ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gözde KUŞ

YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNDE TAHMİN YÖNTEMLERİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2014

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNDE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Gözde KUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 24/12/2014 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……..……..	……..……...	……..……
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL	Prof. Dr. Hamza EROL	Doç. Dr. Kamuran GÖZÜBATIK TARIM
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FEF2013YL19

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNDE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Gözde KUŞ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
Yıl: 2014, Sayfa: 82
Jüri : Doç. Dr. Güzin YÜKSEL
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Doç. Dr. Kamuran GÖZÜBATIK TARIM

YEM, muhtemelen nicel sosyal bilimler ile ilgilenen bilim insanları tarafından kullanılan en yaygın istatistiksel tekniktir. Teorik ve uygulamalı istatistiksel araştırmanın etkin bir alanıdır. Son gelişmeler, farklı geleneksel yaklaşımların istatistiksel modelleme ile YEM'nin özel durumları haline gelmesine olanak sağlamıştır . YEM'de, araştırmacı tarafından varsayılan teorik model için test yapılmasını sağlamak amacı ile gözlenen değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren çeşitli modeller kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasının amacı EO, AEKK ve GEKK gibi yaygın olarak kullanılan tahmin yöntemlerinin ve model uyumunun test edilmesini sağlayan uyum iyiliği indekslerinin incelenmesidir. TIMSS 2011 matematik dersine ilişkin 4. sınıf düzeyi öğrenci anketi verileri kullanılarak LISREL programında bir uygulama yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yapısal Eşitlik Modellemesi, Tahmin Yöntemleri, LISREL, Uyum İyiliği İndeksleri, TIMSS 2011

ABSTRACT

MSc THESIS

ESTIMATION METHODS IN STRUCTURAL EQUATION MODELING

Gözde KUŞ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
Year: 2014, Pages: 82
Jury : Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL
: Prof. Dr. Hamza EROL
: Assoc. Prof. Dr. Kamuran GÖZÜBATIK TARIM

SEM is arguably one of the most popular statistical methodologies available to quantitative social scientists. SEM is an active area of theoretical and applied statistical research. Recent developments have allowed traditionally different approaches to statistical modeling to be specified as special cases of structural equation modeling. SEM uses various types of models to depict relationships among observed variables, with the same basic goal of providing a quantitative test of theoretical model hypothesized by a researcher.

The propose of this study to investigate the popular methods of estimation, ML, WLS and GLS. The goodness-of-fit indices, that are used for testing model fit, are studied. Finally, the data of 4th grade students questionnaire about mathematics in TIMSS 2011 is used for an application of LISREL.

Key Words: Structural Equation Modeling, Methods of Estimation, LISREL, Goodness of Fit İndices, Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2011

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, görüş ve tecrübeleri ile bana yol gösteren değerli tez danışmanım Doç. Dr. Güzin YÜKSEL'e, sonsuz teşekkürler. Ayrıca eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde göreve başladığım günden itibaren her konuda bana yardımcı olan, başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Onur KÖKSOY olmak üzere tüm öğretim üye/elemanlarına, çalışmamın uygulama kısmında bana tecrübeleri ile yol gösteren Ege Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme Anabilim Dalı Başkanı Sayın Doç. Dr. Tuncay ÖĞRETMEN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
TEŞEKKÜR III
İÇİNDEKİLER IV
TABLOLAR DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ X
KISALTMALAR XII
1. GİRİŞ 1
2. YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNİN KULLANIM ALANLARI VE MANTIĞI 3
3. TEMEL KAVRAMLAR 5
3.1. Gözlenen ve Gizil Değişkenler 5
3.2. İçsel ve Dışsal Değişkenler 5
3.3. Yol (Path) Analizi 6
3.3.1. Yol Diyagramı 7
3.3.2. Kovaryans ve Korelasyon Ayrışımı 7
3.3.3. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler 9
3.4. Yapısal Model ve Ölçüm Modeli 10
3.4.1. Yapısal model 11
3.4.2. Ölçüm modeli 15
3.5. Tahmini Kovaryans Matrisi 18
4. YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİ 23
4.1. Modeli Belirleme 23
4.2. Modeli Tanımlama 23
4.3. Tahmin 28
4.4. Uyum Testi 28
4.5. Modelin Yeniden Belirlenmesi 29
5. TAHMİN YÖNTEMLERİ 33
5.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi 34

5.2. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi 37
5.3. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi 39
6. MODELİN DEĞERLENDİRİLMESİ VE UYUM ÖLÇÜTLERİ 41
6.1. Önem Testi 42
6.1.1. Ki Kare Uyum Testi 42
6.2. Model Uyumuna ilişkin Betimleyici Uyum İyiliği Testleri 43
6.2.1. Yaklaşık Hataların Ortalama Karekökü 43
6.2.2. Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü 44
6.2.3. Standartlaştırılmış Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü 45
6.3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçütler 46
6.3.1. Normlaştırılmış Uyum indeksi 46
6.3.2. Normlaştırılmamış Uyum İndeksi 47
6.3.3. Karşılaştırmalı Uyum İndeksi 48
6.3.4. Uyum İyiliği İndeksi 49
6.3.5. Düzeltilmiş Uyum İyiliği İndeksi 50
6.4. Model Tutumuna İlişkin Betimleyici Ölçütler 51
6.4.1. Tutumlu Uyum İyiliği İndeksi 51
6.4.2. Akaike Bilgi Kriteri 51
6.4.3. Tutarlı Akaike Bilgi Kriteri 52
6.4.4. Beklenen Çapraz Geçerlilik İndeksi 53
7. LISREL PAKET PROGRAMI 55
8. 2011 TIMSS SONUÇLARI İLE BİR YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİ UYGULAMASI 57
8.1. TIMSS nedir? 57
8.2. TIMSS 2011 Değerlendirmesinin Uygulanma Süreci 57
8.3. TIMSS 2011'in Türkiye'de Uygulanma Süreci 58
8.4. TIMSS Değerlendirmesinde Uygulanan Anketler 58
8.5. TIMSS 2011 Türkiye Verileri ile Bir Yapısal Eşitlik Modellemesi Çalışması 59
8.5.1. Açımlayıcı Faktör Analizi Uygulaması 61
8.5.2. LISREL ile Yapısal Eşitlik Modellemesi 64

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 73
KAYNAKLAR 75
ÖZGEÇMİŞ 79
EKLER.....80

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 3.1. Yol analizinde kullanılan temel semboller 14
Çizelge 3.2. Yapısal modele ait gösterimler 15
Çizelge 3.3. Ölçüm modeline ait gösterimler 17
Çizelge 8.1. KMO Bartlett’s Test sonucu tablosu 61
Çizelge 8.2. Faktörler ve faktör yüklerine ilişkin SPSS çıktısı..... 63
Çizelge 8.3. Tüm modele ilişkin uyum indeksi değerleri 65
Çizelge 8.4. Kız öğrencilere ait anket sonuçlarına ilişkin uyum indeksi değerleri 67
Çizelge 8.5. Erkek öğrencilere ait anket sonuçlarına ilişkin uyum indeksi değerleri 68

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 3.1. İçsel ve Dışsal Değişkenler 6
Şekil 3.2. Yol Diyagramı 7
Şekil 3.3. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler 9
Şekil 3.4. Yol Diyagramı YEM'in Grafiksel Gösterimi 11
Şekil 3.5. Yapısal Model 11
Şekil 3.6. Ölçüm Modeli 15
Şekil 4.1. Üç Gizil Değişkenli Örnek Model 26
Şekil 8.1. Faktörlerin öz değerlerine ilişkin çizgi grafiği 62
Şekil 8.2. Anket Verileri ile Uyumu Araştırılacak Model 64
Şekil 8.3. Gizil Değişkenler Arasındaki İlişkiyi Gösteren Yapısal Model 65
Şekil 8.4. Anket Verileri İle Oluşturulan Modele ilişkin Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri 66
Şekil 8.5. Kız Öğrencilere Ait Anket Verileri İle Oluşturulan Model ve Katsayılar 69
Şekil 8.6. Kız Öğrencilere Ait Anket Verileri İle Oluşturulan Model ve Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri 70
Şekil 8.7. Erkek Öğrencilere Ait Anket Verileri ile Oluşturulan Model ve Katsayılar 70
Şekil 8.8. Erkek Öğrencilere Ait Anket Verileri İle Oluşturulan Model ve Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri 71

KISALTMALAR

AEKK	: Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi
AGFI	: Düzeltilmiş Uyum İyiliği İndeksi (Adjusted Goodness of Fit Index)
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criterion)
CAIC	: Tutarlı Akaike Bilgi Kriteri (Consistent Akaike Information Criterion)
CFI	: Karşılaştırmalı Uyum İndeksi (Comparative Fit Index)
ECVI	: Beklenen Çapraz Geçerlilik İndeksi (Expected Cross Validation Index)
EO	: En çok Olabilirlik Yöntemi
GEKK	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi
GFI	: Uyum İyiliği İndeksi (Goodness of Fit Index)
GLS	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (Generalized Least Squares Method)
IEA	: International Association fort he Evaluation of Educational Achievement
LISREL	: Doğrusal Yapılsal İlişkiler (Linear Structural Relations)
ML	: En Çok Oabilirlik Yöntemi (Maximum Likelihood Method)
NFI	: Normlaştırılmış Uyum İndeksi (Normed Fit Index)
NNFI	: Normalştırılmamış Uyum İndeksi (Nonnormed Fit Index)
OLUMLU	: Olumlu Tutum İçsel Gizil Değişkeni
OLUMSUZ	: Olumsuz Tutum İçsel Gizil Değişkeni
OZYET	: Öz Yeterlilik Algısı Dışsal Gizil Değişkeni
PGFI	: Tutumlu Uyum İyiliği İndeksi (Parsimony Goodness of Fit Index)
PNGFI	: Tutumlu Normlaştırılmış Uyum İndeksi (Parsimony Normed Goodness of Fit Index)
RMR	: Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü (Root Mean Square Residual)
RMSEA	: Yaklaşık Hataların Ortalama Karekökü (Root Mean Square Error of Approximation)
SEM	: Yapısal Eşitlik Modellemesi (Structural Equation Modeling)

SRMR : Standartlaştırılmış Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü (Standardized Root Mean Square Residual)

TIMSS : Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması (Trends in International Mathematics and Science Study)

WLS : Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi (Weighted Least Squares Method)

YEM : Yapısal Eşitlik Modellemesi

1. GİRİŞ

Yapısal eşitlik modellemesi (YEM), gözlenebilen (observed) ve gözlenemeyen (latent) değişkenler arasındaki nedensellik ilişkilerinin sınanmasında kullanılan kapsamlı bir istatistiksel tekniktir. Özellikle psikoloji, sosyoloji, ekonometri ve eğitim bilimleri alanlarında değişkenler arasında var olan ilişkilerin değerlendirilmesinde ve kuramsal yapıların formüle edilmesinde karşılaşılan problemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

Nedensel modeller kronolojik olarak regresyon analizi, yol analizi, doğrulayıcı faktör analizi ve yapısal eşitlik modellemesi evrelerinden geçerek günümüzdeki halini almıştır.

Yapısal eşitlik modellemesi, 1970'li yıllar ve sonrasında sosyoloji alanında Bielby ve Hauser (1977), psikoloji alanında Bentler (1980; 1986) ve ekonomi alanında Goldberger (1972), Aigner ve arkadaşları (1984) tarafından üzerinde çalışılmış bir istatistiksel tekniktir.

Bollen (1989), YEM'in üç temel bileşenden oluştuğunu belirtmiştir. Bunlar:

1. Yol analizi (Path Anlysis)
2. Yapısal model ve ölçüm modellerinin kavramsal sentezi
3. Genel tahmin süreçleri

Yol analizinin temelleri bir biyometrisyen olan Sewall Wright tarafından 1918, 1921, 1934 ve 1960 yıllarında yapılan çalışmalar ile atılmıştır. Korelasyon katsayıları ve regresyon analizi yardımı ile değişkenler arasında var olan çok daha karmaşık ilişkilerin modellenmesi sağlanmıştır. Modeldeki gözlenen değişkenler arasındaki teorik ilişkileri gösteren, eş zamanlı regresyon denklemlerinin çözümünü kapsamaktadır.

Yol analizi ilk olarak hayvan davranışlarının modellenmesinde kullanılmıştır. Ekonomi ve sosyoloji gibi alanlarda uzun bir süre göz ardı edilmişse de 1950'lerde ekonomi alanında H. Wold ve 1960'larda sosyoloji alanında O. D. Duncan ve H. M. Blalock tarafından yeniden keşfedilmiş ve çalışmalara başlanılmıştır.

Yapısal model ve ölçüm modellerinin kavramsal sentezi Karl Jöreskog (1969, 1973), Ward Keesling (1972) ve David Wiley (1973) tarafından geliştirilmiştir. Bu yaklaşım başlarda JKW modeli olarak bilinse de 1973 yılında ilk paket programın geliştirilmesi ile doğrusal yapısal ilişkiler modeli (Linear Structural Relations Model-LİSREL) adını almıştır. Bu tarihten itibaren Shumow ve Lomax (2002) tarafından yapılan, ebeveynlerin ergenlik çağındaki öğrenciler üzerindeki etkisinin modellenmesi gibi birçok çalışma yapılmaya başlanmıştır.

Sewall Wright tarafından yol (path) analizi üzerine yapılan uygulamalar, Wright'ın parametre tahminlerini elde etmek için üzerinde çalıştığı tahmin süreçlerinden etkilenmiştir. Lawley (1940), Anderson ve Rubin (1956) ve Jöreskog (1969) psikometri alanında yaptıkları çalışmalar faktör analizinde hipotez testleri için gerekli temellerin ortaya çıkarılmasına yardım etmiştir. Bock ve Bargmann (1966) tarafından gizil değişkenlerin yer aldığı modellerde çözümleme aşamasında varyansın bileşenlerinin tahmin edilmesi için kovaryans yapı analizinin yapılması gerektiği önerilmiştir. Günümüzde yaygın olarak kullanılan tahmin yöntemlerinden En Çok Olabilirlik tahmin edicisi Jöreskog (1973) tarafından, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler yöntemi ise Jöreskog ve Goldberger (1972) ve Browne (1974, 1982, 1984) tarafından önerilmiştir.

2. YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİNİN KULLANIM ALANLARI VE MANTIĞI

YEM, özellikle sosyal bilimler, eğitim bilimleri, pazarlama ve tıp alanlarında sıklıkla kullanılan bir istatistiksel yöntemdir.

YEM, araştırmacının verileri toplamadan önce kafasında teorik yapı oluşturması ile başlayan bir süreçtir. Bundan dolayı en temel özelliği teoriye dayalı olmasıdır. Araştırmacı, var olduğunu düşündüğü örüntülerin, topladığı veriler tarafından doğrulanıp doğrulanmadığını YEM ile belirlemektedir. Yani YEM, yapısal bir teorinin doğrulanmasına ilişkin bir yaklaşımdır.

YEM, teori geliştirmek amacı ile de kullanılabilmektedir. Teori geliştirmede, sıklıkla ilgilenilen değişkenler arasındaki olası ilişkileri açıklamak için, YEM'in tekrarlanan uygulamaları, aynı ya da benzer veri seti ile yapılmaktadır (Timm,2002; Raykov and Marcoulides, 2006). Teori geliştirmede önceden belirlenmiş bir teori olmadığı varsayılmaktadır. Teori geliştirme süreci genellikle açıklama biçimi olarak ele alınmaktadır (Raykov and Marcoulides, 2006).

YEM'in bu kadar yaygın kullanılmasının başlıca sebebi yapılar arasındaki etkileşimleri ve ölçüm hatalarını hesaba katmasıdır. Geleneksel regresyon analizinde YEM'in aksine açıklayıcı değişkenlerdeki ölçüm hataları göz ardı edilmektedir. Bu durum sosyal bilimler ve davranış bilimlerindeki ampirik çalışmalarda gerçekçi sonuçlar vermemektedir. Buna ek olarak YEM'de doğrudan ve dolaylı etkilere de yer verilmesi, çok değişkenli karmaşık modellerin test edilmesi, tahmini ve geliştirilmesine olanak sağlar (Kline, 2005; Raykov and Marcoulides, 2006)

Bollen ve Long (1993), YEM uygulamalarında izlenmesi gereken beş adımı aşağıdaki.gibi sıralamışlardır:

1. Belirleme (Specification)
2. Tanımlama (Identification)
3. Tahmin (Estimation)
4. Uyum Testi (Testing fit)
5. Yeniden Belirleme (Respecification)

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Gözlenen Değişkenler ve Gizil Değişkenler

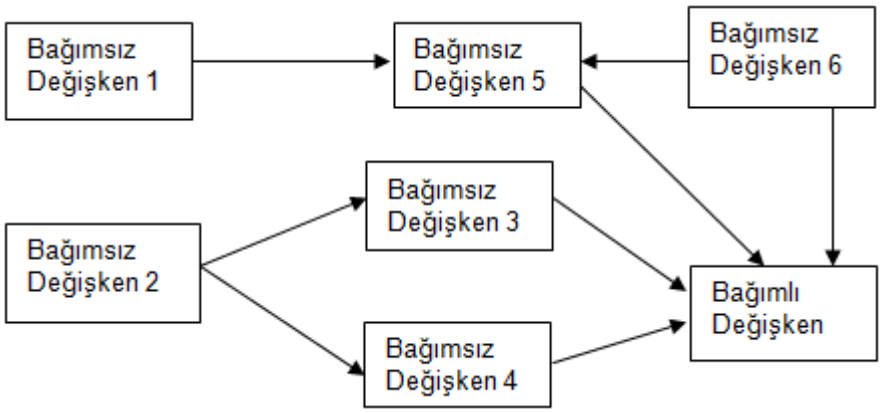
YEM'de rastgele değişken kavramı gözlenen (observed) ve gizil (latent) olmak üzere iki farklı kategoride incelenmektedir. Soyut, yani ölçülemeyen kavramlar gizil değişkenler tarafından, ölçülebilen kavramlar ise gözlenen değişkenler tarafından temsil edilmektedir.

Gözlenen değişkenler, gösterge değişkenler olarak da adlandırılabilmektedirler. Belirli yöntemler kullanılarak ölçülmeleri mümkündür. Gözlenen değişkenler, ölçülebilir kavramları temsil ettiklerinden dolayı ölçüm hatalarını da kapsarlar. Yaş, boy, kilo gibi kavramlar gösterge değişkenlere birer örnektir.

Gizil değişkenler, faktörler, yapılar, gözlenemeyen değişkenler olarak da adlandırılabilmektedirler. Herhangi bir yöntem kullanılarak ölçülemezler. Bu tür değişkenlere sosyal bilimler, eğitim bilimleri, psikoloji gibi alanlarda daha çok rastlanmaktadır. Yetenek, yaşam doyumu, iş tatmini gibi kavramlar gizil değişkenlere örnek olarak düşünülebilir. Gizil değişkenler ölçülemediği için gözlenebilir değişkenler gizil değişkenlerin göstergeleri olarak belirlenmektedirler.

3.2. İçsel ve Dışsal Değişkenler

YEM'de teorik olarak oluşturulan modelin doğru tanımlanması, süreç sonunda doğrulama yapılabilmesi açısından oldukça önemlidir. Ancak YEM'de bağımlı-bağımsız değişken tanımı bulanıklaştığı için bu kavramların yerine endojen ve egzojen kavramları kullanılmaktadır. İçsel (Endojen) değişkenler, diğer değişkenler üzerine bağımlı olarak modellenirken, dışsal (Egzojen) değişkenler ise diğer değişkenler üzerine bağımlı değildirler (Bayram, 2010).



Şekil 3.1. İçsel ve dışsal değişkenler

Şekil 3.1'de Bağımsız Değişken 3, Bağımsız Değişken 4, Bağımsız Değişken 5 ve Bağımsız Değişken 6, bağımlı değişkeni direkt olarak etkilemekte, Bağımsız Değişken 1 ve Bağımsız Değişken 2, Bağımlı Değişkeni dolaylı olarak etkilemektedir. Ayrıca Bağımsız Değişken 1 ve Bağımsız Değişken 2 diğer değişkenler tarafından etkilenmemektedirler. Dolayısıyla, Bağımsız Değişken 1 ve Bağımsız Değişken 2 dışsal değişkenler, Bağımsız Değişken 3, Bağımsız Değişken 4, Bağımsız Değişken 5 ve Bağımsız Değişken 6 ise içsel değişkenler olarak adlandırılırlar.

