr. Selim Gündüz'e, doktora serüvenimin en güzel meyvesi, aramıza katılarak hayatımızı daha da anlamlı hale getiren canım oğlum Ahmet Eymen Gündüz'e ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman yanımda olan ve beni bugünlere getiren aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
ÇİZELGELER DİZİNİ VI
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
1. GİRİŞ 1
2. AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 5
2.1. Rastgele Sonuçlu Ticari İşlemler 5
2.2. Sigortalanabilir Bir Risk Örneği 7
2.3. Çeşitli Durumlara Ait Örnekler 8
2.4. Risk Yönetimi 13
2.4.1. Risk Belirlemesi ve Risk Değerlendirmesi 14
2.4.2. Risk Yönetimi Eylemleri 15
2.5. Gözetim ve Risk Yönetim Döngüsü 17
2.6. Rastgele Sayıda Olaylar ve Rastgele Miktarlar 18
2.6.1. Rastgele Sayıda Olaylara Ait Örnekler 19
2.7. Risk Ölçümü 26
2.7.1. Tam (Evren Uyumlu) Risk Ölçümü 30
2.8. Çeşitli Risk Ölçüleri 32
2.8.1. Standart Sapma 32
2.8.2. Riske Maruz Değer (Value at Risk) (VaR) 33
2.8.3. Riske Maruz Kuyruk Değeri (Tail Value at Risk) (TVaR) 34
2.8.4. Koşullu Kuyruk Bekleneni (Conditional Tail Expectation) (CTE) 35
2.9. Çeşitli Dağılımlar İçin Bazı Risk Ölçülerinin Hesaplanması 35
2.9.1. Normal Dağılım 36
2.9.2. Üstel Dağılım 36
2.9.3. Student *t* Dağılımı 37

3. ÜSLENDİRİLMİŞ FRÈCHET DAĞILIMI 39
3.1. Üslendirilmiş Fréchet Dağılımının Tanımı ve Genel Özellikleri 40
4. ÜSLENDİRİLMİŞ FRÈCHET DAĞILIMININ AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE KULLANIMI 43
4.1. Maksimum Olabilirlik Tahminleri 45
4.1.1. Parametrizasyon I 46
4.1.2.Gözlenen Fisher Bilgi Matrisi 49
4.1.3. Parametrizasyon II 52
4.2. Simülasyon Sonuçları 56
4.3. Rezidüler 70
4.4. Üslendirilmiş Fréchet Dağılımı için Risk Ölçüleri 72
4.4.1. Standart Sapma 72
4.4.2. Riske Maruz Değer (VaR) 73
4.4.3. Koşullu Kuyruk Bekleneni (CTE) 73
5. UYGULAMA 75
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 85
KAYNAKLAR 87
ÖZGEÇMİŞ 91

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 2.1. Olası çıktılar ve sonlu sayıdaki şart arasındaki ilişki 6
Çizelge 2.2. Riskli ve risksiz tahvil durumu 6
Çizelge 2.3. Farklı yatırım araçlarından elde edilen kazançlar 7
Çizelge 2.4. Maluliyet tazminatı (1 yıllk dönem). 24
Çizelge 2.5. Farklı p değerleri için risk ölçülerinin hesaplanması 40
Çizelge 4.1. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları (α = 0.5) 57
Çizelge 4.2. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları (α = 1) 58
Çizelge 4.3. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları (α = 1.5) 59
Çizelge 4.4. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları (α = 0.5) 60
Çizelge 4.5. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları (α = 1) 61
Çizelge 4.6. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları (α = 1.5) 62
Çizelge 5.1. Pozitif tazminat taleplerinin özet istatistikleri 76
Çizelge 5.2. Üslendirilmiş Frechet dağılımı tarafından modellenen log tazminat maliyet değeri için tahmin edilmiş VaR ve CTE değerleri (10.000 SEK üzerinden) 79
Çizelge 5.3. Motosiklet verisi için Parametrizasyon I ile Fréchet regresyon sonuçları 80
Çizelge 5.4. Motosiklet verisi için Burr XII regresyon sonuçları 81
Çizelge 5.5. Motosiklet verisi için Parametrizayon I ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçları 82
Çizelge 5.6. Motosiklet verisi için Parametrizasyon II ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçları 83
Çizelge 5.7. Motosiklet verisi için üslendirilmiş Fréchet metodun olabilirlik oran istatistikleri 84

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 2.1. Risk Yönetim Süreci Şeması 14
Şekil 2.2. Riske Maruz Değer Grafiği 33
Şekil 2.3. VaR-TVaR grafiği 34
Şekil 3.1. Pozitif tazminat taleplerinin tipik bir histogramı 39
Şekil 3.2. Farklı şekil parametreleri için üslendirilmiş Fréchet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafikleri (a) $\lambda = \tau = 1$, (b) $\alpha = \tau = 1$ 42
Şekil 4.1. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{a}$ için normal kantil grafikleri 63
Şekil 4.2. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{t}$ için normal kantil grafikleri 64
Şekil 4.3. Parametrizasyon I için farklı örneklem büyüklükleri ile $\hat{q}_0$ için normal kantil grafikleri 65
Şekil 4.4. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_1$ için normal kantil grafikleri 66
Şekil 4.5. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{a}$ için normal kantil grafikleri 67
Şekil 4.6. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{l}$ için normal kantil grafikleri 68
Şekil 4.7. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_0$ için normal kantil grafikleri 69
Şekil 4.8. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_1$ için normal kantil grafikleri 69
Şekil 5.1. (a) Pozitif tazminat taleplerinin histogramı, (b) Pozitif tazminat taleplerinin olağan kutu grafiği, (c) Pozitif tazminat taleplerinin düzeltilmiş kutu grafiği 76
Şekil 5.2. (a) Pozitif tazminatların üslendirilmiş Fréchet uydurumu, (b) Uydurumun sağ kuyruk davranışı 79

1. GİRİŞ

Risk, kişi ya da kurumların her türlü maddi, manevi kayıp ve zararının oluşumuna ilişkin belirsizliktir. Risklerin gerçekleşmesi halinde ortaya çıkabilecek kötü durumları bilip bunlara karşı önceden hazırlıklı olmak amacıyla riskleri ölçme ve kontrol altına alma yolları aranmıştır. Riske dayalı zararları temin etmek amacıyla sigortacılık bilimi ortaya çıkmıştır. Sigorta, ileride meydana gelme olasılığı bulunan bir riskten doğacak zararın giderilmesinin önceden yapılan ödemeler yoluyla güvence altına alınmasıdır.

Risk, çoğunlukla önceden gerçekleşmesi kesin olmayan olumsuz olaylarla ilgili bir terim olarak kullanılır. Yangın, kaza, hırsızlık gibi olaylar ve su baskını, deprem, fırtına, sel gibi doğal felaketler bu durum için verilebilecek örneklerdir ve bunlarla ilgili sigortalar olayın adı verilerek tanımlanır. Örneğin, kaza sigortası, yangın sigortası, vs. Öte yandan ölüm, gerçekleşmesi kesin olmakla birlikte gerçekleşme zamanı belli olmayan bir olaydır ve ölüm halinde doğabilecek zararı temin için hayat sigortası denilen sigorta devreye girer. İnsanlar riskler gerçekleşmeden bunları sigortayla güvence altına almak isterler. Sigortacılık açısından tanımlamak gerekirse risk, bir kimsenin para ile ölçülebilir bir menfaatini zarara uğratan tehlikedir.

Riskleri ölçme ve kontrol altına alma durumları model oluşturma ihtiyacını doğurmuştur. Bir operasyonel risk modeli, belirsiz gelecek kayıpları temsil eden bir matematiksel fonksiyondur. Buradaki belirsizlik üç anlamda olabilir. Bunlar, herhangi bir gerçekleşme olup olmaması (kaybın olup olmaması), zamanlama (kaybın ne zaman ortaya çıktığı) ve boyut (olay gerçekleştiğinde kaybın büyüklüğü) şeklindedir. Belirsizliği temsil etmede en kullanışlı araç olasılık olduğundan olasılık modellerine ihtiyaç duyulmaktadır. Böylece operasyonel riske dayalı olasılık modelleri kavramı ortaya çıkar.

Sigortacı tarafından ödenen tazminat sürekli rastgele bir çokluktur ve operasyonel risk konusunda rastgele değişkenlere dayalı bir takım tanımlar vardır. Bunlardan birisi sağkalım fonksiyonudur. Eğer X kaybı gösteren bir rastgele değişkense $P(X > x)$ olasılığına *aşan fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon ile kaybın

belli bir değeri aşması olasılığı ifade edilir. Kaybın bir d eşik değerini aştığı verildiğinde bu fonksiyon ile ilgili rastgele değişken $X - d \mid X > d$ koşullu rastgele değişkenidir. Bu rastgele değişkenin beklenen değerine ortalama *aşan kayıp fonksiyonu* adı verilir. Aktüeryada ortalama aşan kayıp, kaybın eşik değeri aştığı verildiğinde eşik miktardan fazla olan ortalama ödeme anlamına gelir.

Öte yandan kayıp rastgele değişkenlerinin toplamı, operasyonel risk için büyük önem taşımaktadır. Bir şirketteki k birimden doğan operasyonel risk kayıpları düşünüldüğünde K birimin tümü üzerinden operasyonel risk kayıpları toplamı tek tek birimler için kayıpların toplamıdır, yani $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$ dır. Burada S_k nın tam dağılımının belirlenmesi çoğunlukla zor bir problemdir ve bunun yerine S_k ile ilgili olayların olasılıklarını yaklaşık olarak hesaplamak için simülasyon yöntemlerine ya da merkezi limit teoremine başvurulur. Böylece toplam kaybı kapsayıcı uygun sermaye miktarı aktarımı önceden değerlendirilebilir ve birimlere uygun sermaye paylaşımı yapılabilir.

Bir *risk ölçüsü* riskleri temsil eden reel bir sayı değeri olan dönüşümdür. Risk ölçüsünün amacı rastgele değişken ile ilgili belirsizlik ya da riskin derecesi için bir değer vermektir. Böyle risk ölçülerine örnek olarak dağılımın standart sapması, kantili ya da riske maruz değer (Value at Risk) (VaR) verilebilir. VaR, çok yaygın kullanılan bir risk ölçüsü olmasına rağmen, eğer kayıplar normal dağılımlı değilse ciddi yetersizliklere sahiptir. Artzner vd. (1999) bir risk ölçüsünün tam olarak sahip olması istenilen özellikleri sıralamışlar ve bu özelliklere sahip risk ölçülerine *tam risk ölçüleri* adını vermişlerdir. Buna göre VaR tam bir risk ölçüsü değilken alternatif bir risk ölçüsü olan koşullu kuyruk bekleneni (Conditional Tail Expectation) (CTE) tam bir risk ölçüsüdür.

Aktüerya literatürü sürekli olasılık dağılımları yoluyla risk modellemesi üzerine çok sayıda çalışmayı içerir. Örneğin, Hogg ve Klugman (1984) ve Klugman vd. (2004) kaynaklarında başta normal, log-normal, Weibull ve Pareto olmak üzere birçok dağılımlar işlenmektedir. Öte yandan sigorta risklerinin çarpık dağılımlara sahip oldukları iyi bilinmektedir (bknz. Lane 2000, Wang 2002). Bu nedenle kayıpları ya da sigorta risklerini modellemede klasik normal dağılım o kadar

gerçekçi bir model değildir ve alternatif olarak birçok çarpık dağılım literatürde kullanılmıştır. Örneğin, ters Gauss, üstel, log-normal, Fréchet, Weibull gibi dağılımlar aktüeryal istatistikte tazminat miktarı verisini modellemede başarılı bir şekilde kullanılmıştır (bknz. Kaas vd. 2009, s. 67). Pareto dağılımı ve genelleştirilmişi zarar tazminatı miktarını modellemede kullanılmıştır (Boyd, 1988; Brazauskas ve Serfling, 2003). Kayıpları modellemede kullanılan diğer dağılımlar şöyle özetlenebilir: Azzalini (1985)' nin çarpık normal dağılımı (Vernic, 2006), asimetrik üstel kuvvet dağılımı (Komunjer 2007, Zhu ve Zinde-Walsh 2009), Pareto pozitif stabil dağılımı (Guillen vd. 2011), logPH(Ahn vd. 2012), genelleştirilmiş asimetrik Student-t dağılımı (Zhu ve Galbraith 2010), Birnbaum-Saunders-t dağılımı (Paula vd. 2012).

Ayrıca risk heterojenliğini modellemek ve daha çok esneklik için karma dağılımlar da kullanılmıştır. Örneğin, kesikli Poisson-ters Gauss dağılımı (Willmot, 1987) sigorta portföyündeki tazminatların sayısını modellemede kullanılmıştır. Poisson ve gamma dağılımlarının bir karması olarak negatif binom dağılımı (Lemaire, 1979), negatif binom-Pareto karması (Klugman vd., 2004, Meng vd., 1999) özellikle otomobil sigortası konusunda uygulamalara sahiptir. Aktüeryal istatistik literatüründe rastlanılan sürekli karmalara örnek olarak üstel-ters Gauss karması (Frangos ve Karlis, 2004), Erlang karması (Willmot ve Lin, 2011), gamma-genelleştirilmiş ters Gauss karması (Gómez-Dèniz, 2013) verilebilir.

Poliçe, bölünmez bir primle hem mülk hem de sorumluluk kapsamını içerir. Bunun anlamı, sigorta şirketinden, sigorta ettirene tüm riskler için tek bir prim ödenir. Sigortacı tarafından ödenen bu tazminat (miktar) sürekli rastgele bir miktardır. Örneğin bir yangın sigortası portföyü için bir risk bölüşüm çalışması uygulanırken tazminat büyüklüğü analizi kısıtlaması yapılarak ve tazminat sayısı bilgisi dışarda tutularak araştırma yapılır. Binanın tipiyle ve sigortalanmış toplamla kayıp dağılımlarının nasıl değiştiği değerlendirilir. Böylece kategorik bir değişkenle tazminat verisi yanıt değişkeni olarak regresyon modellemesi yapılabilir ve bu şekilde bir bölüşüm yapılabilir.

Aktüeryal istatistikte yaygın olarak kullanılan, regresyon modellerinde uzun kuyruklu dağılıma sahip olan pozitif yanıt değişkenlerini modelleyen üslendirilmiş

Fréchet dağılımının tanıtılacağı bu tez çalışmasında, açıklayıcı değişkenleri modele dahil edebilmek için link fonksiyonlarından yararlanılacaktır. Oluştururulan link fonksiyonları aracılığıyla regresyon parametreleriyle açıklayıcı değişkenler arasında ilişki kuran iki farklı parametrizasyon önerilecektir. Sonrasında parametrelerin maksimum olabilirlik tahmini hem teorik olarak hem de deneysel olarak ele alınacaktır. Bir aktüerin isteklerine cevap vermek amacıyla üslendirilmiş Fréchet dağılımı için belirli risk ölçülerinin kapalı form ifadeleri elde edilecektir. Son olarak ise önerilen bu model motosiklet hasar verisine uygulanacaktır.

Tezin 2. Bölümünde aktüeryadaki temel kavramlardan bahsedilecek ve yaşamın içinden karşılaşılabilecek çeşitli riskli durumlarına ait örnekler verilip sigorta yaptırmanın önemi belirtilecektir. Bunun yanısıra, risk yönetiminden bahsedilecek olup risk yönetimi adımları açıklanacaktır. İyi bir risk yönetimi için oluşacak kaybı doğru şekilde belirlemenin öneminin belirtilmesinin ardından ise iyi bir portföy oluşturabilmek ve şirketleri minimum riske maruz bırakabilmek açısından risk ölçümünün önemi üzerinde durulacak ve tam bir risk ölçüsünün sahip olması gereken özellikler belirtilecektir. Bu bölümün son kısmında ise sigortacılar ve yatırımcılar açısından riskli yatırımlar durumunda oluşabilecek risk miktarını ölçebilme adına oldukça önemli olan risk ölçüleri ele alınacak olup çeşitli kayıp dağılımları için hesaplamaları yapılacaktır.

Tez çalışmasının 3. Bölümde ise risk modellemesinde normalden daha kalın kuyruklu ve sağa çarpık dağılımların kullanıldığı vurgusu yapılacaktır. Özellikle sigorta şirketlerinin yükümlülüklerini karşılayabilmesi ve devamlılığını sağlayabilmesi açısından hasar tutarı dağılımlarının öneminin belirtileceği bu bölümde sağa çarpık bir dağılım olan üslendirilmiş Fréchet dağılımı tanıtılacaktır.

4. Bölümde ise üslendirilmiş Fréchet dağılımının aktüeryal istatistikte regresyon çözümlemesinde kullanımı ele alınacaktır. Ayrıca simülasyon çalışması yapılacak ve 2. Bölümde tanıtılan risk ölçülerinin üslendirilmiş Fréchet dağılımı için sonuçları bulunacaktır.

Çalışmanın 5. Bölümünde ise elde edilen sonuçlar gerçek bir veri kümesinde uygulanacaktır.

2. AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde aktüeryal istatistikteki temel tanım ve kavramlar Olivieri ve Pitacco (2011) ve Panjer (2006) kaynaklarından yararlanılarak aktarılacaktır.

Risk, kişi ya da kurumların her türlü maddi, manevi kayıp ve zararının oluşumuna ilişkin belirsizlik hallerinde ortaya çıkan ve tehlikenin ciddiyetine verilen isimdir. O halde riske bir rastgele değişken gözüyle bakılabilir çünkü gerçek sonucu önceden kesin olarak bilinmez.

Risklerin gerçekleşmesi halinde ortaya çıkabilecek kötü durumları bilip bunlara karşı önceden hazırlıklı olmak amacıyla riskleri ölçme ve kontrol altına alma yolları aranmıştır. İnsanlar, riskler gerçekleşmeden bunları sigortayla güvence altına almak isterler. Örneğin; X , bir endüstriyel binada yangının neden olduğu zararı finansal terimlerle temsil edebilir. Bu durumda $X = 0$ zararın olmadığını gösterirken, $X = x_{maks}$ binanın toplam zararını gösterir. Böylece $[0, x_{maks}]$ aralığı X riskinin olası sonuçlarının kümesidir. Ya da eğer X bir firmanın yıllık ekonomik sonucunu gösterirse, $X > 0$ bir kârı temsil ederken, $X < 0$ zararı temsil eder. Maksimum olası zarar $x¢(x¢< 0)$ ve maksimum olası kâr $x¢¢(x¢¢> 0)$ tahmin edilmelidir. Böylece X in olası çıktıları $[x¢x"]$ aralığı ile verilir.

2.1. Rastgele Sonuçlu Ticari İşlemler

Ticari işlemler (sıfır faizli tahvil, hisse senedi yatırımı, vs.) *A,B…* gibi harflerle gösterilir. Her bir işlem ifade edilen süre sonunda bir rastgele çıktıyla sonuçlanır ve bunlar X_A, X_B¼ gibi harflerle gösterilir. Çizelge 2.1. de görüldüğü üzere, A işleminin rastgele sonucu X_A dır. Her bir rastgele sonucun gerçek çıktısı ikişerli ayrık şartların içinden (S_1, S_2) hangi şartların ortaya çıkacağına bağlıdır. Her bir şart, sonuçları etkileyebilen ekonomik-finansal senaryonun özelliklerini özetler.

Çizelge 2.1. Olası çıktılar ve sonlu sayıdaki şart arasındaki ilişki

	S_1	S_2
X_A	$X_{A,1}$	$X_{A,2}$
X_B	$X_{B,1}$	$X_{B,2}$
X_C	$X_{C,1}$	$X_{C,2}$
…	…	...

1. Durum: Sıfır Faizli Tahviller: Sıfır faizli tahvil, ödeme gününde (1 yıl) ödemesi o günün şartlarına bağlı olan tahvildir. Tahvil alındığında, ödeme günündeki şartlar bilinmediği için rastgeledir. S_1 ve S_2 ile gösterilecek iki olası şartın var olduğu, 50 ve 150 nin ise tahvilin karşılık gelen ödemeleri olduğu kabul edilsin.

Özel olarak 50 çıktısının, tahvili satın alırken yapılan yatırım miktarıyla ilişkili bir zararı, 150 nin ise bir kârı gösterdiği varsayılabilir. X_A ödeme zamanında yapılan rastgele ödemeyi, diğer bir tahvil X_B şartlardan bağımsız olan bir ödemeyi gösterir. Yukarıdaki ilk tahvil riskli bir tahvil iken diğeri risksizdir.

Çizelge 2.2. Riskli ve risksiz tahvil durumu

	S_1	S_2
X_A	50	150
X_B	100	100

2. Durum: Rastgele Kazançlı Yatırımlar: Dört farklı yatırım aracından elde edilen olası kazançlar aşağıdaki tablodadır. Herhangi bir tercih için her bir çıktı bir şartla ilişkilidir. Düşük kazançlar (örneğin tablodaki % 0) uygun bir eşik değerle karşılaştırıldığında ‘zarar’ olarak değerlendirilebilir.

Çizelge 2.3. Farklı yatırım araçlarından elde edilen kazançlar

	S_1	S_2	S_3
X_1	5.0	6.0	7.0
X_2	0.0	6.0	12.0
X_3	5.2	6.1	6.1
X_4	5.0	6.0	6.5

2.2. Sigortalanabilir Bir Risk Örneği

Bir acenta (bir kişi, bir şirket, bir enstitü) ifade edilen bir dönem içinde ortaya çıkan bir olay (bir kaza) nedeniyle zarara uğrayabilir. Örneğin, olay bir kargonun bir uçakla taşınırken kaybolması nedeniyle ortaya çıkabilir. e ile ekonomik zarara neden olan olay ve *x* ile zararın miktarı gösterilsin. Böylece eğer olay ortaya çıkarsa zararın olacağı kesindir.

Bu örnekte kargonun hiçbir kısmi zararı açıklanamaz. Potansiyel zararı aşağıda tanımlanan (2.1.) numaralı eşitlikle gösterilmektedir.

$$X = \begin{cases} x, & e \text{ } durumunda \\ 0, & e^c \text{ } durumunda \end{cases} \qquad (2.1.)$$

Bu temel model, riskin başka durumlarını göstermede de kullanılır. Örneğin, ailesinin geçimini geliriyle sürdüren bir kişinin öldüğü düşünüldüğünde (1 yıllık dönem içinde) bu kişinin ölümü finansal kaynakların elde edilebilirliği üzerinde olumsuz sonuçlara sahiptir. Ölümün ekonomik etkisi gelecekte elde edilmesi beklenen gelirlerin şimdiki değerleri açısından değerlendirildiği halde *x* ekonomik kayıp miktarını tanımlamadaki büyük belirsizlik yok olmamaktadır.

Bir başka örnek, bir kaza ya da yaralanma nedeniyle daimi ve tümden sakatlık ile verilebilir. Bu durum kişinin çalışma yetersizliğine neden olur. *X* miktarını tanımlamadaki belirsizliğin yüksek derecesi bu durumu da etkiler.

Daha gerçekçi durumlar yukarıdaki örnekte ifade edilen riski genelleştirerek ortaya konulabilir. Bu genelleştirmeler rastgele sonuçların daha geniş bir kümesini ya da daha uzun bir zaman ufkunu içerir. Bu amaçla aşağıdaki durumlar verilebilir.

1. Olay, deterministik bir kayıp yerine rastgele bir kayba neden olur.
2. İfade edilen bir dönem içinde en çok bir olay yerine rastgele sayıda olay ortaya çıkabilir ve her bir olay deterministik bir kayba neden olur.
3. Daha uzun bir zaman ufku adres gösterilir ve böylece paranın zamana karşı değeri ihmal edilemez.
4. Dönem içinde rastgele sayıda olay ortaya çıkabilir ve her bir olay bir rastgele kayba neden olur.

2.3. Çeşitli Durumlara Ait Örnekler

Olivieri ve Pitacco (2011) konuyla ilgili aşağıdaki örnekleri vermiştir.

Örnek 2.1. Bir Kargonun Kaybolması: Bir kargonun kaybolması ile verilen sigortalanabilir risk örneğinin (sabit miktarla olası zarar) aksine taşıma süresince bir kargonun kısmi zarara uğrayabileceği hesaba katılır. Böylece zarar bir X rastgele miktarıdır. X in olası çıktıları hakkında ya kesikli olarak $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_{maks}\}$ kümesi ya da sürekli olarak $0 \leq X \leq x_{maks}$ yani $[0, x_{maks}]$ aralığı düşünülebilir. Tipik olarak maksimum miktar olan x_{maks} kargonun değerine eşit olacaktır. $X = 0$ çıktısı kazanın olmayışı nedeniyle zararın yokluğunu gösterir.

X kesikli ise, X in çıktıları aşağıda (2.2.) numaralı eşitlikteki gibi verilebilir.

$$X = \begin{cases} x_1, & e_1 \ \textit{gerçekleşirse} \\ x_2, & e_2 \ \textit{gerçekleşirse} \\ \vdots & \vdots \\ x_m, & e_m \ \textit{gerçekleşirse} \\ 0, & e^c \ \textit{gerçekleşirse} \end{cases} \qquad (2.2.)$$

Burada $x_m = x_{maks}$ ve e_i ler artan kayıp miktarına göredir. e ise şiddeti ne olursa olsun bir olayın ortaya çıkışını gösterir ve $e = e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_m$ olarak yazılabilir. e^c ise olayın ya da kazanın yokluğunu gösterir.

Çeşitli amaçlar için rastgele kaybı, beklenen değer gibi tipik bir ölçü kullanarak özetlemek kullanışlıdır. Açıkça bilinmektedir ki beklenen değer ya da başka bir tipik değeri hesaplamak prensipte olası çıktılar kümesi üzerindeki olasılıkları bilmeyi gerektirir. Alternatif olarak pratikte önceki ve benzer tecrübelerden faydalanarak beklenen değerin bir tahmininin kullanıldığı varsayılabilir.

Örnek 2.2. Maluliyet Tazminatı: Bir işveren bir kaza nedeniyle daimi sakatlık durumunda işçilerine toplu tazminat ödeme riskini göze alır. Böyle bir durumda aşağıdaki hipotezler varsayılır.

1. Planlanan zaman dilimi bir yıldır.
2. *n* işçi kaza riskine maruzdur.
3. Her bir işçi için tazminat miktarı *C* dir.

K verilen bir yıl içindeki kazaların rastgele sayısı olsun. Böylece işveren tarafından ödenen toplam tazminat

$$X = CK \tag{2.3.}$$

eşitliği ile ifade edilir. K nın olası çıktıları *0,1,2,…,n* dir. Böylece *X* in karşılık gelen çıktıları *0,C,2C,…,nC* dir. Bu durumda rastgele ödeme miktarı bir tipik değer, örneğin beklenen değer, kullanılarak özetlenebilir. Toplam tazminatın beklenen değeri

$$E[X] = E[CK] = CE[K] \tag{2.4.}$$

eşitliği ile ifade edilir.

4. j-inci işçi için tazminat miktarı $C^{(j)}$ dir.

3. hipotezin 4. hipotez ile yer değiştirmesi durumunda, işveren tarafından verilen toplam tazminat sadece kaza sayısına bağlı olmaz çünkü bu durumda hangi işçilerin sakatlıkla karşılaştığı da önem kazanmış olur. Yani, j-inci işçi referans alınarak $C^{(j)}$ rastgele değişkeni (2.5.) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

$$X^j = \begin{cases} C^j, & \textit{kaza olması durumunda} \\ 0, & \textit{kaza olmaması durumunda} \end{cases} \qquad (2.5.)$$

Bu durumda işverenin toplam rastgele ödeme miktarı

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^{(j)} \qquad (2.6.)$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 2.3. Maluliyet Tazminatı (Çok Yıllık Dönem): Bu örnek, zaman diliminin *m* yıl ($m>1$) olduğu varsayılarak genelleştirilir. *m* yıllık dönemin başlangıcında yine *n* işçinin maluliyet riskine maruz kaldığı varsayılır. Üstelik verilen bir yılda bir kaza sonucu daimi sakat kalan her bir işçinin takip eden yılın başında başka bir işçiyle yer değiştirildiği varsayılır. Ayrıca yeni işe katılanlara izin verilmez. Böylece her bir yılın başında *n* işçi riske maruz kalır. Kazanın olduğu yılın sonunda her bir işçi için ödenen bireysel toplu tazminat belirtilen dönemin içinde yıl ne olursa olsun *C* dir. Çeşitli yıllarda meydana gelen rastgele kaza sayısı $K_1, K_2, \ldots, K_m$ ile gösterilsin. Böylece

$$X_t = CK_t \qquad (2.7.)$$

eşitliği ile *t=1,2,…,m* için *t* zamanında yani *t* yılın sonunda işverence ödenen rastgele miktar ifade edilmektedir. Eğer işverenin toplam ödemesi

$$X = X_1 + X_2 + ... + \mathrm{X}_m \tag{2.8.}$$

eşitliği ile tanımlanırsa, paranın zamana bağlı değeri önemsenmemiş yani dikkate alınmamış olur. Bu da faiz oranının sıfır varsayıldığı anlamına gelir.

Örnek 2.4. Fabrika Yangını: Verilen bir döneme göre (örneğin 1 yıl) bir fabrikanın o dönem için bir ya da daha fazla sayıda zarara uğrayabileceği varsayılsın. Olası her bir yangında oluşacak zarar miktarı rastgeledir. Bu örnekte kaybın rastgeleliği ve olayın meydana geliş sayısındaki rastgelelik bir aradadır. Matematiksel olarak, *N,* belirtilen dönem içinde meydana gelen yangın sayısı olsun. X_k , k-ıncı yangının neden olduğu zararı göstersin. Böylece toplam rastgele zarar miktar *X,*

$$X = \begin{cases} 0 & , \quad N = 0 \\ X_1 + X_2 + \text{¼} + X_N , & N > 0 \end{cases} \tag{2.9.}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Her bir k için $X_k > 0$ dır çünkü sıfır zarar $N=0$ ile gösterilir. Üstelik her bir X_k için, bir minimum miktar $x_{\min}$ ve bir maksimum miktar x_{maks} ifade edilmelidir. Özel olarak maksimum miktarın fabrikanın maddi değeri olduğu düşünülebilir. Bununla birlikte dönem içinde çıkabilecek birden fazla yangın durumunda her bir olayın fabrikayı tamamen harap etmesi pek mümkün değildir. Bu özel durumla $N, X_1, X_2, ..., X_N$ rastgele sayılarına uygun olasılıksal yapı tahsis edilerek uğraşılabilir.

N rastgele sayısının 0,1,2,… gibi değerler alabileceği varsayılabilir. Ayrıca *N* için N_{maks} gibi mantıklı bir en büyük değer olduğu varsayıldığında *N* nin olası değerleri $0,1,2,\text{¼},N_{maks}$ olacaktır. Örnek 2.2 de maksimum kaza sayısı *N* dir. Yukarıda bahsedilen rastgele çoklukları, örneğin beklenen değer kullanarak özetlemek için bu çoklukların olası çıktılarıyla ilişkili olasılıkların bilinmesi gerekir.

Pratikte beklenen değerlerin kestirimleri için önceki tecrübelerden faydalanılarak varsayımlarda bulunulabilir. ***E(N)*** ile verilen dönem içindeki olayların ortaya çıkışlarının (bu örnekte yangınların) rastgele sayısının beklenen değeri, $E(X_k)$ ile ***k.*** ortaya çıkıştan sonuçlanan zararın beklenen değeri ve $E(X)$ ile toplam zararın beklenen değeri gösterilir. Özel olarak, eğer tüm X_k rastgele miktarlarının aynı beklenen değere sahip olduğu varsayılırsa yani,

$$E(X_1) = E(X_2) = \text{¼} = E\left(X_{N_{maks}}\right) \tag{2.10.}$$

eşitliği dikkate alınırsa, aşağıda verilen (2.11) numaralı eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right] \\ &= E\left[NE(X_1)\right] = E(N)E(X_1) \end{aligned} \tag{2.11.}$$

Fabrikada meydana gelen hasarlar (özel olarak binalarda, makinalarda, ekipmanlarda) yangının neden olduğu direkt kayıpların bir örneğini oluşturur. Tersine dolaylı kayıplar, direkt kayıpların bir sonucu olarak ortaya çıkarlar. Örneğin, hasarlanan makinalar, normal üretim düzeyini indirerek kayıp oluşmasına ve böylece fabrika tarafından üretilen kârın azalmasına neden olarak dolaylı bir kayıp oluşmasına sebep olabilir. Bu yüzden yangının her bir olası ortaya çıkışı için dolaylı kayıplar da dikkate alınmalıdır.

Örnek 2.5. Sürücünün Sorumluluğu: Bir sürücü başkalarının özel malının (örneğin arabalarının) zarara uğramasına neden olabilir veya kişilere (yayalara ya da diğer sürücülere) zarar verebilir. Bu durumda bir üçüncü şahıs sorumluluğu ortaya çıkar. Verilen bir dönem (bir yıl) referans alınarak, dönem içinde sürücünün neden olduğu zararların ya da yaralanmaların sayısı olarak Örnek 2.4. teki gibi *N* rastgele sayısı

tanımlanırken, X_k ile *k*-ıncı ortaya çıkışın neden olduğu zarar gösterilir. Böylece verilen dönemdeki toplam zarar *X;*

$$X = \begin{cases} 0 & , \quad N = 0 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_n & , \quad N > 0 \end{cases} \tag{2.12.}$$

eşitliği ile ifade edilir.

Bu durumda maksimum kayıp miktarlarının ifade edilemeyeceğine dikkat edilmelidir. Çünkü zarara uğrayan mal (ya da yaralanma tipi veya şiddeti) önceden tanımlı değildir.

2.4. Risk Yönetimi

Riskleri sigorta sözleşmeleri yolu ile transfer etme eylemi, risk yönetimi için uygulanabilen eylem şekillerinin geniş bir yelpazesi içinde sadece bir ihtimali oluşturur.

Risk yönetimi, bir firma, bir banka, bir kamu kurumu vs. tarafından göze alınmış riskleri analiz etmeyi hedefleyen ve risklerle yüzleşmek için çeşitli eylemler önermeyi amaçlayan disiplinin adıdır.

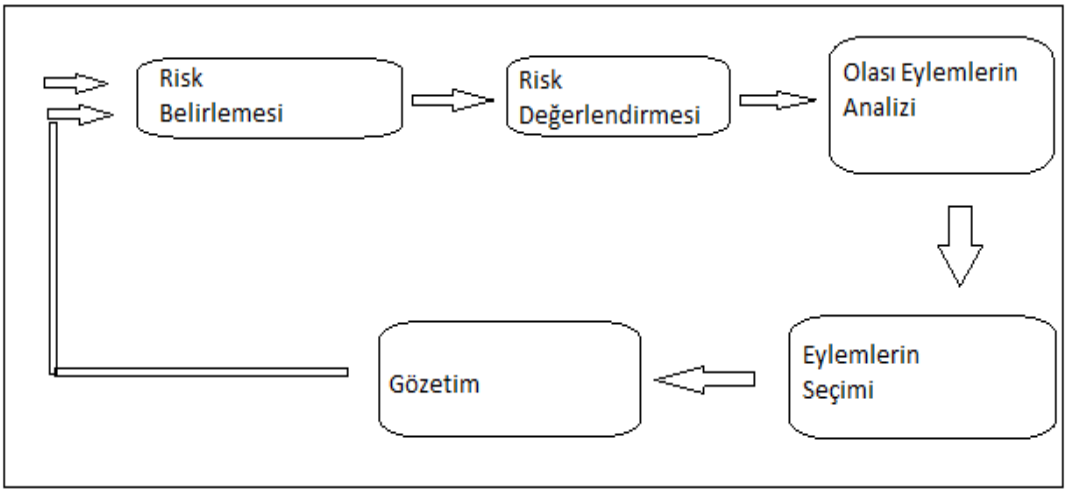
Önceki bölümde verilmiş olan bir kargonun zarar görmesi ya da kaybolmasından bir fabrikadaki yangına kadar olan çeşitli örneklerde ortaya çıkan riskleri yönetme ve analiz etme, işletmelerin risk yönetimi olarak değerlendirilir. Bunun yanı sıra otomobil sürücüsünün yükümlülüğü, emeklilikte kaynak ihtiyacı, bir kişinin erken ölümü ve emeklilikte hazır kaynakların harcanması gibi örneklerde ortaya çıkan, bireylerin ya da ailelerin karşılaştığı riskleri analiz etme ve yönetme de kişisel risk yönetimi çerçevesinde değerlendirilebilir.

Risk yönetimi prensiplerinin yerine getirilmesi, risk yönetim süreci yoluyla gerçekleşir ve temelde aşağıdaki 5 safhadan oluşur (Olivieri ve Pitacco, 2011).

1. Risk belirlemesi
2. Risk değerlendirmesi

3. Olası eylemlerin analizi
4. Eylemlerin seçimi
5. Gözetim

Risk yönetim süreci sonu olmayan bir süreçtir. Son adım olan gözetim safhası davranışların sonuçlarını kontrol etmeyi ve daha önceden uygulamaya konulmuş 4 adımın bir revizyonunu önermeyi amaçlar.



Şekil 2.1. Risk Yönetim Süreci Şeması

2.4.1. Risk Belirlemesi ve Risk Değerlendirmesi

Risk belirleme safhasında, bir işletmenin, bir bireyin ya da ailenin maruz kaldıkları potansiyel kaybın belirlenmesi amaçlanır. Risk değerlendirme safhasında ise kayıpların şiddeti ve potansiyel sayısının değerlendirilmesi hedef alınır. Genellikle kayıpların ortalama sayısı ve ortalama bir şiddeti tahmin edilir. Risk değerlendirmesine doğru bir yaklaşım yapmak için, kayıp durumlarının rastgele sayısının ve her bir potansiyel kaybın rastgele miktarının olasılıksal modellerle nasıl kullanıldığının bilinmesi gerekmektedir.

Risk değerlendirme safhası adımlar dizisinden oluşan ve kendi başına bir sürece dönüşen bir döngüdür. Bu safhada ilk olarak bazı değişkenlerin kümesi ifade edilmeli, sonrasında uygun olasılıklar varsayılmalı ve son olarak da çeşitli durumları

karşılaştırmada ve karar almada yardımcı olması adına bazı tipik değerler (beklenen değer, varyans, vs.) belirlenmelidir (Olivieri ve Pitacco, 2011).

2.4.2. Risk Yönetimi Eylemleri

Risk yönetimindeki eylemler birbirlerinden ayrıktırlar ve çoğunlukla iki ya da daha fazla eylemin bir kombinasyonu riskleri karşılamak için seçilir. Bu eylemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir (Olivieri, A., Pitacco, E., 2011.).

1. Kayıp kontrolü
   a. Kayıp önleme
   b. Kayıp azaltma
   c. Riskten kaçınma
2. Kaybın finansmanı
   a. Riski tutma
   b. Sigorta
   c. Hedging
   d. Diğer sözleşmeli risk transferleri
3. İşletme içi risk azaltımı
   a. Çeşitlendirme
   b. Bilgiye yatırım

Çeşitli risk yönetimi eylemlerini örneklendirmek için fabrika yangını örneği verilebilir. Kayıp kontrolü eylemleri (ya da risk kontrolü eylemleri) genel olarak toplam kaybın beklenen değeri $E[X]$ i azaltmayı amaçlar.

Özel olarak ortaya çıkışların beklenen sayısı E[N] yi düşürmeye meyilli olan eylemler kayıp önleme yöntemleri olarak bilinirken, her bir zararın beklenen şiddeti $k = 1, 2, ¼, N$ olmak üzere, $E[X_k]$ yı azaltmayı amaçlayan eylemler, kayıp indirgeme yöntemleri olarak adlandırılır.

Örneğin uygun elektrik ekipmanları, olası yangın çıkışlarının beklenen sayısını indirgemede katkı sağlayabilir. Bununla birlikte yangından koruma tedbirleri (örneğin kapılar) yangının yayılma riskini düşürebilir ve böylece beklenen zarar miktarını düşürebilir.

Kayıp kontrolü, daha az riskli üretim yollarına geçerek riskli aktivitelerin düzeyini azaltarak da gerçekleştirilebilir. Bu eyleme çoğunlukla riskten kaçınma adı verilir.

Kaybı finanse etme ifadesi (ya da riski finanse etme) her hâlükârda kaçınılmaz olabilen olası kayıpları karşılamak için finansal kaynaklar elde etmeyi amaçlayan geniş bir yöntemler kümesini gösterir. İlk olarak işletme, kayıpları ödeme yükümlülüğü altına girebilir. Bu işleme sıklıkla kendi kendine sigorta denilir. Örneğin bir işletme çalışanlarının sağlık masraflarını bir sağlık sigortası planı satın almak yerine kendisi ödemeye karar verebilir. Benzer şekilde eski bir arabaya sahip olan bir kişi aracına gelebilecek zarar riskini tutmaya karar verebilir ve kapsamlı sigortadan vazgeçebilir.

Hedging (finansal riskten korunma); opsiyonlar, takaslar, ileriye dönük işlemler, vadeli işlemler gibi finansal türevlerin kullanımına dayalıdır. Bu türevler döviz oranları, faiz oranları, emtia fiyatlarındaki değişiklikler vs. gibi nedenden kaynaklanan potansiyel kayıpları dengelemek için kullanılabilir. Örneğin, üretim safhasında petrol kullanan bir fabrika petrol fiyatındaki beklenmedik artışlardan kaynaklanan kayıplara maruz kalır. Bu risk, petrol üreticisinden kullanıcıya belirtilen bir tarihte belli bir fiyattan belli bir miktar petrol sağlamasına dayalı bir ileri anlaşma içine koyularak garanti altına alınabilir.

Son olarak işletme içi risk azaltımını amaçlayan eylemlere bakılır. Çeşitlendirme, tipik olarak yatırım stratejileri ve ilişkili risklerle ilgilidir ve tüm varlığı tek bir tahvil içine koymaktan ziyade bir takım farklı tahviller içine nispeten küçük miktarda varlıkları yatırmaktan oluşur. Çeşitlendirme yatırım sonuçlarını sadece bir şirketin ekonomik sonuçlarına tamamen bağlı olarak yapmaz ve böyle yatırım risklerini azaltmayı amaçlar.

Bilgiye yatırım, işletme içi risk azaltımının ikinci büyük şeklidir. Uygun yatırımlar, tahmin ve kestirimlerin kalitesini geliştirebilir (Olivieri ve Pitacco, 2011).

2.5. Gözetim ve Risk Yönetim Döngüsü

Eylemlerin seçimi risk yönetim sürecinin dördüncü safhasıdır ve önceki 3 safhanın sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Gözetim safhasının iki ana amacı vardır.

1. Üstlenilen eylemlerin etkinliğini kontrol etmek
2. Senaryodaki değişikliklerin yeni çözümler önerip önermediğini belirlemek

Risk değerlendirme (ya da risk ölçümü) anlamlı hedef sonuçlar (parasal giderler, kârlar, vs.) üzerindeki risklerin etkisini nicel terimlerle ifade etmeyi amaçlar. Bu anlamda aşağıdaki noktalar vurgulanmalıdır.

1. Riskin kendi doğasından ötürü her bir riskin etkisi rastgeledir.
2. Kullanışlı olmasına rağmen sadece minimum ve maksimum etkinin değerlendirilmesi operasyonel amaçlar için açıkça yetersizdir.
3. Konum ve yayılım ölçüleri gibi tipik değerler, verilen bir referans noktadan daha kötüdür ya da kayıp ifade edilen bir (kritik) eşik değerden daha yüksektir gibi olayların olasılıkları ile birlikte genelde çok daha kullanışlıdır.
4. Tipik değerler örneğin beklenen değer ya da mod (konumun tipik ölçüleri) ve varyans (bir yayılım ölçüsü) aşağıdaki amaçlar için özellikle kullanışlıdır.

    a) Çeşitli riskli durumlar arasındaki karşılaştırmalar ve kararlar, örneğin risk tutma ve risk transferi arasındaki seçimler.
    b) Tutma durumunda nakit akışı ve cari varlıklar yoluyla ya da belli sermaye bölüştürme işlemi yoluyla olabilen kayıp finansmanı hakkındaki kararlar.
    c) Sigortacının bakış açısından prim hesaplaması için uygun bir araç kiti yoluyla riskli durumların fiyatlandırılması.

Benzer şekilde yukarıda bahsedilenler gibi olasılıklar, frekans verisinden de kestirilebilir. Buna rağmen tam bir olasılık modelinin inşası geçerli bir risk değerlendirmesi için en uygun yaklaşımdır.

Elbette olasılıksal modelin karmaşıklığı belirli riske ve ele alınan sonuca bağlıdır. Bir model gerçekliğin basitleştirilmiş bir sunumunu oluşturmalıdır ve böylece değerlendirme sürecinde önemli bir role sahip olan tüm elemanları içermelidir. Tersine sonuçları anlamca etkilemeyen elemanlar göz ardı edilir (Olivieri ve Pitacco, 2011).

2.6. Rastgele Sayıda Olaylar ve Rastgele Miktarlar

Burada bir kargonun zarar görmesi ya da kaybolması örneğindeki durum geçerlidir. Bir olasılık dağılımı kaybın şiddetini tanımlayan X rastgele miktarına tahsis edilmelidir. Dağılım kesikli ya da sürekli tipte olabilir. Sürekli durum, hayat dışı sigortaların aktüeryal pratiğinde oldukça yaygındır. Kesikli durumda ise olası sonuçların bir kümesi uygun bir şekilde seçilmelidir. X rastgele miktarının olası sonuçları $X_0 = 0, x_1, x_2, ¼, x_{maks}$ ile gösterilir. $X_0 = 0$ çıktısı kazanın ve böylece zararın yokluğu anlamına gelir. Bu durumda olasılık dağılımı aşağıdaki olasılıkların tahsisi ile belirlenir (Olivieri ve Pitacco, 2011).

$$P_h = P\left(X = x_h\right), \qquad h = 0,1,2,...,m \tag{2.13.}$$

olmak üzere, $\sum_{h=0}^{m} P_h = 1$ kısıtı altında,

$$E(X) = \sum_{h=0}^{m} x_h P_h \tag{2.14.}$$

$$VaR\left(X\right) = \sum_{h=0}^{m} \left(x_h - E\left(X\right)\right)^2 P_h \tag{2.15.}$$

$$VaR\left(X\right) = \left(s\left(X\right)\right)^2 \tag{2.16.}$$

2.6.1. Rastgele Sayıda Olaylara Ait Örnekler

Olivieri ve Pitacco (2011), rastgele sayıdaki olaylara ait aşağıdaki örnekleri vermiştir.

Örnek 2.6. Olası bir kaza, miktarı kazanın şiddetine bağlı olarak bir kayba yol açar. X rastgele kaybının çıktıları 0, 100, 200, 300, 400, 500 ve karşılık gelen olasılıkları 0.99, 0.002, 0.004, 0.002, 0.001, 0.001 olarak ele alındığında X=0 çıktısı kazanın gerçekleşmediğini gösterir. Bu durumda,

$E(X) = 2.5$
$VaR(X) = 763.76$
$s(X) = 27.64$

olarak bulunur.

Şiddeti ne olursa olsun bir kazanın ortaya çıktığı varsayılırsa rastgele kayıpların çıktıları pozitif değerlere kısıtlanır yani 100, 200, 300, 400, 500 şeklindedir. Uygun olasılıkların toplamı 1 e eşit olmalıdır ve böylece nispi değerleri tutarak 0.2, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1 değerleri elde edilir. Bu olasılıklardan bir kazanın gerçekleştiği hipotezi altında kaybın beklenen değeri $\overline{X} = 250$ olarak hesaplanabilir. Bir kaza olsun yada olmasın kaybın beklenen değeri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$E(X) = \overline{X} \times P(kaza) = 250 \times 0.01 = 2.5$$

Örnekten çıkarılan sonuçlar şunlardır:

1. Şiddeti ne olursa olsun bir kazanın p olasılığı $p = \sum_{h=1}^{m} P_h$ ve $P_0 = 1 - p$ olmak üzere,

$$p = P(e) = P(e_1 \cup e_2 \cup \ldots \cup e_m) \qquad (2.17.)$$

olarak (2.17.) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

2. Koşullu olasılık teoremine göre,

$$P(X = x_h) = P(X = X_h | \mathrm{e}) P(\mathrm{e}) \tag{2.18.}$$

olmak üzere bir kazanın ortaya çıkmasında koşullu olarak kaybın miktarının olasılık dağılımı

$$P(X = X_h | \mathrm{e}) = \frac{P(X = x_h)}{P(\mathrm{e})} = \frac{p_h}{p}, \qquad h = 1, 2, ..., m \tag{2.19.}$$

eşitliği ile ifade edilir.