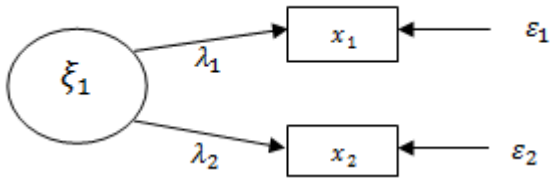
3.3. Yol (Path) Analizi

Yapısal eşitliklerin analizinde kullanılan yöntemlerden biri yol (path) analizidir. Yol analizinde, modelde bulunan değişkenler arasındaki ilişkiler yol diyagramları ile görselleştirilerek ilişkilerin daha kolay anlaşılması sağlanmaktadır. Değişkenler arasındaki kovaryans ve korelasyonlar, modelde bulunan parametrelerin birer fonksiyonu olarak ayrıştırılmaktadır. Bunun yanı sıra modeldeki doğrudan, dolaylı ve toplam etkiler incelenmektedir.

3.3.1. Yol Diyagramı

Yol diyagramı, değişkenler arasındaki ilişkileri diyagramlar yardımı ile modelleyerek analize görsellik kazandırmakta, dolayısıyla araştırmacıların değişkenler arasındaki ilişkileri daha kolay görebilmesini sağlamaktadır.

Yol diyagramında kullanılan her şeklin belirli anlamları vardır. Ekler Tablo 3.1.'de, kullanılan şekillerin ne anlamlara geldikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Yol Diyagramı

Şekil 3.2.'de elips şekli ile temsil edilen ξ_1 değişkeni gizil değişken, dikdörtgen ile temsil edilen x_1 ve x_2 değişkenleri ξ_1 gizil değişkenin göstergeleri, ε_1 ve ε_2 ise göstergelere ait hata terimleridir. Hatalar, ξ_1 gizil değişkeni ile ilişkisizdir. Hata terimlerinden gözlenen değişkenlere giden tek yönlü oklar, ölçüm hatasının gözlenen değişkenler üzerindeki etkisini ifade etmektedir (Bayram, 2010).

3.3.2. Kovaryans ve Korelasyon Ayrışımı

İki değişken arasındaki kovaryans ve korelasyon, yol analizi ile model parametrelerinin birer fonksiyonu olarak yazılabilmektedir. Kovaryans ve korelasyon ayrışımına Şekil 3.2.'de verilen örnek ele alınarak devam edilecektir.

$$x_1 = \lambda_1 \xi_1 + \varepsilon_1 \quad (3.1.)$$

$$x_2 = \lambda_2 \xi_1 + \varepsilon_2 \quad (3.2.)$$

Şekil (3.2.)'den yararlanılarak eşitlik (3.1.) ve (3.2.) yazılmıştır. Bu eşitlikler kullanılarak kovaryans kavramına geçilir ve x_1 gösterge değişkeni ile x_2 gösterge değişkeni arasındaki kovaryans şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} Cov(x_1, x_2) &= Cov(\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_1, \lambda_2\xi_1 + \varepsilon_2) \\ &= E\left(\xi_1{}^2\lambda_1\lambda_2 + \varepsilon_1\lambda_2\xi_1 + \lambda_1\xi_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right) - \\ &\quad E(\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_1).E(\lambda_2\xi_1 + \varepsilon_2) \\ &= \lambda_1\lambda_2 E\left(\xi_1{}^2\right) - \lambda_2\varepsilon_1 E(\xi_1) - \lambda_1\varepsilon_2 E(\xi_1) + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \lambda_1\lambda_2\phi_{11} \end{aligned} \quad (3.3.)$$

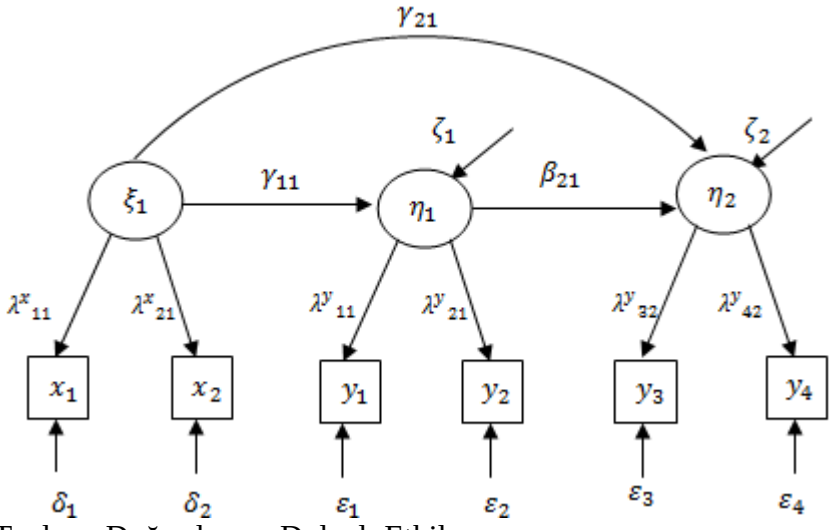
Bu eşitlikte λ_1 ve λ_2 katsayıları ξ_1 gizil değişkeninin sırası ile x_1 ve x_2 değişkenleri üzerindeki etkisi, ϕ_{11} parametresi ise ξ_1 gizil değişkeninin varyansıdır. Daha genel ifadeler elde etmek için matris formuna geçildiğinde $\boldsymbol{\xi}$, gizil değişkenlerin vektörü, $\boldsymbol{x}$ gözlenen değişkenlerin vektörü ve $\boldsymbol{\Lambda_x}$, ξ gizil değişkenlerinin x gözlenen değişkenleri üzerindeki etkilerinin oluşturduğu katsayı matrisini göstermek üzere (3.3.) eşitliği matris formunda (3.4.) eşitliğine dönüşecektir.

$$\begin{aligned} x &= \Lambda_x\,\xi + \varepsilon \\ xx' &= (\Lambda_x\,\xi + \varepsilon).(\Lambda_x\,\xi + \varepsilon)' = (\Lambda_x\,\xi + \varepsilon).(\,\xi'\Lambda_x{}' + \varepsilon') \\ &= (\Lambda_x\xi\xi'\Lambda_x{}' + \Lambda_x\,\xi\varepsilon' + \varepsilon\xi'\Lambda_x' + \varepsilon\varepsilon') \\ \Sigma &= E(xx') \\ &= E(\Lambda_x\xi\xi'\Lambda_x{}' + \Lambda_x\,\xi\varepsilon' + \varepsilon\xi'\Lambda_x' + \varepsilon\varepsilon') \\ &= E(\Lambda_x\xi\xi'\Lambda_x{}') + E(\Lambda_x\,\xi\varepsilon') + E(\varepsilon\xi'\Lambda_x') + E(\varepsilon\varepsilon') \\ &= \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.4.)$$

Burada Σ, x gözlenen değişkenlerinin kovaryans matrisi, Φ, ξ gizil değişkeninin kovaryans matrisi, Θ_ε ise ε hatalarına ait kovaryans matrisidir. Görüldüğü gibi x gözlenen değişkenlerinin kovaryans matrisi Σ, model parametrelerinin bir fonksiyonu şeklinde ayrıştırılmıştır. Bu durum parametrelerin, gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi ile ilişkili olduğunu ve parametreler değiştikçe kovaryans matrisinin de buna bağlı olarak değişeceğini göstermektedir.

3.3.3. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler

Yol analizinde değişkenlerin birbirleri üzerindeki etkileri toplam, doğrudan ve dolaylı olarak adlandırılmaktadır. Doğrudan etki, bir değişkenin başka bir değişken üzerindeki direkt etkisidir. Şekil 3.3.'te ξ_1 gizil değişkeninin η_1 üzerinde doğrudan etkisi vardır ve bu etki γ_{11} ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, η_1 gizil değişkeninin de η_2 değişkeni üzerinde doğrudan etkisi bulunmaktadır ve bu etki β_{21} ile gösterilmiştir. Dolaylı etkide, aracı değişken söz konusudur. Bir değişkenin başka bir değişken üzerindeki etkisi, bu aracı değişken ile gerçekleşmektedir. Şekil 3.3.'te ξ_1 gizil değişkeninin, η_1 aracılığı ile, η_2 üzerinde dolaylı etkisi bulunmaktadır ve bu etki γ_{21} ile gösterilmiştir. Benzer şekilde ξ_1 gizil değişkeninin y_1 ve y_2 gösterge değişkenleri üzerinde yine η_1 aracılığı ile dolaylı etkisi bulunmaktadır.



Şekil 3.3. Toplam, Doğrudan ve Dolaylı Etkiler

Toplam etki, bir değişken üzerindeki doğrudan ve dolaylı etkilerin toplanması ile elde edilir.

$$Toplam\ Etki = Doğrudan\ etki + Dolaylı\ Etki$$

Şekil 3.3.'te ξ_1 dışsal gizil değişkeninin η_2 içsel gizil değişkeni üzerinde hem doğrudan hem de dolaylı etkisi söz konusudur. ξ_1 gizil değişkeninin η_2 gizil

değişkeni üzerindeki doğrudan etkisi γ_{21} ile dolaylı etkisi γ_{11} ile gösterilmektedir. Bu durumda toplam etki (3.5.) eşitliği ile ifade edilir.

$$Toplam\ Etki = \gamma_{21} + \gamma_{11}\beta_{21} \quad (3.5.)$$

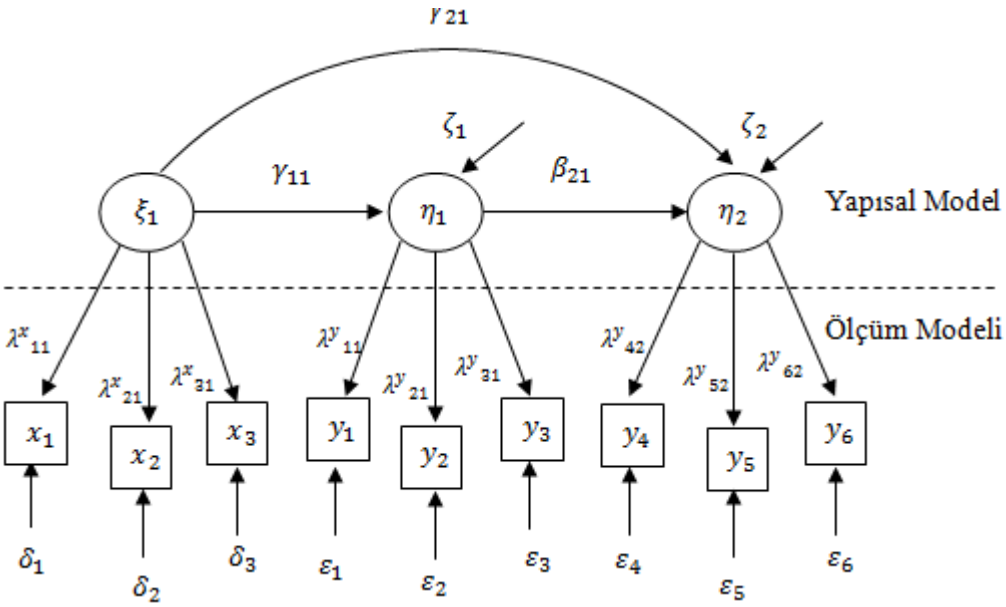
Benzer şekilde ξ_1 gizil değişkeninin y_1 gösterge değişkeni üzerindeki toplam etkisi (3.6.) eşitliği ile ifade edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur: ξ_1 gizil değişkeninin y_1 gösterge değişkeni üzerinde doğrudan etkisi bulunmadığı için toplam etki, yalnızca dolaylı etkiyi içermektedir.

$$Toplam\ Etki = 0 + \gamma_{11}\lambda^{y}{}_{11} \quad (3.6.)$$

Regresyon analizinde tahmin edilen regresyon katsayıları, değişkenlerin birbiri üzerindeki doğrudan etkilerinin birer tahminidir (Bollen, 1989). Yol analizi ile regresyon analizi bu açıdan benzerlik gösterse de, yol analizinde dolaylı etkilerin de göz önünde bulundurulması ile daha kapsamlı bir analiz yapılması sağlanır.

3.4. Yapısal Model ve Ölçüm Modeli

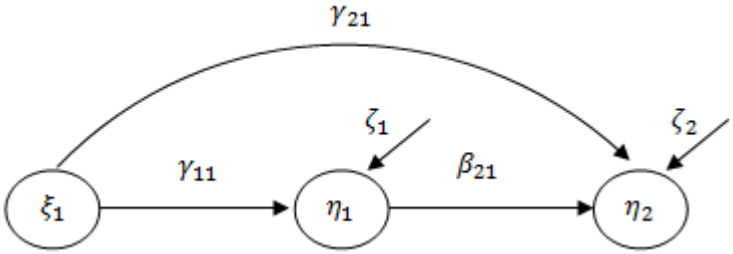
YEM'de gizil değişkenler ile gösterge değişkenler arasındaki ilişkiyi gösteren yol diyagramı iki ayrı model olarak incelenmektedir. Bunlardan biri gizil değişkenlerin kendi aralarındaki ilişkileri gösteren yapısal model, diğeri ise gösterge değişkenler ile gizil değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren ölçüm modelleridir. Şekil 3.4. YEM'de yapısal model ve ölçüm modelinin bir arada görülebileceği bir yol diyagramıdır.



Şekil 3.4. Yol diyagramı YEM'in grafiksel gösterimi (Yılmaz ve Çelik, 2009)

3.4.1. Yapısal Model

Yapısal model, gizil değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılmaktadır. Yol diyagramının gizil değişkenlere ait kısmıdır.



Şekil 3.5. Yapısal Model (Yılmaz ve Çelik, 2009)

Şekil 3.5., Şekil 3.4. ile verilen yol diyagramının yapısal modele ait kısmıdır. Burada ξ_1 gizil değişkeni dışsal gizil değişken ve η_1 ve η_2 değişkenleri içsel gizil değişkenlerdir. γ_{11}, ξ_1 gizil değişkeninin η_1 üzerindeki etkisini, γ_{21}, ξ_1 gizil değişkeninin η_2 üzerindeki etkisini, β_{21} ise η_1 gizil değişkeninin η_2 üzerindeki etkisini göstermektedir. ζ_1 ve ζ_2 parametreleri ise sırasıyla η_1 ve η_2 içsel gizil değişkenlerinin hatalarını ifade etmektedir. Hataların, dışsal gizil değişkenler ile

ilişkisiz ve beklenen değerlerinin sıfır olduğu varsayılmaktadır. Şekil 3.5.'ten yola çıkarak (3.7.) ve (3.8.) eşitlikleri yazılabilir.

$$\eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \tag{3.7.}$$

$$\eta_2 = \gamma_{21}\,\xi_1 + \beta_{21}\eta_1 + \zeta_2 \tag{3.8.}$$

Eşitlik (3.9.), (3.7.) ve (3.8.) eşitliklerinin matris formunu ifade etmektedir.

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\end{bmatrix}[\xi_1] + \begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathrm{B}\boldsymbol{\eta} + \Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \tag{3.9.}$$

β_{21}, γ_{11} ve γ_{21} katsayıları yapısal parametrelerdir. β_{21} parametresi, ξ_1 sabit tutulduğunda, η_1'deki bir birimlik değişimin, η_2'nin beklenen değerinde yapacağı değişikliği ifade etmektedir. Benzer durum γ_{11} ve γ_{21} parametreleri için de geçerlidir. Burada β_{21} katsayısı η_1 içsel gizil değişkeni ile ilişkili iken, γ_{11} ve γ_{21} katsayıları ξ_1 dışsal gizil değişkeni ile ilişkilidir. (3.9.) eşitliği yapısal model için genel matris gösterimidir. Bu eşitlikte $\boldsymbol{\eta}$, içsel gizil değişkenin (m x 1) boyutlu vektörüdür. İlgili örnekte iki adet içsel gizil değişken bulunduğu için $\boldsymbol{\eta}$ vektörü (2 x 1) boyutlu bir vektörüdür. Benzer şekilde $\boldsymbol{\xi}$, dışsal gizil değişkenlerin vektörüdür ve (n x 1) boyutludur. İlgili modelde bir adet dışsal gizil değişken olduğu için $\boldsymbol{\xi}$ vektörü (1 x 1) boyutludur. Hata terimleri (m x 1) boyutlu $\boldsymbol{\zeta}$ vektörü ile ifade edilir ve modelde iki adet hata terimi bulunduğu için $\boldsymbol{\zeta}$ vektörü (2 x 1) boyutlu bir vektördür. Her bir ζ_i hata terimi, η_i içsel gizil değişkeni ile ilişkilidir.

B ve Γ matrisleri, katsayı matrisleridir. B, içsel gizil değişkenlere ait katsayı matrisidir ve (m x m) boyutludur. Burada m, içsel gizil değişken sayısını göstermektedir. İlgilendiğimiz örnekte iki adet içsel değişken bulunduğu için B matrisi (2 x 2) boyutludur. B matrisinde diagonal elemanlar daima sıfırdır. Bu durum η_i içsel değişkeninin i_inci eşitlikten kaldırılmasını sağlar. Bunun yanı sıra B matrisinde herhangi bir β_{ij} elemanının sıfır olması, j_inci içsel değişkenin, i_inci

içsel değişken üzerinde bir etkisinin olmadığını gösterir. Yani söz konusu örnekte, B matrisinde β_{12} elemanının sıfır olması η_2 içsel değişkeninin η_1 içsel değişkeni üzerinde bir etkisinin olmadığını göstermektedir. Γ matrisi ise dışsal gizil değişkenlerin, içsel gizil değişkenler üzerindeki etkisini ifade eden katsayı matrisidir. Γ matrisi, m, içsel gizil değişken sayısı ve n dışsal gizil değişken sayısı olmak üzere, (m x n) boyutludur. Söz konusu modelde bir adet dışsal gizil değişken ve iki adet içsel gizil değişken bulunduğu için Γ matrisi (2 x 1) boyutludur. Bu da ξ_1 değişkeninin, η_1 ve η_2 değişkenleri üzerinde etkisinin var olduğunu göstermektedir (Bollen, 1989).

Yapısal modellerde genel matris gösteriminde var olan parametreler dışında dışsal değişkenlerin ve hata terimlerinin kovaryans matrisleri de bulunmaktadır. Bu matrisler sırası ile (n x n) boyutlu Φ matrisi ve (m x m) boyutlu Ψ matrisidir.

Yapısal model için bazı varsayımlar söz konusudur. Bu varsayımlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

- $E(\eta) = 0, E(\xi) = 0, E(\zeta) = 0$
- $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\xi}$ ile ilşkisizdir .Bu varsayım geçerli olmadığında tahmin ediciler tutarlı olmamaktadır.
- $(I - B)$ matrisi tekil olmayan matristir.
- $\boldsymbol{\zeta}$, sabit varyanslı ve otokorelasyonsuzdur.

Çizelge 3.2. Yapısal modele ait gösterimler (Bollen, 1989)

Model: $\boldsymbol{\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta}$

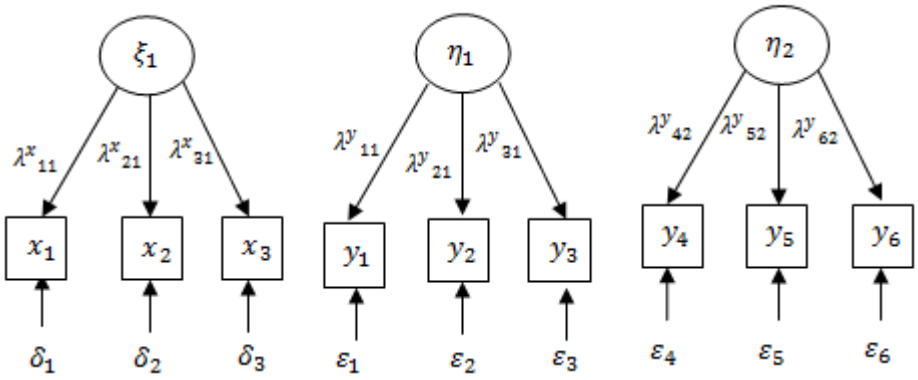
Varsayımlar:

- $\boldsymbol{E(\eta) = 0, E(\xi) = 0, E(\zeta) = 0}$
- $\boldsymbol{\zeta}$ **ile** $\boldsymbol{\xi}$ **ilişkisizdir.**
- $\boldsymbol{(I - B)}$ **matrisi tekil olmayan matristir.**

Sembol	Adı	Boyutu	Tanımlama
	Değişkenler		
$\boldsymbol{\eta}$	Eta	m x 1	İçsel gizil değişken
$\boldsymbol{\xi}$	Ksi	n x 1	Dışsal gizil değişken
$\boldsymbol{\zeta}$	Zeta	m x 1	İçsel gizil değişkenin hataları
	Katsayı Matrisleri		
B	Beta	m x m	İçsel gizil değikenlere ait katsayı matrisi
Γ	Gamma	m x n	Dışsal gizil değişkenlere ait katsayı matrisi
	Kovaryans Matrisleri		
Φ	Phi	n x n	ξ gizil değişkenlerine ait kovaryans matrisi
Ψ	Psi	m x m	ζ hatalarına ait kovaryans matrisi

3.4.2. Ölçüm Modeli

Ölçüm modelleri, gizil değişkenler ile gösterge değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren yapısal eşitlikleri kapsar. Modeldeki her bir gizil değişken, gösterge değişkenlerce ölçülür. Şekil 3.6. ölçüm modeline bir örnektir.