3. Bir kazanın ortaya çıkmasında koşullu olarak kaybın beklenen değeri

$$\overline{X} = E(X | \mathrm{e}) = \sum_{h=1}^{m} x_h P(X = X_h | \mathrm{e}) = \sum x_h \frac{p_h}{p} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{m} x_h P_h, \tag{2.20.}$$

olarak ifade edilir. $x = x_0$ iken

$$E(X | \mathrm{e}) P(\mathrm{e}) = \sum_{h=1}^{m} x_h P_h = \sum_{h=0}^{m} x_h P_h = E(X) \tag{2.21.}$$

eşitliği ile verilir.
Böylece koşulsuz beklenen değer

$$E(X) = E(X | \mathrm{e}) P(\mathrm{e}) = \bar{x} p \tag{2.22.}$$

olarak bulunur.

Kaybın beklenen değeri $E(X)=\bar{x}p$ ifadesi istatistiksel verinin bulunduğu formatı işaret eder. Yani, $\bar{x}$ kaza başına gözlenmiş ortalama zarara dayalı olarak kestirilebilirken p, kazanın sıklığına dayalı olarak kestirilebilir.

Maluliyet tazminatı 1 yıllık dönem durumuna dönüldüğünde maluliyet durumunda n işçiden herhangi birine aynı C tazminatının ödendiği varsayılsın. O zaman riskli durum, maluliyete neden olan kazaların rastgele sayısı K ile tam olarak ifade edilir. K nın olası riskleri 0,1,2,…, n olduğundan sonlu bir olasılık dağılımı tahsis edilmelidir. Özel olarak

1. Her bir işçi için kaza olasılığının p olduğu

2. Kazaların bağımsız olaylar olduğu varsayıldığında K nın olasılık dağılımının n ve p parametreli binom dağılımı olduğu sonucu ortaya çıkar. Yani,

$$K \sim b(n, p) \tag{2.23.}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $k = 0,1,\ldots,n$ olmak üzere

$$\mathsf{T}_k = P(K=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.24.}$$

eşitliği ile verilir.

Bununla birlikte ikinci varsayım tartışmalı olabilir. Çünkü örneğin bir fabrika içinde meydana gelen kazaların pozitif korelasyonlu olduğu yukarıdaki olasılık modeline göre düşünülebilir.

$$E(K) = np \tag{2.25.}$$

$$VaR(K) = np(1-p) \tag{2.26.}$$

İşveren tarafından ödenen toplam tazminat X ile ilgili olarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$$P(X = kC) = P(K = k) = \text{t}_k,\ k = 0,1,¼,n \tag{2.27.}$$

$$E(X) = CE(K) = Cnp \tag{2.28.}$$

$$Var(X) = C^2 Var(K) = C^2 np(1- p) \tag{2.29.}$$

$$\text{s}(X) = C\sqrt{np(1- p)} \tag{2.30.}$$

Ayrıca hiç kazanın olmaması olasılığı ve bunun sonucunda hiç ödemenin olmaması olasılığı

$$P(X = 0) = P(K = 0) = (1- p)^n \tag{2.31.}$$

eşitliği ile ifade edilir.

Daha önce de değinildiği gibi işveren tarafından katlanılan risk aslında *n* bireysel riskin bir havuzudur. Havuzun büyüklüğü havuzun kendisinin riskliliğinde önemli bir rol oynar. *n* nin rolünün daha iyi anlaşılması için riskin nispi bir ölçüsü olan varyasyon katsayısı

$$CV(X) = \frac{\text{s}(X)}{E(X)} \tag{2.32.}$$

eşitliği ile ifade edilir

Örnek 2.7. Bir firmanın işçilerinden herhangi birine daimi maluliyet durumunda C=1000 tutarlık bir tazminat ödensin. Her bir işçi için daimi maluliyete neden olan bir kaza olasılığı 0.005 olsun ve kazaların bağımsız olaylar olduğu varsayılsın. Çizelge 2.4. *n*=10, *n*=100 ve *n*=1000 durumlarında çeşitli sonuçları gösterir. Dikkat edilirse $E(X > 0)$ koşullu bekleneni en azından bir kaza meydana gelmesinde

koşullu olarak yapılacak rastgele ödemenin beklenen değeridir. Havuzun büyüklüğünün rolü tablodan görülebilir. Özel olarak,

1. Ortalama olarak her $\frac{1}{E(K)}$ yılda bir kaza meydana gelir.
2. Hem *K* hem de *X* in beklenen değeri ve varyansı *n* arttıkça lineer olarak artar.
3. *n* küçük olduğunda hiç kazanın olmama olasılığı çok yüksekken *n* nin büyük değerleri için bu olasılık çok düşüktür. Ayrıca $E(X|X>0)$ deki değişime de bakılabilir.

Çizelge 2.4. Maluliyet Tazminatı (1 yıllık dönem)

	n=10	n=100	n=1000
E(K)	0.05	0.5	5
VaR(K)	0.0497	0.497	4.975
s (*K*)	0.2230	0.7053	2.23047
E(X)	50	500	5000
VaR(X)	49750	497500	4.975
s (X)	223.04	705.34	2230.47
CV(X)	4.4609	1.41068	0.44609
$P(X=0)$	0.9511	0.6058	0.0067
$P(X>0)$	0.0489	0.3492	0.9933
$E(X\|X>0)$	1022.7	1268.30	5033.49

Bir fabrika yangını ve otomobil sürücüsünün sorumluluğu ile tanımlanmış problemlere bakıldığında, bunların bir kargonun kaybı ya da zararı ve maluliyet tazminatı (1 yıllık dönem) problemlerinin özelliklerini birleştirdiği görülür. Zararları (ya da sorumlulukları) tanımlayan tüm rastgele miktarlar $X_1, X_2, ¼, X_n$ için aynı olasılık dağılımı varsayılsın. Bir kargonun kaybı ya da zararı durumundaki gibi dağılım kesikli ya da sürekli tipte olabilir. Kesikli durumu ele alındığında ve

$x_1, x_2, ¼, x_m$ ile her X_k , *k=1,2,…,n* rastgele miktarı için olası çıktıları gösterildiğinde ortak olasılık dağılımı

$$f_h = P(X_k = x_h) \ , \ h = 1, 2, ¼, m \tag{2.33.}$$

eşitliği ile ifade edilirken beklenen değer ve varyans

$$\bar{x} = E(X_k) = \sum_{h=1}^{m} x_h f_h \tag{2.34.}$$

$$Var(X_k) = \sum_{h=1}^{m} (x_h - \bar{x})^2 f_h \tag{2.35.}$$

eşitlikleri ile verilir.

Kazanın olmaması ve böylece zararın 0 a eşit olması durumu kaza rastgele sayısı *N* nin 0 a eşit çıktısıyla açıklanır. *N* rastgele sayısı hakkında açıkça kesikli bir dağılım kullanılmalıdır. Özel olarak sonlu bir dağılım ve mantıklı bir maksimum çıktı n_{maks} ın doğru şekilde seçimini gerektirir ve alternatif olarak Poisson dağılımı sıklıkla kullanılır. Sonlu dağılım durumunda aşağıdaki olasılıklar tahsis edilmelidir.

$$t_h = P(N = h) \ ; h = 0, 1, ¼, n_{max} \tag{2.36.}$$

Beklenen değer $\bar{n}$ ve varyans aşağıdaki eşitliklerdeki gibi elde edilir.

$$\bar{n} = E(N) = \sum_{h=0}^{n_{max}} h t_h \tag{2.37.}$$

$$Var(N) = \sum_{h=0}^{n_{max}} (h - \bar{n})^2 t_h \tag{2.38.}$$

Ayrıca,

$$X = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N > 0 \end{cases} \qquad (2.39.)$$

ile tanımlı toplam kayıp miktarı X in olasılık dağılımı ve ilgili tipik değerler önemlidir çünkü X ifade edilmiş döneme ait toplam rastgele masrafı (zarar) temsil eder.

Örnek 2.8. Bir fabrikanın bir yıl içinde muhtemelen yangın nedeniyle çok kez zarar gördüğü varsayılsın. X_k, $k = 1, 2, \ldots$ rastgele zararları hakkında $m=5$ olduğu ve aşağıdaki olası çıktıların ve bunların olasılıklarının ele alındığı varsayılsın:

$$x_1 = 100 \; ; x_2 = 200 \; ; x_3 = 300 \; ; x_4 = 400 \; ; x_5 = 500$$

$$f_1 = 0.2 \; ; f_2 = 0.4 \; ; f_3 = 0.2 \; ; f_4 = 0.1 \; ; f_5 = 0.1$$

Bu durumda k=1,2,… için X_k rastgele miktarının beklenen değeri;

$$\overline{x} = E(X_k) = \sum_{h=1}^{5} x_h f_h = 250$$

olarak bulunur.

N rastgele sayısı için $n_{max} = 4$ olduğu ve aşağıdaki olasılıklar varsayılsın.

$$t_0 = 0.9934 \; ; t_1 = 0.0040 ; t_2 = 0.0020 \; ; t_3 = 0.0004 \; ; t_4 = 0.002$$

Bu durumda

$$\overline{n} = E(N) = \sum_{n=0}^{4} n t_n = 0.01$$

olarak ele alınır ve uygun hipotezler altında

$$E(X) = \bar{n} \times \bar{x} = 2.5$$

şeklinde bulunur.

2.7. Risk Ölçümü

Şirketler sermayelerini büyütmek için faaliyetleri süresince çeşitli riskler alırlar. Riskin gerçekleşip gerçekleşmeyeceği, risk gerçekleştiğinde kaybın ne kadar olacağı konuları belirsizdir çünkü risk gelecekle ilgili bir kavramdır ve gelecek belirsizlik ifade etmektedir. Dolayısıyla bu noktalarda olasılıksal düşünceler devreye girer.

Şirketler risk gerçekleştiğinde ne kadarlık bir kayba uğrayabileceklerini önceden tahmin etmek isterler çünkü işin ucunda iflas etme tehlikesi vardır. Bu nedenle riskin gerçekleşmesi durumunda ne kadarlık bir sermayeyi oluşacak kaybın karşılanmasında kullanacaklarını bilmek isterler.

Portföy, riski azaltmak ve üstlenilen riskten en yüksek getiriyi sağlamak amacıyla, aynı veya farklı özelliklere sahip en az iki yatırım aracının bir araya getirilmesiyle oluşan toplam değeri ifade etmektedir.

Portföy yönetimi açısından, yatırımcı tiplerinin belirlenmesi de son derece önemlidir. Yatırımcının serveti arttığı zaman riskli varlıklara yaptığı yatırım miktarı artıyorsa, bu yatırımcının risk almayı seven bir yatırımcı olduğu söylenebilir. Yatırımcının serveti arttığı zaman riskli varlıklara yaptığı yatırım değişmiyorsa riske karşı kayıtsız yatırımcı olduğu öte yandan yatırımcının serveti arttığı zaman, riskli varlıklara yaptığı yatırım miktarı azalıyorsa risk almaktan kaçınan bir yatırımcı olduğu söylenebilir.

Farklı menkul kıymetler bir araya getirilerek çok sayıda portföy alternatifi oluşturulabilir. Ancak olaya hisse senedi ve tahvil gibi geleneksel menkul kıymetler açısından bakıldığında farklı portföylerden söz edilebilir;

1. Yalnızca tahvillerden oluşan portföyler
2. Yalnızca hisse senetlerinden oluşan portföyler
3. Karma portföyler
4. Diğer yatırım araçlarından oluşturulan portföyler

Kısaca bu portföy tiplerinden bahsedilecek olursa,

Tahvil; devletin ya da özel sektör şirketlerinin borçlanarak orta ve uzun vadeli fon sağlamak üzere çıkarttıkları borç senetleridir.

Hisse Senetleri; anonim ortaklıklar tarafından çıkarılan şirket sermayesine katılımı temsil eden, yasal şartlara uygun olarak düzenlenmiş kıymetli evraklardır.

Diğer yatırım araçlarından oluşan portföyler ise; yatırım fonları, finansman bonoları, altın, hazine bonosu, gelir ortaklığı senetleri, banka bonoları, repo, döviz, gayrimenkul sertifikaları, kâr-zarar ortaklığı belgesi, opsiyon sözleşmeleri ve vadeli işlem sözleşmeleri şeklinde sıralanabilir.

Portföy yönetimi, çok sayıda yatırım aracını, çeşitli sınırlamalar altında, yatırımcıya en fazla getiriyi sağlayacak, buna karşılık en az risk ile yönetme faaliyeti olarak tanımlanabilir. Portföy yöneticisi ise, müşterisi adına bir yatırım portföyünü yöneten kişi veya şirkettir.

Portföy yönetiminin ilk aşaması portföy bölüşümüdür. Bu aşamada portföye girmeye aday olan menkul kıymetlerin özellikleri incelenip yatırım süresi boyunca menkul kıymet performansının nasıl olacağı tahmin edilir. Burada önemli olan sadece yatırım yapılabilecek finansal varlıkların geçmiş performansının incelenmesi ve değerlendirilmesi değildir, çeşitli bilgilerden yararlanılarak ileri dönük açık ve matematiksel tahminlerin de yapılması gerekmektedir.

Portföy seçimi ise öncelikle her yatırım kategorisine yapılacak yatırım tutarının daha sonra da değişik menkul kıymetlere yapılacak yatırım tutarının saptanmasını gerektirir. Portföy seçiminde önce portföyün hangi varlıklardan oluşacağı belirlenmeli ve portföyün genel kompozisyonu hakkında karar verilmelidir çünkü bu durum portföy yöneticisinin yatırım kararlarına netlik getirebilmesi ve karşılaşılması muhtemel riskleri minimuma indirmesi açısından önemlidir.

Portföy dinamik bir yapı taşımasından dolayı belirli zaman aralıklarında değerlendirilmesi gerekmektedir. Zaman içerisinde portföyün verimi ve değerinde olan değişiklikler incelenir. Bunların, yatırım süresinin başında saptanan yatırımcının amaçları ve yatırım ölçütleri ile uyumu değerlendirilerek bir sonuca ulaşılır.

Portföy yönetiminde ulaşılmak istenen son aşama ise, belirli bir risk seviyesinde portföyün getirisini maksimize etmektir. Bu amaçla da risk ölçülerine ihtiyaç duyulmuştur.

Normal dağılım varsayımı borsada fiyatların logaritmasındaki değişikliklerin modellenmesiyle ilgili olarak yoğun bir şekilde kullanılmasına rağmen operasyonel kayıp süreçlerini de içeren birçok süreci modellemede tam olarak uygun bir dağılım olmayabilir. Sigortacılık alanından iyi bilinir ki çarpık dağılımlar simetrik olanlara nazaran kayıpları daha iyi modellerler.

Risk ya da kötü sonuç ortaya çıktığında kayıp da ortaya çıkar. Riskle ilişkili kaybı temsilen bir X rastgele değişkeni kullanılır. Bir risk ölçüsü X den reel sayılar kümesine $\mathsf{r}(X)$ ile gösterebileceğimiz bir dönüşüm (fonksiyon) dür. $\mathsf{r}(X)$ maruz kalınan riskin miktarını ölçme görevindedir ve X kaybını parasal açıdan karşılamak için gerekli sermaye ya da varlıkların miktarını ölçer.

Olasılık tabanlı modeller, riske maruz kalmanın tanımını sağlarlar. Riske maruz kalmanın derecesi genelde ya bir sayı ile ya da en azından sayıların küçük bir kümesi ile ifade edilir. Bu sayılar modelin gerekli fonksiyonlarıdır ve sık sık "anahtar risk göstergeleri" olarak adlandırılırlar.

Özellikle riske maruz değer (Value at Risk) (VaR) toplam riskin dağılımının kantilidir. Risk yöneticileri sıklıkla ters bir sonucun olasılığına bakarlar. Bu özel bir olasılık düzeyinde VaR ile ifade edilebilir. VaR, böyle ters sonuçlara dayanması gereken sermaye miktarının tespitinde kullanılır. Yatırımcılar, düzenleyiciler ve derecelendirme kuruluşları özellikle böyle olaylara karşı şirketlerin durabilme yeteneği ile ilgilenirler. VaR, bazı istenmeyen özelliklerden zarar görmektedir. Daha aydınlatıcı ve kullanışlı bir risk ölçümü ise riske maruz kuyruk değeri (Tail Value at Risk) (TVaR) dir. TVaR, çeşitli alanlarda bağımsız olarak ortaya çıkmıştır. Koşullu riske maruz değer (CVaR) (Conditional Value at Risk), koşullu kuyruk bekleneni

(CTE) (Conditional Tail Expectation) ve ES (Expected Shortfall) gibi farklı isimlerle de ifade edilmektedir.

Burada öncelikle temel olasılık modeli oluşturma üzerine odaklanılacak ve daha sonra risk yöneticisine kullanışlı bilgi sağlamak için bir risk ölçüsü, olasılık modeline uygulanacaktır. Risk sermayesinin tespiti konusu araştırmacıları, düzenleyicileri ve mali kurumları oldukça ilgilendirmektedir.

VaR, riske maruz kalmayı değerlendirmek için kullanılan standart risk ölçümü haline gelmiştir. Genel anlamda VaR, şirketin teknik olarak iflas etmemesini temin edecek gerekli sermaye miktarıdır. Pratikte bu tüm şirket için %99.95 gibi yüksek bir değer olabilir ya da şirket içindeki tek bir birim ya da risk sınıfı için %95 gibi daha düşük bir değer olabilir. Bu düşük yüzde mevcut olan birimler arası ya da riskler arası çeşitliliği yansıtmaktadır. VaR gibi kavramların yükselişi, sayısız yazar tarafından risk ölçümü çalışmasına yol açmıştır.

Risk ölçümü çalışmaları, bireysel birimlerdeki risk ölçümü ile birimler birleştirildikten sonraki risk ölçümü arasındaki tutarlılığın sağlanması üzerine odaklanmıştır. Risk ölçümlerinin tamlığı kavramı ise Artzner ve ark. (1999) tarafından anlatılmıştır.

X ile ifade edilen toplam operasyonel kayıpların olasılık dağılımı, sadece tek iş birimleri için, operasyonel kayıpların dağılımına bağlı değildir aynı zamanda onların arasındaki ilişkilere de bağlıdır. Korelasyon, böyle bir ilişki ölçüsüdür. Korelasyonun en kullanışlı tanımı; iki rastgele değişken arasındaki basit lineer ilişki olmasıdır. Korelasyon ölçüsü değişkenler arasındaki muhtemel bir lineer olmayan ilişkiyi ortaya çıkarmada yetersizdir.

Lineer korelasyon ölçüsü tekli iş birimlerinden gelen operasyonel kayıpların çok değişkenli normal dağılımı oluşturduğu durumda değişkenler arası ilişkileri tarif etmede mükemmel performans gösterir. Borsada fiyatların logaritmasındaki değişimleri modellemede normal dağılım yaygın olarak kullanılsa da, operasyonel kayıp sürecini de içeren birçok süreci modellemek için çok uygun bir dağılım olmayabilir. Normal dağılım modeli bir referans nokta olarak görev yapar ve önemli ilişkileri anlamamızda yardımcı olur. Sigorta alanlarında, çarpık dağılımlar kayıpları simetrik dağılımlardan daha iyi tanımlar. Sigorta şirketleri ve bankalar gibi kompleks

organizasyonlar için sermaye ihtiyaçlarının belirlenmesinde risk ölçümü uygulamasına iki yaygın yaklaşım vardır. İlk yaklaşım, maruz kalınan risklerin her biri için ayrı ayrı bir matematiksel model geliştirip maruz kalınan o riskle ilgili çalışmaya dayalı olarak her bir maruz kalışa bir sermaye gereksinimi tahsis etmektir. Bu yaklaşım sıklıkla sigortacılıkta riske dayalı sermaye yaklaşımı (risk-based capital) (RBC) olarak, bankacılıkta ise Basel yaklaşımı olarak adlandırılır.

Toplam sermaye gereksinimi maruz kalınan her bir risk için sermaye gereksinimlerinin toplamıdır. Burada bir kesinti mükemmel korelasyonlu olmayan risklerin hedging etkisi ya da bir çeşitliliğin mevcut olabilirliğinin farkındalığı nedeniyle mümkün olabilir. İkinci yaklaşım ise tüm organizasyonun entegre bir modelini kullanır. Bu yaklaşımda tüm organizasyonu tanımlamak için matematiksel bir model geliştirilir. Model, şirketteki iş birimleri ve risk tipleri arasındaki tüm etkileşimleri birleştirir. Değişkenler arasındaki tüm ilişkiler direkt olarak modele yerleştirilir. Böylece, korelasyonlar model yapısında elde edilir. Bu yaklaşımda risklerin bütün türleri için toplam sermaye gereksinimi, organizasyonun en yüksek düzeyinde hesaplanabilir. Durum böyle olduğunda, toplam sermayenin birimlere geri bölüşümü bir tür iş yönetimi ya da borç ödeme gücü açısından gereklidir. Yukarıda bahsedilen sermaye belirlenişine ilk yaklaşım "aşağıdan yukarıya" yaklaşım olarak adlandırılırken, ikinci yaklaşım da "yukarıdan aşağı" yaklaşım olarak adlandırılır.

Bir risk ölçüsü risklerle ilgili kaybı temsil eden rastgele değişkenden reel sayılar kümesine bir dönüşümdür ve maruz kalınan riskin miktarını ölçme niyetinde olan tek bir sayı verir. Örneğin standart sapma ya da dağılımın standart sapmasının bir katı bir risk ölçüsüdür çünkü belirsizliğin bir ölçümünü sağlar. Normal dağılımlı bir kayıp için bu durumun uygunluğu açıktır. X için gereken varlıkların miktarı olarak gösterilen $\rho(X)$ risk ölçümü fonksiyonunu temsil etmektedir.

2.7.1. Tam (Evren Uyumlu) Risk Ölçümü

Tam (Evren uyumlu) risk ölçümü (tam risk ölçümü) $\rho(X)$; herhangi iki sınırlı X ve Y kayıp rastgele değişkenleri için aşağıdaki 4 özelliğe sahip olacak şekilde tanımlanır (Panjer, 2006).

Özellik 1. Alt Toplamsallık: Bir araya getirilmiş iki risk için risk ölçüsünün ayrı ayrı ele alınan riskler için olandan daha büyük olmayacağı anlamına gelir. Alttoplamsallık özelliğinin gerekliliğinin uygunluğu tartışma konusu olmuştur. Özellikle çeşitli küçük şirketlerin birleşip büyük bir şirket oluşmasıyla küçük şirketlerin herbiri diğerlerinin itibar riskine maruz kalır. Çeşitlilik ihtimalini yansıttığı için alttoplamsallık özelliği önemliliğini korumuştur.

$$\mathrm{r}\left(X+Y\right) £ \mathrm{r}\left(X\right)+\mathrm{r}\left(Y\right) \tag{2.40.}$$

Özellik 2. Monotonluk: Eğer bir risk, tüm durumlarda diğer riskten her zaman daha büyük kayıplara sahipse risk ölçüsünün her zaman daha büyük olması gerektiği anlamına gelir. Monotonluk özelliği ekonomik bir bakış açısından da açıkça değerlendirilebilir.

$$X £ Y \text{ ise } \mathrm{r}\left(X\right) £ \mathrm{r}\left(Y\right) \tag{2.41.}$$

Özellik 3. Pozitif Homojenlik : Riskin ölçülebildiği durumda risk ölçümü para biriminden bağımsızdır. Bu ifadeye denk olarak, örneğin özel bir riske maruz kalmayı iki katına çıkardığımızda bu sermayeyi de iki katına çıkarmayı gerektirir. c pozitif sabiti için;

$$\mathrm{r}\left(cX\right)=c\mathrm{r}\left(X\right) \tag{2.42.}$$

eşitliği ile verilir.