Şekil 3.6. Ölçüm Modeli

Şekil 3.6.'da verilen ölçüm modelleri örneğine göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$x_1 = \lambda^x{}_{11}\xi_1 + \delta_1$$
$$x_2 = \lambda^x{}_{21}\xi_1 + \delta_2$$
$$x_3 = \lambda^x{}_{31}\xi_1 + \delta_3$$
$$y_1 = \lambda^y{}_{11}\eta_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \lambda^y{}_{21}\eta_1 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = \lambda^y{}_{31}\eta_1 + \varepsilon_3$$
$$y_4 = \lambda^y{}_{42}\eta_2 + \varepsilon_4$$
$$y_5 = \lambda^y{}_{52}\eta_2 + \varepsilon_5$$
$$y_6 = \lambda^y{}_{62}\eta_2 + \varepsilon_6$$

Yazılan bu eşitliklerin matris formu eşitlik (3.10.) ve (3.11.) eşitlikleri ile ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^x{}_{11} \\ \lambda^x{}_{21} \\ \lambda^x{}_{31} \end{bmatrix} [\xi_1] + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^y{}_{11} & 0 \\ \lambda^y{}_{21} & 0 \\ \lambda^y{}_{31} & 0 \\ 0 & \lambda^y{}_{42} \\ 0 & \lambda^y{}_{52} \\ 0 & \lambda^y{}_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \Lambda_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{3.10.}$$

$$\boldsymbol{y} = \Lambda_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.11.}$$

(3.10.) ve (3.11.) eşitlikleri, ölçüm modelinin matris gösterimidir. Burada $\boldsymbol{x}$, dışsal gizil değişkenin gösterge değişkenlerine ait (q x 1) boyutlu vektör, $\boldsymbol{y}$ ise içsel gizil değişkenin gösterge değişkenlerine ait (p x 1) boyutlu vektördür. Söz konusu örnekte dışsal gizil değişkenin üç adet göstergesi bulunduğu için $\boldsymbol{x}$ vektörü (3 x 1) boyutlu, içsel gizil değişkenin altı adet göstergesi bulunduğu için $\boldsymbol{y}$ vektörü (6 x 1) boyutlu olacaktır. Λ_x matrisi, $\boldsymbol{x}$ göstergelerinin $\boldsymbol{\xi}$ ile ilişkili katsayı matrisidir ve (q x n) boyutludur. Verilen örnekte dışsal gizil değişken sayısı bir ve gösterge sayısı üç olduğu için Λ_x matrisi (3 x 1) boyutludur. Λ_y matrisi ise $\boldsymbol{y}$ göstergelerinin $\boldsymbol{\eta}$ içsel gizil değişkenleri ile ilişkili katsayı matrisidir ve (p x m) boyutludur. İlgili örnekte altı adet gösterge değişken ve iki adet içsel gizil değişken bulunduğu için Λ_y matrisi (6 x 2) boyutludur. Son olarak $\boldsymbol{\delta}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektörleri sırasıyla $\boldsymbol{x}$ ve **y** göstergelerine ait ölçüm hatalarının vektörleridir. $\boldsymbol{\delta}$ vektörü (q x 1), $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektörü (p x 1) boyutludur. İlgili örnekte, dışsal gizil değişkenin üç adet göstergesi bulunduğundan dolayı $\boldsymbol{\delta}$ vektörü (3 x 1) boyutlu, içsel gizil değişkenin altı adet göstergesi bulunduğundan dolayı $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektörü (6 x 1) boyutlu olacaktır. Modelde bahsi geçen parametreler dışında sırasıyla $\boldsymbol{\delta}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ hatalarının kovaryans matrisleri olan (q x q) boyutlu Θ_δ ve (p x p) boyutlu Θ_ε matrisleri de bulunmaktadır.

Yapısal modellerde olduğu gibi ölçüm modellerinde de bazı varsayımlar söz konusudur. Bu varsayımlar aşağıdaki gibidir:

- $E(\eta) = 0$, $E(\xi) = 0$ ve $E(\delta) = 0$ ve $E(\varepsilon) = 0$
- $\boldsymbol{\delta}$ hata vektörü $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\eta}$ ve $\boldsymbol{\xi}$ ile ilişkisizdir.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata vektörü $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\eta}$ ve $\boldsymbol{\xi}$ ile ilişkisizdir.

Çizelge 3.3. Ölçüm modeline ait gösterimler (Bollen, 1989)

Model: $\boldsymbol{y = \Lambda_y \eta + \varepsilon}$
$\boldsymbol{x = \Lambda_x \xi + \delta}$

Varsayımlar:

- $\boldsymbol{E(\eta) = 0, E(\xi) = 0, E(\varepsilon) = 0, E(\delta) = 0}$
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ hataları, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ ve $\boldsymbol{\delta}$ ile ilişkisizdir .
- $\boldsymbol{\delta}$ hataları, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ ile ilişkisizdir .

Sembol	Adı	Boyutu	Tanımlama
	Değişkenler		
$\boldsymbol{y}$		p x 1	$\boldsymbol{\eta}$'ya ait göstergeler
$\boldsymbol{x}$		q x 1	$\boldsymbol{\xi}$'ye ait göstergeler
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Epsilon	p x 1	y'nin hataları
$\boldsymbol{\delta}$	Delta	q x 1	x'in hataları
	Katsayı Matrisleri		
$\boldsymbol{\Lambda_y}$	Lambda y	p x m	y'nin η üzerindeki katsayı matrisi
$\boldsymbol{\Lambda_x}$	Lambda x	q x n	x'in ξ üzerindeki katsayı matrisi
	Kovaryans Matrisleri		
$\boldsymbol{\Theta_\varepsilon}$	Theta-Epsilon	p x p	$\boldsymbol{\varepsilon}$'a ait kovaryans matrisi
$\boldsymbol{\Theta_\delta}$	Theta-Delta	q x q	$\boldsymbol{\delta}$'ya ait kovaryans matrisi

3.5. Tahmini Kovaryans Matrisi

Tahmini kovaryans matrisi $\Sigma(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, kitledeki gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi olan Σ matrisinde, modeldeki yapısal parametrelerin tahminlerinin kullanılması ile elde edilmektedir. Σ matrisi ise $\boldsymbol{\theta}$ vektöründeki parametrelerin birer fonksiyonu olarak yazılabilen, gözlenen değişkenlere ait kovaryans matrisini göstermektedir. Yapısal eşitlik modellemesinde test edilen temel hipotez (3.12.) ile gösterilmiştir.

$$H_0: \Sigma = \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.12.}$$

Gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi eşitlik (3.13.), gözlenen değişkenlerin $\boldsymbol{\theta}$ vektöründeki parametrelere bağlı kovaryans matrisi ise (3.14.) ile ifade edilmektedir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} \tag{3.13.}$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) \\ \Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \tag{3.14.}$$

(3.12.)'teki hipotezin sağlanabilmesi için Σ kitle kovaryans matrisinin Σ_{yy}, Σ_{xy}, Σ_{yx} ve Σ_{xx} elemanlarının $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektöründeki parametrelerin birer fonksiyonu olarak yazılabilmesi gerekmektedir. (3.10.) ve (3.11.) eşitlikleri kullanılarak Σ matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy}(\theta) &= E(yy') \\ &= E\left[\left(\Lambda_y\eta + \varepsilon\right)\left(\Lambda_y\eta + \varepsilon\right)'\right] \\ &= E\left[(\Lambda_y\eta + \varepsilon\,)(\eta'\Lambda'_y + \varepsilon')\right] \\ &= E(\Lambda_y\eta\eta'\Lambda'_y) + E\left(\varepsilon\eta'\Lambda'_y\right) + E(\Lambda_y\eta\varepsilon') + E(\varepsilon\varepsilon') \\ &= \Lambda_y E(\eta\eta')\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.15.)$$

(3.15.) eşitliğinde (3.9.) eşitliği kullanılır ve $\boldsymbol{\eta}$ yerine

$$\eta = (I - B)^{-1}(\Gamma\xi + \zeta)$$

yazılırsa, (3.16.) eşitliğinde $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ kovaryans matrisinin $\Sigma_{yy}(\boldsymbol{\theta})$ elemanı elde edilir.

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y E\{[(I - B)^{-1}(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})][(I - B)^{-1}(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})\,]'\}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \\ \Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y(I - B)^{-1}E[(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})'](I - B)^{-1'}\Lambda_y + \Theta_\varepsilon \\ \Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y(I - B)^{-1}E[(\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\Gamma') + (\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}) + (\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi}'\Gamma') + (\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}')] \\ &\quad * (I - B)^{-1\,\prime}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \\ \Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y(I - B)^{-1}[E(\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\Gamma') + E(\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}) + E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi}'\Gamma') + E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}')] \\ &\quad * (I - B)^{-1'}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \\ \Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y(I - B)^{-1}[E(\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\Gamma') + E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}')](I - B)^{-1'}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \\ \Sigma_{yy}(\theta) &= \Lambda_y(I - B)^{-1}[\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi](I - B)^{-1'}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.16.)$$

$\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ kovaryans matrisinin $\Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta})$ elemanı da benzer şekilde (3.17.) eşitliğinde elde edilir.

$$\begin{aligned}\Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathrm{E}(\mathrm{xx}') = \mathrm{E}[(\Lambda_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta})(\Lambda_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta})'] \\ \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) &= E(\Lambda_x\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\Lambda'_x) + E(\Lambda_x\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\delta}') + E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\xi}'\Lambda'_x) + E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}') \\ \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) &= \Lambda_x E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')\Lambda'_x + E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}') \\ \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta}) &= \Lambda_x\Phi\Lambda'_x + \Theta_\delta \end{aligned} \quad (3.17.)$$

Son olarak $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ kovaryans matrisinin $\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta})$ ve $\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta})$ elemanları da (3.18.) ve (3.19.) eşitliklerindeki gibi elde edilir.

$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = E(xy') = E\left[(\Lambda_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta})(\Lambda_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})'\right]$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[\left(\Lambda_x\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}'\Lambda'_y\right) + (\Lambda_x\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varepsilon}') + \left(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\eta}'\Lambda'_y\right) + (\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}')\right]$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}')\Lambda'_y + \Lambda_x E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\eta}')\Lambda'_y + E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}')$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}')\Lambda'_y = \Lambda_x E(\boldsymbol{\xi}[(I-B)^{-1}(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})\,]')\Lambda'_y$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x E\left[\boldsymbol{\xi}(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})'(I-B)^{-1'}\right]\Lambda'_y$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x E\left[\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}'\Gamma' + \boldsymbol{\zeta}')(I-B)^{-1'}\right]\Lambda'_y$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\Gamma' + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}')(I-B)^{-1'}\right]\Lambda'_y$$
$$\Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_x \Phi\Gamma'[(I-B)^{-1}]'\Lambda'_y \qquad (3.18.)$$

$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = E(yx') = E\left[(\Lambda_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})(\Lambda_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta})'\right]$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[(\Lambda_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\xi}'\Lambda_x{}' + \boldsymbol{\delta}')\,\right]$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[\left(\Lambda_y\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}'\Lambda_x\right) + \left(\Lambda_y\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\delta}'\right) + (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}'\Lambda'_x) + (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}')\right]$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = E\left(\Lambda_y\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}'\Lambda_x\right) + E\left(\Lambda_y\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\delta}'\right) + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}'\Lambda'_x) + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}')$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_y E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}')\Lambda_x + \Lambda_y E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\delta}') + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}')\Lambda'_x + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}')$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_y E[(I-B)^{-1}(\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{\xi}']\Lambda_x$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_y (I-B)^{-1}[E(\Gamma\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}') + E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi}')]\Lambda_x$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_y (I-B)^{-1}\Gamma\mathrm{E}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')\Lambda_x$$
$$\Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_y (I-B)^{-1}\Gamma\Phi\Lambda_x \qquad (3.19)$$

Bu durumda $\Sigma(\theta)$ matrisi (3.20.) eşitliğindeki halini alır.

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix}\Sigma_{yy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{yx}(\boldsymbol{\theta})\\ \Sigma_{xy}(\boldsymbol{\theta}) & \Sigma_{xx}(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix}\Lambda_y(I-B)^{-1}[\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi][(I-B)^{-1}]'\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y(I-B)^{-1}\Gamma\Phi\Lambda_x\\ \Lambda_x\Phi\Gamma'[(I-B)^{-1}]'\Lambda'_y & \Lambda_x\Phi\Lambda'_x + \Theta_\delta\end{bmatrix} \qquad (3.20.)$$

Gösterge değişkenlere ait kovaryans matrisi, $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektöründeki parametrelerin birer fonksiyonu olarak eşitlik (3.20.)'deki gibi yazılabilmektedir. Burada $\boldsymbol{x}$ gözlenen değişkenlerinin $\boldsymbol{\xi}$ gizil değişkeni ile ilişkili (q x n) boyutlu katsayı matrisi Λ_x, $\boldsymbol{y}$ gözlenen değişkenlerinin $\boldsymbol{\eta}$ gizil değişkenleri ile ilişkili (p x m) boyutlu katsayı matrisi Λ_y'dir. Ayrıca $\boldsymbol{\xi}$ dışsal gizil değişkenlerinin (n x n) boyutlu kovaryans matrisi Φ; ζ hata terimlerinin (m x m) boyutlu kovaryans matrisi Ψ; $\boldsymbol{\varepsilon}$ ölçüm hatalarının (p x p) boyutlu kovaryans matrisi Θ_ε; $\boldsymbol{\delta}$ ölçüm hatalarının (q x q) boyutlu kovaryans matrisi Θ_δ'dir.

4. YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİ

4.1. Modeli Belirleme (Model Specification)

Yapısal eşitlik modellemesi sürecinde ilk olarak model belirleme aşaması gelmektedir. Model belirleme aşaması, belirli araştırmalar yapılarak, literatürden yararlanılarak veya araştırmacının sahip olduğu bilgiden yola çıkılarak teorik bir model oluşturulması sürecidir. Dolayısıyla araştırmacının öncelikli olarak yapması gereken, verilerin toplanması veya analizinden ziyade, verilerin varyans kovaryansları aracılığı ile doğrulayacağı bir model belirlemektir.

Test edilen teorik model ile popülasyon modelinin tutarlı olduğu varsayıldığında teorik model uygun bir şekilde belirlenmiş olur. Bu ise örneklem kovaryans matrisinin, belirlenen teorik model tarafından yeterli bir şekilde türetileceği anlamına gelir.

Yapısal eşitlik modellemesinde veriden üretilen doğru model ile teorik model arasındaki farkın boyutu önemlidir. Bu fark azaldıkça uyum artacaktır. Dolayısıyla burada amaç, teorik olarak belirlenebilecek modeller arasından en iyi uyum sağlayacak modeli belirlemektir.

4.2. Modeli Tanımlama (Model Identification)

Yapısal eşitlik modellemesinde parametre tahmininden önce modelin tanımlanması büyük önem taşımaktadır. Modeli tanımlama aşamasındaki temel soru eldeki veriler ile her bir parametre için tek bir parametre tahmininin bulunup bulunamayacağıdır.

Modeli tanımlama aşamasında 3 farklı parametre tanımı ile karşılaşılır. Bu tanımlar: Bilinmeyen parametre (Free parameter), sabit parametre (Fixed parameter) ve kısıtlanmış veya artıksız parametredir (Constrained/Nonredundant parameter).

Bilinmeyen parametreler, tahmin edilmesi gereken parametrelerdir. Bu parametreler, gözlenen değişkenlerin varyans-kovaryans matrisleri yardımı ile tahmin edilirler. Sabit parametreler, belirli bir değere sabitlenmiş parametrelerdir.

Genellikle 0 veya 1 değerlerine sabitlenirler. Bu parametrelerin tahmin edilmesi gerekmez, çünkü zaten belirli bir değere sahiplerdir. Kısıtlanmış veya artıksız parametreler ise aslında bilinmeyen parametrelerdir. Ancak modelin tanımlanmasına imkan sağlamak amacıyla diğer parametrelerden bir veya birkaç tanesine eşit kabul edilirler (Schumacker ve Lomax; 2004).

Yapısal eşitlik modellemesinde tanımlama, parametrelerin doğru bir şekilde belirlenmesine bağlıdır. Teorik modelin ve parametrelerin belirlenmesinden sonra, Σ matrisinin bir ve yalnız bir elemanı ile bir parametre eşlenmelidir. Tanımlama problemi bu noktada ortaya çıkmaktadır. Problemin ortaya çıkma sebebi, aynı Σ matrisinin elde edilebileceği birden fazla parametre değer kümesinin var olmasıdır. Eğer bu durumu sağlayan birden fazla parametre değer kümesi varsa bu değer kümelerine eşdeğer kümeler adı verilir. Eşdeğer kümeler aynı modellerin elde edildiği kümelerdir. Bir parametrenin tanımlı olabilmesi için tüm eşdeğer kümelerde aynı değeri alması gerekmektedir. Eğer tüm parametreler tanımlı ise model de tanımlıdır. Ancak tek bir parametrenin tanımlı olmaması durumunda, modelin de tanımlı olmadığı sonucuna varılır.

Yapısal eşitlik modellemesinde tanımlama kavramı gözlenen değişkenlerden elde edilen kovaryans matrisinin parametre tahmini için sağladığı bilgiye bağlı olarak üç kademede düşünülebilir.

1. Modelin eksik tanımlı olması (underidentified model) , eldeki veriler ile bilinmeyen parametrelerden en az birinin tanımlanamamış olmasıdır. Yani, gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisi, parametre tahminlerini elde etmek için yeterli değildir.
2. Modelin tam tanımlı olması (just-identified model), eldeki verilerin bütün parametreler için bir ve yalnız bir çözüm üretmesi, dolayısıyla tüm parametrelerin tanımlı olmasıdır.
3. Modelin aşırı tanımlı olması (overidentified model), bir parametrenin tahmini için birden fazla çözüm olması durumunda ortaya çıkmaktadır. Bu durum gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisinin parametre tahminlerini elde

etmek için fazla bilgi sağlaması, dolayısıyla parametreler için birden fazla tahmin elde edilmesi demektir.

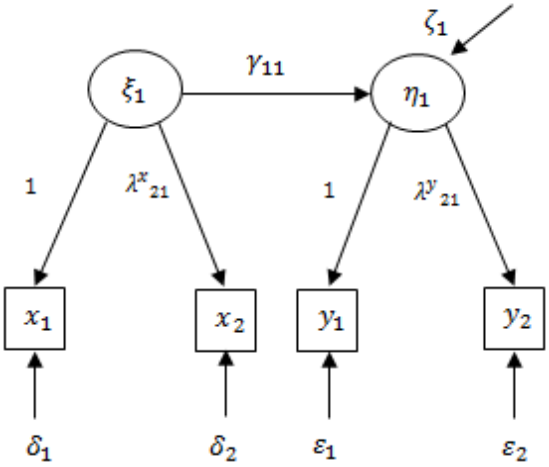
Modelin aşırı tanımlı veya tam tanımlı olması durumu genel bir ifade ile modelin tanımlı olması anlamına gelmektedir. Modelin eksik tanımlı olması durumunda ise gözlenen değişkenlerin kovaryans matrisinin sağladığı bilgiler tüm parametre tahminlerini elde etmek için yeterli değildir.