Özellik 4. Dönüşümde Değişmezlik Özelliği: Özel olarak X sıfıra denk ise belirli bir çıktı için gerekli varlıklar, tam olarak o çıktının değeridir. $c>0$ ise;

$$\mathrm{r}\left(X+c\right)=\mathrm{r}\left(X\right)+c \tag{2.43.}$$

eşitliği ile ifade edilir.

2.8. Çeşitli Risk Ölçüleri

Sigortacılar ve yatırımcılar, sırasıyla sigorta riskini ve riskli yatırımlar durumunda ortaya çıkacak risk miktarını ölçme ile ilgilenirler. Monte Carlo simülasyon yöntemleri ile risk ölçümü mümkündür. Alternatif olarak bu risk ölçüleri, uygun bir kayıp dağılımı esas alınarak kayıp verinin modellenmesiyle, analitik olarak değerlendirilebilir.

Aktüeryada kayba dair veriler genellikle sağa çarpık dağılım ortaya koyarlar. Bu sebeple bu tezin 4. Bölümünde kayıplar üslendirilmiş Fréchet dağılımı ile modellenecek ve risk ölçüleri için kapalı form ifadeleri elde edilecektir.

2.8.1. Standart Sapma

Standart sapma, ortalamadan sapmayı ölçen klasik bir risk ölçüsüdür. Varyans ve standart sapma simetrik risk ölçüleridir çünkü beklenen değerden pozitif ve negatif sapmalar alıkonmuştur. Standart sapma, rastgele miktar X ile aynı birimde ifade edilir ve bir dağılımın belirsizliğinin ölçüsüdür. X kaybı temsil eden bir rastgele değişken olmak üzere varyans ve standart sapma aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Var[X] = E\left[(X - \mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx \qquad (2.44.)$$

$$\sigma[X] = \sqrt{Var[X]} \qquad (2.45.)$$

İstatistikte varyasyon katsayısı;

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \qquad (2.46.)$$

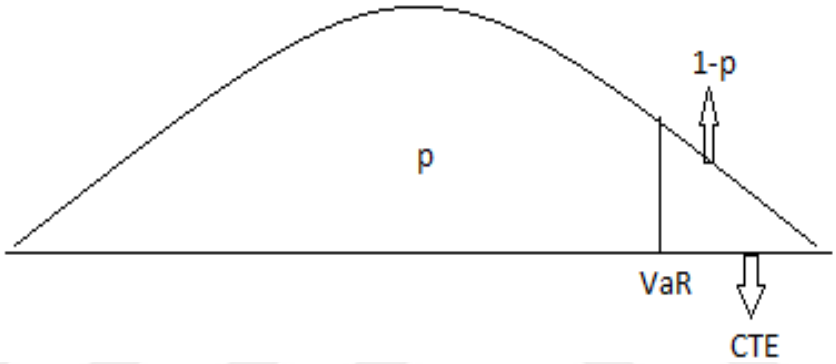
eşitliği ile ifade edilir ve ortalamaya göre X deki değişimi ölçer. Özellikle risk yönetimi ve sigortacılık alanında risk indeksi olarak bilinmektedir.

2.8.2. Riske Maruz Değer (Value at Risk) (VaR)

X, kaybı temsil eden bir rastgele değişken olsun. *p* düzeyinde riske maruz değer

$$VaR_p[X] = inf\{x \in \mathbf{R} | F_X(x) \geq p\} \qquad 0 < p < 1 \tag{2.47.}$$

olarak tanımlanır.

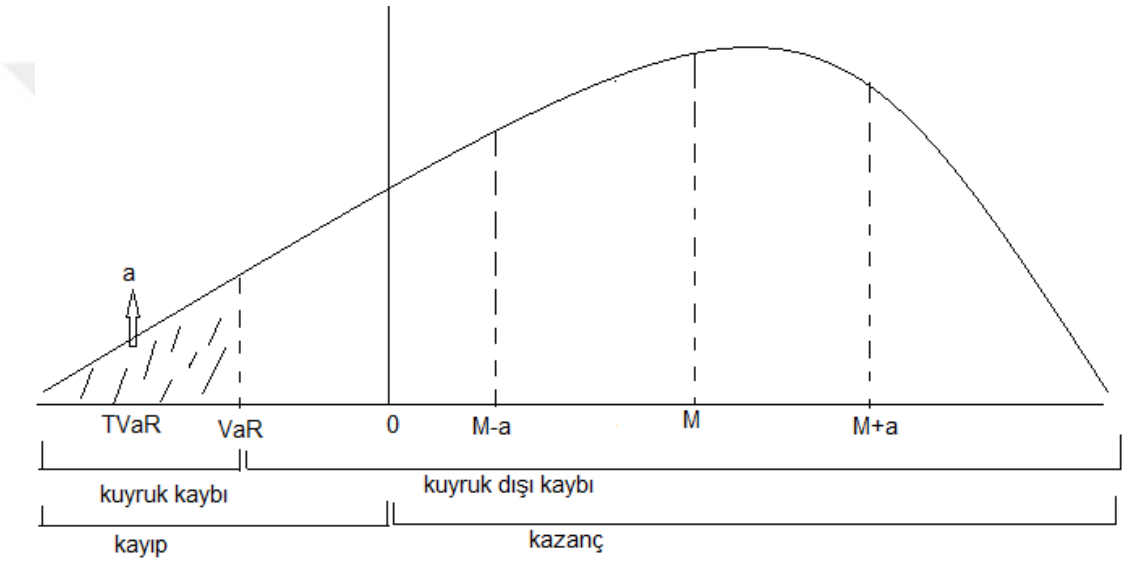


Şekil 2.2. Riske Maruz Değer Grafiği

X, sürekli ise VaR, $F(x_p) = p$ olacak şekildeki x_p değeridir. Riske maruz değer *p* olasılığı ile maksimum kaybolacak miktarı ölçer. Bu da riske maruz değerin, sürekli kayıp dağılımının kantil fonksiyonuna eşit olduğu anlamına gelir. Bu yüzden kantil, risk ölçüsü olarak da adlandırılır. Risk sermayesini belirleme konusu şirketler için önemlidir ve bunun için VaR kullanılabilir. VaR risk dağılımının kantil değeridir ve alt toplamsallık özelliğini sağlamadığı için tam bir risk ölçüsü değildir. Şirketler kaybedecekleri maksimum kaybı yüksek kesinlik derecesiyle bilmek isterler. Yüksek olasılıkla şirketin kaybedeceği miktar VaR_p yi aşamaz. Şirketlerin sermayelerinin büyük kısmını risk sermayesi olarak ayırması istenilen bir durum değildir. Risk sermayesini minimum düzeyde tutmaları, geri kalan sermayelerini çalıştırmaları yararlarına olacaktır.

$$P(X \leq VaR_p[X]) = p \tag{2.48.}$$

(2.48.) eşitliğinden de anlaşılacağı üzere şirket VaR_p kadar miktarı risk sermayesi olarak ayırarak, iflasını yüksek olasılık derecesiyle engellemiş olur. VaR_p miktarı eğer uç bir olay (kuyruk olayı) meydana gelmemişse maksimum kayıp olarak ifade edilir. (Sermaye - VaR_p) farkı dağıtılırsa, o zaman kuyruk dışında kalan herhangi kayıp tamamen fonlanır. Eğer bir uç olay meydana gelmişse, VaR_p nin kendisi olası kayıp hakkında herhangi bir bilgi sağlamaz.



Şekil 2.3. VaR-TVaR grafiği

2.8.3. Riske Maruz Kuyruk Değeri (Tail Value at Risk) (TVaR)

X, kaybı temsil eden bir rastgele değişken olsun. Riske maruz kuyruk değeri,

$$TVaR_p[X] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_q[X]\,dq\,,\quad 0 < p < 1 \qquad (2.49.)$$

olarak tanımlanır. Burada p, verilen bir güven düzeyidir. p düzeyinde TVaR, p-kantili üzerinde X in tüm kantillerinin ortalamasına eşittir.

$TVaR_p[X]$, $p \le q < 1$ olmak üzere $x_q = VaR_q[X]$ in [p,1] aralığındaki ortalama değeridir. Sabit bir p değeri için şirketlerin sadece p olasılığı ile maksimal

olarak kaybolacak miktarı yani VaR_p yi bilmeleri yeterli olmayabilir. Çünkü kaybın VaR_p yi aşması az da olsa ihtimal dahilindedir. Bu yüzden risk yöneticileri VaR_p yi aşan kayıpların ortalamasını bilmek isterler. Bu da $q>p$ olmak üzere VaR_p değerlerinin ortalamasının düşünülmesini gerektirir. *q, [p,1)* aralığında değişeceği için VaR_q sürekli bir eğridir ve TVaR, bu eğrinin *[p,1)* aralığındaki ortalama değerini verir. TVaR, VaR' dan daha bilgilendirici ve kullanışlıdır.

$$TVaR_p = E\left[X \mid X < VaR_p\right] = \frac{\int_{-\infty}^{VaR_p} x f(x)\,dx}{P[X < VaR_p]} \qquad (2.50.)$$

2.8.4. Koşullu Kuyruk Bekleneni (Conditional Tail Expectation) (CTE)

X kaybı temsil eden bir rastgele değişken olsun. CTE,

$$CTE_p[X] = E\left(X \mid X > VaR_p[X]\right),\ 0 < p < 1 \qquad (2.51.)$$

olarak tanımlanır. CTE, en kötü %100.(1-p) durumdaki ortalama kayıptır. Ayrıca CTE tam bir risk ölçüsüdür. X, sürekli ise

$$CTE_p[X] = TVaR_p[X] \qquad (2.52.)$$

olarak ifade edilir.

2.9. Çeşitli Dağılımlar İçin Bazı Risk Ölçülerinin Hesaplanması

Her ne kadar yukarıda verilen risk ölçüleri Monte Carlo simülasyon yöntemiyle yaklaşık olarak hesaplanabilirse de bu ölçüleri tam/kesin olarak elde etmek ancak analitik yaklaşımlarla olur. Bu amaçla X kayıp değişkeni bir olasılık dağılımıyla modellenir. Bu durumda da model parametrelerini tahmin etme problemi

ortaya çıkar. Aşağıda çeşitli kayıp modeli varsayımları altında VaR ve TVaR hesaplamaları verilmiştir (Panjer, 2006).

2.9.1. Normal Dağılım

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2.53.}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip μ ortalamalı σ standart sapmalı normal dağılım ele alınsın. $\phi(x)$ ve $\Phi(x)$ sırasıyla standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonu olsun. $(\mu=0,\sigma=1)$ X rastgele değişkeninin VaR ve TVaR değerleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$VaR[X;p]=\mu+\sigma\,\Phi^{-1}(p) \tag{2.54.}$$

$$TVaR[X;p]=\mu+\sigma\,\frac{\phi\left(\Phi^{-1}(p)\right)}{1-p} \tag{2.55.}$$

2.9.2. Üstel Dağılım

$$f(x)=\frac{1}{\theta}exp\left(\frac{x}{\theta}\right) \tag{2.56.}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip θ ortalamalı üstel dağılım ele alınsın. X rastgele değişkeninin VaR ve TVaR değerleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$VaR_p(X)=-\theta ln(1-p) \tag{2.57.}$$

$$TVaR_p(X)=\theta-\theta ln(1-p) \tag{2.58.}$$

2.9.3. Student *t* Dağılımı

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\sigma\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left[1+\frac{1}{v}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{v+1}{2}} \tag{2.59.}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip μ ve σ parametreli, v serbestlik dereceli t dağılımı ele alınsın. $t(x)$ ve $T(x)$ sırasıyla standart t dağılımının $v>2$ serbestlik derecesi ile olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonu olsun. $(\mu=0,\sigma=1)$ X rastgele değişkeninin VaR ve TVaR değerleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$VaR[X;p]=\mu+\sigma\,T^{-1}(p) \tag{2.60.}$$

$$TVaR[X;p]=\mu+\sigma\,\frac{t\left(T^{-1}(p)\right)}{1-p}\left[\frac{v+\left(T^{-1}(p)\right)^2}{v-1}\right] \tag{2.61.}$$

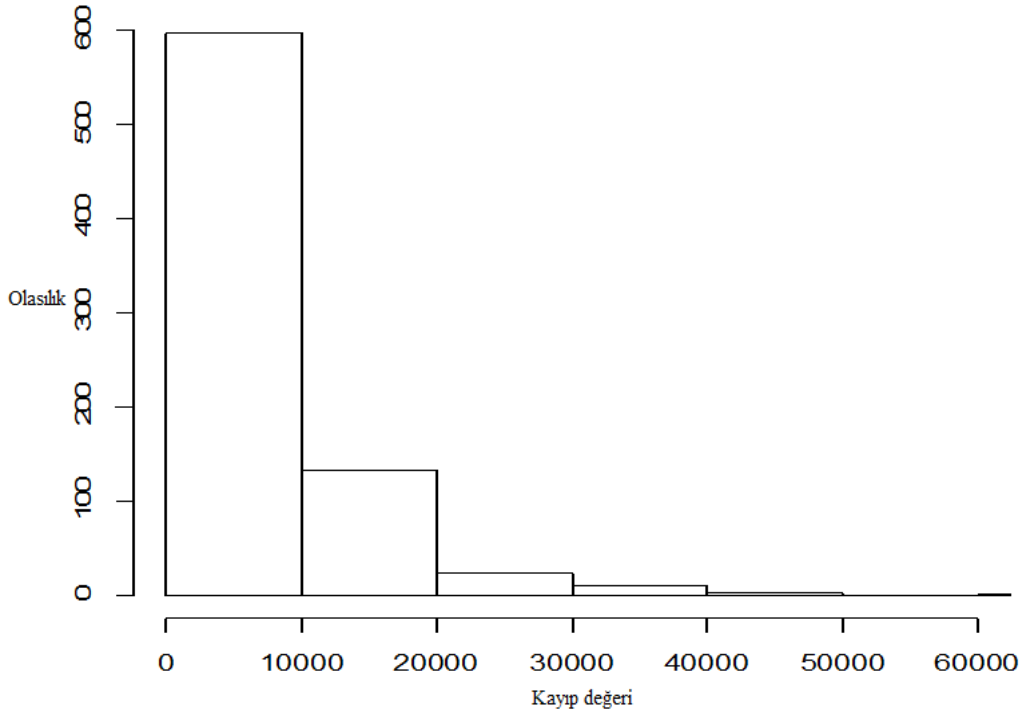
Çizelge 2.5. : Farklı *p* değerleri için risk ölçülerinin hesaplanması

p - değeri	Risk ölçüsü	Normal dağılım	Student t dağılımı	Üstel dağılım
0.9	VaR	8.845	9.4274	6.9077
	TVaR	10.2653	12.8147	9.9077
0.95	VaR	9.9344	11.045	8.9872
	TVaR	11.1887	15.4879	11.9872
0.99	VaR	11.9789	15.0947	13.8155
	TVaR	12.9965	25.0071	16.8155

3. ÜSLENDİRİLMİŞ FRÈCHET DAĞILIMI

Risk modellemesinde normalden daha kalın kuyruklu ve sağa çarpık dağılımların kullanıldığı bilinmektedir. Özellikle sigorta şirketlerinin yükümlülüklerini karşılayabilmesi ve devamlılığını sağlayabilmesi açısından incelenmesi gereken en önemli konulardan birisi, hasar tutarı dağılımlarının modellenmesidir.

Çok yüksek tutarda kayıpların gözlemlenmesi, kayıp dağılımının kuyruk alanının genişlemesine yol açar. Bu nedenle gerçekçi ve dengeli bir fiyatlandırmanın yapılabilmesi için hasar tutar dağılımlarının sağ kuyruk bölgesinin doğru şekilde modellenmesi gerekmektedir. Olasılığı düşük ancak kayıp değeri yüksek olan risklerin modellenmesinde kalın kuyruklu dağılımların kullanılması çok daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır.



Şekil 3.1. Pozitif tazminat taleplerinin tipik bir histogramı

Sıradan bir dağılımın genelleştirimini tanımlamanın alternatif bir yolu dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunun kuvvetini ya da 1 den farkını almaktır.

Bu da G^{a} ya da $1-\left(1-G\right)^{a}$ ile gösterilir öyle ki burada G temel dağılımdır. Bu yöntem üslendirilmiş tipteki dağılım ailelerini oluşturur ve bunlar literatürdeki çarpık veriyi modelleyen esneklikleriyle bilinirler. Örneğin, üslendirilmiş Weibull dağılımı, bathtub şekilli tehlike hız fonksiyonlu alternatif bir yaşam süresi modelidir (Mudholkar ve Srivastava, 1993). Üslendirilmiş Gumbel dağılımı çevre modellemede kullanılmıştır (Nadarajah ve Kotz, 2006). Üslendirilmiş sinh Cauchy dağılımı hem tek modlu çarpık veriyi hem de iki tepeli veriyi de modeller (Cooray K, 2013).

3.1. Üslendirilmiş Fréchet Dağılımının Tanımı ve Genel Özellikleri

Fréchet dağılımı uç değer olaylarını modellemek için uç değer analizinde kullanılan bir dağılımdır ve kümülatif dağılım fonksiyonu $\sigma,\lambda>0$ olmak üzere

$$G\left(y|\lambda,\sigma\right)=\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right] \qquad (3.1.)$$

şeklindedir.

Fréchet dağılımının daha esnek bir üslendirilmiş versiyonunu elde etmek için G^{a} yerine $1-\left(1-G\right)^{a}$ formunu kullanmak daha avantajlıdır çünkü ilk durumda α başka bir ölçek parametresi iken ikinci durumda ikinci bir şekil parametresi olarak önerilebilir. Bu durumda üslendirilmiş Fréchet dağılımı $1-\left(1-G\right)^{a}$ formu ile tanımlanmıştır. (Nadarajah ve Kotz, 2003). Dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$F\left(y|\alpha,\lambda,\sigma\right)=1-\left[1-exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right]^{\alpha} \qquad (3.2.)$$

$$f\left(y|\alpha,\lambda,\sigma\right)=\alpha\lambda\sigma^{\lambda}\left[1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right]^{\alpha-1}y^{-(1+\lambda)}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right] \qquad (3.3.)$$

Üslendirilmiş Fréchet dağılımı sağa çarpık bir dağılımdır (Nadarajah ve Kotz, 2003). Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunda $\alpha=1$ alınırsa sıradan Fréchet dağılımı elde edilirken λ=1 alınırsa ters genelleştirilmiş üstel dağılım elde edilir (Abouammoh ve Alshingiti, 2009).

Nadarajah ve Kotz (2003), dağılımın matematiksel özelliklerini çalışmış ve parametrelerin maksimum olabilirlik tahminlerini ele almışlardır. Devandra (2011) ve Jamjoom ve Al-Saiary (2012), üslendirilmiş Fréchet dağılımından gelen sıra istatistiğinin özelliklerini çalışmışlardır.

$$C=\frac{n!\alpha\lambda\sigma^{\lambda}}{(r-1)!(n-r)!} \qquad (3.4.)$$

olmak üzere, r-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f_{r:n}\left(y\right)=C\left[1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right]^{\alpha-1}y^{-(1+\lambda)}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\left[1-\left(1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right)^{\alpha}\right]^{r-1}\left[1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right]^{\alpha(n-r)} \qquad (3.5.)$$

$\sigma^{\lambda}=t$ alarak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f\left(y|\alpha,\lambda,t\right)=\alpha\lambda t\left[1-\exp\left[-\left(\frac{t}{y^{\lambda}}\right)\right]\right]^{\alpha-1}y^{-(1+\lambda)}\exp\left[-\left(\frac{t}{y^{\lambda}}\right)\right] \qquad (3.6.)$$

Tanım: X r.d. ninin dağılımının sağa doğru uzun kuyruklu olabilmesi için,

$t>0$ olmak üzere,

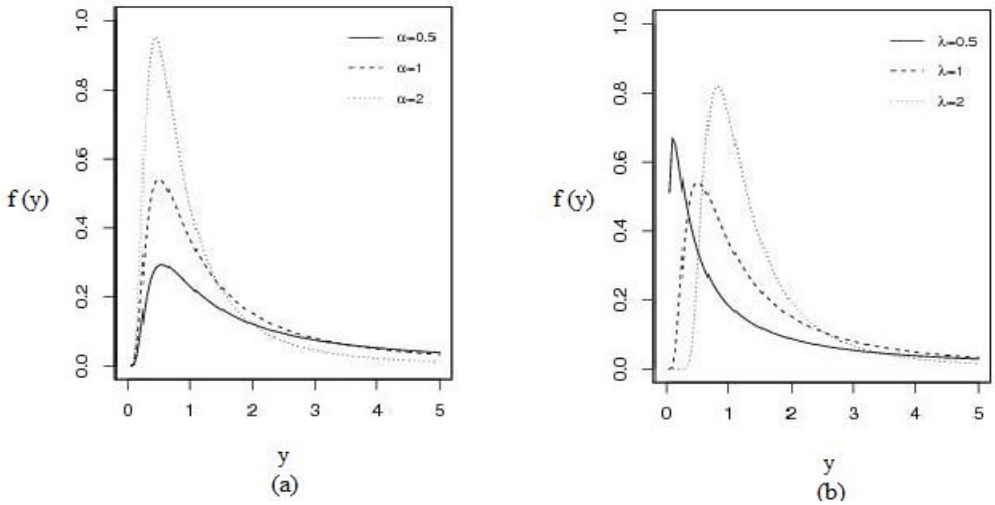
$$\lim_{x \to \infty} P\left(X > X + t \middle| X > x\right) = 1$$

sağlanmalıdır.

Üslendirilmiş Fréchet dağılımının Fréchet dağılımı gibi uzun kuyruklu bir dağılım olduğu yukarıdaki tanımdan kolayca gösterilebilir (Asmussen, (2003)., s.412).

Büyük kayıplar uzun sağ kuyruk dağılımlarını genellediğinden, onları modellemek için bir uç değer dağılımı ya da üslendirilmiş Fréchet gibi bir genellemesini kullanmak uygundur (Panjer, (2006)., s.207).

Üslendirilmiş Fréchet dağılımı $EF(a, l, t)$ ile gösterilir. Diğer parametreleri sabit tutulduğunda daha kalın kuyrukların daha küçük α ile ilişkili olduğu gözlemlenir. Aynı ifadeler λ için de doğrudur öyle ki artan λ için daha tepeli dağılımlar elde edildiği şekil (3.2.) de görülmektedir. Böylelikle üslendirilmiş Fréchet dağılımının sıradan Fréchet dağılımından daha esnek olduğu söylenebilir.



Şekil 3.2. Farklı şekil parametreleri için üslendirilmiş Fréchet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafikleri (a) λ = τ = 1, (b) α = τ =1

4. ÜSLENDİRİLMİŞ FRÈCHET DAĞILIMININ AKTÜERYAL İSTATİSTİKTE KULLANIMI

Ne Fréchet dağılımı ne de üslendirilmiş genelleştirimi bir regresyon çözümlemesinde kullanılmamıştır. Buna rağmen bir regresyon modelindeki bağımlı değişken Fréchet gibi uzun kuyruklu bir dağılıma sahip olabilir. Bu çalışmada bir lineer regresyon modeli oluşturulacaktır öyle ki yanıt değişken Y_i ler bağımsız, üslendirilmiş Fréchet dağılımına sahip fakat özdeş olmayan değişkenlerdir. Genelleştirilmiş lineer modellerde yanıt değişkenin dağılımının açıklayıcı değişkenlerdeki bağımlılığı, yanıt değişkenin ortalaması yolu ile modellenir (McCullagh ve Nelder, 1992). Buna rağmen kalın kuyruklu dağılımlar için ortalama her zaman mevcut değildir. Böyle dağılımlar bir model parametresi ve açıklayıcı değişken arasındaki bir link fonksiyonu ile regresyon modellerine genişletilir (Lawless, 1982), (Beirlant, Goegebeur, Verlaak ve Vynckier, 1998), (Beirlant ve Goegebeur, 2003). Bu yüzden şekil parametresi vasıtasıyla bir regresyon modeli için açıklayıcı değişkenlerin bir fonksiyonu olarak α ya da λ parametrelerinden biri seçilmelidir. Bu çalışmada α dışarda tutularak λ seçilir çünkü modelin sıradan Fréchet regresyon modelini içermesi istenmektedir. Diğer taraftan ölçek parametresi yoluyla tek ölçek parametresi τ bir regresyon modeli için açıklayıcı değişkenlerin bir fonksiyonu olacaktır.