Modelin serbestlik derecesi, parametre tahminlerinin çözümünü sağlayacak olan gözlenen değişkenlerin varyans-kovaryans matrisindeki eleman sayısı ile tahmin edilmesi gereken parametre sayısı arasındaki farktır. Bu farkın sıfır olması, yani serbestlik derecesinin sıfır olması, modelin tam tanımlı olması anlamına gelir. Serbestlik derecesinin sıfırdan küçük olması, modelin eksik tanımlı, sıfırdan büyük olması ise modelin aşırı tanımlı olduğunun göstergesidir.

Yapısal eşitlik modellemesinde bir modelin gerçekten tanımlı olduğunu doğrulamak için net ve belirli koşullar yoktur. Ancak, bir modelin tanımlı olup olmadığını anlayabilmek için iki durumun kontrol edilmesi gerekmektedir.

i. Bir modelin tanımlı olması durumunda serbestlik derecesi pozitiftir. Gözlenen değişkenlere ait varyans-kovaryans matrisinin gerekli çözümü sağlayacak olan elemanlarının sayısı $(p+q)(p+q+1)/2$'dir. Burada q, dışsal gizil değişkenlerin, p de içsel gizil değişkenlerin gösterge sayılarıdır. Tahmin edilmesi gereken parametreler ise faktör yükleri, faktör yüklerinin varyans-kovaryansları, yol katsayıları, rezidülerin varyans-kovaryansları ve hataların varyanslarıdır. Bir modeldeki bilinmeyen parametre sayısı t olmak üzere modelin tanımlı olması için $t \leq (p+q)(p+q+1)/2$ olmalıdır.
ii. Her bir gizil değişken için ölçüm ölçeklendirmesi yapılmalıdır. Bu da her bir gizil değişkene ait faktör yüklerinden birinin 1'e sabitlenmesi veya gizil değişkenin varyansının 1'e eşitlenmesi demektir.

Tanımlama aşaması Şekil 4.1.'deki model üzerinden örneklendirilecektir. Bu modelde bir tanesi dışsal diğeri içsel olmak üzere iki tane gizil değişken ve bu gizil değişkenlere ait dört tane gösterge değişken bulunmaktadır.



Şekil 4.1. Üç gizil değişkenli örnek model

Modelde var olan değişkenler arasındaki eşitlikler, matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$[\eta_1] = [\gamma_{11}][\xi_1] + [\zeta_1] \qquad \boldsymbol{\eta} = \Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^x{}_{21} \end{bmatrix} [\xi_1] + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \Lambda^x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^y{}_{21} \end{bmatrix} [\eta_1] + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \Lambda^y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Gösterge değişkenlere ait örneklem kovaryans matrisi S eşitlik (4.1.)'deki gibidir.

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} Var(y_1) & & & \\ Cov(y_2, y_1) & Var(y_2) & & \\ Cov(x_1, y_1) & Cov(x_1, y_2) & Var(x_1) & \\ Cov(x_2, y_{1)} & Cov(x_2, y_2) & Cov(x_1, x_2) & Var(x_2) \end{bmatrix} \qquad (4.1.)$$

Model parametrelerinin birer fonksiyonu olarak yazılabilen tahmini kovaryans matrisi $\Sigma(\hat{\theta})$ ise eşitlik (4.2.)'de verilmiştir.

$$\Sigma(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}{}^2\phi_{11} + \psi_{11} + Var(\varepsilon_1) & & & \\ \lambda_2(\gamma_{11}{}^2\phi_{11} + \psi_{11}) & \lambda_2{}^2(\gamma_{11}{}^2\phi_{11} + \psi_{11}) + Var(\varepsilon_1) & & \\ \gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_2\gamma_{11}\phi_{11} & \phi_{11} + Var(\delta_1) & \\ \lambda_1\gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_1\lambda_2\gamma_{11}\phi_{11} & \lambda_1\phi_{11} & \lambda_1{}^2\phi_{11} + Var(\delta_1) \end{bmatrix} \quad (4.2.)$$

S ve $\Sigma(\hat{\theta})$ matrislerinin elemanları eşleştirilir ve bu eşitlikler yardımı ile parametrelerin çözümleri bulunur. $S = \Sigma(\hat{\theta})$ eşitliğinde dokuz tane tahmin edilmesi gereken parametre ve on tane eşitlik vardır. Bu eşitliklerden iki tanesi çözülmüş ve ilgili parametre tahmini aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} Cov(x_2, y_1) &= \lambda_1\gamma_{11}\phi_{11} \\ Cov(x_2, x_1) &= \lambda_1\phi_{11} \\ \gamma_{11} &= \frac{Cov(x_2,y_1)}{Cov(x_2,x_1)} \end{aligned} \quad (4.3.)$$

Benzer şekilde λ_2 parametresinin tahmini (4.4.) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Cov(x_2, y_2) &= \lambda_1\lambda_2\gamma_{11}\phi_{11} \\ Cov(x_1, x_2) &= \lambda_1\phi_{11} \\ \lambda_2 &= \frac{Cov(x_2,y_2)}{Cov(x_1,x_2)} \cdot \frac{1}{\gamma_{11}} \\ &= \frac{Cov(x_2,y_2)}{Cov(x_1,x_2)} \cdot \frac{Cov(x_2,x_1)}{Cov(x_2,y_1)} \\ &= \frac{Cov(x_2,y_2)}{Cov(x_2,y_1)} \end{aligned} \quad (4.4.)$$

Görüldüğü gibi eşitlikler çözülmeye devam edildiğinde her bir parametre için tek çözüm bulunması durumunda modelin tanımlı olduğu sonucuna varılacaktır.

4.3. Tahmin

Yapısal eşitlik modellemesinde tahmin aşaması, belirli metotlar ile modelde bulunan parametrelerin tahmin değerlerinin elde edilme sürecidir. Parametrelerden oluşan tahmin matrisi ile gözlenen değerlerden elde edilen varyans-kovaryans matrisi arasındaki farkın olabildiğince az olması istenmektedir. Bu iki matris arasındaki fark ne kadar az olursa model mükemmele o kadar yakın olmaktadır. Aradaki farkın sıfır olması ise mükemmel modelin bulunması anlamına gelmektedir.

Tahmin aşamasında eldeki veriye en uygun model bulunmak istenmektedir. Dolayısıyla parametre tahminlerinden elde edilen tahmini kovaryans matrisi $\Sigma(\hat{\theta})$ ile örnekleme ait varyans-kovaryans matrisi S arasındaki fark minimum yapılmaya çalışılmaktadır. Bu durumda fark fonksiyonu eşitlik (4.5.)'teki gibi olacaktır.

$$F\left(S, \hat{\Sigma}\right) = S - \Sigma(\hat{\theta}) \tag{4.5.}$$

Yapısal eşitlik modellemesinde kullanılan bazı tahmin yöntemleri aşağıdaki gibidir.

- En Çok Olabilirlik Yöntemi (ML)
- Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi (WLS)
- Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GLS)

Tahmin sürecinde kullanılan bu yöntemler 5. Bölüm'de detaylı bir şekilde incelenecektir.

4.4. Uyum Testi

YEM'de tahmin süreci sonunda elde edilen modelin veri ile maksimum seviyede uyumlu olması istenir. Elde edilen modelin örneklem ile uyumunu test etmek için kullanılan birtakım uyum indeksleri vardır. Bu uyum indeksleri aşağıdaki gibidir:

1. Önem Testi
   - χ^2 Uyum testi
2. Model Uyumuna ilişkin Betimleyici Uyum İyiliği Testleri
   - Yaklaşık hataların ortalama karekökü (RMSEA)
   - Hata kareleri ortalamasının karekökü (RMR)
   - Standartlaştırılmış hata kareleri ortalamasının karekökü (SRMR)
3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçütler
   - Normlaştırılmış uyum indeksi (NFI)
   - Normlaştırılmamış uyum indeksi (NNFI)
   - Karşılaştırmalı uyum indeksi (CFI)
   - Uyum iyiliği indeksi (GFI)
   - Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi (AGFI)
4. Model Tutumuna İlişkin Betimleyici Ölçütler
   - Tutumlu uyum iyiliği indeksi (PGFI)
   - Tutumlu normlaştırılmış uyum indeksi (PNGFI)
   - Akaike bilgi kriteri (AIC)
   - Tutarlı Akaike bilgi kriteri (CAIC)
   - Beklenen çapraz geçerlilik indeksi (ECVI)

Uyum testinde kullanılan uyum iyiliği indeksleri 6. Bölüm'de detaylı olarak incelenecektir.

4.5. Modelin Yeniden Belirlenmesi

Yapısal eşitlik modellemesinde modelin yeniden belirlenmesi, başta teorik olarak kabul edilen modelin, örneklem ile uyumlu olmadığının anlaşılması durumunda söz konusudur. Teorik modelin, belirleme, tanımlama, tahmin aşamalarından geçip uyum testi aşamasında örneklem ile uyumsuz olduğuna karar veriliyorsa, bu durumda modelin yeniden belirlenmesi gerekecektir.

Modelin yeniden belirlenmesi, başta belirlenen teorik model üzerinde bazı değişiklikler yapılmasıyla mümkündür. Araştırmacı belirleme aşamasında yaptığı hataları, yeniden belirleme aşamasında en aza indirerek örneklem ile daha uyumlu sonuçlar verecek bir model elde etmeye çalışmaktadır.

Bir parametrenin modelde bulunup bulunmayacağına karar vermek, örnekleme en iyi uyacak modeli bulabilmek açısından önem taşımaktadır. Parametrelerin önem düzeyine bakmak, bu kararı vermek için kullanılabilecek yollardan biridir. İlk belirlenen modeldeki parametrelerden önem düzeyi en düşük parametre, yeniden belirlenecek modelde sıfıra sabitlenerek ilk modelde yapılan belirleme hatası ortadan kaldırılabilmektedir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken önemli bir detay vardır. Önem düzeyi örneklem boyutuna bağlı olduğundan dolayı, aslında model için önemli olan bir parametre örneklem boyutunun küçük olması sebebiyle önemsiz çıkabilir. Dolayısıyla parametrelerin önem düzeyleri incelenirken teorik açıdan önemli olup olmadıkları da göz ardı edilmemelidir (Schumacker ve Lomax, 2010).

Modelin yanlış belirlenmesi durumunda daha iyi bir model elde edebilmek amacıyla kullanılabilecek bir başka yol ise rezidü matrisidir. Rezidü matrisi, örneklem kovaryans matrisi ile tahmini kovaryans matrisi arasındaki fark matrisi anlamına gelmektedir. Bu fark ile elde edilen rezidü matrisindeki her bir elemanın önemli derecede küçük olması ve birbirlerine yakın değerlere sahip olması belirlenen modelin yeterince iyi olduğunun göstergesidir. Rezidü matrisinin elemanlarının genel olarak büyük olması ciddi bir belirleme hatasının olduğuna işarettir. Ancak özellikle bazı elemanların değerleri diğerlerine göre önemli derecede farklılık gösteriyorsa bu durum, yalnızca bu elemanların gösterdiği parametrelerde belirleme hatasının yapıldığı anlamına gelmektedir. Eğer belirleme hatasının kaynağı rezidü matrisi kullanılarak bulunacak ise, bunu standartlaştırılmış değerler ile yapmak, büyük rezidü değerlerinin bulunması açısından kolaylık sağlayacaktır.

Yapısal eşitlik modellemesi uygulamalarında sıkça kullanılan LISREL programı, belirlenen model için “Modification indices” adı altında düzeltme indeksleri çıktısı vermektedir. Düzeltme indeksleri çıktısı, modelde tanımlanmamış ancak model açısından sorun oluşturabilecek ilişkilerin sunulduğu kısımdır (Şimşek,

2007). Ayrıca bu kısımda düzeltmelerin yapılmasıyla Ki-Kare değerinde meydana gelecek düşüş miktarı da gösterilmektedir. LISREL'de, düzeltme indeksleri çıktısındaki öge sayısı modeldeki sorun sayısını göstermektedir. Öge sayısı ne kadar çok ise, belirlenen modeldeki sorun sayısı da o kadar fazladır.

5. TAHMİN YÖNTEMLERİ

YEM'de model belirleme ve tanımlama aşamalarından sonra model parametrelerinin tahmini gelmektedir. Yapısal eşitlik modellemesinde dışsal değişkenlere ait varyans-kovaryanslar, hata terimlerine ait varyans-kovaryanslar ve regresyon katsayıları gibi parametrelerin tamamının, θ adı altında bir parametre vektöründe toplandığı düşünülmektedir. Tahmin sürecinde amaç bu parametre vektörünün, uygun bir $\theta = \hat{\theta}$ tahminini elde etmektir. Elde edilecek tahmini parametre vektörü $\hat{\theta}$'nın uygun olmasından kasıt, parametre tahminlerinden elde edilen tahmini kovaryans matrisi $\hat{\Sigma} = \Sigma(\hat{\theta})$'nin, örneklem kovaryans matrisi S'e en yakın olmasını sağlayacak tahmin değerlerinin belirlenmesidir. Tahmini kovaryans matrisi ile S örneklem matrisi arasındaki farkı ifade eden fark fonksiyonu $F(S, \hat{\Sigma})$ ile gösterilecek olursa, $\hat{\theta}$ tahmini parametre vektörü bu fark fonksiyonunu minimum yapacak tahmin değeri olmalıdır. Bu durumda modelin örneklem ile uyumlu bir model olduğu sonucuna varılır (Kaplan, 2000; Browne, 1984'ten).

Kaplan (2000), $F(S, \hat{\Sigma})$ fonksiyonunun özelliklerini aşağıdaki gibi sıralamıştır:

i. $F\left(S, \hat{\Sigma}\right) \geq 0$,
ii. $F\left(S, \hat{\Sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \Sigma\left(\hat{\theta}\right) = S$,
iii. $F\left(S, \hat{\Sigma}\right)$ fonksiyonu S ve $\Sigma\left(\hat{\theta}\right)$' de süreklidir.

YEM'de farklı varsayımlar için farklı tahmin yöntemleri bulunmaktadır. Bu yöntemler: En çok Olabilirlik (EO), Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (AEKK) ve Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) yöntemleridir.

5.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi (EO)

En çok Olabilirlik yöntemi (Maximum Likelihood-ML), YEM'de en yaygın kullanılan tahmin yöntemidir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için bir takım varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bu varsayımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Gözlenen değişkenler, çok değişkenli normal dağılıma sahiptir ve birbirinden bağımsızdır.
- Örneklem hacmi büyüktür.
- Kitle kovaryans matrisi $\Sigma(\theta)$ ve örneklem kovaryans matrisi S pozitif tanımlıdır.
- Gösterge değişkenler en az eşit aralık ölçme düzeyine sahiptir.

Gözlenen değişkenlerin çok değişkenli normal dağılımdan geliyor olması varsayımı altında S, gözlenen kovaryans matrisi, Wishart dağılımına sahiptir. $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x}$ değişkenleri gözlenen değişkenlere ait, sırasıyla (p x 1) ve (q x 1) boyutlu iki vektör, **z** gibi (($p+q$) x 1) boyutlu tek bir vektör gibi düşünülürse Z rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x,y) = f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{(p+q)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2} z'\Sigma^{-1}\mathrm{z}\right\} \qquad (5.1.)$$

(5.1.) eşitliği ile ifade edilir. Bu durumda bağımsız Z gözlemlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$L(\theta) = f(z_1, z_2, \dots, z_N) = f(z_1)\, f(z_2) \dots f(z_N) \qquad (5.2.)$$

$$L(\theta) = (2\pi)^{\frac{-N(p+q)}{2}} |\Sigma(\theta)|^{-\frac{N}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} z_i'\, \Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i}\right\} \qquad (5.3.)$$

(5.3.) eşitliğindeki gibi bulunur. (5.2.) ve (5.3.) eşitliklerindeki $L(\theta)$ fonksiyonu olabilirlik fonksiyonudur. Bu fonksiyonun doğal logaritmasının alınması ile eşitlik (5.4.)'teki halini alır.

$$logL(\theta) = -\frac{N(p+q)}{2}\log(2\pi) - \frac{N}{2}\, log|\Sigma(\theta)| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} z_i{}'\, \Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i} \qquad (5.4.)$$

Eşitlik (5.4.)'te sırası ile son terimin N ile çarpılıp bölünmesi ve θ'dan bağımsız terim yerine c sabiti yazılması ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$logL(\theta) = -\frac{N(p+q)}{2}\log(2\pi) - \frac{N}{2}\, log|\Sigma(\theta)| - \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\,(z_i{}'\, \Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i})$$

$$logL(\theta) = c - \frac{N}{2}\left[log|\Sigma(\theta)| + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\,(z_i{}'\, \Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i})\right] \qquad (5.5.)$$

Eşitlik (5.5.)'te $(z_i{}'\Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i})$ terimi skaler olduğu için izi kendisine eşit olacağından aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$logL(\theta) = c - \frac{N}{2}\left[log|\Sigma(\theta)| + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} tr(z_i{}'\Sigma(\theta)^{-1}\mathrm{z_i})\right] \qquad (5.6.)$$

Eşitlik (5.6.)'da $tr(ABC) = tr(BCA)$ özelliğinden yararlanılarak aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$logL(\theta) = c - \frac{N}{2}\left[log|\Sigma(\theta)| + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} tr(\, z_i{}'\mathrm{z_i}\, \Sigma(\theta)^{-1})\right]$$

$$logL(\theta) = c - \frac{N}{2}[log|\Sigma(\theta)| + tr(S\Sigma^{-1}(\theta)] \qquad (5.7.)$$

Burada S örneklem kovaryans matrisidir, $\Sigma(\theta)$ ise θ parametresi ile ifade edilen kovaryans matrisidir.

Eşitlik (5.7.)'de elde edilen $logL(\theta)$ fonksiyonu $\Sigma = S$ olması durumunda $logL(\theta) = 0$ eşitliğini sağlamadığı için bir fark fonksiyonu teşkil etmemektedir. $logL(\theta)$ fonksiyonunu, $logL(\theta) = 0$ eşitliğini sağlayan bir fark fonksiyonu haline getirebilmek amacıyla fonksiyona, model parametrelerine bağlı olmayan terimler

eklenerek En çok Olabilirlik (EO) metodunda kullanılan uyum fonksiyonu elde edilir. Bu uyum fonksiyonu (5.8.) eşitliğindeki gibidir:

$$F_{EO} = log|\Sigma(\theta)| + tr\left(S\Sigma^{-1}(\theta)\right) - log|S| - (p+q) \quad (5.8.)$$

Bu eşitlikte $\Sigma = S$ olması durumunda $F_{ML} = 0$ olduğunu göstermek için (5.8.) eşitliğinde Σ yerine S yazılarak (5.9.) eşitliği elde edilir.

$$F_{EO} = log|S| + tr(SS^{-1}) - log|S| - (p+q) \quad (5.9.)$$

(5.9.) eşitliğinde $tr(SS^{-1}) = tr(I) = (p+q)$ olacağından bulunan eşitlik yerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$F_{EO} = log|S| + (p+q) - log|S| - (p+q)$$
$$F_{EO} = 0 \quad (5.10.)$$

Bu sonuç, örneklem kovaryans matrisindeki parametrelerin model tarafından mükemmel bir şekilde tahmin edildiğinin göstergesidir (Bollen,1989).

$logL(\theta)$ ile F_{EO} arasındaki ilişki ise şöyledir: $logL(\theta)$ bir olabilirlik fonksiyonudur ve maksimize edilmeye çalışılmaktadır. Ancak F_{EO} bir uyum fonksiyonudur ve minimize edilmeye çalışılmaktadır. Dolayısıyla $logL(\theta)$ olabilirlik fonksiyonundan F_{EO} uyum fonksiyonuna geçerken bu ilişkiden yola çıkarak bazı değişiklikler yapılmalıdır. Yapılan ilk değişiklik $logL(\theta)$ fonksiyonunu maksimize etmekten ziyade minimize eden $-\frac{N}{2}$ katsayısıdır. Bu katsayı fonksiyondan çıkarılıp, fonksiyona model parametrelerinden bağımsız olan $-(log|S| + (p+q))$ terimi eklendiğinde F_{EO} uyum fonksiyonu elde edlir. F_{EO} uyum fonksiyonunun minimize edilmesi demek içerdiği $-\frac{N}{2}[log|\Sigma(\theta)| + tr(S\,\Sigma^{-1}(\theta)]$ teriminden dolayı $logL(\theta)$ fonksiyonunun maksimize edilmesi anlamına gelecektir.