Model parametreleri λ ve τ pozitif olduğundan modeldeki pozitif, sürekli ve iki kez türevlenebilen link fonksiyonu kullanılmalıdır. Bu yüzden olabilirlik hesaplarının kolaylığı ve çözülebilirliği için ve regresyon katsayılarının ve gelişimlerinin faydalı yorumları için ortak kullanılan üstel link fonksiyonu ele alınacaktır. İlk olarak (4.1.) ile verilen parametrizasyon üzerine kurulan regresyon modeli düşünülecektir.

$$Y_i \mid x_i \sim EF(\alpha, \lambda_i, \tau), \quad \lambda_i = \exp(\theta' x_i) \tag{4.1.}$$

Bu parametrizasyonda sadece şekil parametresi λ, x e bağlıdır ve üstel fonksiyon $\exp(\theta' x_i)$ üzerinden yoğunluk fonksiyonunu açıklayıcı değişkenlere bağlar.

İkinci olarak, konum-ölçek tipi regresyon modeli elde etmek için üslendirilmiş Fréchet ve üslendirilmiş Gumbel dağılımları arasındaki ilişki kullanılır. Y, $\sigma = 1$ ile (1) numaralı kdf ye sahipse, $Z = \log Y + \mu$, konum parametresi μ ve ölçek parametresi 1/λ ile üslendirilmiş Gumbel dağılımına sahiptir.

$$Y_i | x_i \sim EF(\alpha, \lambda, \tau_i), \tau_i = \exp(\lambda \theta' x_i) \tag{4.2.}$$

Bu parametrizasyonda (4.3.) ile verilen rastgele değişken,

$$Z_i = \log Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.3.}$$

üslendirilmiş Gumbel dağılımına sahiptir ve $\mu = \theta' x_i$ dağılıma bir konum parametresi olarak hizmet eder. Sonrasında regresyon fonksiyonu,

$$E(Y_i | x_i) = C \exp(\theta' x_i) \tag{4.4.}$$

(4.4.) ile verilen formdadır öyle ki $C = E\left(\exp\left(\frac{1}{\lambda} Z\right)\right)$ ve Z' üslendirilmiş Gumbel dağılımının standart formudur. Burada C nin diğer model parametrelerinin (konum dışı) bir fonksiyonu olduğu söylenebilir. Regresyon katsayıları oransal değişim yönünden yorumlanabilir öyle ki

$$\frac{\partial \log E(Y | x)}{\partial x_k} = \theta_k \tag{4.5.}$$

şeklindedir (Frees, (2010)., s.443), (Manning, Basu ve Mullahy, 2005). Ayrıca rezidüler bu parametrizasyonda $\log Y - \hat{\theta}' x$ olarak kolayca tanımlanabilir.

Şekil parametresi λ bir gözlemden diğerine değiştiğinden, Parametrizasyon I daha esnek bir yapıdadır. Diğer taraftan Parametrizasyon II, dağılımın konumuyla ilişkili ölçek parametresine dayalı olarak daha doğal bir yapıdadır.

Aktüeryal uygulamalarda Y_i i-inci kontrat için ödenen miktar ve x_i i-inci konrat ile ilişkili açıklayıcı değişkenlerin vektörüdür. Bir motor sigortası sözleşmesinde x_i sigortalanmış kişinin ya da aracın karakteristiklerini içermektedir. Aktüeryal uygulamalarla literatürde kullanılan diğer bazı regresyon modelleri GB2 regresyon (McDonald ve Butler, 1990), Burr regresyon(Beirlant, Goegebeur, Verlaak ve Vynckier, 1998), üstel ters Gaussian regresyon (Frangos ve Karlis, 2004), Birnbaum-Saunders regresyon (Paula, Leiva, Barros ve Liu, 2012), gama-genelleştirilmiş ters Gaussian regresyon (Gómez-Dèniz, Calderin-Ojeda, Sarabia, 2013) olarak verilebilir.

Rezidüler, kantil plotları aracılığıyla uydurulmuş modellerin kalitesini ölçer ve açıklayıcı değişkenlerden bağımsız olarak, bağımsız ve özdeş dağılmış olarak tanımlanır. (Lawless , (1982)., s.285)

Aktüerler çoğunlukla bazı yararlı ölçüleri kullanarak sigorta riskinin miktarını belirlemeyle ilgilenirler. Bu risk ölçüleri Monte Carlo simülasyon yöntemleriyle tahmin edilebildiği halde analitik bir yaklaşım olarak olasılıksal dağılım varsayılarak hesaplanabilir.

4.1. Maksimum Olabilirlik Tahminleri

Aktüeryada *y* bağımlı değişkenleri uzun kuyruklu dağılıma sahip olarak yer almaktadır. Burada *y* bağımlı değişkenin pozitif olması durumunda geçerli olan bir regresyon modeli inşa edilecek ve bunun aktüeryal uygulamaları verilecektir. Üslendirilmiş Frechet dağılımı uzun kuyruklu bir dağılımdır ve daha önceden literatürde tek değişkenli olarak çalışılmıştır. Burada ilk defa regresyonda kullanılacaktır.

Burada oluşturulacak regresyon modelinde sigorta şirketiyle yapılan anlaşma üzerinden gidilerek, x_i lerin şirketle yapılan kontratları, y_i lerin ise her bir kontrat

için ödenen parayı temsil ettiği düşünülecektir. Bu aşamadan sonra model, kontrat ve kontratla ilişkili açıklayıcı değişkenler de modelin içindeyken incelenecektir. Bu açıklayıcı değişkenler de link fonksiyonu yardımıyla modele dahil edilip model yeniden parametrize edilerek regresyon modeli kurulacaktır.

Üslendirilmiş Fréchet dağılımı şekil ve ölçek parametrelerine sahip olduğu için, açıklayıcı değişkenleri bir regresyon modelinin içine dahil etmenin iki yolu vardır. Bunlardan birincisi Parametrizasyon I diye adlandırdığımız şekil parametresi yoluyla olurken, diğeri ise Parametrizasyon II diye adlandırdığımız ölçek parametresi yoluyla gerçekleşir.

4.1.1. Parametrizasyon I

Parametrizasyon I de regresyon modeli şekil parametresi yolu ile ele alınır. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ bağımsız rastgele değişkenleri ve $Y_i | x_i \sim EF(\alpha, \lambda_i, \tau)$, $\lambda_i = \exp(\theta' x_i)$, $x_i' = (1, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$, $\theta' = [\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k]$, *(i= 1,2,…,k)* olmak üzere, koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_i|x_i} = \alpha \exp(\theta' x_i)\tau \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}}\right)\right)\right]^{\alpha-1} \cdot y_i^{-(1+\exp(\theta' x_i))} \exp\left(-\left(\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}}\right)\right) \tag{4.6.}$$

eşitliğindeki gibidir.

Birinci parametrizasyon için maksimum olabilirlik fonksiyonu ve logaritması,

$$L(\alpha, \tau, \theta | y) = (\alpha\tau)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \theta' x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}}\right)\right)\right]^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n} y_i^{-(1+\exp(\theta' x_i))} \tag{4.7.}$$

$$\log L(\alpha,\theta,\gamma|y) = n\log\alpha + n\log\theta + \sum_{i=1}^{n}\gamma x_i + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left[1-\exp\left(-\frac{\theta}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[1+\exp(\gamma x_i)\right]\log(y_i) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}} \quad (4.8.)$$

eşitliklerindeki gibidir ve birinci dereceden türevleri hesaplanarak maksimum olabilirlik kestirim denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\log\left[1-\exp\left(-\frac{\theta}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}}\right)\right] = 0 \quad (4.9.)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}(y_i)^{-\exp(\gamma x_i)} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\exp\left(-\frac{\theta}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}}\right)(y_i)^{-\exp(\gamma x_i)}}{\left[1-\exp\left(-\frac{\theta}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}}\right)\right]} = 0 \quad (4.10.)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}x_{ij} + \theta\sum_{i=1}^{n}\frac{\log(y_i)\exp(\gamma x_i)x_{ij}}{y_i^{\exp(\gamma x_i)}} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{-\exp\left(-\theta\, y_i^{-\exp(\gamma x_i)}\right)\left(\theta\log(y_i)\exp(\gamma x_i)x_{ij}\right)y_i^{-\exp(\gamma x_i)}}{\left(1-\exp\left(-\theta\, y_i^{-\exp(\gamma x_i)}\right)\right)} - \sum_{i=1}^{n}\log(y_i)\exp(\gamma x_i)x_{ij} = 0. \quad (4.11.)$$

(4.9.) eşitliğinin açık bir çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}\right)\right)}. \qquad (4.12.)$$

Bu çözüm son iki tahmin denkleminde yerine koyulursa $j = 0,1 ,\ldots, p-1$ olmak üzere, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$\frac{n}{\tau} = \left(1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}\right)\right)}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}\right)}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}\right)\right)} y_i^{-\exp(\theta x_i)} + \sum_{i=1}^{n} \left(y_i\right)^{-\exp(\theta x_i)} \qquad (4.13.)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \tau\left(1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}\right)\right)}\right)$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} \frac{-\exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\left(\tau \log\left(y_i\right)\exp\left(\theta x_i\right) x_{ij}\right) y_i^{-\exp(\theta x_i)}}{\left(1-\exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\right)} \qquad (4.14.)$$
$$-\sum_{i=1}^{n} \log\left(y_i\right)\exp\left(\theta x_i\right) x_{ij} + \tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(y_i)\exp\left(\theta x_i\right) x_{ij}}{y_i^{\exp(\theta x_i)}}$$

Nümerik iteratif prosedür kullanılarak bu denklemlerin çözümü elde edilebilir.

4.1.2.Gözlenen Fisher Bilgi Matrisi

Gözlenen Fisher bilgi matrisi,

$$I = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} & \cdots & I_{1,3+j} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} & \cdots & I_{2,3+j} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} & \cdots & I_{3,3+j} \end{bmatrix} = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha \partial \tau} & \cdots & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha \partial \theta_j} \\ & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \tau^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_j \partial \tau} \\ & & \vdots & \\ & & \cdots & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilmektedir.

Parametrizasyon I için $\phi=(\alpha,\tau,\theta)$ olmak üzere ϕ nin asimptotik varyans - kovaryans matrisi Acov(ϕ), beklenen Fisher bilgi matrisinin tersine eşittir öyle ki $Acov(\phi) = I^{-1}(\phi)$ dir.

Matrisin elemanlarını elde etmek için öncelikle birinci parametrizasyon için maksimum olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının ikinci dereceden türevleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} \tag{4.15.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \tau \partial \alpha} = \frac{exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\left(y_i\right)^{-\exp(\theta x_i)}}{\left(1-exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\right)} \tag{4.16.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_j \partial \alpha} = \frac{-exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\left(\tau \ln\left(y_i\right)\exp\left(\theta x_i\right)x_{ij}\right)y_i^{-\exp(\theta x_i)}}{\left(1-exp\left(-\tau\, y_i^{-\exp(\theta x_i)}\right)\right)} \tag{4.17.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial t^2} = \frac{-n}{t^2} + (a-1)\sum_{i=1}^{n} y_i^{-2\exp(\theta' x_i)} \frac{exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)}{\left(1-exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)\right)^2} \tag{4.18.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_j \partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(y_i)\exp(\theta' x_i)\, x_{ij}}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}} + (a-1)\sum_{i=1}^{n} exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)$$

$$\times \log(y_i)\exp(\theta' x_i)\, x_{ij} \frac{\left[1-y_i^{\exp(\theta' x_i)}\left(1-exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)\right)\right]}{y_i^{2\exp(\theta' x_i)}\left(1-exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)\right)^2} \tag{4.19.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_k \partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{n} \log(y_i)\exp(\theta' x_i)\, x_{ij} x_{ik} \left[-1+t\left(\frac{1-\exp(\theta' x_i)\log(y_i)}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}}\right)\right]$$

$$-(a-1)t\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \log(y_i)\exp(\theta' x_i)\, exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right) \tag{4.20.}$$

$$\times \left[\frac{\left(1-\exp(\theta' x_i)\log(y_i)\right)}{y_i^{\exp(\theta' x_i)}\left(1-exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)\right)} + \frac{\exp(\theta' x_i)\log(y_i)t}{y_i^{2\exp(\theta' x_i)}\left(1-exp\left(-t\, y_i^{-\exp(\theta' x_i)}\right)\right)^2}\right]$$

İkinci dereceden türevler elde edildikten sonra bu türevlerin negatif beklenen değerleri alınarak bilgi matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$h(x;a,b) = \binom{a-x}{r}(-1)^r \frac{\left[\psi(a) - \log(b)\right]^x}{b^a}(x-1)!$$

$$h(x;r) = \binom{a-x}{r}(-1)^r \frac{1}{(r+x)^2}\left[\psi(2) - \log(x+r)\right]\left[1+\psi(2) - \log(x+r) - 2\log t\right) + \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik}$$

olmak üzere,

(Gradshteyn ve Ryzhik 2007 formül (4.253.1) yardımıyla)

$$I_{1,1} = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2}\right] = \frac{n}{a^2} \tag{4.21.}$$

$$I_{1,2} = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial t}\right] = \frac{n}{t\,(a-1)}\left[\psi(2) - \psi(a+1)\right] \tag{4.22.}$$

olarak bulunur.

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt$$

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$$

$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\log x}{1-x}\,dx = -\psi'(m)$ (Gradshteyn ve Ryzhik 2007 formül (4.251.4) yardımıyla)

olmak üzere,

$$I_{1,3+j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial \theta_j}\right] = -\sum_{r=0}^{\infty}\binom{a-2}{r}(-1)^r \frac{1}{(2+r)^2}\left[\psi(2) - \log(2+r)\right] \tag{4.23.}$$

olarak bulunur.

(Gradshteyn ve Ryzhik 2007 formül (4.352.1) yardımıyla)

$$I_{2,2} = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial t^2}\right] = \frac{n}{t^2}\left[1 - \left\{\left[\psi(2) - \psi(a)\right]^2 + \psi'(2) - \psi'(a)\right\}\right] \tag{4.24.}$$

(Gradshteyn ve Ryzhik 2007 formül (4.261.17) yardımıyla)

$$I_{2,3+j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_j \partial t}\right]$$

$$= \frac{B\alpha}{t}\left[\sum_{r=0}^{\infty} h(1;2,(r+1)) + ((\alpha-1)\left(h(3;3,(r+2)) - (\alpha-1)\left(h(2;2,r+2)\right)\right)\right] \qquad (4.25.)$$

$$+ \frac{B\alpha}{t}\frac{B\log t}{t}\left[\psi(1) - \psi(2)) - \frac{\alpha}{(\alpha-2)}\left\{(\psi(2) - \psi(\alpha))^2 + \psi'(2) - \psi'(\alpha)\right\}\right]$$

$$I_{3,3+j} = -E\left[\frac{\partial^2 lnL}{\partial \theta_k \partial \theta_j}\right]$$

$$= B\log(t)\left\{\frac{1}{t}\left[1 + (\psi(1) - \psi(2))(1 - \log(t))\right] + \frac{\alpha\log(t)}{(\alpha-2)}\left[(\psi(2) - \psi(\alpha))^2 + (\psi'(2) - \psi'(\alpha))\right]\right\}$$

$$- \frac{\alpha B\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{r}(-1)^r\left[\psi(1) - \log(r+1)\right]}{(r+1)} + \alpha b\sum_{r=0}^{\infty}\left[h(1;r) - (\alpha-1)h(2;r)\right] \qquad (4.26.)$$

$$- B\alpha(\alpha-1)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha-3}{r}(-1)^r\frac{2}{(r+2)^3}$$

$$\left\{\frac{1}{t}\left[(\psi(3) - \log(r+2))\left(2\log(t) - \psi(3) + \log(r+2)\right) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{4}\right]\right.$$

olarak bulunur.

4.1.3. Parametrizasyon II

Parametrizasyon II de regresyon modeli ölçek parametresi yolu ile ele alınacaktır.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bağımsız rastgele değişkenleri ve $Y_i | x_i \sim EF(\alpha, \lambda, t_i)$, $t_i = \exp(\lambda\theta x_i)$, $Z_i = \log Y_i$, *i=1,2,…,n* olarak ele alındığında konum parametresi θx_i ile *EG* dağılımı elde edilir. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ rastgele değişkenleri için olabilirlik fonksiyonu ve logaritması

$$L(\alpha,\lambda,\theta|z)=(\alpha\lambda)^n exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}(z_i-\theta)\right)exp\left(-\sum_{i=1}^{n}exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right)\right)$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\left\{1-exp\left(-exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right)\right)\right\}^{\alpha-1} \quad (4.27.)$$

$$\log L(\alpha,\lambda,\theta|z)=n\log(\alpha)+n\log(\lambda)-\lambda\sum_{i=1}^{n}(z_i-\theta)$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right) \quad (4.28.)$$

olarak gösterilir ve birinci dereceden türevleri hesaplanarak maksimum olabilirlik kestirim denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)\right)=0 \quad (4.29.)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}(z_i-\theta)$$
$$-(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-\theta)\exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right)\exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)}{1-\exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)} \quad (4.30.)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(z_i-\theta)\exp(-\lambda(z_i-\theta))=0$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\theta_j}=\lambda\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$$
$$+\lambda(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)\exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right)x_{ij}}{1-\exp\left(-\exp(-\lambda(z_i-\theta))\right)} \quad (4.31.)$$
$$-\lambda\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\lambda(z_i-\theta)\right)x_{ij}=0$$

Yukarıdaki (4.29.) eşitliğinin açık bir çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left\{1-\exp\left[-\exp\left(-\lambda\left(z_i-\theta' x_i\right)\right)\right]\right\}}. \tag{4.32.}$$

Bu çözümü son iki tahmin denkleminde yerine koyarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

j=0,1,…,p-1 olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{n}{\lambda} &= \sum_{i=1}^{n}\left(z_i-\theta x_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(z_i-\theta x_i\right)\exp\left(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)\\ &\quad\left(1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} log\left(1-\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)\right)\right)}\right)\\ &\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i-\theta x_i\right)\exp\left(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)}{1-\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)}\end{aligned} \tag{4.33.}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-\lambda\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)x_{ij}-\left(1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} log\left(1-\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)\right)\right)}\right)\\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ij}\exp\left(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)}{1-\exp\left(-\exp(-\lambda\left(z_i-\theta x_i\right)\right)}=0\end{aligned} \tag{4.34.}$$

Nümerik iteratif prosedür kullanılarak bu denklemlerin çözümü elde edilebilir.

Parametrizasyon II için $\phi=(\alpha,\lambda,\theta)$ ve $R_i=z_i-\theta' x_i$ olmak üzere log – olabilirlik fonksiyonunun ikinci dereceden türevleri aşağıdaki gibi bulunur. İkinci dereceden türevlerin negatif beklenen değerleri çok uzun ve meşakkatli işlemler gerektirdiğinden burada yer verilmemiştir.

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2}=-\frac{n}{\alpha^2} \tag{4.35.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha \partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i \exp(-\lambda R_i)\exp(-\exp(-\lambda R_i))}{1-\exp(-\exp(-\lambda R_i))} \tag{4.36.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha \partial \theta_j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij} \exp(-\lambda R_i)\exp(-\exp(-\lambda R_i))}{1-\exp(-\exp(-\lambda R_i))} \tag{4.37.}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \exp(-\lambda R_i) - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2 \exp(-\exp(-\lambda R_i))\exp(-\lambda R_i)}{1-\exp(-\exp(-\lambda R_i))} \left[\frac{\exp(-\lambda R_i)}{1-\exp(-\exp(-\lambda R_i))} - 1 \right] \tag{4.38.}$$

$j = 0,1,\ldots, p-1$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \exp(-\lambda R_i)(\lambda R_i - 1) - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \exp(-\lambda R_i)\exp(-\exp(-\lambda R_i)) \left[\frac{\lambda R_i - 1}{1-\exp(-\exp(-\lambda R_i))} - \frac{\lambda R_i \exp(-\lambda R_i)}{(1-\exp(-\exp(-\lambda R_i)))^2} \right] \tag{4.39.}$$

$j,k = 0,1,\ldots, p-1$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = -\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \exp(-\lambda R_i) + \lambda^2 (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \exp(-\lambda R_i)\exp(-\exp(-\lambda R_i)) \left[\frac{1-\exp(-\lambda R_i)-\exp(-\exp(-\lambda R_i))}{(1-\exp(-\exp(-\lambda R_i)))^2} \right] \tag{4.40}$$

4.2. Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, 4.1. kısmında elde edilen maksimum olabilirlik tahminlerini deneysel olarak incelenecektir. Bu simülasyon çalışmasında gerçeğe daha yakın sonuç elde etmek için çok sayıda küçük tazminat talebi ve az da olsa büyük tazminat talebi içeren tipik sigorta verisinin doğası gereği sadece büyük örneklemler ele alınacaktır.

Parametrizasyon I de $t = 4$ ve Parametrizasyon II de $\lambda = 2$ alınarak $\alpha = 0.5$, 1 ve 1.5 için $q' = (-1, 3)$, $x' = (1, x)$ olmak üzere boyutları n = 200, 500, 1000 ve 2000 olan 2000 veri kümesi maksimum olabilirlik tahminlerinin performansını görmek için oluşturulmuştur. Açıklayıcı değişken x in değerleri (0,1) aralığında tanımlanan düzgün dağılımdan üretilmiştir. Bütün hesaplamalar L-BFGS-B optimizasyon yöntemi kullanılarak (Byrd ve ark, 1995), optim komutu ile R programında (R Core Team, 2014) yürütülmüştür. Çizelge 4.1. – Çizelge 4.6. da, örneklem ortalaması, örneklem varyansı, asimptotik varyans, örneklem varyansının asimptotik varyansa oranı, yanlılık, bağıl yanlılık ve hata kareler ortalaması rapor edilmiştir. Gözlenen Fisher bilgi matrisinin tersinin köşegen elemanları hesaplanarak asimptotik varyanslar elde edilmiştir.

Çizelge 4.1. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları ($\alpha = 0.5$)

Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	0.5	0.5254	0.0256	0.0293	0.8737	0.0254	1.0508	0.0262
t	4	4.1943	0.3347	0.3186	1.0505	0.1943	1.0486	0.3723
q_0	-1	-0.9858	0.0504	0.0544	0.9265	0.0142	0.9858	0.0506
q_1	3	2.9999	0.0308	0.0287	1.0732	-0.0001	1.0000	0.0308
n=500								
α	0.5	0.5160	0.0094	0.0098	0.9592	0.0160	1.0320	0.0096
t	4	4.0750	0.0920	0.0953	0.9654	0.0750	1.0188	0.0976
q_0	-1	-1.0041	0.0196	0.0202	0.9703	-0.0041	1.0041	0.0196
q_1	3	2.9998	0.0115	0.0114	1.0088	-0.0002	0.9999	0.0115
n=1000								
α	0.5	0.5116	0.0044	0.0046	0.9565	0.0116	1.0232	0.0046
t	4	4.0353	0.0461	0.0449	1.0267	0.0353	1.0088	0.0474
q_0	-1	-1.0082	0.0095	0.0099	0.9596	-0.0082	1.0082	0.0095
q_1	3	2.9994	0.0057	0.0057	1.0000	-0.0006	0.9998	0.0057
n=2000								
α	0.5	0.5109	0.0022	0.0022	1.0000	0.0109	1.0218	0.0024
t	4	4.0161	0.0225	0.0218	1.0321	0.0161	1.0040	0.0228
q_0	-1	-1.0107	0.0048	0.0049	0.9796	-0.0107	1.0107	0.0049
q_1	3	2.9977	0.0029	0.0028	1.0357	-0.0023	0.9992	0.0029

Çizelge 4.1., α=0.5 alınarak Parametrizasyon I için simülasyon sonuçlarını vermektedir. Çizelgeden görüldüğü gibi örneklem büyüklüğü artarken tahminler gerçek değerine yaklaşmakta, değeri 1' e yaklaşan daha az yanlı değerler, varyans oranları ve bağıl yanlı değerler ortaya çıkmaktadır. Artan örneklem boyutları için, örneklem varyansları, asimptotik varyanslar ve MSE ler giderek azalmaktadır.