En çok olabilirlik yönteminin ve tahmin edicisinin sahip olduğu bazı özellikler vardır. Bu özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Yansız bir tahmin edicidir.
- Etkin bir tahmin edicidir.
- Tutarlı bir tahmin edicidir.
- En çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri örneklem büyüklüğü arttıkça normal dağılıma yaklaşmaktadır.
- F_{EO} fark fonksiyonu ölçekten bağımsızdır. Yani değişkenlerin ölçeklerinin değişmesi, sonuçta bir değişikliğe sebep olmamaktadır.
- Büyük örneklem ve çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında $(n-1)F_{EO}$ çarpımı χ^2 dağılımına sahiptir. Bu durum model uyumunun χ^2 testi ile test edilebilmesine olanak tanımaktadır (Wang ve Wang, 2012).

5.2. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi (AEKK)

Süreklilik varsayımını sağlayan ancak normal dağılım varsayımına uymayan değişkenler üzerinde çalışılıyorsa, bu durumda önerilen tahmin yöntemi Browne tarafından geliştirilen, "Asimptotik olarak Dağılımdan Bağımsız-(ADB)" (Asymptotically Distribution Free-ADF) yöntemidir. Bu yöntemde çok değişkenli normallik varsayımı yoktur.

ADB tahmin edicisi, örneklemin asimptotik varyans-kovaryans matrisinin tutarlı bir tahminini ağırlık matrisi olarak kabul eden bir Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (Weighted Least Squares-WLS) tahmin edicisidir. Yapılan simülasyon çalışmaları normal dağılıma sahip olmayan değişkenler söz konusu olduğunda, EO metodunun, ADB metodundan daha iyi bir performans gösterdiğini ortaya çıkarsa da, ADB metodunun kullanılması önerilmektedir (Boomsma &Hoogland, 2001; Hu, Bentler & Kano,1992; Olsson,Foss,Troye & Howell,2000). ADB metodu LİSREL programında Ağırlıklı En Küçük Kareler (AEKK) adı altında bulunmaktadır.

AEKK yönteminde minimize edilen uyum fonksiyonu (5.11.) eşitliğindeki F_{AEKK} fonksiyonudur.

$$F_{AEKK} = [s - \sigma(\theta)]' W^{-1} [s - \sigma(\theta)] \qquad (5.11.)$$

F_{AEKK} fonksiyonunda s, örneklem kovaryans matrisindeki artıksız elemanların bir vektörü; $\sigma(\theta)$, modelden elde edilen kovaryans matrisindeki artıksız elemanların vektörü; θ, $(t \text{ x } 1)$ boyutlu parametre vektörüdür. W^{-1} matrisi ise, p gözlenen değişkenlerin sayısı ve $k = (p(p+1))/2$ olmak üzere, $(k \text{ x } k)$ boyutlu pozitif tanımlı ağırlıklandırma matrisidir. W^{-1} matrisi, örneklemin varyans-kovaryans analizi sonucunda elde edilen asimptotik kovaryans matrisinin tutarlı bir tahmini olan W matrisinin tersidir. W matrisinin bir w_{ijgh} elemanı s_{ij} ile s_{gh} elemanlarının asimptotik kovaryansı ($acov(s_{ij}, s_{gh})$) ile orantılıdır. Bu durum eşitlik (5.12.)'de gösterilmiştir.

$$w_{ijgh} = (N-1)acov(s_{ij}, s_{gh}) = \sigma_{ig}\,\sigma_{jh} + \sigma_{ih}\sigma_{jg} + \frac{N-1}{N}\,\kappa_{ijgh} \qquad (5.12.)$$

Eşitlik (5.12.)'de , κ_{ijgh}, ağırlıklı dördüncü moment (çok değişkenli basıklık ölçüsü); σ_{ig} , x_g ile x_i'nin; σ_{jh} , x_h ve x_j'nin; σ_{ih}, x_h ve x_i'nin; σ_{jg}, x_g ve x_j'nin kitle kovaryanslarıdır.

AEKK yönteminin en önemli avantajlarından biri, minimum düzeyde varsayım içermesidir. Normallik varsayımını sağlamayan değişkenler ile yapılan simülasyon çalışmaları, AEKK tahmin edicisinin dağılımsal özelliklerden göreceli olarak etkilenmediğini göstermiştir (Yılmaz ve Çelik, 2009).

Modeldeki gösterge değişken sayısı arttıkça AEKK yönteminde kullanılan ağırlıklandırma matrisinin de boyutu artmaktadır. Bundan dolayı EO ile AEKK karşılaştırılacak olursa, AEKK yöntemi, tutarlı ve etkin tahminler elde etmek için büyük örneklemlere ihtiyaç duymaktadır. Ancak W^{-1} ağırlıklandırma matrisi örnekleme hatalarından etkileneceği için AEKK büyük örneklemlerde daha güvenilir sonuçlar verecektir.

AEKK uyum fonksiyonu çok değişkenli normallik varsayımı altında (5.13.) eşitliğindeki F_{AEKK} fonksiyonuna dönüşür.

$$F_{AEKK} = \frac{1}{2} tr\{\,[S - \Sigma(\theta)]W^{-1}\}^2 \qquad (5.13.)$$

Bu fonksiyonda S, örneklem varyans-kovaryans matrisi olmak üzere, ağırlıklandırma matrisinin özel olarak $W^{-1} = S^{-1}$ seçilmesi ile Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) yönteminin uyum fonksiyonu elde edilir. Benzer şekilde I birim matris olmak üzere, $W^{-1} = I$ seçilmesi ile Ağırlıklandırılmamış En Küçük Kareler yöntemlerinin uyum fonksiyonları elde edilir.

5.3. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GEKK)

Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (Generalized Least Squares- GLS) uyum fonksiyonu, AEKK yönteminin uyum fonksiyonunun özel bir halidir.

$$F_{GEKK} = \frac{1}{2}\, tr(\{[S - \Sigma(\theta)]S^{-1}\}^2) \tag{5.14}$$

Eşitlik (5.14.)'te S, gözlenen kovaryans matrisi, $\Sigma(\theta)$, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi, θ parametre vektörü, S^{-1} ise AEKK uyum fonksiyonundaki W^{-1} ağırlıklandırma matrisi yerine kullanılan örneklem varyans kovaryans matrisinin tersidir.

GEKK ile elde edilen tahmini parametre matrisi $\hat{\theta}$, θ için tutarlı bir tahmindir. $\hat{\theta}$ matrisi, bilinen asimptotik kovaryans matrisine sahip çok değişkenli normal dağılımdan gelmektedir. Bu da istatistiksel olarak anlamlılık testi yapmayı mümkün kılmaktadır.

GEKK asimptotik olarak EO yöntemine eşittir. GEKK, EO ile aynı varsayımlara sahip olduğu için EO ile aynı koşullarda kullanılabilir. Ancak küçük örneklemlerde GEKK yönteminin performansı EO yöntemine göre daha kötüdür. Dolayısıyla küçük örneklemler söz konusu olduğunda GEKK yerine EO kullanılması önerilmektedir.

6. MODELİN DEĞERLENDİRİLMESİ VE UYUM ÖLÇÜTLERİ

Tahmin sürecinin ardından, uyum ölçütlerine göre modelin değerlendirilme süreci gelmektedir. Bu aşamada, uyum ölçütleri yardımı ile örneklem kovaryans matrisi S'nin, modele ilişkin tahmini kovaryans matrisi $\Sigma(\hat{\theta})$ ile arasındaki fark göz önüne alınarak, belirlenen modelin örneklem ile uyumluluğu değerlendirilmektedir. Bu amaçla kullanılan bazı uyum ölçütleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Önem Testi
   - χ^2 Uyum testi
2. Model Uyumuna ilişkin Betimleyici Uyum İyiliği Testleri
   - Yaklaşık hataların ortalama karekökü (RMSEA)
   - Hata kareleri ortalamasının karekökü (RMR)
   - Standartlaştırılmış hata kareleri ortalamasının karekökü (SRMR)
3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçütler
   - Normlaştırılmış uyum indeksi (NFI)
   - Normlaştırılmamış uyum indeksi (NNFI)
   - Karşılaştırmalı uyum indeksi (CFI)
   - Uyum iyiliği indeksi (GFI)
   - Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi (AGFI)
4. Model Tutumuna İlişkin Betimleyici Ölçütler
   - Tutumlu uyum iyiliği indeksi (PGFI)
   - Akaike bilgi kriteri (AIC)
   - Tutarlı Akaike bilgi kriteri (CAIC)
   - Beklenen çapraz geçerlilik indeksi (ECVI)

6.1. Önem Testi

6.1.1. χ^2 Uyum Testi

χ^2 test istatistiği dağılımsal varsayımların sağlanması koşulu altında örneklem varyans-kovaryans matrisi S ile modelden elde edilen tahmini kovaryans matrisi $\Sigma(\hat{\theta})$'nın eşit olup olmadığını test eder. χ^2 testinde sıfır hipotezi aşağıdaki gibidir:

$$H_0: S = \Sigma(\hat{\theta})$$

Bu hipotezin kabul edilmesi demek modelin örneklem ile uyumlu olması anlamına gelmektedir. Bu da istenen bir durumdur. Eğer bu hipotez doğru ise uyum fonksiyonu için (6.1.) eşitliği söz konusudur.

$$\chi^2{}_{(s-t)} = (N-1)F\left[S, \Sigma\left(\hat{\theta}\right)\right] \qquad (6.1.)$$

Burada $\chi^2{}_{(s-t)}$, $(s-t)$ serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımı, s, S matrisindeki artıksız elemanların sayısı, t, tahmin edilen parametrelerin sayısı, N, örneklem büyüklüğü ve $F\left[S, \Sigma\left(\hat{\theta}\right)\right]$ fonksiyonu ise model tarafından sağlanan minimum uyum fonksiyonudur.

Örneklem büyüklüğü χ^2 Uyum Testi için önemlidir. Bunun sebebi, (6.1.) eşitliğinden de görüleceği gibi, örneklem büyüklüğünün artması ile χ^2 test istatistiğinin değeri artacak, bunun sonucu olarak da sıfır hipotezi ret edilecektir. Ancak bu durum istenen bir durum değildir. Çünkü burada amaç, genelde karşılaşılanın aksine, sıfır hipotezini kabul etmektir. Dolayısıyla elde edilecek test istatistiğinin değeri arttıkça, sıfır hipotezinin kabul edilme olasılığı azalacak, bu da araştırmacıyı modelin kötü bir uyuma sahip olduğu sonucuna götürecektir. Aksine, küçük χ^2 değeri ise araştırmacıyı modelin iyi uyuma sahip olduğu sonucuna

götürecektir. χ^2 test istatistiğinin sıfıra eşit olması ise mükemmel uyumun göstergesidir.

Yaygın olarak kullanılan paket programlardan biri olan LISREL programı, EO, AEKK, ve GEKK için farklı χ^2 test istatistikleri sağlamaktadır. Büyük χ^2 değeri kitle kovaryans matrisi ile modele ilişkin kovaryans matrisinin birbirinden önemli derecede farklı olduğu anlamına gelmektedir. χ^2 test istatistiğine ilişkin p değeri 0,05'ten büyük ise H_0 hipotezi kabul edilmekte ve bu da modelin kitle ile uyumlu olduğunu göstermektedir.

χ^2 uyum testi bazı sınırlamalara sahiptir. Bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- χ^2 test istatistiği $(N-1)$ ile orantılı olduğundan örneklem büyüdükçe χ^2 değeri de büyüyecektir.
- χ^2 uyum testi için normallik varsayımı önemlidir. Basıklık ve çarpıklık arttıkça χ^2 değeri de artacaktır.
- Küçük örneklem ile çalışmak χ^2 uyum testi için uygun değildir. Küçük örneklemlerde uyum fonksiyonu χ^2 dağılımına uymayabilir.
- Modele dahil edilen değişken sayısı arttıkça χ^2 değeri de artmaktadır.

Bu sınırlamaların var olması bazı modeller için uyum testini imkansız hale getirebilmektedir. Bu sebeple farklı uyum testlerine ihtiyaç duyulmuştur.

6.2. Model Uyumuna ilişkin Betimleyici Uyum İyiliği Testleri

6.2.1. Yaklaşık Hataların Ortalama Karekökü (RMSEA)

Yaklaşık hataların ortalama karekökü son dönemlerde model uyumunun test edilmesi bakımından en çok önerilen uyum iyiliği testlerinden biridir. Belirlenen modelin, örnekleme göre uyum eksikliğini belirlemek amacı ile kullanılır. Eşitlik (6.1.)'de ifade edilen RMSEA değeri kullanılarak modelin uyumu değerlendirilmektedir.

$$RMSEA = \sqrt{\frac{(\chi^2 - df_s)/N}{df_s}} = \sqrt{\frac{(\chi^2/df_s) - 1}{N}} \quad (6.2.)$$

Eşitlik (6.2.)'de geçen χ^2 terimi belirlenen modelin χ^2 değeri; df_s modelin serbestlik derecesi; N ise örneklem büyüklüğüdür. Elde edilen RMSEA değerinin 0'a eşit olması mükemmel uyumun, 0.05'ten küçük olması iyi bir uyumun, 0.05 ile 0.08 arasında olması kabul edilebilir uyumun 0.08 ile 0.10 arasında olması vasat bir uyumun, 0.10'dan büyük olması ise kötü uyumun göstergesidir.

Yaklaşık hataların ortalama karekökünde diğer uyum indekslerinden farklı olarak, bulunan RMSEA değerine ait, $(0, \infty)$ aralığında, bir de güven aralığı hesaplanmaktadır. Elde edilen bu güven aralığının alt sınırı sıfır veya sıfıra yakın bir değer, üst sınırı da 0.08'den küçük ise, bu durum modelin iyi uyuma sahip olduğunun göstergesidir. Ayrıca, RMSEA değeri için hipotez testi de yapılabilmektedir. Burada sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki şekildedir:

$H_0: RMSEA \leq 0.05$
$H_a: RMSEA > 0.05$

Hesaplanan p değeri 0.05'ten küçük ise sıfır hipotezi ret edilemez denir. Bu durumda belirlenen modelin "yakın uyum" gösterdiği söylenir ve yapılan bu hipotez testine de "yakın uyum testi" (close-fit test) adı verilir (Wang ve Wang, 2012: Steiger, 1990; Browne ve Cudeck, 1993; Sugawara ve McCallum, 1993; Marsh ve Balla, 1994; Browne ve Arminger, 1995'ten).

6.2.2. Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü (RMR)

Hata kareleri ortalamasının karekökünün temeli, model tarafından tahmin edilen kovaryans matrisi ile örneklem kovaryans matrisinin elemanları arasındaki farka dayanmaktadır. Bu indeks, gözlenen değişken sayısı p olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Jöreskog ve Sörbom, 1981):

$$RMR = \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} (s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2}{p(p+1)/2}} \right)^{1/2} \quad (6.3)$$

Bu eşitlikte s_{ij}, gözlenen değerlerin kovaryans matrisi olan S matrisinin i_inci satır ve j_inci sütun elemanı, $\hat{\sigma}_{ij}$ ise tahmini kovaryans matrisinin i_inci satır ve j_inci sütun elemanıdır.

RMR indeksinin temeli, örneklem kovaryans matrisi ile tahmini kovaryans matrisi arasındaki farka dayandığı için bu indeks ne kadar küçük ise, model uyumunun o kadar iyi olduğu düşünülmektedir.

6.2.3. Standartlaştırılmış Hata Kareleri Ortalamasının Karekökü (SRMR)

Sıfıra yakın bir RMR değeri modelin iyi bir uyuma sahip olduğunun göstergesidir. Ancak değişkenlere ait ölçek verilmeksizin elde edilen bir RMR değerinden modelin iyi, kabul edilebilir veya kötü uyuma sahip olduğunu anlayabilmek mümkün değildir. Bu durum da, RMR değerinin ölçekten bağımsız hale getirilmesini, yani standartlaştırılmasını gerektirmektedir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003). Rezidü matrisindeki her bir $s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ elemanının, $s_i = \sqrt{s_{ii}}$ ve $s_j = \sqrt{s_{jj}}$ olmak üzere, $s_i s_j$ çarpımına bölünmesi ile $(s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})/s_i s_j$ elemanlarının oluşturduğu standartlaştırılmış rezidü matrisi elde edilir. Burada $r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}$ eşitliği kullanılarak standartlaştırılmış rezidü matrisinin her bir elemanı $r_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}/s_i s_j$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda SRMR değeri şu şekilde hesaplanır (Schermelleh-Engel ve Moosbrugger, 2003; Bentler, 1995'ten):

$$SRMR = \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \left(r_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}/s_i s_j\right)^2}{p(p+1)/2}} \right)^{1/2} \quad (6.4.)$$

Test edilen model için SRMR değerinin 0.05'ten küçük olması model uyumunun iyi olduğunu (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Hu & Bentler, 1995'ten), 0.10 değerinden küçük olması ise model uyumunun kabul edilebilir olduğunu göstermektedir.

Wang ve Wang (2012) bildirdiğine göre RMR indeksinin standartlaştırılmış bir versiyonu olan SRMR, $e = p(p+1)/2$ ve $r_{ij} = \left(\frac{s_{ij}}{s_i s_j}\right) - \left(\frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}\right)$ olmak üzere Eşitlik (6.5.)'teki gibi tanımlanmıştır:

$$SRMR = ((\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} r^2{}_{ij})/e)^{1/2} \quad (6.5.)$$

Elde edilen SRMR değerinin 0.08'den küçük olması model uyumunun iyi olduğunu, 0.10 değerinden küçük olması ise model uyumunun kabul edilebilir olduğunu göstermektedir.

6.3. Model Karşılaştırmalarını Temel Alan Betimleyici Ölçütler

6.3.1. Normlaştırılmış Uyum İndeksi (NFI)

Kaplan (2000), Bentler ve Bonnet (1980) tarafından önerilen NFI indeksinden, model karşılaştırmalarını temel alan betimleyici ölçütlerin özü olarak bahsetmiştir. Bu indeks, $\chi^2{}_b$, uyumu test edilen, gözlenen değişkenler arasındaki kovaryansın sıfır varsayıldığı, bağımsız modelin (Independent Model, Baseline Model) χ^2 değerini; $\chi^2{}_t$, hedef modelin (Target Model) χ^2 değerini göstermek üzere, aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$NFI = \frac{\chi^2{}_b - \chi^2{}_t}{\chi^2{}_b} = 1 - \frac{\chi^2{}_t}{\chi^2{}_b} \quad (6.6.)$$

Normlaştırılmış uyum indeksi 0 ile 1 arasında değerler alır. Bir modele ait NFI değeri bire ne kadar yakınsa, model o kadar iyi uyuma sahiptir. NFI değerinin

0.95 ‘ten büyük olması model uyumunun iyi olduğunu, 0.90 ve üzeri olması da model uyumunun kabul edilebilir olduğunu göstermektedir (Kaplan, 2000).

Normlaştırılmış uyum indeksinin örneklem büyüklüğünden etkilenmesi bu indeksin kullanımı açısından dezavantajdır.

6.3.2. Normlaştırılmamış Uyum İndeksi (NNFI)

Normlaştırılmış uyum indeksinin örneklem büyüklüğünden etkilenmesi sebebi ile bu uyum indeksi geliştirilmiştir. Bentler ve Bonnet (1980), Tucker ve Lewis (1973) tarafından yapılan bir takım çalışmaları geliştirerek Normlaştırılmamış uyum indeksini (NNFI) önermişlerdir. Bu uyum indeksi aynı zamanda Tucker-Lewis indeks (TLI) adı ile de bilinmektedir. $\chi^2{}_b$, bağımsız modelin (Independent Model, Baseline Model), $\chi^2{}_t$ ise hedef modelin (Target Model) Ki-Kare değerleri, F_b bağımsız modelin ve F_t hedef modelin minimum uyum fonksiyonları, df_b ve df_t de bunlara karşılık gelen serbestlik dereceleri olmak üzere, Normlaştırılmamış uyum indeksi aşağıdaki gibidir:

$$NNFI = \frac{(\chi^2{}_b/df_b)-(\chi^2{}_t/df_t}{(\chi^2{}_b/df_b)-1} = \frac{(F_b/df_b)-(F_t/df_t)}{(F_b/df_b)-1/(N-1)} \qquad (6.7.)$$

Normlaştırılmamış uyum indeksi, NFI gibi sıfır ile bir aralığında yer almaktadır. Ancak normlaştırılmamış olmasından dolayı, model iyi olsa dahi, bu aralığın dışında, daha yüksek değerler alabilir. İyi bir modelin göstergesi olarak 0.97 değeri NNFI için kabul görmüş bir değerdir. NNFI değerinin 0.95 ve üzerinde çıkması ise model uyumunun kabul edilebilir seviyede olduğunun bir göstergesidir (Schermeller-Engel ve ark., 2003).

6.3.3. Karşılaştırmalı Uyum İndeksi (CFI)

Karşılaştırmalı uyum indeksi (CFI; Bentler, 1990), McDonald ve Marsh (1990) tarafından geliştirilen ve aşağıdaki gibi ifade edilen RNI (Relative Noncentrality Index) indeksinin düzeltilmiş bir versiyonudur.

$$RNI = \frac{[(\chi^2{}_b - df_b) - (\chi^2{}_t - df_t)]}{\chi^2{}_b - df_b} \tag{6.8.}$$

RNI indeksi, Bentler ve Bonnet (1980) tarafından NFI indeksinin küçük örneklemlerde model uyumunun yetersiz tahmin edilmesini önlemek amacıyla geliştirilmiştir.

Karşılaştırmalı uyum indeksinde belirlenen bir model ile bağımsız model karşılaştırılmaktadır. Bu indeks aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Schermellerh-Engel ve ark., 2010):

$$CFI = 1 - \frac{max[(\chi^2{}_t - df_t), 0]}{max[(\chi^2{}_t - df_t), (\chi^2{}_b - df_b), 0]} \tag{6.9.}$$

Ayrıca bu uyum indeksi Wang ve Wang (2012) tarafından $d = (\chi^2 - df)$ parametresi kullanılarak (6.10.) eşitliğindeki gibi ifade edilmiştir:

$$CFI = \frac{d_{null} - d_{specified}}{d_{null}} \tag{6.10.}$$

Eşitlik (6.10.)'da ifade edilen d_{null} ve $d_{specified}$ parametreleri sırası ile bağımsız model ve belirlenmiş modelin merkezsel olmama parametreleri (Noncentrality Parameters) olarak adlandırılırlar. Bağımsız model, en kötü uyuma sahip olan model olduğu için d_{null} parametresi $d_{specified}$ parametresinden daha büyüktür. Dolayısıyla CFI, 0 ile 1 arasında değerler alır ve yüksek CFI değeri iyi uyumun göstergesidir. Bir modele ait CFI değerinin 0.95'ten büyük olması bu

modelin kabul edilebilir bir model olduğunu, 0.97'den büyük olması ise modelin iyi uyuma sahip bir model olduğunu göstermektedir.

Karşılaştırmalı uyum indeksi küçük örneklemlerde bile iyi sonuçlar vermektedir. Ancak modeldeki değişkenler arasındaki korelasyonların ortalama büyüklüğünün düşük olması bu indeksin de düşük sonuçlar vermesine sebep olmaktadır (Wang ve Wang, 2012).

6.3.4. Uyum İyiliği İndeksi (GFI)

Uyum iyiliği indeksi (GFI; Jöreskog &Sörbom, 1989; Tanaka & Huba, 1984), gözlenen değişkenlere ait varyans-kovaryans matrisi olan S ile tahmini varyans-kovaryans matrisi olan $\Sigma(\hat{\theta})$ matrisi arasındaki uyumun ölçüsüdür. GFI, test edilen modelin bağımsız modele göre ne kadar iyi uyum gösterdiğini ifade etmektedir. Bu indeks F_t ve F_n sırasıyla test edilen modelin ve bağımsız modelin minimum uyum fonksiyonunun değerleri, ${\chi^2}_t$ ve ${\chi^2}_n$, sırasıyla test edilen modelin ve bağımsız modelin ki-kareleri olmak üzere, aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$GFI = 1 - \frac{F_t}{F_n} = 1 - \frac{{\chi^2}_t}{{\chi^2}_n} \tag{6.11.}$$

Uyum iyiliği indeksi genellikle 0 ile 1 arasında değerler almaktadır. Ancak negatif değerler aldığı durumlar da görülmüştür. Yüksek GFI değeri yüksek uyumun göstergesidir. Ayrıca, GFI değerinin 0.90'dan yüksek olması test edilen modelin bağımsız modele göre kabul edilebilir bir model olduğunu, 0.95'ten yüksek olması modelin bağımsız modele göre iyi uyuma sahip olduğunu gösterir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

Uyum iyiliği indeksi ayrıca Tanaka ve Huba (1989) tarafından Eşitlik (6.11.)'deki gibi ifade edilmiştir:

$$GFI = \frac{tr(\hat{\sigma}'W\hat{\sigma})}{tr(s'Ws)} \tag{6.12.}$$

Bu eşitliğin payında , W ağırlık matrisi ile ağırlıklandırılan $\hat{\sigma}$ tahmini varyanslarının toplamı, paydasında ise W ağırlık matrisi ile ağırlıklandırılan örneklem varyanslarının toplamı bulunmaktadır.

Tanaka ve Huba (1989), uyum indeksinin yorumunun çok değişkenli regresyondaki R^2 ile benzerlik gösterdiğini ifade etmiştir (Tabachnick ve Fidell, 2007).

6.3.5. Düzeltilmiş Uyum İyiliği İndeksi (AGFI)

Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi, Jöreskog ve Sörbom (1989) tarafından, model karmaşıklığının uyum iyiliği indeksinde meydana getirdiği yanlılığı düzeltmek amacıyla geliştirilmiştir(Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$AGFI = 1 - \frac{df_b}{df_t}(1 - GFI) = 1 - \frac{{\chi^2}_b / df_b}{{\chi^2}_t / df_t} \qquad (6.13.)$$

Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi genellikle 0 ile 1 aralığında değerler alır. Ancak büyük kitlelerden alınmış küçük serbestlik derecesine sahip modeller söz konusu olduğunda AGFI değerinin negatif değerler aldığı da görülebilmektedir. Ayrıca test edilen modelin serbestlik derecesi bağımsız modelin serbestlik derecesine yaklaştıkça düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi uyum iyiliği indeksine yaklaşmaktadır.

Düzeltilmiş uyum iyiliği indeksi için 0.85’ten büyük değerler kabul edilebilir uyumun, 0.90 ve üstü değerler ise iyi uyumun göstergesidir. Model karmaşıklığının artması, AGFI ve GFI performansının düşmesine sebep olmaktadır (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Anderson ve Gerbing, 1984’ten).

6.4. Model Tutumuna İlişkin Betimleyici Ölçütler

6.4.1. Tutumlu Uyum İyiliği İndeksi (PGFI)

Tutumlu uyum iyliği indeksi (PGFI; Mulaik ve ark., 1989), uyum iyiliği indeksinin değiştirilmiş halidir. Aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$PGFI = \frac{df_t}{df_b} GFI \tag{6.14.}$$

Eşitlik (6.14.) ile verilen $df_b = s = p(p+1)/2$ bağımsız modelin serbestlik derecesi; t, $\hat{\theta}$ parametre vektöründeki parametre sayısı; $df_t = s - t$, test edilen modelin serbestlik derecesi; GFI ise uyum iyiliği indeksidir.

Tutumlu uyum iyiliği indeksi 0 ile 1 aralığında değerler almakta ve bu indeksin yüksek değerleri modelin iyi uyuma sahip olduğunu göstermektedir. Model karmaşıklığının uyum iyiliği indeksi üzerinde sebep olduğu performans düşüklüğünü düzelttiği de düşünülebilir. Alternatif modeller arasında seçim yapmak için kullanılabilmektedir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

6.4.2. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Bilgi kriteri indeksleri, göreli olarak birden fazla modelin karşılaştırılması amacıyla kullanılan istatistiklerdir. Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC) veya Schwarz Kriteri (SIC) ve örneklem büyüklüğüne göre düzeltilmiş BIC olarak sıralanabilecek olan bu kriterlerin genel formu aşağıdaki gibidir Sclove (1987):

$$-2\ln(L) + a(n)m \tag{6.15.}$$

Eşitlik (6.15.) ile verilen ifadede L, modele ait maksimum olabilirlik fonksiyonu; n örneklem büyüklüğü; m, tahmin edilecek parametre sayısı ve a, $(n)m$

teriminin katsayısıdır. Bu ifadede geçen $-2\ln(L)$ terimi 0 ile ∞ aralığında değerler almakta ve küçük değerleri iyi uyumun göstergesi olarak kabul edilmektedir. Bu ifadede yer alan bir diğer terim olan $a(n)m$ ise model karmaşıklığının sebep olacağı güç azalmasını göstermek amacıyla $-2\ln(L)$ terimine eklenmiştir. Dolayısıyla bilgi kriteri indeksleri açısından karşılaştırılan modeller arasında en küçük değere sahip model en iyi uyumu gösteren model olarak kabul edilmektedir (Wang ve Wang, 2012).

Akaike bilgi kriteri (AIC; Akaike, 1974, 1987), birden fazla alternatif model arasından gerçeğe en uygun olanını seçmek için kullanılmaktadır. AIC, kötü uyumun göstergesidir. Yani, AIC değeri arttıkça model uyumu azalmaktadır. Bu kriter, $logL$ terimi olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasını maksimize eden değer, t ise tahmin edilen parametre sayısı olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$AIC = -2logL + 2t \tag{6.16.}$$

AIC, LISREL paket programı tarafından (6.17.) eşitliği ile EQS paket programı tarafından ise (6.18.) eşitliği ile hesaplanmaktadır.

$$AIC = \chi^2 + 2t \tag{6.17.}$$

$$AIC = \chi^2 - 2sd \tag{6.18.}$$

(6.16.) ve (6.17.) eşitliklerinde ifade edilen t, tahmin edilen parametre sayısı; (6.18.) eşitliğinde ifade edilen sd ise serbestlik derecesidir.

6.4.3. Tutarlı Akaike Bilgi Kriteri (CAIC)

Tutarlı Akaike bilgi kriteri (CAIC; Bozdogan,1987), Akaike bilgi kriteri ile benzer şekilde alternatif modeller arasından gerçeğe en uygun modeli seçmek için kullanılmaktadır. Düşük CAIC değeri, iyi uyumun göstergesidir. LISREL paket programı bu kriteri aşağıdaki şekilde hesaplamaktadır:

$$CAIC = \chi^2 + (1 + logN)t \quad (6.19.)$$

(6.19.) eşitliğinde $logN$ örneklem büyüklüğünün doğal logaritması, t ise tahmin edilen parametre sayısıdır.

AIC ile CAIC arasındaki en önemli fark, (6.14.) eşitliğinde t, tahmin edilen parametre sayısının katsayısı 2 iken (6.17.) eşitliğinde bu katsayı $(1 + logN)$ halini almıştır. N örneklem büyüklüğü sonsuza gitme eğilimindedir ve (6.17.) eşitliğinde t tahmin edilen parametre sayısı, N örneklem büyüklüğüne bağlı duruma gelmiştir. Tutarlı Akaike bilgi kriterinin adındaki "Tutarlı" kelimesi de buradan gelmektedir. Bu kriterde, $N \longrightarrow \infty$ iken doğru modelin karşılaştırılan modeller arasında var olduğu varsayımı altında, doğru modelin seçilmesi vaat edilmektedir (Schermelleh-Engel ve ark., 2003).

6.4.4. Beklenen Çapraz Geçerlilik İndeksi (ECVI)

Akaike bilgi kriterine benzer diğer bir indeks beklenen çapraz geçerlilik indeksidir (ECVI; Browne ve Cudeck, 1989,1993). Bu indeks aslında bir kitle parametresidir ve (6.20.) eşitliğindeki c istatistiği ile tahmin edilir.

$$c = F\left(S, \Sigma\left(\hat{\theta}\right)\right) + \frac{2t}{N-1} \quad (6.20.)$$

Bu eşitlikte ifade edilen $F\left(S, \Sigma\left(\hat{\theta}\right)\right)$, minimum uyum fonksiyonunun değeri; t, tahmin edilen parametre sayısı; N ise örneklem büyüklüğüdür.

AIC istatistiksel bilgi teorisinden elde edilmiş bir indeks iken ECVI, üzerinde çalışılan örnekleme ait modelden tahmin edilen kovaryans matrisi ile aynı büyüklükte başka bir örneklemin beklenen kovaryans matrisi arasındaki uyumsuzluğun bir ölçüsüdür. Farklı modeller arasından seçim yapmak gerektiğinde küçük ECVI değerine sahip model seçilmelidir. LISREL paket programında ECVI için ayrıca %90 'lık güven aralığı bulunmaktadır. Bu güven aralığı, tahminin

doğruluğunun belirlenmesine olanak sağlamaktadır (Schermeller-Engel ve ark., 2003).

ECVI, AIC'den bağımsız bir yolla elde edilse de, minimum uyum fonksiyonu olarak EO minimum fonksiyonu kullanıldığında model karşılaştırma açısından AIC ile aynı sınıftadır (Schermelleh-Engel ve ark., 2003; Browne ve Cudeck, 1993'ten). Ayrıca ECVI değerinin $N-1$ ile çarpımı sonucunda LISREL programının hesapladığı AIC değerine ulaşılmaktadır. Bu nedenle en iyi uyumu sağlayan modeli elde etmek için ECVI ve AIC kriterlerinden birini göz önünde bulundurmak yeterli olacaktır.

7. LISREL PAKET PROGRAMI

LISREL paket programının gelişimi, 1970 yılında Karl Jöreskog'un bir konferansta ilk LISREL modelini sunması ile başlamış ve ilk olarak 1975 yılında yayımlanmıştır. LISREL ismi, İngilizce karşılığı olan "Linear Structural Relations" kelimelerinin baş harflerinden oluşmaktadır. Türkçe karşılığı ise "Doğrusal Yapısal İlişkiler" olarak yorumlanabilir. İsmindeki "Linear" yani doğrusal kavramının sınırlılığından dolayı zaman içerisinde Structural Equation Modelling (SEM), yani Yapısal Eşitlik Modellemesi olarak değiştirilmiştir.

LISREL'de programlama dili türleri LISREL, PRELIS ve SIMPLIS olmak üzere üç çeşittir.

PRELIS (Preprocessor for LISREL) arayüzü, LISREL programında araştırmacıların bir LISREL modeli oluşturmadan önce üzerinde çalıştıkları veriyi daha iyi anlamalarını sağlamaktadır. İlk versiyonu 1986 yılında yayımlanmıştır. Asıl işlevi LISREL'de analiz için gereken bazı istatistiksel hesaplamaların özetlenmiş halini hazırlamak olan PRELIS için zaman içinde çok daha çeşitli analizler yapabilen versiyonlar yayımlanmıştır.

SIMPLIS sözdizimi, 1993 yılında LISREL ile model belirleme için bir alternatif olarak çıkarılmıştır. Bu sözdizimi, bazı Yunanca karakterlerin ezberlenmesini ve önemli düzeyde matris bilgisini gerektiren orijinal LISREL sözdiziminin basitleştirilmiş halidir. SIMPLIS ile kullanıcılara sunulan bir diğer imkan yol diyagramı çizdirilebilmesidir. Bu yolla ilk defa kullanıcıların program ile etkileşim halinde olması sağlanmıştır. Kullanıcının program ile etkileşimi bir metin düzenleyicisi tarafından belirli komutların girilmesi ile gerçekleşmektedir. Verinin hangi klasörden çağırılacağı, kaç değişken içerdiği, değişkenlerin türü ve ismi gibi birçok bilgi bu komutlar ile sağlanmaktadır.

LISREL programının gerçek anlamda etkileşimli versiyonu ilk olarak 1998 yılında MS Windows kullanıcıları için çıkarılmıştır. Bu versiyon ile komut dosyalarının yazımını kolaylaştıran iletişim kutuları ara yüzü, kullanıma sunulmuştur. Komut dosyası hazırlama aşamasında kullanıcıların yazmak yerine iletişim kutularından olabildiğince yararlanması sağlanmıştır.

LISREL programında yol diyagramı ile kullanıcılara maksimum düzenleme imkanı sunularak program daha esnek hale getirilmiştir. Bu sayede kullanıcılar model belirlemenin yanında, belirledikleri modelin grafik gösterimini de elde etmektedirler. Programın kullanıcılar tarafından etkileşimli olarak kullanılması, yukarıda bahsedilen özellikler dışında birçok yenilik geliştirilmesini sağlamıştır. Temel bileşenler analizi, açımlayıcı faktör analizi ve bootstrap bunlardan birkaç tanesidir.

LISREL programı bu çalışmada doğrulayıcı faktör analizi yapmak amacı ile kullanılmıştır. Önceden belirlenmiş bir modelin TIMSS 2011 verilerinden sağlanan veriye uygunluğu, yol diyagramı ve kovaryans matrisi yardımı ile belirlenmiştir. Belirlenen bu modelin örneklem ile uyumu LISREL program çıktılarından uyum indeksleri esas alınarak gözlenmiş ve modifikasyon indeksleri yardımı ile daha iyi uyuma sahip bir modele ulaşmak amaçlanmıştır.

8. 2011 TIMSS SONUÇLARI İLE BİR YAPISAL EŞİTLİK MODELLEMESİ UYGULAMASI

8.1. TIMSS Nedir?

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study- Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması), öğrencilerin matematik ve fen başarısını ölçen uluslararası bir değerlendirmedir. Ülke okul ve sınıf ile ilgili kapsamlı bilgiler doğrultusunda, dünya çapında, 4. ve 8. sınıf öğrencileri üzerinde uygulanmaktadır. Öğrencilerin başarılarını ölçmenin yanı sıra öğrenim ve öğretimin okullarda nasıl gerçekleştiğini belirlemek, ulusal eğitim sistemleri arasındaki farklılıkları saptamak ve değerlendirmek için tasarlanmıştır.

TIMSS, merkezi Hollanda'da bulunan IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) kuruluşunun dört yılda bir düzenlediği kapsamlı bir tarama araştırmasıdır.

TIMSS, 1995, 1999, 2003, 2007 ve son olarak 2011 yılında 4. ve 8. sınıf düzeyinde uygulanmıştır. TIMSS değerlendirmesinin bu düzeylerde ve dört yıl aralıklı olarak uygulanma sebebi; bir uygulama sürecinde 4. sınıf olan öğrencinin diğer uygulama sürecinde 8. sınıf olması ile öğrenci başarılarının yıllara göre izlenmesini sağlamaktır.

TIMSS ilk olarak 1995 yılında uygulanmaya başlanmıştır. Son TIMSS değerlendirmesi olan TIMSS 2011'e 63 ülke katılmıştır. Türkiye ise TIMSS 1999 ve TIMSS 2007 değerlendirmelerine sadece 8. sınıf düzeyinde, TIMSS 2011 değerlendirmesine ise hem 4. sınıf hem de 8. sınıf düzeyinde katılmıştır.

8.2. TIMSS 2011 Değerlendirmesinin Uygulanma Süreci

TIMSS değerlendirmesinde bulunan ölçme araçları uygulanmadan 3 yıl önce uzmanlar tarafından hazırlanmaktadır. Hazırlanan ölçme araçları öncelikle katılımcı ülkelerin onayına sunulmaktadır. Onay alındıktan sonra hazırlanan ölçme araçları çeviri ve uyarlama işlemleri için ulusal merkezlere gönderilmektedir. Çeviri ve

uyarlamalar hazırlandıktan sonra, uygulamaya katılacak ülkelerde uygulamadan bir yıl önce bir pilot uygulama yapılmakta, tespit edilen eksiklik veya hatalar giderilmektedir. Esas uygulamanın yapılması ile elde edilen verilerin ulusal merkezde elektronik ortamda veri girişi yapıldıktan sonra ülke, verileri projeyi IEA adına yürüten kuruluşlara göndermektedir. Bu kuruluşlar tarafından yapılan analiz ve raporlama işlemleri sonrasında TIMSS değerlendirmesi ile ilgili sonuçlar, uygulama yapıldıktan bir yıl sonra rapor halinde açıklanır.

TIMSS değerlendirmesi Türkiye'de Milli Eğitim Bakanlığı Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi tarafından yürütülmektedir. Bu uygulama 2011 yılında, 4. Sınıf düzeyinde, 257 okul ve 7.479 öğrencinin katılımı ile 8. Sınıf düzeyinde ise 239 okul ve 6928 öğrencinin katılımı ile gerçekleştirilmiştir.