Çizelge 4.2. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları (α = 1)

Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	1	1.0707	0.1559	0.1666	0.9358	0.0707	1.0707	0.1608
t	4	4.1308	0.1678	0.1617	1.0377	0.1308	1.0327	0.1849
q_0	-1	-0.9847	0.0473	0.0451	1.0488	0.0153	0.9847	0.0475
q_1	3	3.0013	0.0249	0.0235	1.0596	0.0013	1.0004	0.0249
n=500								
α	1	1.0305	0.0479	0.0488	0.9816	0.0305	1.0305	0.0488
t	4	4.0425	0.0594	0.0584	1.0171	0.0425	1.0106	0.0612
q_0	-1	-0.9966	0.0166	0.0172	0.9651	0.0034	0.9966	0.0166
q_1	3	2.9971	0.0093	0.0094	0.9894	-0.0029	0.9990	0.0093
n=1000								
α	1	1.0164	0.0221	0.0222	0.9955	0.0164	1.0164	0.0224
t	4	4.0179	0.0305	0.0285	1.0702	0.0179	1.0045	0.0308
q_0	-1	-1.0006	0.0085	0.0085	1.0000	-0.0006	1.0006	0.0085
q_1	3	3.0005	0.0046	0.0047	0.9787	0.0005	1.0002	0.0046
n=2000								
α	1	1.0078	0.0101	0.0105	0.9614	0.0078	1.0078	0.0102
t	4	4.0161	0.0135	0.0142	0.9562	0.0161	1.0040	0.0138
q_0	-1	-0.9990	0.0041	0.0042	0.9846	0.0010	0.9990	0.0041
q_1	3	2.9994	0.0023	0.0023	0.9844	-0.0006	0.9998	0.0023

Çizelge 4.2., α=1 alınarak, Parametrizasyon I için simülasyon sonuçlarını vermektedir. Örneklem büyüklüğü *n*=200, *n*=500, *n*=1000 ve *n*=2000 alınarak tahminlerdeki farklılıklar gözlemiştir. Örneklem büyüklüğündeki artışa ters olarak yanlı değerler, varyans oranları, bağıl yanlı değerler, örneklem varyansları, asimptotik varyanslar ve MSE ler giderek azalmaktadır.

Çizelge 4.3. Parametrizasyon I için Simülasyon Sonuçları ($\alpha = 1.5$)

Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	1.5	1.6785	0.6558	0.7915	0.8287	0.1785	1.1190	0.6874
t	4	4.1076	0.1487	0.1465	1.0156	0.1076	1.0269	1.1602
q_0	-1	-0.9989	0.0458	0.0443	1.0346	0.0011	0.9989	0.0458
q_1	3	3.0034	0.0223	0.0216	1.0357	0.0034	1.0011	0.0223
n=500								
α	1.5	1.5382	0.1297	0.1359	0.9550	0.0382	1.0255	0.1311
t	4	4.0312	0.0534	0.0545	0.9793	0.0312	1.0078	0.0543
q_0	-1	-0.9960	0.0168	0.0168	0.9980	0.0040	0.9960	0.0168
q_1	3	3.0047	0.0084	0.0086	0.9792	0.0047	1.0016	0.0084
n=1000								
α	1.5	1.5208	0.0586	0.0611	0.9594	0.0208	1.0139	0.0590
t	4	4.0252	0.0267	0.0268	0.9963	0.0252	1.0063	0.0273
q_0	-1	-0.9968	0.0084	0.0083	1.0168	0.0032	0.9968	0.0084
q_1	3	3.0009	0.0041	0.0043	0.9553	0.0009	1.0003	0.0041
n=2000								
α	1.5	1.5127	0.0283	0.0291	0.9713	0.0127	1.0085	0.0284
t	4	4.0082	0.0132	0.0133	0.9970	0.0082	1.0021	0.0133
q_0	-1	-0.9999	0.0039	0.0041	0.9627	0.0001	0.9999	0.0039
q_1	3	2.9992	0.0021	0.0021	1.0048	-0.0008	0.9997	0.0021

Çizelge 4.3. α=1.5 alınarak, Parametrizasyon I için simülasyon sonuçlarını vermektedir. Çizelge 4.1. ve 4.2. de yapılmış olan değerlendirmeler bu çizelge için de aynı şekilde yorumlanabilir.

Çizelge 4.4. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları ($\alpha = 0.5$)

Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	0.5	0.5031	0.0247	0.0272	0.9066	0.0031	1.0062	0.0247
λ	2	2.1514	0.2526	0.2657	0.9505	0.1514	1.0757	0.2754
q_0	-1	-0.9981	0.0285	0.0298	0.9580	0.0019	0.9981	0.0285
q_1	3	3.0016	0.0302	0.0283	1.0694	0.0016	1.0005	0.0302
n=500								
α	0.5	0.5020	0.0094	0.0093	1.0101	0.0020	1.0040	0.0094
λ	2	2.0542	0.0778	0.0772	1.0083	0.0542	1.0271	0.0807
q_0	-1	-0.9978	0.0114	0.0113	1.0060	0.0022	0.9978	0.0114
q_1	3	2.9997	0.0117	0.0113	1.0310	-0.0003	0.9999	0.0116
n=1000								
α	0.5	0.5020	0.0045	0.0044	1.0165	0.0020	1.0040	0.0045
λ	2	2.0218	0.0358	0.0354	1.0121	0.0218	1.0109	0.0363
q_0	-1	-0.9973	0.0057	0.0056	1.0217	0.0027	0.9973	0.0057
q_1	3	2.9991	0.0056	0.0057	0.9882	-0.0009	0.9997	0.0056
n=2000								
α	0.5	0.5024	0.0023	0.0022	1.0615	0.0024	1.0048	0.0023
λ	2	2.0086	0.0180	0.0171	1.0519	0.0086	1.0043	0.0180
q_0	-1	-0.9977	0.0029	0.0028	1.0524	0.0023	0.9977	0.0029
q_1	3	2.9990	0.0030	0.0028	1.0584	-0.0010	0.9997	0.0030

Çizelge 4.4. α=0.5 alınarak, Parametrizasyon II için simülasyon sonuçlarını içermektedir. Örneklem büyüklüğü artarken tahminlerin gerçek değerine yaklaştığı ve diğer değerlerin giderek azaldığı bu çizelgeden de görülmektedir.

Çizelge 4.5. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları (α = 1)

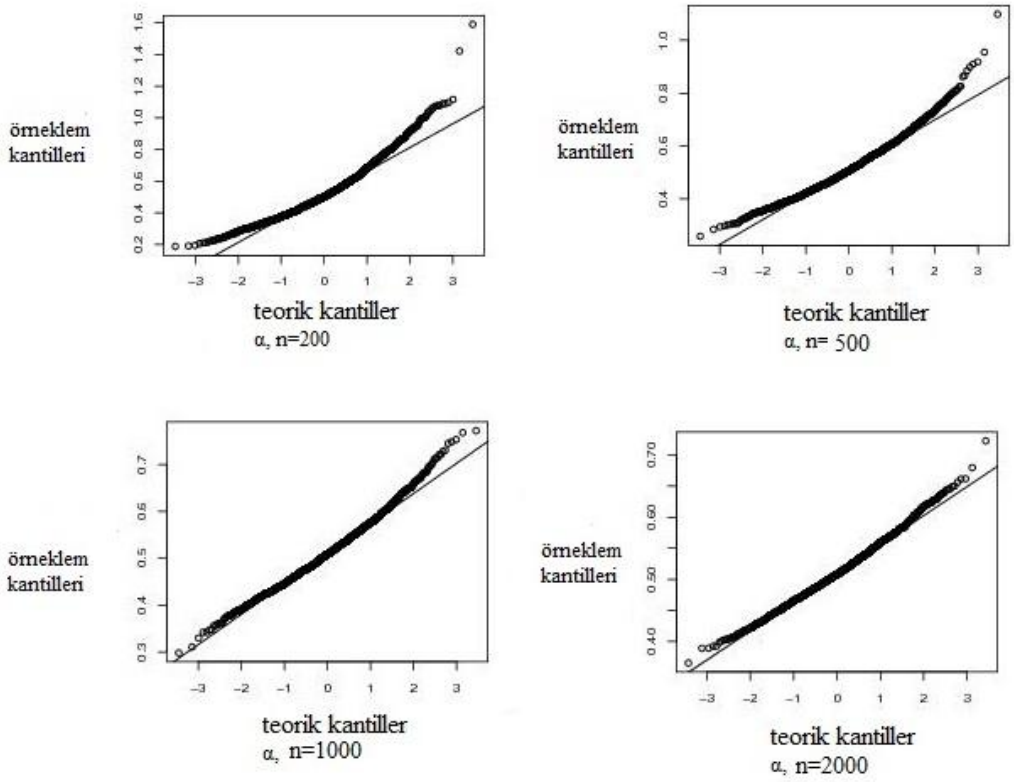
Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	1	1.0256	0.1495	0.1593	0.9390	0.0256	1.0256	0.1501
λ	2	2.1321	0.2075	0.1963	1.0573	0.1321	1.0661	0.2249
q_0	-1	-1.0010	0.0275	0.0279	0.9841	-0.0010	1.0010	0.0274
q_1	3	2.9996	0.0158	0.0149	1.0628	-0.0004	0.9999	0.0158
n=500								
α	1	1.0152	0.0442	0.0470	0.9404	0.0152	1.0152	0.0444
λ	2	2.0354	0.0614	0.0631	0.9740	0.0354	1.0177	0.0627
q_0	-1	-0.9985	0.0100	0.0105	0.9567	0.0015	0.9985	0.0100
q_1	3	3.0026	0.0061	0.0060	1.0209	0.0026	1.0009	0.0062
n=1000								
α	1	1.0081	0.0222	0.0218	1.0159	0.0081	1.0081	0.0222
λ	2	2.0171	0.0311	0.0301	1.0338	0.0171	1.0085	0.0314
q_0	-1	-0.9989	0.0054	0.0051	1.0557	0.0011	0.9989	0.0054
q_1	3	3.0007	0.0030	0.0030	1.0098	0.0007	1.0002	0.0030
n=2000								
α	1	1.0043	0.0100	0.0104	0.9597	0.0043	1.0043	0.0100
λ	2	2.0087	0.0142	0.0146	0.9727	0.0087	1.0044	0.0143
q_0	-1	-0.9986	0.0024	0.0025	0.9736	0.0013	0.9987	0.0024
q_1	3	2.9999	0.0015	0.0015	0.9839	-0.0001	1.0000	0.0014

α=1 alınarak oluşturulan, Parametrizasyon II için simülasyon sonuçlarını içeren Çizelge 4.5. de ve α=1.5 alınarak oluşturulan, Parametrizasyon II için simülasyon sonuçlarını içeren, aşağıda yer alan Çizelge 4.6. da, Çizelge 4.1.–Çizelge 4.4. de yapılan yorumlar geçerliliğini korumaktadır.

Çizelge 4.6. Parametrizasyon II için Simülasyon Sonuçları ($\alpha = 1.5$)

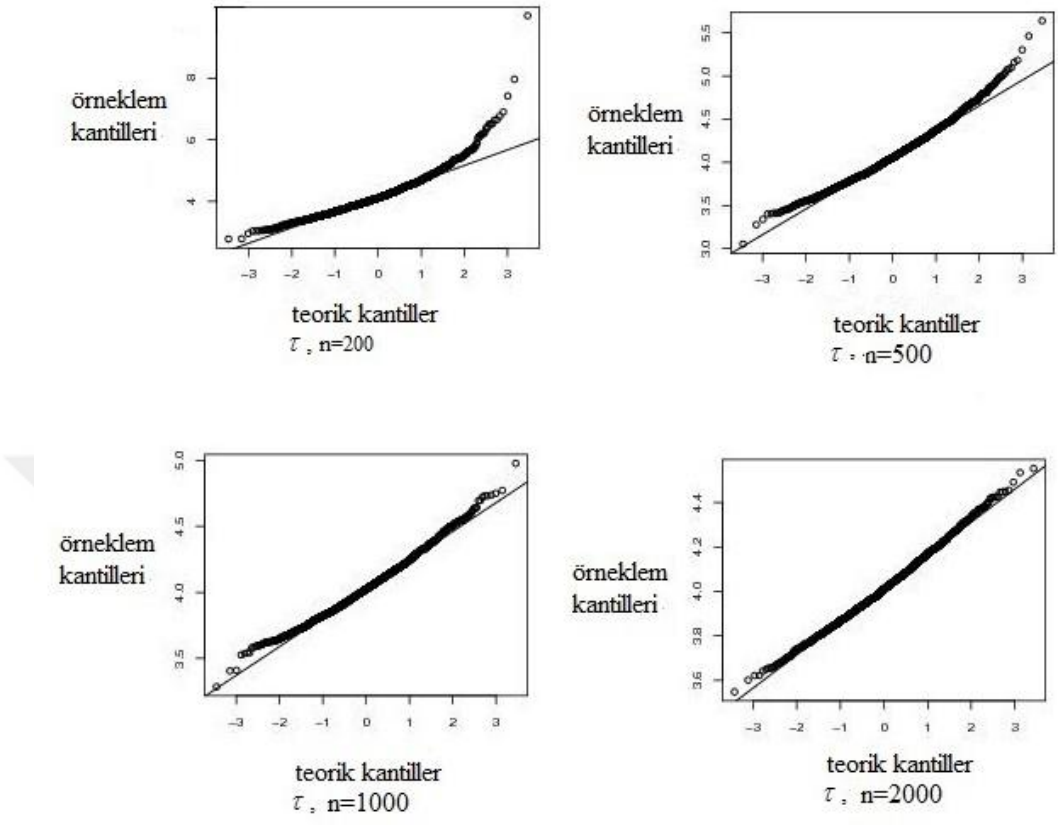
Parametre	Değer	Örneklem Ortalaması	Örneklem Varyansı	Asimptotik Varyans	Oran	Yanlılık	Bağıl Yanlılık	MSE
n=200								
α	1.5	1.6050	0.4431	0.5189	0.8538	0.1050	1.0700	0.4539
λ	2	2.0884	0.1862	0.1792	1.0386	0.0884	1.0442	0.1939
q_0	-1	-0.9871	0.0301	0.0312	0.9653	0.0129	0.9871	0.0303
q_1	3	2.9964	0.0109	0.0106	1.0291	-0.0036	0.9988	0.0109
n=500								
α	1.5	1.5276	0.1284	0.1340	0.9581	0.0276	1.0184	0.1291
λ	2	2.0399	0.0635	0.0625	1.0167	0.0399	1.0199	0.0651
q_0	-1	-0.9983	0.0110	0.0111	0.9933	0.0017	0.9983	0.0110
q_1	3	2.9997	0.0045	0.0042	1.0582	-0.0003	0.9999	0.0045
n=1000								
α	1.5	1.5145	0.0606	0.0603	1.0052	0.0145	1.0097	0.0608
λ	2	2.0188	0.0300	0.0294	1.0211	0.0188	1.0094	0.0304
q_0	-1	-0.9993	0.0054	0.0054	1.0075	0.0007	0.9993	0.0054
q_1	3	3.0004	0.0021	0.0021	1.0007	0.0004	1.0001	0.0021
n=2000								
α	1.5	1.5069	0.0288	0.0288	1.0000	0.0069	1.0046	0.0288
λ	2	2.0090	0.0147	0.0144	1.0180	0.0090	1.0045	0.0148
q_0	-1	-0.9997	0.0026	0.0027	0.9802	0.0003	0.9997	0.0026
q_1	3	2.9997	0.0011	0.0011	1.0092	-0.0003	0.9999	0.0011

Ayrıca Parametrizasyon II deki MSE değerleri çizelgelerdeki hemen her satırda ortak parametreler α, q_0 ve q_1 için Parametrizasyon I dekilerden daha küçüktür. Sonuç olarak beklendiği gibi özellikle büyük örneklemler için maksimum olabilirlik tahminlerinin tüm davranışlarının iyi olduğu çizelgelerden gözlemlenir. Model uydurumlarına değer biçmek için Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.4. deki sonuçlara ilişkin Şekil 4.1. den Şekil 4.8.' e kadar olan grafiklerde görüldüğü gibi model parametrelerinin maksimum olabilirlik tahminlerinin normal kantil grafikleri çizilir.



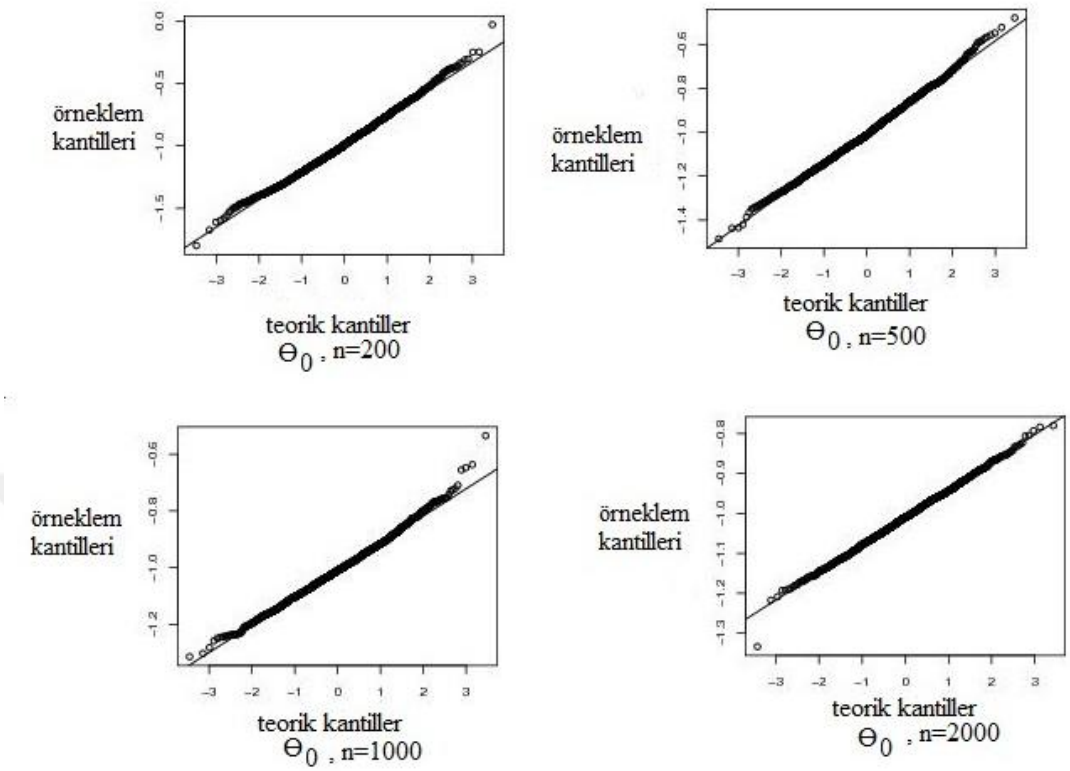
Şekil 4.1. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\alpha}$ için normal kantil grafikleri

Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\alpha}$ için normal kantil grafiklerini içeren Şekil 4.1. de, çeşitli örneklem büyüklükleri seçimlerinden kantil grafiklerindeki farklılıklar kolayca görülebilir. Burada noktaların çoğunun düz doğrunun üstünde ya da yakınında olmasından dolayı regresyon parametre tahminlerinin normal dağılımla iyi tahmin edilmiş olduğu gözlemlenir.



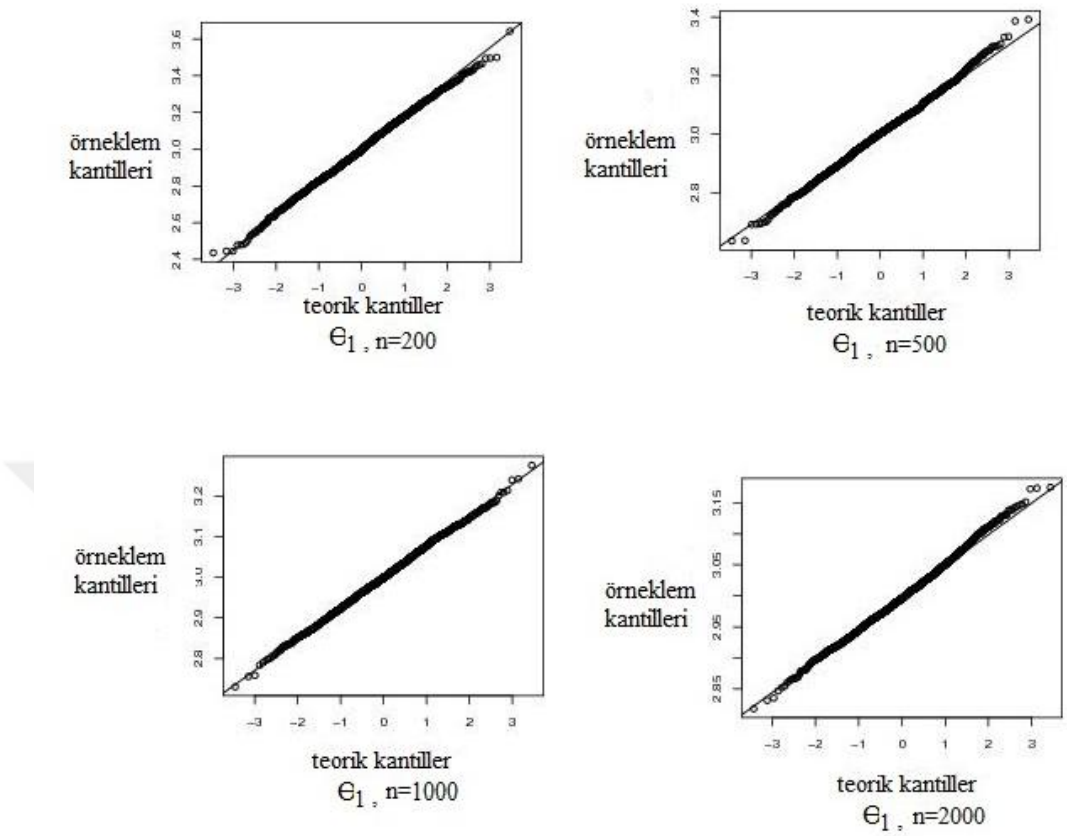
Şekil 4.2. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\tau}$ için normal kantil grafikleri

Şekil 4.2. de Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\tau}$ için normal kantil grafikleri verilmiştir. Örneklem büyüklüğü arttıkça veri noktalarının çoğunun düz doğrunun üstünde ya da yanında olmasından dolayı regresyon parametre tahminlerinin normal dağılımla iyi tahmin edilmiş olduğu gözlemlenir.