8.3. TIMSS 2011 Değerlendirmesinin Türkiye'de Uygulanma Süreci

TIMSS değerlendirme projesi Milli Eğitim Bakanlığı Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi tarafından yürütülmektedir. 2011 yılında yapılan TIMSS değerlendirmesine Türkiye'den 4. sınıf düzeyinde katılan okul sayısı 257, 8. sınıf düzeyinde katılan okul sayısı ise 239'dur. Bu okullardan projeye katılan öğrenci sayıları ise 4. sınıf düzeyi için 7479, 8. sınıf düzeyi için 6928 öğrencidir. Bu çalışmada TIMSS 2011 değerlendirmesinin Türkiye verilerinden 4. sınıf düzeyindeki öğrenci anketleri kullanılmıştır.

8.4. TIMSS Değerlendirmesinde Uygulanan Anketler

TIMSS değerlendirmesi matematik ve fen alanlarında başarı testleri ile öğrenci başarısını etkileyen ortamlara ilişkin bilgi edinilmesini sağlayan anketlerden oluşmaktadır.

Öğrenci başarı testleri hem çoktan seçmeli hem de açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Bu testler, her iki sınıf düzeyi için, ders alanlarına ve zihinsel alanlara göre düzenlenmiş 14 kitapçıktan oluşmaktadır. Öğrenci anketleri ise öğrencinin bulunduğu eğitsel ve sosyal ortamlar ile ilgili bilgi toplamak amacı ile

uygulanmaktadır. Bu anketler ile öğrenme sürecinde öğrenmeyi ve başarıyı etkileyen faktörlerin de göz önünde bulundurulması sağlanmaktadır. Hazırlanan anketler ile öğrenci başarısının eğitsel ve sosyal ortamlar ile nasıl bir ilişki içerisinde olduğu araştırılmaktadır. Anketler öğrencinin evdeki ortamı, okul atmosferi ve öğretme-öğrenme ölçütleri ile ilgili birtakım soruları içermekte ve sadece öğrenciye değil eğitim alanındaki öğretmen, okul müdürü gibi diğer aktörlere de uygulanmaktadır.

Öğrenci Anketi: Bu anket, öğrencinin ev ortamı, okul ortamı, bilgisayar kullanımı, okul dışı etkinlikler, matematik ve fen öğrenmeye ilişkin tutumu ve öz yeterliliği gibi konularla ilgili sorular içermektedir.

Öğretmen Anketi: Öğretmen anketi, fen ve matematik öğretmenleri tarafından ayrı ayrı cevaplanmaktadır. Bu ankette ders içerikleri, fen ve matematik öğretimi ile ilgili kaynaklar, ders yükü, mesleki deneyim, pedagojik bilgiler, öğretmenlerin derse ilişkin tutumları gibi konularda sorular bulunmaktadır.

Okul Anketi: Okul anketi, değerlendirmeye katılan okulların yöneticileri tarafından cevaplanmaktadır. Bu anket eğitim kadrosu, öğretimi destekleyen kaynaklar, öğretime ayrılan süre, okulun amaçları, okul ve aile iş birliği, okulun iklimi ve kültürü gibi konularla ilgili sorular içermektedir.

Öğretim Programı Anketi: Öğretim programı anketi, her ülke için belirlenen TIMSS Ulusal Araştırma Koordinatörü tarafından cevaplanmaktadır. Bu anketin amacı ise TIMSS değerlendirmesine katılan ülkelerde matematik ve fen dersi programlarının nasıl hazırlandığı ve konu içerikleri ile ilgili bilgi toplamaktır.

8.5. TIMSS 2011 Türkiye Verileri ile Bir Yapısal Eşitlik Modellemesi Çalışması

Bu çalışmada TIMSS 2011 Türkiye verilerinin matematik dersine ilişkin 4. sınıf düzeyi öğrenci anketi kullanılmıştır. Bu anket verilerine TIMSS ve PIRLS değerlendirmelerine ait internet sitesinden (http://timssandpirls.bc.edu/) ulaşılmıştır. Bu çalışmada kullanılan anket soruları aşağıdaki gibidir:

- Enjoy learning mathematics (M_1): Matematik öğrenmekten zevk duyarım.
- Wish have not to study math (M_2): Matematik çalışmak istemezdim.
- Math ıs boring (M_3): Matematik sıkıcıdır.
- Learn interestıng things (M_4): İlginç şeyler öğrenirim.
- Like mathematics (M_5): Matematiği severim.
- Important to do well in math (M_6): Matematikte başarılı olmak önemlidir.
- Things not related to lesson (M_7): Dersle alakası olmayan şeylerle ilgilenirim.
- Usually do well in math (M_8): Matematikte genellikle başarılıyımdır.
- Harder for me than for others (M_9): Diğer öğrencilere kıyasla matematik benim için daha zor.
- Just not good in math (M_{10}): Matematikte iyi değilim.
- Learn quickly in mathematics (M_{11}): Matematiği kolay öğrenirim.
- Good at working out problems (M_{12}): Problem çözmekte iyiyim.
- I am good at mathematics (M_{13}): Matematikte iyiyim.
- Mathematics harder for me (M_{14}): Matematik benim için zordur.

Anket sorularının cevaplarına ait seçenekler aşağıdaki şekildedir:

1. Agree a lot: Kesinlikle katılıyorum
2. Agree a little: Kısmen katılıyorum
3. Disagree a little: Kısmen katılmıyorum
4. Disagree a lot: Kesinlikle katılmıyorum

Veriler ile öncelikle açımlayıcı faktör analizi yapılarak faktör sayısı belirlenmiştir. Faktör sayısının belirlenmesinin ardından, teorik bir model belirlenerek LISREL programında bu modele ilişkin yol diyagramları çizdirilmiş ve doğrulayıcı faktör analizi yapılmıştır. Analiz sonucunda modifikasyon önerileri ve uyum indeksleri incelenmiştir. Program çıktılarında yer alan modifikasyon önerileri göz önünde bulundurularak model yeniden belirlenmiş ve daha uygun bir model oluşturulmuştur. Son olarak belirlenen bu modelin kız ve erkek alt grupları için de

geçerli olup olmadığını belirlemek amacıyla aynı analizler bu alt gruplar üzerinde de uygulanmıştır.

8.5.1. Açımlayıcı Faktör Analizi Uygulaması

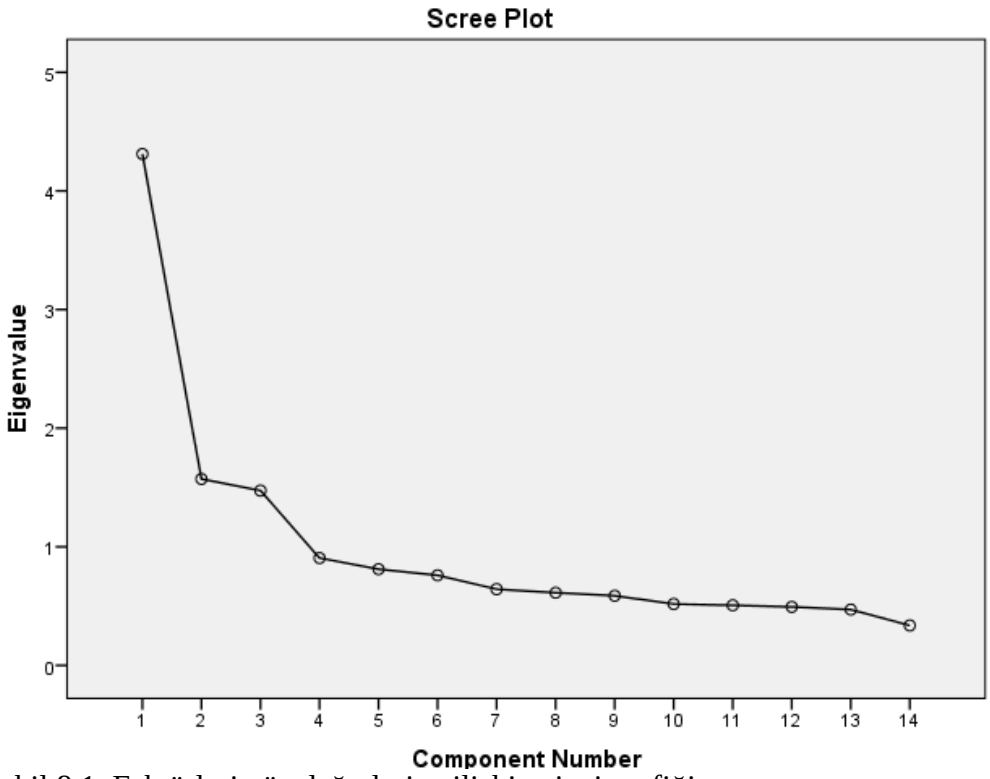
TIMSS 2011 Türkiye verilerinin matematik dersine ilişkin 4. sınıf düzeyi öğrenci anketi 18 maddeden oluşmaktadır. Bu 18 madde arasından ilgilenilen faktörlere uygun olacak şekilde 14 madde seçilmiş ve SPSS programında, Varimax döndürme yöntemi kullanılarak, açımlayıcı faktör analizi uygulanmıştır. Faktörlerin belirlenmesinde öz değerler, faktör yükleri ve aynı faktör altındaki maddelerin kuramsal temele uygunlukları göz önünde bulundurulmuştur. SPSS programında elde edilen sonuçlar Tablo 8.1.'deki gibidir.

Çizelge 8.1. KMO Bartlett Test sonucu tablosu

Kaiser-Meyer-Olkin Örneklem Ölçüm Değer Yeterliliği.		,860
Bartlett Testi	Ki-Kare	24200,050
	sd	91
	Sig.	,000

Yapılan analiz sonucunda SPSS programında elde edilen Bartlett's Test değeri anlamlı çıkmıştır.

Faktörlere ilişkin çizgi grafiği Şekil 8.1. ile verilmiştir.



Şekil 8.1. Faktörlerin öz değerlerine ilişkin çizgi grafiği

Çizgi grafiğinde yatay eksen faktörleri dikey eksen ise öz değerleri göstermektedir. Grafiğe göre öz değeri 1'in üstünde olan faktör sayısı 3'tür. Buradan da anket sorularının 3 faktör altında toplanabileceği sonucuna varılmıştır. Analizde kullanılan 14 madde ve bu maddelere ait faktör yükleri Tablo 8.2. ile verilmiştir.

Çizelge 8.2. Faktörler ve Faktör Yüklerine İlişkin SPSS Çıktısı

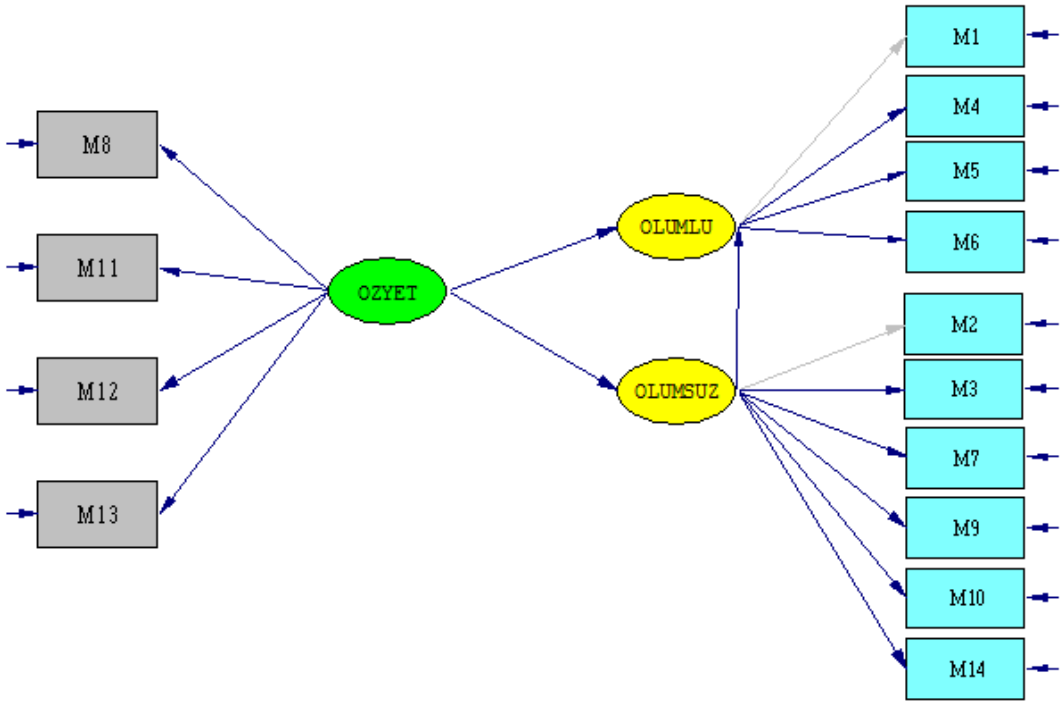
	Bileşenler		
	1	2	3
Diğer öğrencilere kıyasla matematik benim için daha zor (M_9)	,669	-,328	
Matematik çalışmak istemezdim (M_2)	,659		
Matematik benim için zordur (M_{14})	,640	-,335	
Matematik sıkıcıdır (M_3)	,636		-,439
Dersle alakası olmayan şeylerle ilgilenirim (M_7)	,630		
Sadece matematikte iyi değilim (M_{10})	,604	-,467	
Problem çözmekte iyiyim (M_{12})		,753	
Matematikte iyiyim (M_{13})		,752	
Matematikte genellikle başarılıyımdır (M_8)		,685	
Matematiği kolay öğrenirim (M_{11})		,652	
Matematiği severim (M_5)			,781
Matematik öğrenmekten zevk duyarım (M_1)			,712
Matematikte başarılı olmak önemlidir (M_6)			,595
İlginç şeyler öğrenirim (M_4)			,519

SPSS programında yapılan açımlayıcı faktör analizi sonucunda 14 anket sorusunun 3 faktör altında toplanabileceği sonucuna varılmıştır. Faktörler belirlenirken, her bir faktör altındaki maddelerin kuramsal temele uygunlukları göz önünde bulundurulmuştur. Bu durumda Faktör 1, olumsuz tutum; Faktör 2 öz yeterlilik algısı; Faktör 3 ise olumlu tutum olarak belirlenmiştir.

8.5.2. LISREL ile Yapısal Eşitlik Modellemesi

Açımlayıcı faktör analizi ile 3 faktör altında incelenen anket soruları bu bölümde LISREL programı kullanılarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin matematiğe yönelik olumlu tutumlarını (OLUMLU), olumsuz tutumlarını (OLUMSUZ) ve öz yeterlilik algılarını (OZYET) içeren uygun bir model elde edilmeye çalışılmış,

sonrasında bu modelin kız ve erkek öğrenci alt grupları için ayrı ayrı uyum indeksleri incelenmiştir. Anket verilerinin tamamı kullanılarak oluşturulan model Şekil 8.2. ile verilmiştir.



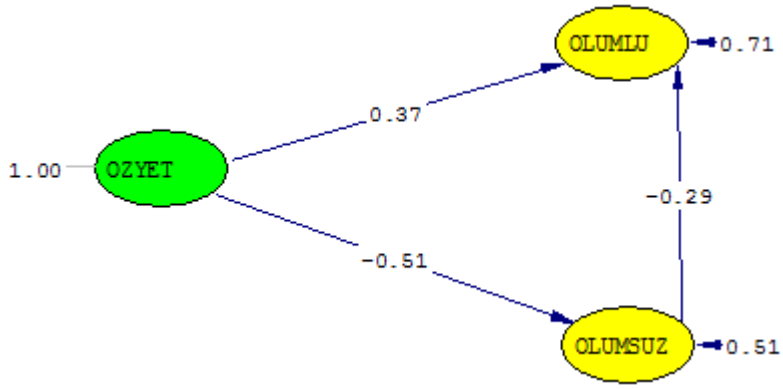
Şekil 8.2. Anket Verileri ile Uyumu Araştırılacak Model

Bu modelde 3 adet gizil değişken ve 14 adet gösterge değişken bulunmaktadır. Gizil değişkenler arasındaki ilişki şu şekildedir: OZYET ile tanımlanan öz yeterlilik algısı dışsal gizil değişkeni, OLUMLU ile tanımlanan olumlu tutum ve OLUMSUZ ile tanımlanan olumsuz tutum içsel gizil değişkenlerini yordamaktadır. Buna ek olarak, OZYET dışsal gizil değişkeni OLUMLU içsel gizil değişkeni üzerinde, OLUMSUZ içsel gizil değişkeni aracılığı ile, dolaylı etkiye de sahiptir. OZYET dışsal gizil değişkeni 4, OLUMLU içsel gizil değişkeni 4 ve OLUMSUZ içsel gizil değişkeni 6 adet gösterge değişkeni yordamaktadır. Oluşturulan bu modele ilişkin uyum indeksleri Tablo 8.3. ile verilmiştir.

Çizelge 8.3. Tüm Modele İlişkin Uyum İndeksi Değerleri

Uyum İndeksi	Elde Edilen Değer	İyi Uyum	Kabul Edilebilir Uyum
RMSEA	0.066	$0 \leq RMSEA \leq 0.05$	$0.05 \leq RMSEA \leq 0.08$
RMR	0.036	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi
SRMR	0.052	$0 \leq SRMR \leq 0.05$	$0.05 \leq SRMR \leq 0.10$
NFI	0.95	$0.95 \leq NFI$	$0.90 \leq NFI$
NNFI	0.94	$0.97 \leq NFI$	$0.95 \leq NFI$
CFI	0.95	$0.97 \leq CFI$	$0.95 \leq CFI$
GFI	0.96	$0.95 \leq GFI$	$0.90 \leq GFI$
AGFI	0.94	$0.90 \leq AGFI$	$0.85 \leq AGFI$
PGFI	0.66	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi
ECVI	0.34	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir

Elde edilen uyum indeksleri incelendiğinde, bu değerlerin uyum iyiliği kriterleri için belirlenen değerler ile uyumlu oldukları görülmektedir. Değerlerin belirtilen aralıklarda olması modelin tüm anket verileri için geçerli olduğu anlamına gelmektedir.



Şekil 8.3. Gizil Değişkenler Arasındaki İlişkiyi Gösteren Yapısal Model

Anket verilerinin tamamı ile oluşturulan modelde elde edilen regresyon denklemleri aşağıdaki gibidir:

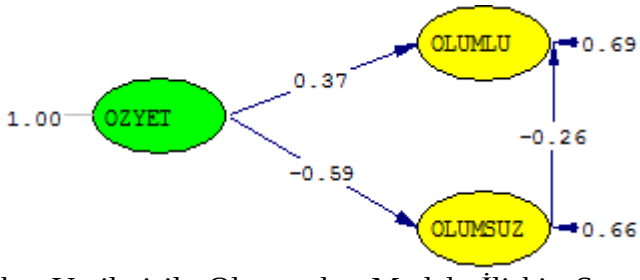
$$OLUMLU = -0.29\ OLUMSUZ + 0.37\ OZYET \quad (8.1.)$$

$$OLUMSUZ = -0.51\ OZYET \quad (8.2.)$$

$$OLUMLU = [(-0.29)(-0.51) + 0.37]\ OZYET = 0.52\ OZYET \quad (8.3.)$$

Verilen eşitliklerde Şekil 8.3. ile verilen modeldeki doğrudan ve dolaylı etkiler ifade edilmiştir. Eşitlik (8.1.), OLUMSUZ ve OZYET değişkenlerinin OLUMLU değişkeni üzerindeki doğrudan etkilerini; Eşitlik (8.2.), OZYET değişkeninin OLUMSUZ üzerindeki doğrudan etkisini; Eşitlik (8.3.) ise OZYET değişkeninin OLUMLU değişkeni üzerindeki toplam etkisini yani doğrudan ve dolaylı etkisinin toplamını göstermektedir. LISREL ile yapılan yapısal eşitlik modellemesi, bu regresyon eşitliklerinden yararlanılarak OZYET, OLUMLU ve OLUMSUZ değişkenleri arasındaki ilişkilerin miktarları hakkında yorum yapmayı mümkün kılmaktadır. Buna göre öz yeterlilik algısının olumlu tutum üzerinde olumsuz tutumdan daha fazla etkisi olduğu yorumu yapılabilir.

Yapısal eşitlik modellemesinde gösterge değişkenler ile gizil değişkenler arasındaki ilişkilerin incelendiği model ölçüm modeli, gizil değişkenlerin kendi aralarındaki ilişkilerin incelendiği model ise yapısal model olarak adlandırılmaktadır. Anket verilerinin tamamı için incelenen yapısal model ve standartlaştırılmış katsayı değerleri Şekil 8.4. ile verilmiştir.