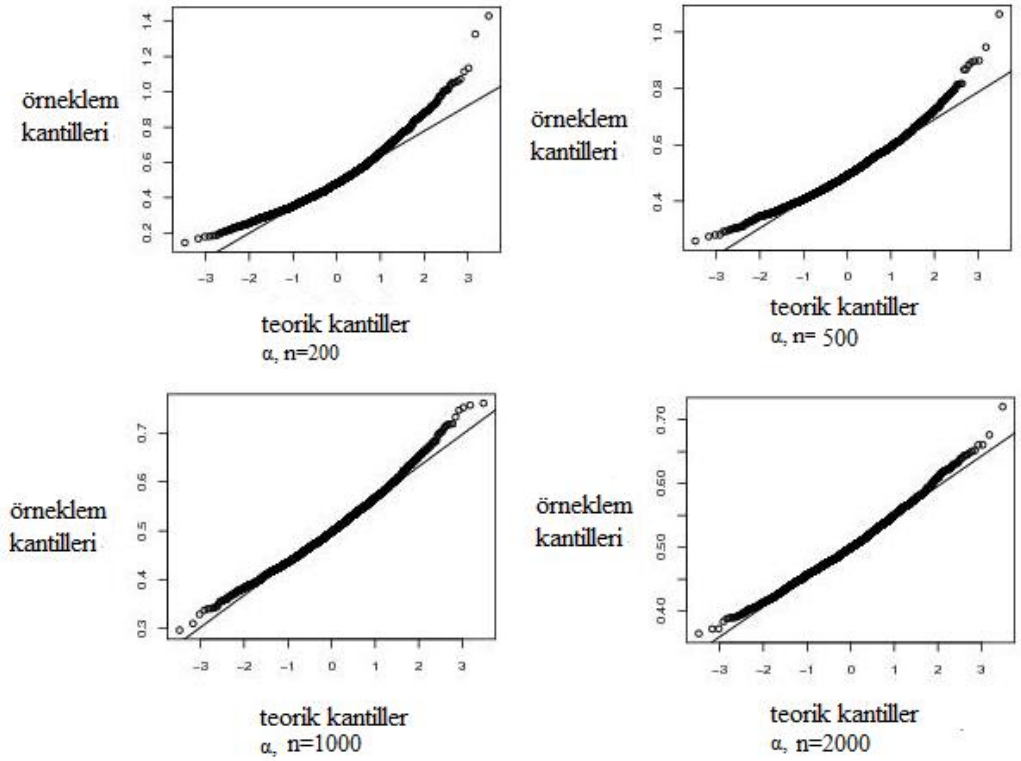
Şekil 4.3. Parametrizasyon I için farklı örneklem büyüklükleri ile $\hat{q}_0$ için normal kantil grafikleri

Şekil 4.3. de $\hat{q}_0$ Parametrizasyon I altında normal kantil grafikleri verilmiştir. Modelin veriye iyi uyum sağladığını normal kantil grafiğindeki noktaların 45 derecelik açıyla düz bir doğru sergilemesinden anlayabiliriz.



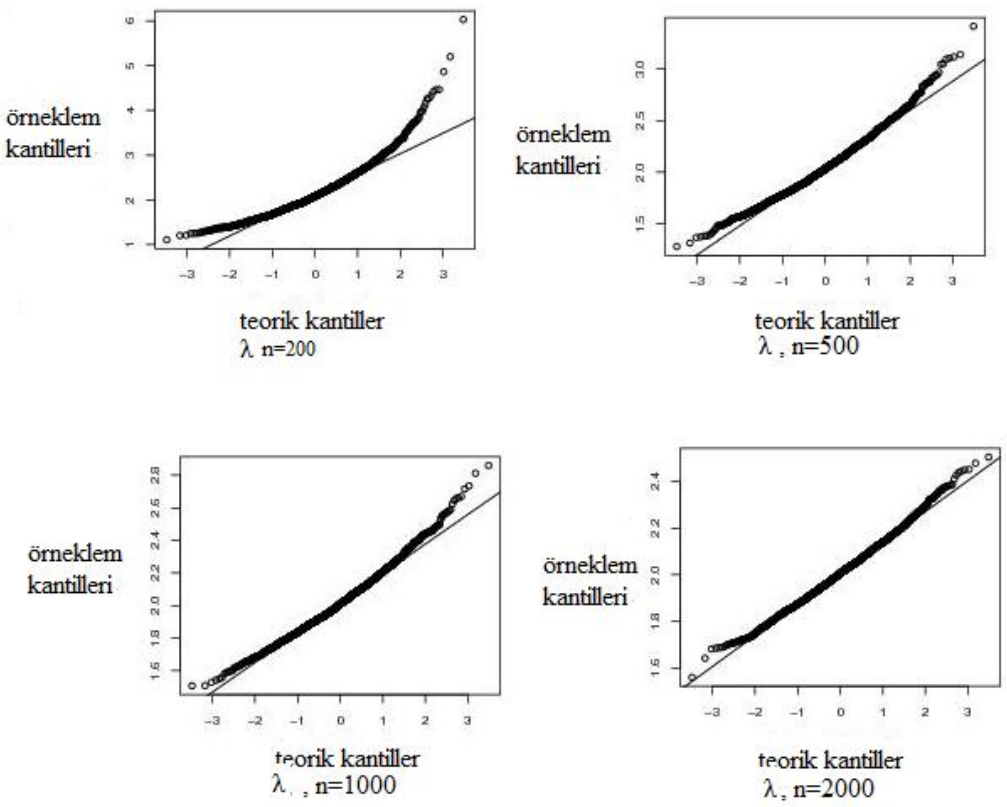
Şekil 4.4. Parametrizasyon I için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_1$ için normal kantil grafikleri

Şekil 4.4. de de veri noktalarının çoğunun düz doğrunun üstünde ya da yanında olmasından dolayı örneklem büyüklüğü 200 olduğunda bile regresyon parametre tahminlerinin normal dağılımla iyi tahmin edilmiş olduğu görülür.



Şekil 4.5. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\alpha}$ için normal kantil grafikleri

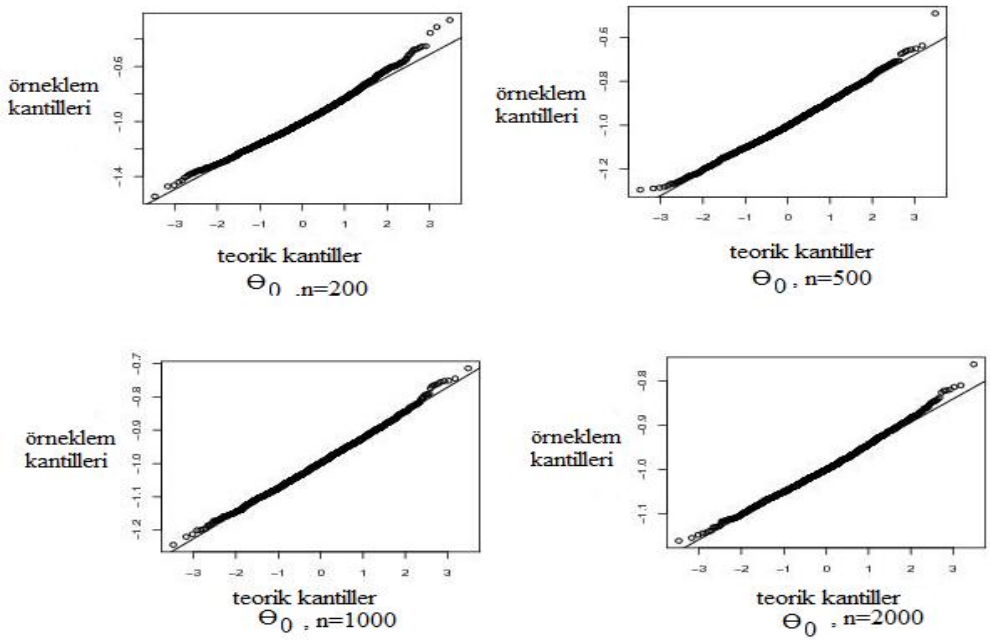
Şekil 4.5. de ise Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\alpha}$ için normal kantil grafikleri verilmiştir. Burada da veri noktalarının giderek düz doğruya yaklaşması ve 45 derecelik açıyla düz bir doğru sergileme yönünde gitmesi sebebiyle parametre tahminlerinin iyi tahmin edilmiş olduğu görülür.



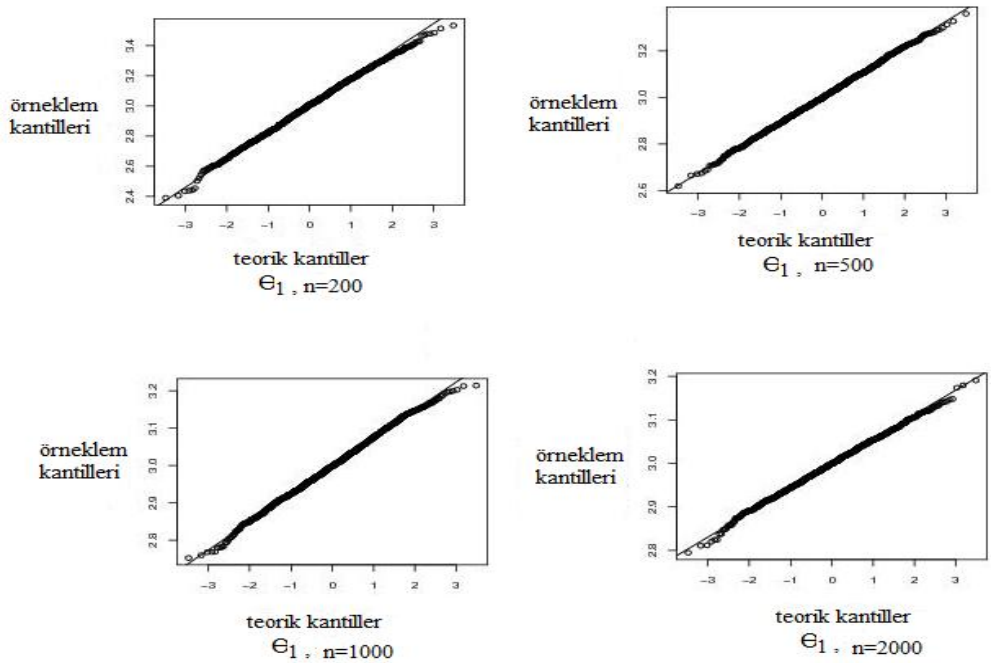
Şekil 4.6. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\lambda}$ için normal kantil grafikleri

Şekil 4.6. da Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{\lambda}$ için normal kantil grafikleri verilmiştir. Burada da diğer çizelgeler de yapılan yorumlara benzer yorumlar yapılabilir, yani veri noktalarının giderek düz doğruya yaklaşmasının, iyi tahminler elde edildiğini gösterdiği söylenebilir.

Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_0$ için normal kantil grafiklerini içeren Şekil 4.7. ile Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_1$ için normal kantil grafiklerini içeren Şekil 4.8. de de yukarıda yer alan değerlendirmelere benzer yorumlar yapılabilir.



Şekil 4.7. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_0$ için normal kantil grafikleri



Şekil 4.8. Parametrizasyon II için farklı örneklem boyutları ile $\hat{q}_1$ için normal kantil grafikleri

4.3. Rezidüler

Rezidü grafikleri çoğunlukla modelin veriye iyi uyum sağlayıp sağlamadığını ölçmek amacıyla kullanılır. Parametrizasyon I için, i-inci rezidü $Y_i^{\exp(\theta x_i)}$ dönüşümüyle R_i olarak tanımlanır. Böylece $EF(\alpha,1,\tau)$ ya göre bağımsız ve özdeş dağılırlar. $R_i = Y_i^{\exp(\theta x_i)}$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve kümülatif dağılım fonksiyonu $r,\alpha,\tau > 0$ olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f_{R_i|x_i}(r) = \frac{\alpha\tau}{r^2} exp\left(-\frac{\tau}{r}\right)\left[1 - exp\left(-\frac{\tau}{r}\right)\right]^{\alpha-1} \tag{4.41.}$$

ve

$$F_{R_i|x_i}(r) = \left[1 - exp\left(-\frac{\tau}{r}\right)\right]^{\alpha} \tag{4.42.}$$

Ters genelleştirilmiş üstel dağılıma bağlı olarak R_i rastgele değişkenlerinin bağımsız ve özdeş dağıldığı açıktır. $f_{R_i|x_i}(r)$ x_i' ye bağlı olmadığından özel durum ortadan kalkmıştır. Böylece R_i 'ler $f_{R_i|x_i}(r)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ile dağılımı doğrulamak için üslendirilmiş Fréchet dağılımını inşa etmede kullanılmıştır. Rezidülerin dağılımının kantil fonksiyonu

$$Q(p) = -\frac{\tau}{\log\left[1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}\right]}, \qquad 0 < p < 1 \tag{4.43.}$$

eşitliği ile verilmiştir. Buradan da $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \cdots \leq r_{(n)}$ sıralı rezidüleri göstermek üzere, üslendirilmiş Fréchet kantil grafiği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left(\log\left(-\frac{1}{\log\left(1-\left(1-\frac{i}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}\right),\ \log r_{(i)}\right) \qquad (4.44.)$$

Eğer, $EF(\alpha,1,\tau)$ rezidüler için doğru bir temel dağlımsa, kantil grafiği, eğimi ve kesim noktası sırasıyla 1 ve $\log\tau$ ya denk olan düz bir doğru olacaktır (D'Agostino, Stephens, s.24, 1986). (4.44.) ü çizmek için α ve θ nın maksimum olabilirlik tahminlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parametrizasyon II için, i=1,2,…,n olmak üzere rezidüler normal olarak $R_i = Z_i - \theta' x_i$ olarak tanımlanır. $\theta' x_i$ yi içermeyen, x_i verilmişken R_i nin kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F_{R_i|x_i}(r) = 1 - \left\{1 - \exp\left(-\exp\left(-r\right)\right)\right\}^{\alpha} \qquad (4.45.)$$

(4.45.) eşitliğindeki gibidir.

Bu dağılım için kantil fonksiyonu $0 < p < 1$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$Q(p) = -\log\left(-\log\left(1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \qquad (4.46.)$$

Son olarak, Parametrizasyon II için üslendirilmiş Fréchet kantil grafiği, $r_{(1)} \le r_{(2)} \le \ldots \le r_{(n)}$ sıralı rezidüleri göstermek üzere (4.47.) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

$$-\log\left(1-\log\left(1-\frac{i}{n+1}\right)^{\frac{1}{a}}\right),\ r_{(i)} \tag{4.47.}$$

4.4. Üslendirilmiş Fréchet Dağılımı için Risk Ölçüleri

4.4.1. Standart Sapma

Üslendirilmiş Fréchet dağılımının n-inci momenti

$$E\left(Y^n\right)=a\lambda\tau\int_0^{\infty}\left[1-e^{-\left(\frac{\tau}{y}\right)^{\lambda}}\right]^{a-1} y^{n-(1+\lambda)}e^{-\left(\frac{\tau}{y}\right)^{\lambda}}dy$$
$$=\frac{\tau^{\frac{n}{\lambda}}}{\lambda}\int_0^{\infty}y^{-\left(1+\frac{n}{\lambda}\right)}\left(1-e^{-y}\right)^{a}dy \tag{4.48.}$$

eşitliği ile tanımlanır ve bu integral sadece $a>n/\lambda$ iken yakınsar. Standart sapma $a>2/\lambda$ için (4.49.) eşitliği ile aşağıda tanımlanmıştır.

$$SD(Y)=\sqrt{E\left(Y^2\right)-\left[E(Y)\right]^2} \tag{4.49.}$$

Bazı değişken dönüşümleri yaparak Gradshteyn ve Ryzhik (2007) formül (4.267.39) dan yararlanarak bazı kısıtlamalar altında standart sapma hesaplanırken, integraller için kapalı form ifadeleri kullanılır. $a>1/\lambda$ olmak üzere, a ve $1/\lambda$ pozitif tamsayıları için beklenen değer aşağıdaki gibidir.

$$a\left(-\tau\right)^{1/\lambda}\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)!}\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^{2(a-1)-k}\binom{a-1}{k}(1+k)^{\frac{1}{\lambda}-1}\log(1+k) \tag{4.50.}$$

Benzer şekilde $\alpha > 2/\lambda$ olmak üzere α ve $2/\lambda$ pozitif tamsayıları kullanılarak ikinci moment için kapalı form ifadesi ele alınarak varyans,

$$\alpha(-t)^{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)!} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^{2(\alpha-1)-k} \binom{\alpha-1}{k} (1+k)^{\frac{2}{\lambda}-1} \log(1+k) - \left[\alpha(-t)^{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)!} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^{2(\alpha-1)-k} \binom{\alpha-1}{k} (1+k)^{\frac{1}{\lambda}-1} \log(1+k)\right]^2 \quad (4.51.)$$

olarak hesaplanır.

4.4.2. Riske Maruz Değer (VaR)

Üslendirilmiş Frechet dağılımı için riske maruz değer,

$$VaR_p(X) = \left(\frac{-t}{\log(1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}})}\right)^{1/\lambda} \quad (4.52.)$$

eşitliğindeki gibi bulunmuştur.

4.4.3. Koşullu Kuyruk Bekleneni (CTE)

Üslendirilmiş Frechet dağılımının koşullu kuyruk bekleneni için kapalı form ifadesi elde etmek için (4.53.) eşitliği ile verilen integral ele alınır.

$$CTE_p(Y) = \frac{1}{1-F\left(VaR_p(Y)\right)} \int_{VaR_p(Y)}^{\infty} f(y;\alpha,\lambda,\tau)\,dy$$

$$= \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(Y)}^{\infty} \left[1-F(y;\alpha,\lambda,\tau)\right] dy + VaR_p(Y) \tag{4.53.}$$

Bu eşitlikte F(.) üslendirilmiş Fréchet dağılımının kdf sidir ve $\alpha > 1/\lambda$ iken integral yakınsaktır.

Binom serisi genişlemesinin ardından uygun bir değişken dönüşümü yaparak ve Gradshteyn ve Ryzhik (2007) formül (3.471.5) kullanılarak α pozitif tamsayısı ve $\lambda > 1$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$CTE_p(Y) = \frac{\alpha\lambda\tau}{1-p} \frac{[VaR_p(Y)]^{1-\lambda}}{\lambda-1} \sum_{r=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{r} (-1)^r \cdot$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\frac{\tau-1}{\lambda}; \frac{2\lambda-1}{\lambda}; \frac{-\tau(r+1)}{VaR^{\lambda}}\right) \tag{4.54.}$$

(4.54.) ile verilen eşitlikte ${}_1F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu, $(z)_k = z(z+1)\cdots(z+k-1)$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$${}_1F_1(a;b;x) = (a;b;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!} \tag{4.55.}$$

5. UYGULAMA

Bu bölümde, önerilen modelin kullanımını örnekleyebilmek için gerçek bir veri kümesi ele alınacaktır. Bu veri kümesi literatürde motosiklet verisi olarak bilinmektedir. Eski bir İsveç sigorta şirketi olan Wasa' dan alınan bu veri kümesi kısmi kasko sigortası ile ilgilidir. Bu veri kümesi 1994-1998 yılları arasındaki tüm sigorta poliçeleri ve sigorta tazminat talepleri üzerinde toplanmış veriyi içerir. 670 tanesi en az bir tazminat talebine sahip olan 64548 tane poliçe vardır. Bu veri kümesi *Ohlsson verisi* olarak adlandırılan, R programında bulunan (R Core Team, 2014), insurance data paketinin içinde yer almaktadır.

Tazminatlar uzun kuyruklu dağılım modeli izlediğinden (Şekil 5.1. (a)), bu veri kümesi genelleştirilmiş lineer model yapısında analiz edilmiştir (Ohlsson, Johansson, 2010). Bu çalışmada önerilen model sıradan Fréchet ve Burr XII regresyonları ile kıyaslanacaktır. SinghMaddala dağılımı olarak da bilinen Burr XII dağılımı (Burr, 1942), uzun kuyruklu bir dağılımdır ve biçim parametreleri $\alpha, \tau > 0$ ve ölçek parametresi $\beta > 0$ olmak üzere aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$f(x;\beta,\lambda,\tau) = \frac{\lambda \beta^{\lambda} \tau y^{\tau-1}}{\left(\beta + y^{\tau}\right)^{\lambda+1}} \qquad (5.1.)$$

Bu veri kümesinde dikkate alınan değişkenler sırayla, araç yaşı (x_1) , MC sınıf (EV oranı olarak da adlandırılan bir sınıflandırmadır) (x_2) ve pozitif tazminat talepleri *(y)* dir.

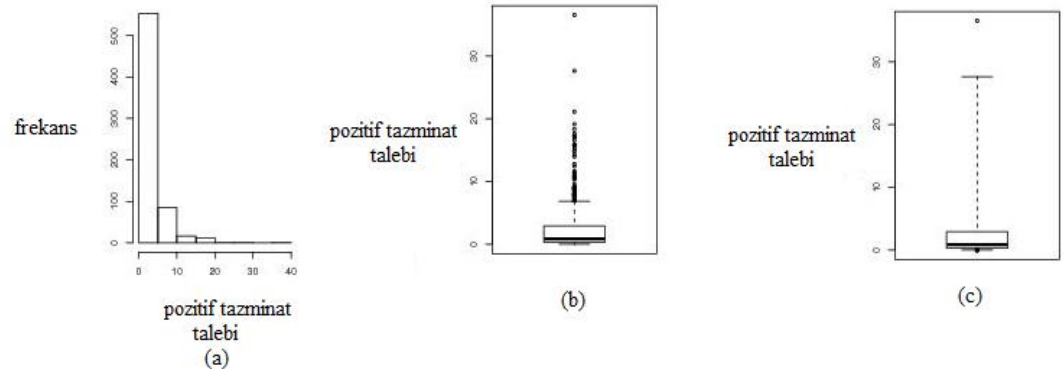
Kategorik açıklayıcı değişkenler genellikle doğada nominal olan ve sigorta verisinde ortak olan kesikli tipteki değerlerin birini alırlar. Buradaki açıklayıcı değişkenlerden MC sınıf kategorik bir değişkendir. Regresyon modellemede diğer örnekler otomobil sigortasındaki kaza türünü ve ev sigortasındaki tazminat tipini içerir. Kategorik açıklayıcı değişkenlerle çalışırken bazı kodlama değişkenlerini dahil edilebilir aksi halde değişkenler arasında çoklu iç ilişki problemleri oluşur. Genelde

n düzey kategorik değişkene sahipken, modele, *n*-1 yeni değişken (kodlama ya da gösterge değişken) dahil edilebilir. En fazla duruma sahip olan düzey genellikle temel düzey olarak seçilir. (de Jong, Heller, (2008), s.52)

MC sınıf değişkeni 7 düzeye sahip olduğundan, herbir kategori arasındaki farklılığı modellemek için 6 kodlama değişkeni alınır. MC sınıf için temel düzey 6 olarak bulunmuştur ve böylece toplamda 8 tane regresyon katsayısına sahip olunur.

Çizelge 5.1. Pozitif tazminat taleplerinin özet istatistikleri

Ortalama	Medyan	St.Sapma	CV	Aralık	Çarpıklık	Basıklık	Min.	Maks.	n
2.5436	0.9015	3.8539	0.6600	36.5331	3.1029	17.5691	0.0016	36.5347	670



Şekil 5.1. (a) Pozitif tazminat taleplerinin histogramı, (b) Pozitif tazminat taleplerinin olağan kutu grafiği, (c) Pozitif tazminat taleplerinin düzeltilmiş kutu grafiği

Çizelge 5.1., *Y* değişkeninin özet istatistiklerini verirken Şekil 5.1. de *Y* nin histogram ve kutu grafiklerini gösterir. Çizelge 5.1. ve Şekil 5.1. den yola çıkarak veri setinin karakteristik değerlere sahip olarak sağa çarpık olduğu gözlemlenir. Buna rağmen maksimumun dışındaki bu karakteristik gözlemler, çarpık dağılımlar için önerilen düzeltilmiş kutu grafiğinde ortadan kaybolmuştur (Vandervieren, Hubert, (2004)).

$Y_1, Y_2, ¼, Y_n$ nin bağımsız değişkenler olduğu varsayımından Parametrizasyon I ve Parametrizasyon II için üslendirilmiş Fréchet regresyon modelleri sırayla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Y_i \mid x_i \sim EF(a, l_i, t), \; l_i = \exp(q' x_i) \tag{5.2.}$$

$Z_i = \log Y_i$ olmak üzere,

$$Z_i \mid x_i \sim \log EF(a, l_i, t_i), \; t_i = \exp(l_i + q' x_i) \tag{5.3.}$$

Alternatif olarak, sırayla sıradan Fréchet regresyonu,

$$Y_i \mid x_i \sim \text{Fréchet}(l_i, t), \; l_i = \exp(q' x_i) \tag{5.4.}$$

ve Burr XII regresyonu aşağıdaki gibi ele alınır.

$$Y_i \mid x_i \sim \text{BurrXII}(b, l_i, t_i), \; t_i = \exp(q' x_i) \tag{5.5.}$$

Dört regresyon modeli yukarıda bahsedilen veriye maksimum olabilirlik metodu ile uydurulmuştur. Tahmin sürecindeki sınır problemlerini önlemek için bazı parametrelerin logaritma dönüşümleri alınmış ve böylece hepsi $(-¥, ¥)$ aralığında bulunmuştur. Yinelemeli optimizasyon rutinlerinde parametre tahminlerinin başlangıç değerleri için yine ekk tahminleri alınmıştır.

Çizelge 5.3., Çizelge 5.4., Çizelge 5.5. ve Çizelge 5.6. parametre tahminlerinin standart hataların ve diğer bilgilerin parametrizasyonlardan ve alternatif metodlardan elde edildiğini gösterir. Tablolardaki t- oranları, SE standart hata olmak üzere $\hat{q}_j / SE(\hat{q}_j)$ ile hesaplanmıştır ve $\hat{q}_j = 0$ ın $\hat{q}_j$ ¹ 0 a karşı olduğunu gösteren sıfır hipotezi ile test edilmiştir. t - oranın mutlak değeri $t_{n-8,1-a/2}$ yi geçerse,

n = 670 ve α = 0.05 olmak üzere n-8 serbestlik derecesiyle (1-α/2). yüzdelik, sıfır hipotezi reddedilir. Regresyon katsayılarının anlamı 0.05 düzeyinde *p* - değerlerini kıyaslayarak test edilebilir ve eğer p < 0.05 ise sıfır hipotezi reddedilir.

Ayrıca % 95 oranda güven sınırları $\hat{q}_j \pm t_{n-8,1-a/2} SE(\hat{q}_j)$ formülü ile kurulmuştur. *L* log- olabilirlik değeri, *p* modeldeki parametre sayısı ve *n* gözlemlerin sayısı olmak üzere, *AIC = -2l+2p* ve *BIC = -2p + plogn* değerleri model seçimi için sunulur. İyi bilindiği üzere en düşük *AIC* ve *BIC* değerine sahip olan model seçilir.

Parametrizasyon I için üslendirilmiş Fréchet kantil grafiklerindeki ekk uydurumundan gelen rezidü kareler ve rezidülerin mutlak değerleri toplamı sırayla 6.0310 ve 0.1027 dir. Parametrizasyon II için aynı miktarlar 62.8635 ve 11.4536 olarak sırayla elde edilmiştir. Sonuç olarak üslendrilmiş Fréchet regresyonun Parametrizasyon I için uydurumunun kalitesi Parametrizasyon II den daha iyidir (Gündüz ve Genç, 2016).

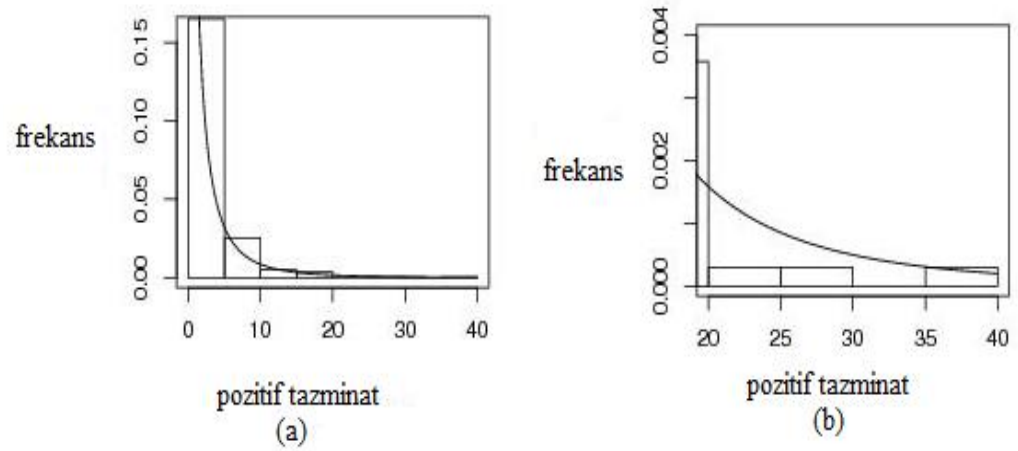
Pozitif tazminat maliyetleri ile ilişkili risk ölçüleri hesaplanacak olursa, kayıp verileri normal dağılımla modelleyemediğimiz için sağ çarpık kalın kuyruklu bir dağılımla modellemeye ihtiyaç vardır. Burada üslendirilmiş Fréchet dağılımı veriye uydurulduktan sonra maksimum olabilirlik tahmin edicileri ve standart hataları,

$$\log\hat{a} = 5.1380(0.9904)\ \log\hat{l} = -2.0306(0.1802),\ \log\hat{t} = 1.7074(0.1830)$$

olarak elde edilmiştir. Log – olabilirlik değeri -1193.395 olarak bulunmuştur. Bu uydurum ve sağ kuyruk davranışı şekil 5.2. de açıkça görülmektedir. $\hat{a} > 2/\hat{l}$ olduğundan standart sapma ve sağ kuyruk indeksini hesaplayan integraller yakınsaktır. Tahmin edilen standart sapma ve sağ kuyruk indeksi ölçüleri sırayla 5.4071 ve 2.9360 olarak hesaplanmıştır. VaR ve CTE gibi diğer risk ölçülerinin tahminlerinin hesapları Çizelge 5.2. de verilmiştir. Bu çizelgeye göre 0.95 olasılıkla maksimum 105111 SEK kadar kayıp olduğu söylenebilir. Diğer taraftan bir kez bu kayıp aşılırsa beklenen kayıp 199603 SEK kadar olacaktır.

Çizelge 5.2. Üslendirilmiş Frechet dağılımı tarafından modellenen log tazminat maliyet değeri için tahmin edilmiş VaR ve CTE değerleri (10.000 SEK üzerinden)

p	0.95	0.975	0.99	0.999	0.9999
VaR	10.5111	15.6490	24.4776	59.4882	119.1230
CTE	19.9603	27.2366	39.2984	84.8143	159.1280



Şekil 5.2. (a) Pozitif tazminatların üslendirilmiş Fréchet uydurumu, (b) Uydurumun sağ kuyruk davranışı

Çizelge 5.3. Motosiklet verisi için Parametrizasyon I ile Fréchet regresyon sonuçları

Paramterizasyon I Frechet Regresyon						
Değişkenler	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları		t - Oran	p - Değeri
Sabit	-0.2973	0.0571	-0.4094	-0.1853	-5.2067	0.0000
Araç yaşı	-0.0113	0.0038	-0.0188	-0.0038	-2.9737	0.0030
MC Sınıf						
1	-0.1125	0.0968	-0.3025	0.0776	-1.1622	0.2456
2	0.2565	0.0899	0.0800	0.4330	2.8532	0.0045
3	-0.1785	0.0664	-0.3089	-0.0481	-2.6883	0.0074
4	-0.1841	0.0753	-0.3320	-0.0363	-2.4449	0.0147
5	-0.2604	0.0650	-0.3880	-0.1327	-4.0062	0.0004
7	0.7547	0.4193	-0.0685	1.5780	1.7999	0.0723
	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları			
$\log\tau$	-0.5416	0.0484	-0.6367	-0.4465		
β						
λ						
Log-olabilirlik	-1264.433					
AIC	2546.866					
BIC	2587.431					

Motosiklet verisi için Parametrizasyon I ile Fréchet regresyon sonuçlarını içeren Çizelge 5.3. den elde edilen sonuçlara göre, AIC=2546.866, BIC=2587.431 olarak elde edilmiştir. Bunun yanı sıra araç yaşı değişkeninin ve kategorik değişkenlerden ilk ve son kategori hariç diğerlerinin modele dahil edilmesinin anlamlı olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.4. Motosiklet verisi için Burr XII regresyon sonuçları

Parametrizasyon I Burr XII Regresyon						
Değişkenler	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları		t - Oran	p - Değeri
Sabit	-0.3452	0.0578	-0.4588	-0.2317	-5.9723	0.0000
Araç yaşı	0.0146	0.0031	0.0085	0.0207	4.7097	0.0000
MC Sınıf						
1	-0.1501	0.1148	-0.3755	0.0754	-1.3075	0.1915
2	0.0853	0.1010	-0.1130	0.2836	0.8446	0.3986
3	-0.2263	0.0704	-0.3646	-0.0881	-3.2145	0.0014
4	-0.0802	0.0843	-0.2457	0.0854	-0.9514	0.3417
5	-0.0389	0.0735	-0.1833	0.1055	-0.5293	0.5968
7	0.0785	0.2528	-0.4178	0.5748	0.3105	0.7563
	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları			
logτ						
β	99.9826	190.9196	-274.8983	474.8635		
λ	63.7941	120.8085	-173.4200	301.0082		
Log-olabilirlik	-1185.893					
AIC	2391.787					
BIC	2436.859					

Motosiklet verisi için Burr XII regresyon sonuçlarını içeren Çizelge 5.4. den elde edilen sonuçlara göre, AIC=2391.787, BIC=2436.859 olarak elde edilmiştir. Ayrıca araç yaşı değişkeninin ve kategorik değişkenlerden yalnızca kategori 3 ün modele dahil edilmesinin anlamlı olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.5. Motosiklet verisi için Parametrizayon I ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçları

Parametrizasyon I Üslendirilmiş Fréchet Regresyon						
Değişkenler	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları		t - Oran	p - Değeri
Sabit	-2.5942	0.4169	-3.4128	-1.7756	-6.2226	0.0000
Araç yaşı	0.0116	0.0039	0.0040	0.0193	2.9744	0.0030
MC Sınıf						
1	-0.1211	0.1188	-0.3544	0.1123	-1.0194	0.3084
2	0.1200	0.1071	-0.0903	0.3302	1.1204	0.2629
3	-0.2096	0.0748	-0.3565	-0.0627	-2.8021	0.0052
4	-0.0944	0.0891	-0.2694	0.0807	-1.0595	0.2898
5	-0.0583	0.0782	-0.2119	0.0952	-0.7455	0.4562
7	0.1227	0.2735	-0.4143	0.6597	0.4486	0.6539
	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları			
log α	9.3110	3.8741	1.7041	16.9179		
log τ	2.2735	0.4013	1.4854	3.0615		
log λ						
Log-olabilirlik	-1181.606					
AIC	2383.212					
BIC	2428.284					

Motosiklet verisi için Parametrizasyon I ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçlarını içeren Çizelge 5.5. den elde edilen sonuçlara göre, AIC=2383.212, BIC=2428.284 olarak elde edilmiştir. Bunun yanı sıra kategorik değişkenlerden kategori 3 ün ve araç yaşı değişkeninin modele dahil edilmesinin anlamlı olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.6. Motosiklet verisi için Parametrizasyon II ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçları

Parametrizasyon II Üslendirilmiş Fréchet Regresyon						
Değişkenler	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları		t - Oran	p - Değeri
Sabit	19.3719	6.5102	6.5888	32.155	2.9756	0.0030
Araç yaşı	-0.0584	0.0076	-0.0733	-0.0434	-7.6842	0.0000
MC Sınıf						
1	-0.2480	0.2489	-0.7368	0.2407	-0.9964	0.3194
2	-0.3853	0.2244	-0.8260	0.0555	-1.7170	0.0864
3	-0.1542	0.1693	-0.4867	0.1783	-0.9108	0.3627
4	-0.2398	0.1891	-0.6112	0.1316	-1.2681	0.2052
5	-0.2012	0.1652	-0.5256	0.1232	-1.2179	0.2237
7	0.2978	0.6616	-1.0013	1.5970	0.4501	0.6528
	Tahmin	Standart Hata	% 95 Güven Aralıkları			
log α	6.8127	1.6504	3.5720	10.0534		
log τ						
log λ	-2.2502	0.2322	-2.7061	-1.7943		
Log-olabilirlik	-1234.112					
AIC	2488.225					
BIC	2533.298					

Motosiklet verisi için Parametrizasyon II ile üslendirilmiş Fréchet regresyon sonuçlarını içeren Çizelge 5.6. dan elde edilen sonuçlara göre, AIC=2488.225, BIC=2533.298 olarak elde edilmiştir. Burada yalnızca araç yaşı değişkeninin modele dahil edilmesi anlamlıdır.

Çizelge 5.3., Çizelge 5.4., Çizelge 5.5. ve Çizelge 5.6. ya göre Parametrizasyon I ile üslendirilmiş Fréchet regresyon en düşük *AIC* ve *BIC* değerlerine sahip olduğundan en iyi uyum sağlamış modeldir. Görüldüğü gibi sıradan Fréchet regresyonun üslendirilmiş versiyonu daha iyi bir seçimdir. Ayrıca Burr XII metodundaki model parametre tahminlerindeki büyük standart hatalar da gözlemlenmiştir.

Çizelge 5.5. de verilen Parametrizasyon I den gelen sonuçlara bakılırsa sadece kategori 3 ün kategori 6 dan önemli derecede farklı olduğu gözlemlenir. Bu sonuç ayrıca Burr XII metodu altında Çizelge 5.4. de de verilmiştir. Buna rağmen sıradan Fréchet metodu altında ilk ve son kategori hariç tüm kategoriler kategori 6 dan önemli derecede farklıdır.

Çizelge 5.7. Motosiklet verisi için üslendirilmiş Fréchet metodun olabilirlik oran istatistikleri

		Parametrizasyon I		Parametrizasyon II	
Kaynak	Serb. derecesi	Ki-kare	p - değeri	Ki-kare	p-değeri
Araç yaşı	1	7.8500	0.0051	52.7260	0.0000
MC sınıf	6	13.5340	0.0353	4.5020	0.6091

Parametrizasyon I regresyondaki değişkenlerin ek katkılarını belirlemek amacıyla olabilirlik oran istatistikleri,

$$c^2 = 2\left(loglik\left(\text{tam model}\right) - \log lik\left(\text{indirgenmiş model}\right)\right) \qquad (5.6.)$$

formülü ile hesaplanır öyle ki tam modelin log- olabilirlik değeri ve indirgenmiş modelin log – olabilirlik değeri farkının 2 katı alınır. Çizelge 5.7. sonuçları gösterir. Eğer kaynak (köken) araç yaşı ise araç yaşı modelden dışarda tutulur. Diğer değişkenler modeldeyken araç yaşı değişkeninin önemliliği 0.05 düzeyinde test edilir. Çizelge 5.7. deki sonuçlara göre araç yaşı ve MC sınıf değişkeninin ikisi de Parametrizasyon I altında tazminat büyüklüklerini belirlerken % 5 önemle belirlenirken Parametrizasyon II altında sadece araç yaşı değişkeni anlamlıdır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Aktüeryal istatistikte alternatif bir analitik yaklaşım isimli bu tez çalışmasında, aktüeryadaki temel kavramlardan bahsedilmiş ve yaşamın içinden karşılaşılabilecek çeşitli riskli durumlarına ait örnekler verilip sigorta yaptırmanın önemi belirtilmiştir. İyi bir risk yönetimi için oluşacak kaybı doğru şekilde belirlemenin öneminin belirtildiği bu tez çalışmasında şirketleri minimum riske maruz bırakabilmek açısından risk ölçümünün önemi üzerinde durulmuştur. Riskli yatırımlar durumunda oluşabilecek risk miktarını ölçebilme adına risk ölçüleri ele alınmış olup çeşitli kayıp dağılımları için hesaplamaları yapılmıştır.

Ayrıca, üslendirilmiş Fréchet dağılımının aktüeryal istatistikte regresyon çözümlemesinde kullanımı ele alınmış ve simülasyon çalışması yapılmıştır.

Bu çalışmanın neticesinde, ilk defa, üslendirilmiş Fréchet dağılımından yola çıkarak sigortacılık alanında da yer alan, sağa doğru uzun kuyruk sergileyen tazminat büyüklüklerini modelleyen üslendirilmiş Fréchet regresyonu önerilmiştir. Link fonksiyonu yardımıyla oluşturulan, Parametrizasyon I ve Parametrizasyon II olarak ifade edilen, ortak değişkenler içeren iki farklı yaklaşım sunulmuştur. Gerçek bir sigorta verisi ele alınarak yapılmış olan uygulama ile üslendirilmiş Fréchet dağılımının, tazminat verisini modellemede iyi bir dağılım olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada yapılanların yanı sıra, sağa çarpık çeşitli veri kümelerini modelleyen, aktüeryada kullanılan bazı dağılımların benzer şekilde regresyon modellemesinde kullanılması, çarpık verileri modellemede daha iyi alternatiflerin bulunması ve bu açığın giderilmesi oldukça önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

ABOUAMMOH, A. M., ALSHINGITI A. M., 2009. Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution. J. Stat. Comput. Simul., 79, 1301–1315.

AHN, S., KIM, J. H.T., RAMASWAMI, V., 2012. A new class of models for heavy tailed distributions in finance and insurance risk. Insurance: Mathematics and Economics, 51, 43-52.

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J. M., HEATH, D., 1999. Coherent measures of risk. Mathematical Finance, 9, 203-228.

ASMUSSEN, S., 2003. Applied probability and queues. New York: Springer.

AZZALINI, A., 1985. A class of distributions which includes the normal ones. Scand J Statist, 12, 171-178.

BEIRLANT, J., GOEGEBEUR Y., 2003. Regression with response distributions of Pareto-type. Computational Statistics and Data Analysis, 42, 595–619.

BEIRLANT, J., GOEGEBEUR, Y., VERLAAK, R., VYNCKIER, P., 1998. Burr regression and portfolio segmentation. Insurance: Mathematics and Economics, 23, 231–250.

BOYD, A. V., 1988. Fitting the truncated Pareto distribution to loss distributions. JSS, 31, 151-158

BRAZAUSKAS, V., SERFLING, R., 2003. Favorable estimators for fitting Pareto models: a study using goodness-of-fit measures with actual data. Astin Bulletin, 33, 365-381.

BURR, IV., 1942. Cumulative frequency functions. Annals of Mathematical Statistics, 13, 215-232.

BYRD, R. H., LU, P., NOCEDAL, J., ZHU, C., 1995. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. SIAM J. Scientific Computing, 16, 1190-1208.

COORAY, K., 2013. Exponentiated sinh Cauchy distribution with applications. Communications in Statistics Theory and Methods, 42, 3838-3852.

D'AGOSTINO, R. B., STEPHENS, M. A., 1986. Goodness-of-fit Techniques. New York: Marcel Dekker, Inc.

DE JONG, P., HELLER, G. Z., 2008. Generalized linear models for insurance data. Cambridge: Cambridge University Press.

DEVANDRA, K., 2011. Single and product moments of generalized order statistics from exponentiated Fréchet distribution and a characterization. International Journal of Information and Management Sciences, 22, 221-231.

FRANGOS, N., KARLIS, D., 2004. Modelling losses using an exponential-inverse Gaussian distribution. Insurance: Mathematics and Economics, 35, 53-67.

FREES, E. W., 2010. Regression modeling with actuarial and financial applications. New York: Cambridge University Press.

GÓMEZ-DÉNIZ, E., CALDERIN-OJEDA, E., SARABIA, J. M., 2013. Gamma-generalized inverse Gaussian class of distributions with applications. Communications in Statistics, Theory and Methods, 42, 919–933.

GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M., 2007. Table of integrals, series and products, 7th ed. San Diego: Academic Press.

GUILLEN, M., PRIETO, F., SARABIA, J. M., 2011. Modelling losses and locating the tail with the Pareto positive stable distribution. Insurance: Mathematics and Economics, 49, 454-461

GÜNDÜZ, F. F., GENÇ, A. I., 2016. The exponentiated Fréchet regression: an alternative model for actuarial modelling purposes. Journal of statistical computation and simulation, DOI: 10.1080/00949655.2016.1164160.

HOGG, R., KLUGMAN, S. A., 1984. Loss distributions. New York: Wiley.

JAMJOOM, A. A., AL-SAİARY, Z. A., 2012. Computing the moments of order statistics from independent nonidentically distributed exponentiated Frechet variables. Journal of Probability and Statistics, Art. ID 248750, 14pp.

KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J., DENUIT, M., 2009. Modern Actuarial Risk Theory Using R. Berlin Heidelberg: Springer.

KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., WILLMOT, G. E., 2004. Loss Models: from data to decisions. 2nd ed. New York: Wiley.

KOMUNJER, I., 2007. Asymmetric power distribution: theory and applications to risk measurement. Journal of Applied Econometrics, 22, 891-921.

LANE, M. N., 2000. Pricing risk transfer transactions. Astin Bulletin, 30, 259-293.

LAWLESS, J. F., 1982. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New York: Wiley.

LEMAIRE, J., 1979. How to define abonus-malus system with an exponential utility function. Astin Bulletin, 10, 274-282.

MANNING, W. G., BASU, A., MULLAHY, J., 2005. Generalized modeling approaches to risk adjustment of skewed outcomes data. Journal of Health Economics, 24, 465–488.

MCCULLAGH, P., NELDER, J. A., 1992. Generalized Linear Models. London: Chapman and Hall.

MCDONALD, J. B., BUTLER, R. J., 1990. Regression models for positive random variables. Journal of Econometrics, 43, 227–251.

MENG, S., WEI, Y., WHITMORE, G. A., 1999. Accounting for individual over-dispersion in a bonus-malus system. Astin Bulletin, 29, 327-337.

MUDHOLKAR, G. S., SRIVASTAVA, D. K., 1993. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. IEEE Trans. Reliab., R-42, 299-302.

NADARAJAH, S., KOTZ, S., 2003. The exponentiated Frechet distribution. Available at: Interstat.statjournals.net, 0312001.

NADARAJAH, S., KOTZ, S., 2006. The Exponentiated type distributions. Acta Appl Math, 92,97-111.

OHLSSON, E., JOHANSSON, B., 2010. Non-life insurance pricing with generalized linear models. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag.

OLIVIERI, A., PITACCO, E., 2011. Introduction to insurance mathematics. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

PANJER, H. H., 2006. Operational risk. Modeling analytics. Hoboken, New Jersey: Wiley.

PAULA, G. A., LEIVA, V., BARROS, M., LIU, S., 2012. Robust statistical modeling using the Birnbaum-Saunders-t distribution applied to insurance. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 28, 16-34.

R CORE TEAM. R: 2014. A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2014 URL http://www.R-project.org/.

VANDERVIEREN, E., HUBERT, M., 2004. An adjusted boxplot for skewed distributions. in: Antoch, J.,ed. Proceedings in Computational Statistics, Heidelberg: Spring-Verlag. 1933-1940.

VERNIC, R., 2006. Multivariate skew- normal distributions with applications in insurance. Insurance: Mathematics and Economics, 38, 413-426.

WANG, S., 2002. A set of new methods and tools for enterprise risk capital management and portfolio optimization. Working papaer. SCOR reinsurance company (http://www.casact.com/pubs/forum/02sf043.pdf).

WILLMOT, G. E., 1987. The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial. Scandinavian Actuarial Journal, 3-4, 113-127.

WILLMOT, G. E., LIN, X. S., 2011. Risk modelling with the mixed Erlang distribution. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 27, 2-16.

ZHU, D., GALBRAITH, J. W., 2010. A generalized asymmetric Student-t distribution with application to financial econometrics. Journal of Econometrics, 157, 297-305.

ZHU, D., ZINDE-WALSH, V., 2009. Properties and estimation of asymmetric exponential power distribution. Journal of Econometrics, 148, 86-99

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana'da doğdu. 2004 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı ve aynı yıl Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında yüksek lisansını tamamladı ve 2012 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde doktora eğitimine başladı. Halen Mustafa Kemal Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.