Şekil 8.4. Anket Verileri ile Oluşturulan Modele İlişkin Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri

Şekil 8.4. ile verilen standartlaştırılmış katsayı değerlerine göre öz yeterlilik algısı ile olumlu tutum arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki, öz yeterlilik algısı ile olumsuz tutum arasında negatif yönde anlamlı bir ilişki, olumlu tutum ile olumsuz tutum arasında negatif yönde anlamlı bir ilişki olduğu söylenebilir.

Anket verilerinin tamamı için öz yeterlilik, olumlu tutum ve olumsuz tutum değişkenlerini içeren Şekil 8.4.'deki modelin incelenmesinin ardından, aynı model kız ve erkek öğrenci alt grupları için incelenmiştir. Cinsiyet grupları ayrı ayrı ele alınarak, veri grupları ile modelin uyum gösterip göstermediğine bakılmıştır. Kız öğrencilere ait anket verileri ile yapılan analizde modele ilişkin uyum indeksleri Tablo 8.4. ile, erkek öğrencilere ait anket verileri ile yapılan analizde modele ilişkin uyum indeksleri Tablo 8.5. ile verilmiştir.

Çizelge 8.4. Kız Öğrencilere Ait Anket Sonuçlarına İlişkin Uyum İndeksi Değerleri

Uyum İndeksi	**Elde Edilen Değer**	**İyi Uyum**	**Kabul Edilebilir Uyum**
RMSEA	0.066	$0 \leq RMSEA \leq 0.05$	$0.05 \leq RMSEA \leq 0.08$
RMR	0.033	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi
SRMR	0.053	$0 \leq SRMR \leq 0.05$	$0.05 \leq SRMR \leq 0.10$
NFI	0.95	$0.95 \leq NFI$	$0.90 \leq NFI$
NNFI	0.94	$0.97 \leq NNFI$	$0.95 \leq NNFI$
CFI	0.96	$0.97 \leq CFI$	$0.95 \leq CFI$
GFI	0.95	$0.95 \leq GFI$	$0.90 \leq GFI$
AGFI	0.93	$0.90 \leq AGFI$	$0.85 \leq AGFI$
PGFI	0.66	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi
ECVI	0.35	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir

Tablo 8.4. incelendiğinde RMSEA, SRMR, CFI değerlerine göre kız öğrencilere ait anket verilerinin model ile kabul edilebilir uyum gösterdiği; NFI, GFI, AGFI değerlerine göre ise kız öğrenci grubuna ait anket verileri ile modelin iyi uyum gösterdiği gözlenmiştir. Bu durumda, modelin kız öğrenci alt grubu için de geçerli olduğu yönünde bir yorum yapılabilir.

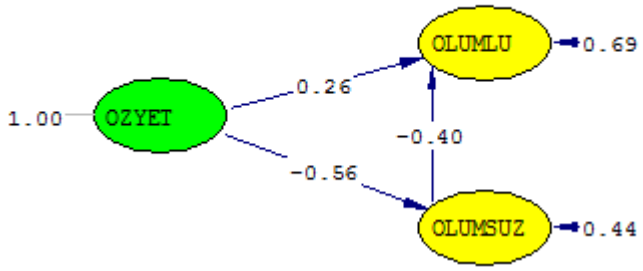
Çizelge 8.5. Erkek Öğrencilere Ait Anket Sonuçlarına İlişkin Uyum İndeksi Değerleri

Uyum İndeksi	Elde Edilen Değer	İyi Uyum	Kabul Edilebilir Uyum
RMSEA	0.066	$0 \leq RMSEA \leq 0.05$	$0.05 \leq RMSEA \leq 0.08$
RMR	0.037	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi	Küçük değerleri iyi uyumun göstergesi
SRMR	0.052	$0 \leq SRMR \leq 0.05$	$0.05 \leq SRMR \leq 0.10$
NFI	0.95	$0.95 \leq NFI$	$0.90 \leq NFI$
NNFI	0.94	$0.97 \leq NNFI$	$0.95 \leq NNFI$
CFI	0.95	$0.97 \leq CFI$	$0.95 \leq CFI$
GFI	0.95	$0.95 \leq GFI$	$0.90 \leq GFI$
AGFI	0.93	$0.90 \leq AGFI$	$0.85 \leq AGFI$
PGFI	0.66	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi	Yüksek değerleri iyi uyumun göstergesi
ECVI	0.35	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir	Alternatif model karşılaştırmalarında küçük değerleri iyi uyumu gösterir

Tablo 8.5. incelendiğinde, RMSEA, SRMR, GFI değerlerine göre erkek öğrencilere ait anket verilerinin model ile kabul edilebilir uyum gösterdiği; AGFI, NFI, CFI değerine göre ise erkek öğrencilere ait anket verilerinin model ile iyi uyum gösterdiği gözlenmektedir. Bu durumda test edilen modelin erkek öğrenci alt grubu için de geçerli olduğu yönünde yorum yapılabilir.

Tablo 8.4. ile Tablo 8.5. birlikte incelendiğinde RMSEA, NFI, NNFI, GFI, PGFI ve ECVI değerlerinin iki alt grup için de aynı elde edildiği, diğer indekslerin ise birbirine yakın değerler aldığı görülmüştür. Bu durumda modelin iki alt grup için de benzer iyilikte uyum gösterdiği sonucuna varılır.

Kız öğrencilere ait anket verileri ile elde edilen modele ilişkin yol diyagramı ve katsayılar Şekil 8.5. ile verilmiştir.



Şekil 8.5. Kız Öğrencilere Ait Anket Verileri ile Oluşturulan Model ve Katsayılar

Şekil 8.5. ile verilen yapısal modele ait regresyon denklemleri aşağıdaki gibidir:

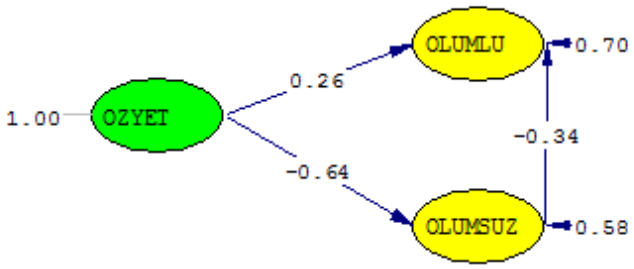
$$OLUMLU = -0.40 * OLUMSUZ + 0.26 * OZYET \quad (8.4.)$$

$$OLUMSUZ = -0.56 * OZYET \quad (8.5.)$$

$$OLUMLU = [(-0.56) * (-0.40) + 0.26)] = 0.49 * OZYET \quad (8.6.)$$

Bu eşitliklerde Şekil 8.5. ile verilen modeldeki doğrudan ve dolaylı etkiler ifade edilmiştir. Eşitlik (8.4.), OLUMSUZ ve OZYET değişkenlerinin OLUMLU değişkeni üzerindeki doğrudan etkilerini; Eşitlik (8.5.), OZYET değişkeninin OLUMSUZ üzerindeki doğrudan etkisini; Eşitlik (8.6.) ise OZYET değişkeninin OLUMLU değişkeni üzerindeki toplam etkisini yani doğrudan ve dolaylı etkisinin toplamını göstermektedir. LISREL ile yapılan yapısal eşitlik modellemesi, bu regresyon eşitliklerinden yararlanılarak OZYET, OLUMLU ve OLUMSUZ değişkenleri arasındaki ilişkilerin miktarları hakkında yorum yapmayı mümkün

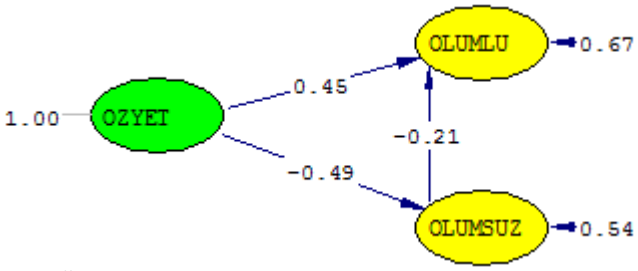
kılmaktadır. Buna göre kız öğrencilerin anket verileri ile yapılan modellemede olumsuz tutumun, olumlu tutum üzerinde öz yeterlilik algısından daha fazla etkisi olduğu yorumu yapılabilir.



Şekil 8.6. Kız Öğrencilere ait Anket Verileri ile Oluşturulan Model ve Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri

Kız öğrencilere ait anket verileri ile oluşturulan modelin standartlaştırılmış katsayı değerleri Şekil 8.6. ile verilmiştir. Buna göre öz yeterlilik algısı ile olumlu tutum arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki, öz yeterlilik algısı ile olumsuz tutum arasında negatif yönde anlamlı bir ilişki, olumlu tutum ile olumsuz tutum arasında ise negatif yönde anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir.

Erkek öğrencilere ait anket verileri ile elde edilen modele ilişkin yol diyagramı ve katsayılar Şekil 8.7. ile verilmiştir.



Şekil 8.7. Erkek Öğrencilere Ait Anket Verileri ile Oluşturulan Model ve Katsayılar

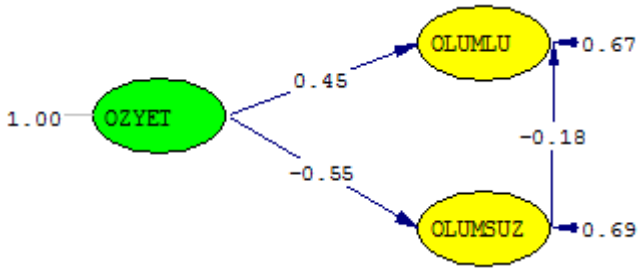
Şekil 8.7. ile verilen yapısal modele ilişkin regresyon denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$OLUMLU = -0.21 * OLUMSUZ + 0.45 * OZYET \quad (8.7.)$$

$$OLUMSUZ = -0.49 * OZYET \quad (8.8.)$$

$$OLUMLU = [(-0.49) * (-0.21) + 0.45)] = 0.55 * OZYET \quad (8.9.)$$

Bu eşitliklerde, Şekil 8.7. ile verilen modeldeki doğrudan ve dolaylı etkiler ifade edilmiştir. Eşitlik (8.7.), OLUMSUZ ve OZYET değişkenlerinin OLUMLU değişkeni üzerindeki doğrudan etkilerini; Eşitlik (8.8.), OZYET değişkeninin OLUMSUZ üzerindeki doğrudan etkisini; Eşitlik (8.9.) ise OZYET değişkeninin OLUMLU değişkeni üzerindeki toplam etkisini yani doğrudan ve dolaylı etkisinin toplamını göstermektedir. LISREL programı ile yapısal eşitlik modellemesi, bu regresyon eşitliklerinden yararlanılarak OZYET, OLUMLU ve OLUMSUZ değişkenleri arasındaki ilişkilerin miktarları hakkında yorum yapmayı da mümkün kılmaktadır. Buna göre erkek öğrencilerin anket verileri ile yapılan modellemede öz yeterlilik algısının, olumlu tutum üzerinde olumsuz tutumdan daha fazla etkisi olduğu yorumu yapılabilir.



Şekil 8.8. Erkek Öğrencilere ait Anket Verileri ile Oluşturulan Model ve Standartlaştırılmış Katsayı Değerleri

Erkek öğrencilere ait anket verileri ile oluşturulan modelin standartlaştırılmış katsayı değerleri Şekil 8.8. ile verilmiştir. Buna göre öz yeterlilik algısı ile olumlu tutum arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki, öz yeterlilik algısı ile olumsuz tutum arasında negatif yönde anlamlı bir ilişki, olumlu tutum ile olumsuz tutum arasında ise negatif yönde anlamlı bir ilişki olduğu görülmektedir.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada TIMSS 2011 Türkiye değerlendirmesinin matematik dersine ilişkin 4. sınıf düzeyi öğrenci anketi verilerinin, uyum iyiliği indekslerinden yararlanılarak, belirlenen teorik bir model ile uyumu incelenmiştir. LISREL programı ile yapılan analiz sonucunda, belirlenen modelin uyum iyiliği kriterlerine göre anket verileri ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Modelin, anket verileri ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılmasının ardından aynı modelin, anket verilerinin birer alt grubu olan kız ve erkek öğrenci grupları için uyum iyiliğine bakılmıştır. Her bir alt grup için belirlenen model uygulanmış ve uyum indeksleri elde edilmiştir. Elde edilen uyum indeksleri incelendiğinde modelin her iki alt grup için de geçerli olduğu ve uyum indekslerinin her iki alt grup için de yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Bunun yanında kız öğrencilere ait verilerle yapılan çalışmada olumsuz tutumun, olumlu tutum değişkeni üzerinde daha yüksek etkisi olduğu sonucu çıkarılırken, erkek öğrencilere ait verilerle yapılan çalışmada öz yeterlilik algısının olumlu tutum üzerinde daha yüksek etkisi olduğu sonucuna varılmıştır.

LISREL programında, bu çalışmada inceleyemediğimiz farklı tahmin yöntemleri incelenerek bu yöntemler ile de benzer uygulamalar yapmak mümkündür. Farklı teorik modeller belirlenerek, aynı örneklem ile elde edilecek uyum iyiliği indeksleri incelenebilir. Ayrıca YEM uygulamalarında kullanılan EQS, AMOS gibi farklı programlar ile de çeşitli analizler yapmak mümkündür.

KAYNAKLAR

ANDERSON, J.C., GERBİNG D. W. (1988), The effect of sampling error on convergence, improper solutions, and goodness-of-fit indices for maximum likelihood confirmatory factor analysis. Psychometrika, 49(2), 155-173.

BAYRAM, N. (2010), "Yapısal Eşitlik Modellemesine Giriş AMOS Uygulamaları", Ezgi Kitabevi, Bursa. 174s.

BENTLER, P. M. (1995), "EQS Structural Equations Program Manual, Multivariate Software Encino, CA.418s.

BENTLER, P. M., BONETT, D. G. (1980), "Significance tests and and goodness of fit in the analysis of covariance structures", Psychological Bulletin, 88, 588-606.

BOLLEN K. A., LONG J. S. (1993), "Testing Structural Equation Models", SAGE Publications. 320s.

BOLLEN, K. A. (1989), "Structural Equations with Latent Variables. A Wiley–Interscience Publication", USA. 514s.

BROWNE, M. W., & CUDECK, R. (1993). Alternative ways of assessing model fit. In K. A. Bollen & J. S. Long (Eds.), Testing Structural Equation Models. Newbury Park, CA: Sage.

ÇELIK, H. E. , SARAÇLI S. , YILMAZ, V. (2011). Yapısal Eşitlik Modellemesinde Çok Değişkenli Normallik Varsayımı Altında Bir Uygulama. E-Journal of New World Sciences Academy Physical Sciences, 6(4), 112-123.

HOYLE, R. (1995), "The Structural Equation Modeling Approach: Basic Concepts and Fundamental Issues , 1. Structural Equation Modeling",(Editör: Hoyle, R.) Sage Publications, USA. 289.

HU, L. , BENTLER, P. (1995), "Evaluating Model Fit, 5. Structural Equation Modeling", (Editör: Hoyle, R.) Sage Publications, USA. 289.

IEA TIMSS and PIRLS INTERNATIONAL STUDY CENTER, "TIMSS 2011 International Database", http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-database.html (Erişim tarihi: 09 Ocak 2013).

JÖRESKOG, K. G., SÖRBOM, D. (1981), “LISREL V: Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood and least squares methods (Research Report 81-8), Uppsala, Sweden: University of Uppsala, Department of Statistics.

KAPLAN, D. (2000), “ Structural Equation Modeling Foundations and Extensions”, Sage Publications, London. 215s.

KLINE, R. B. (2011), “Principles and Practice of Structural Equation Modeling Third Edition”, The Guilford Press, London: 427.

MARSH, H. W., BALLA, J. R. (1994). Goodness-of-fit indices in confirmatory factor analysis: The effect of sample size and model complexity, Quality and Quantity, 28, 185-217.

MULAIK, S. A. , JAMES, L. R. , ALSTINE, J. V. , BENNETT, N. , LIND S., STILWELL, C. D., (1989). Evaluating of Goodness-of-Fit Indices for Structural Equation Models. Psychological Bulletin, 105(3), 430-445.

RAYKOV, T., MARCOULIDES G. A., (2006), “A First Course in Structural Equation Modeling”, Lawrence Erlbaum Associates Inc., Mahwah, NJ:238s

SCHERMELLEH-ENGEL, K., MOOSBRUGGER, H., MÜLLER, H., (2003).Evaluating the fit of structural equation models: Test of significance and descriptive goodness-of-fit measures, Methods of Psychological Research-Online, 8(2), 23-74.

SCHUMACKER, R.E., LOMAX, R.G., (2004), “A Beginners Guide to Structural Equation Modeling”, Second Edition, Lawrence Erlbaum Associates Inc., London: 550s.

SCLOVE, S. L., (1987). Application of Model Selection Criteria to Some Problems in Multivariate Analysis. Psychometrika, 52(3), 333-343.

STEIGER, J. H., (1990). Structural Model Evaluation and Modification: An Interval Estimation Approach. Multivariate Behavioral Research 25(2), 173-180.

ŞEHRIBANOĞLU, S. (2005) , “Yapısal eşitlik modelleri ve bir uygulaması”, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Yüksek lisans tezi, Van.

ŞIMŞEK, Ö. F. (2007), “Yapısal Eşitlik Modellemesine Giriş (Temel LISREL Uygulamaları”, Ekinoks, Ankara: 212s.

TABACHNICK, B. G. , FIDELL L. S. (2007), “Using Multivariate Statistics” (Fourth Edition), Allyn and Bacon, Boston, 966.

TEZCAN, C. (2008), “Yapısal eşitlik modelleri”, Hacettepe Üniversitesi Yüksek lisans tezi, Ankara.

TIMM, H. N. (2002), “Applied Multivariate analysis”, Springer-Verlag New York, 720s.

UZUN, N. B. , Gelbal S. , Öğretmen T. (2010), “TIMSS-R Fen Başarısı ve Duyuşsal Özellikler Arasındaki İlişkinin Modellenmesi ve Modelin Cinsiyetler Bakımından Karşılaştırılması”, Kastamonu Eğitim Dergisi, 18(2): 531-544.

WANG J. , WANG X. (2012), “Structural Equation Modeling Applications Using Mplus”, Wiley, 478s.

YILMAZ, V. , ÇELIK, H. E. (2009), “LISREL ile Yapısal Eşitlik Modellemesi-I Temel Kavramlar, Uygulamalar, Programlama”,Pegem Akademi, Ankara: 186s.

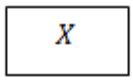
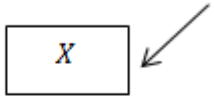
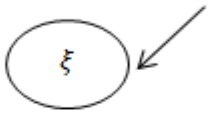
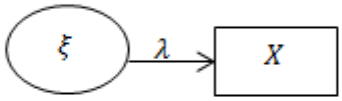
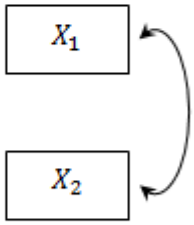
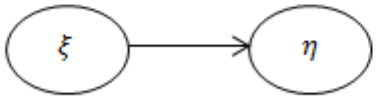
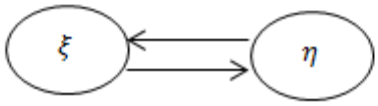
YÜCEL, C., KARADAĞ E., TURAN S. (2013), “ TIMSS 2011 Ulusal Ön Değerlendirme Raporu”, Eğitimde Politika Analizi Raporlar Serisi I, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

23.03.1988 yılında Adana'da doğmuştur. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamlamıştır. 2006 yılında Seyhan Ç.E.A.Ş. Anadolu Lisesi'nden mezun olmuş, aynı yıl lisans öğrenimine başladığı Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun olmuştur. 2011 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 2013 yılının Aralık ayında ÖYP (Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı) kapsamında Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atanmıştır. Halen burada görev yapmaktadır.

EKLER

EK 1. Yol analizinde kullanılan temel semboller

Sembol	Açıklama
	Gösterge değişken
	Gizil değişken
	Gözlenen değişkene ait hata
	Gizil değişkene ait hata
	Gizil değişkenin gösterge değişken üzerindeki etkisi
	İki gösterge değişken arasındaki korelasyon
	İki gizil değişken arasındaki tek yönlü nedensel ilişki
	İki gizil değişken arasındaki karşılıklı nedensel ilişki